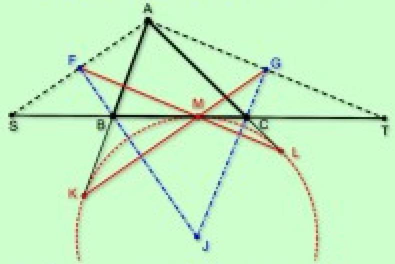
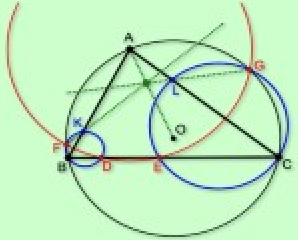
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9



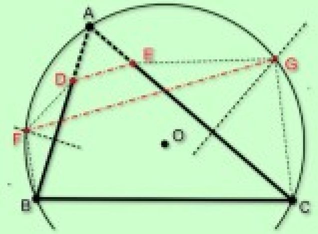
Δύναμη Σημείου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9



Θεώρημα Πεταλούδας

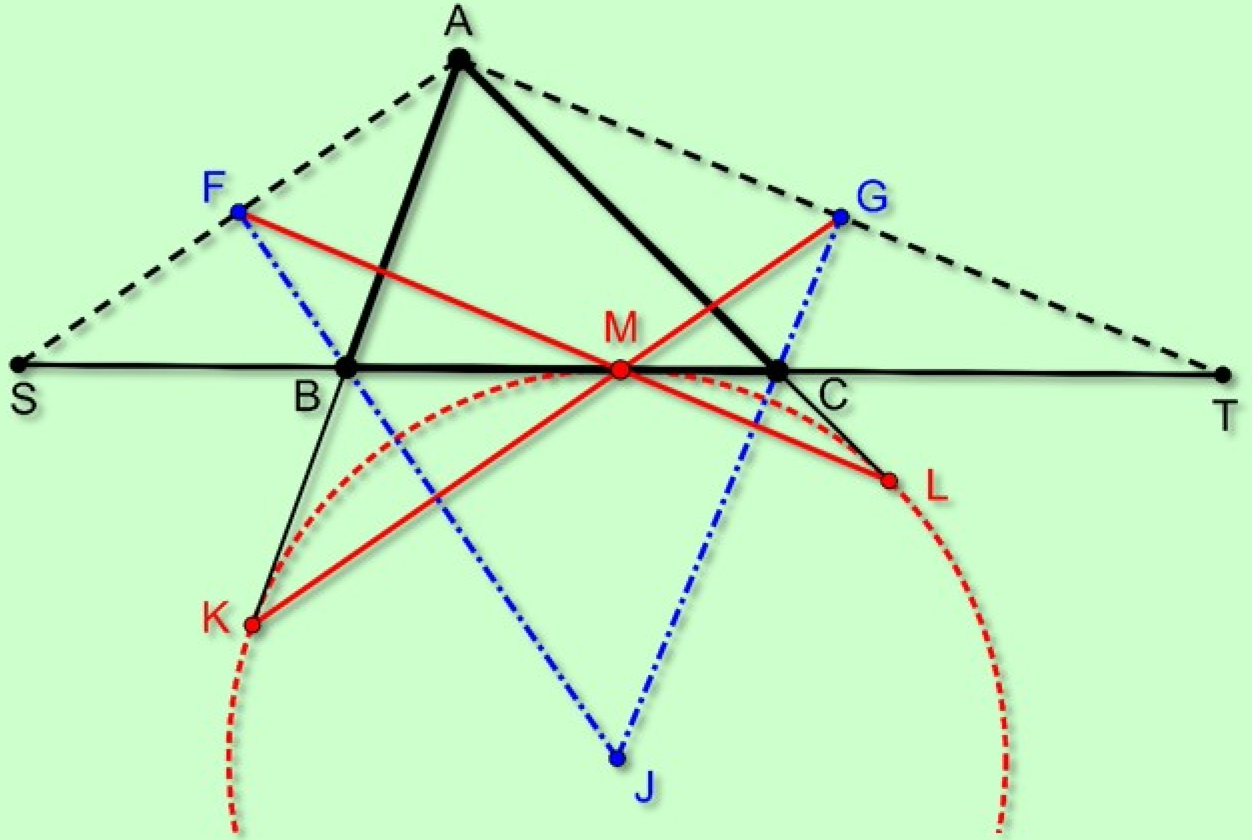
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9



Θεώρημα Pascal

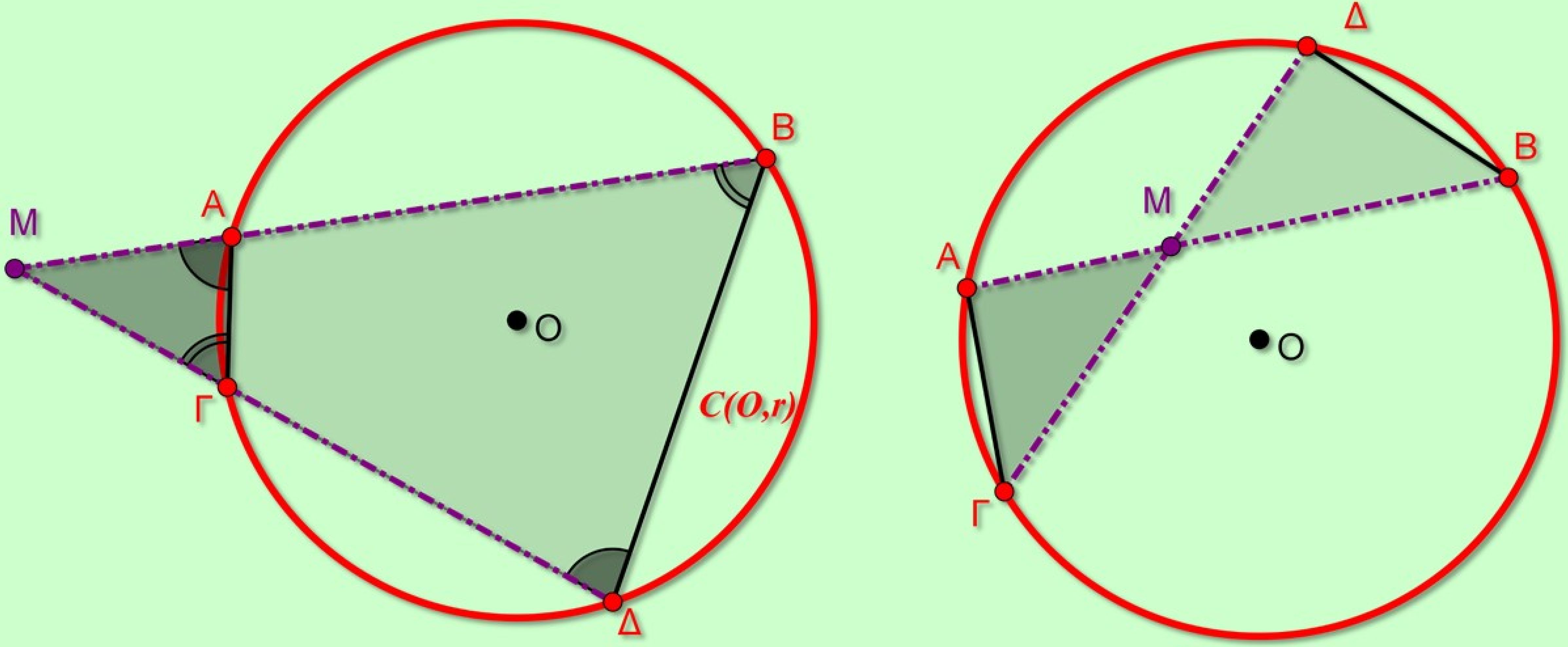
Βαγγέλης Ψύχας

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9



Δύναμη Σημείου

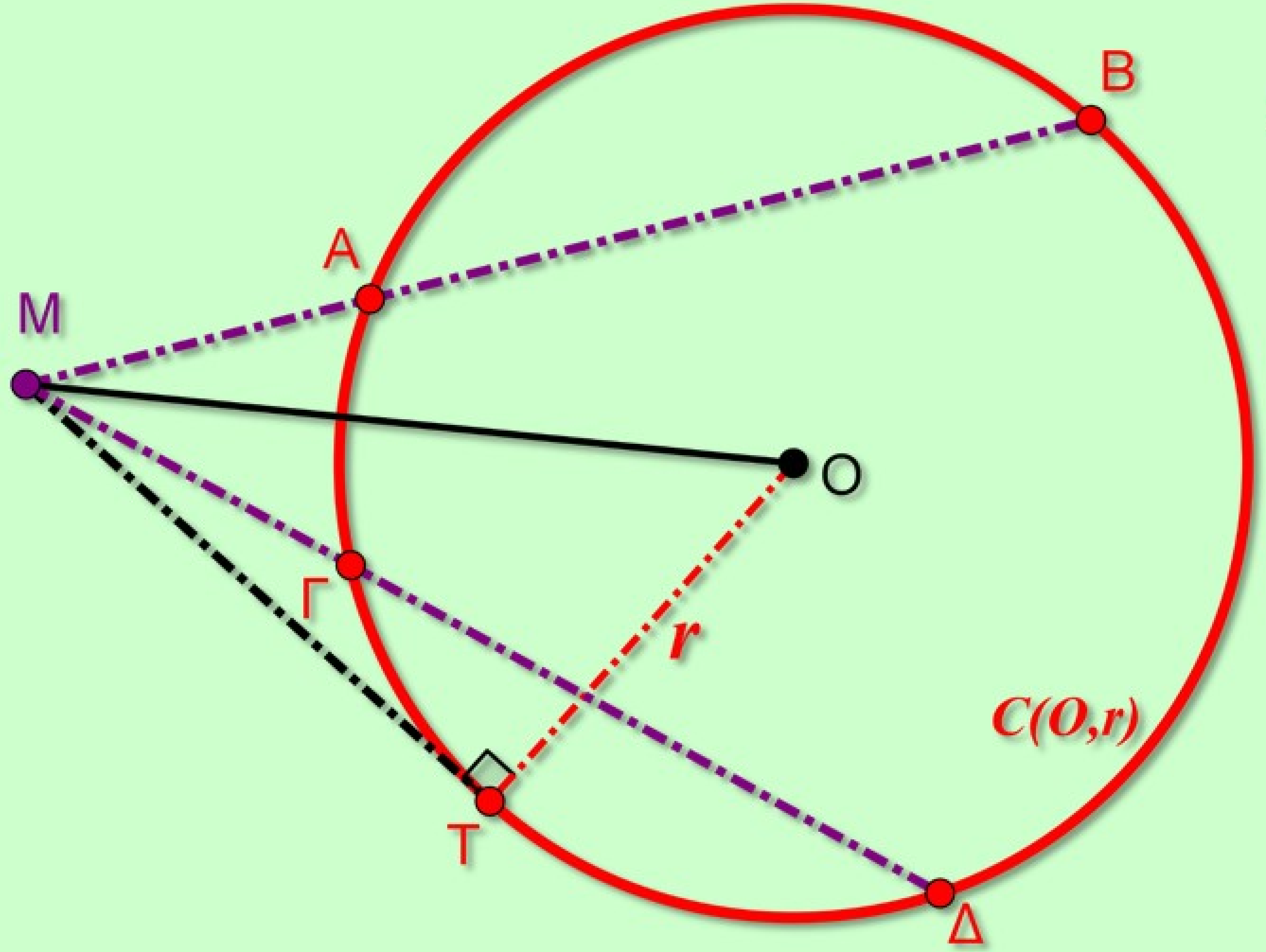
Τέμνουσες Κύκλου Ι

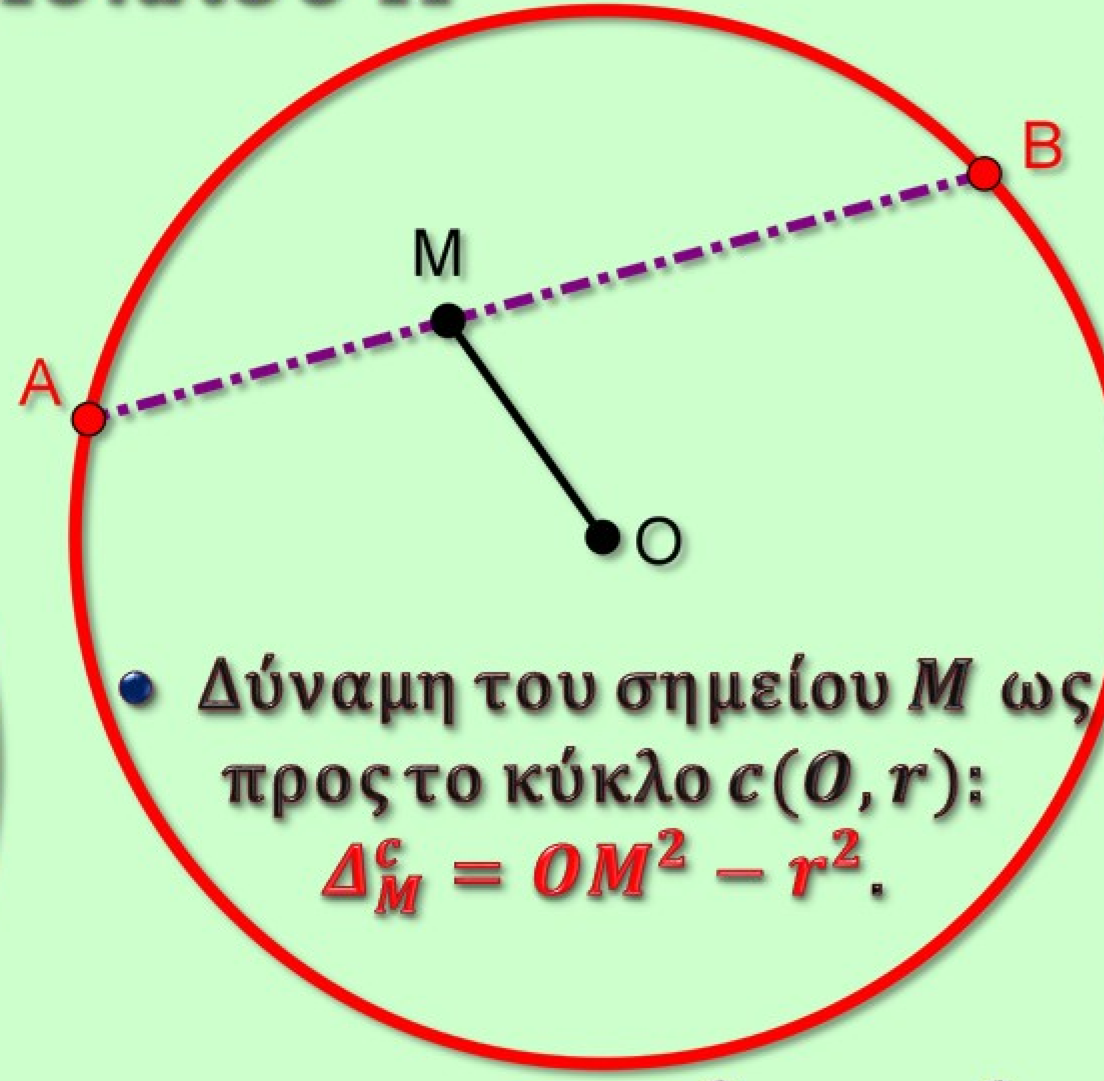


✦ $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$

Τέμνουσες Κύκλου ΙΙ

- $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta =$
  $= OM^2 - r^2 = MT^2$

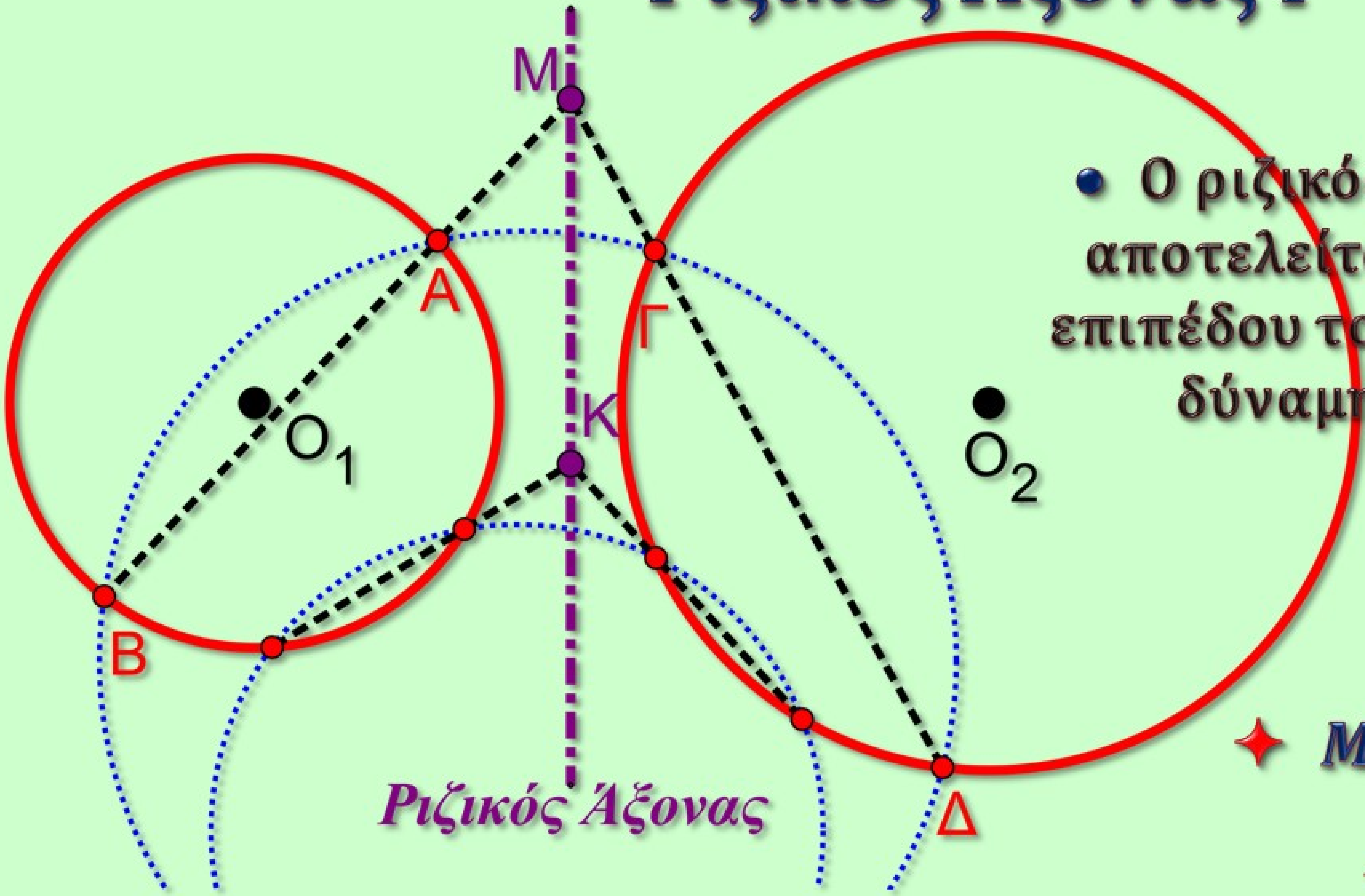




- **Δύναμη του σημείου M ως προς το κύκλο $c(O,r)$:** $\Delta_M^c = OM^2 - r^2$.

- $MA \cdot MB = r^2 - OM^2$

Ριζικός Άξονας Ι

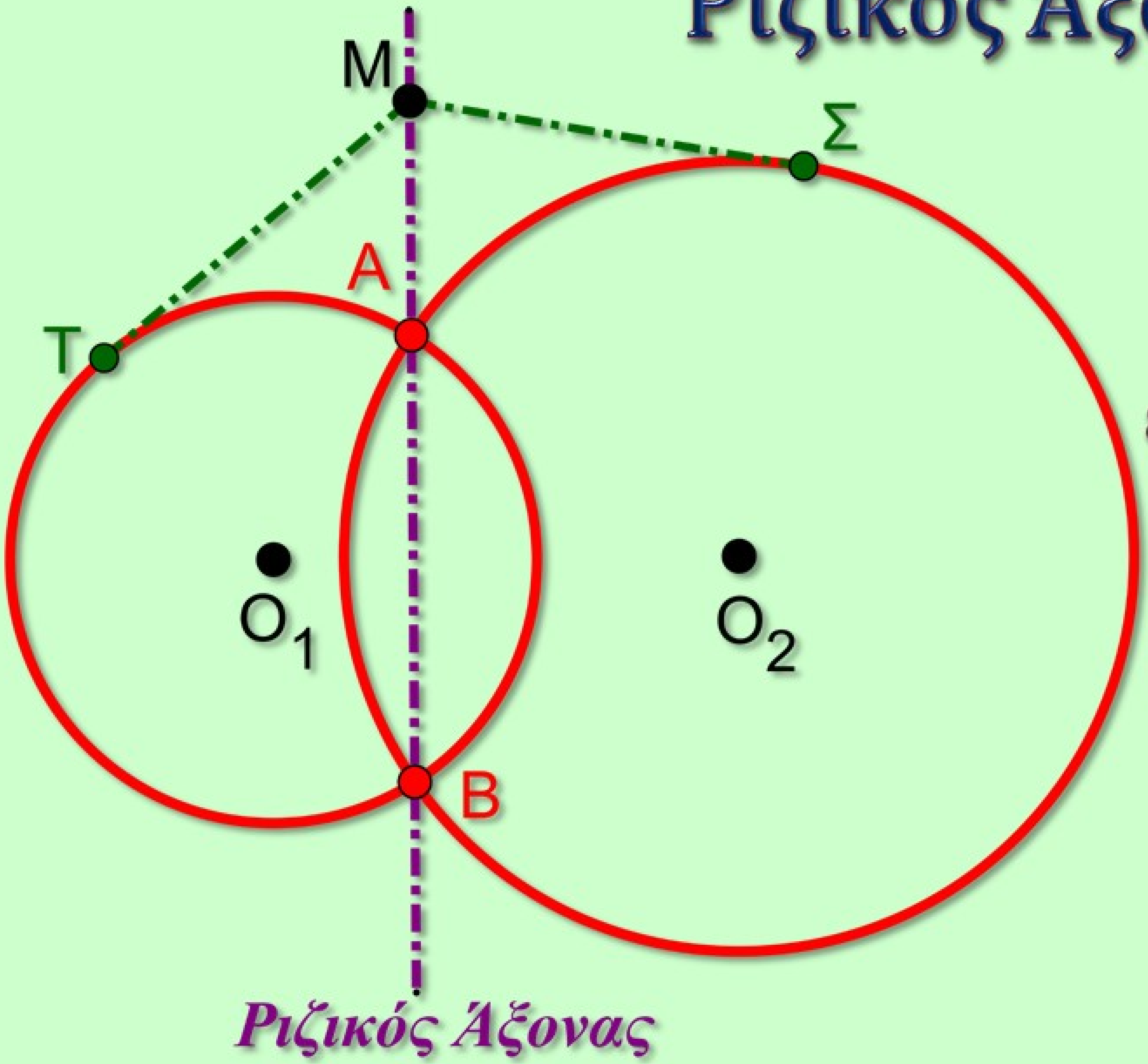


- Ο ριζικός άξονας δύο κύκλων, αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου τους που έχουν την ίδια δύναμη ως προς αυτούς.

✦ $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$

✦ $MK \perp O_1 O_2$

Ριζικός Άξονας II



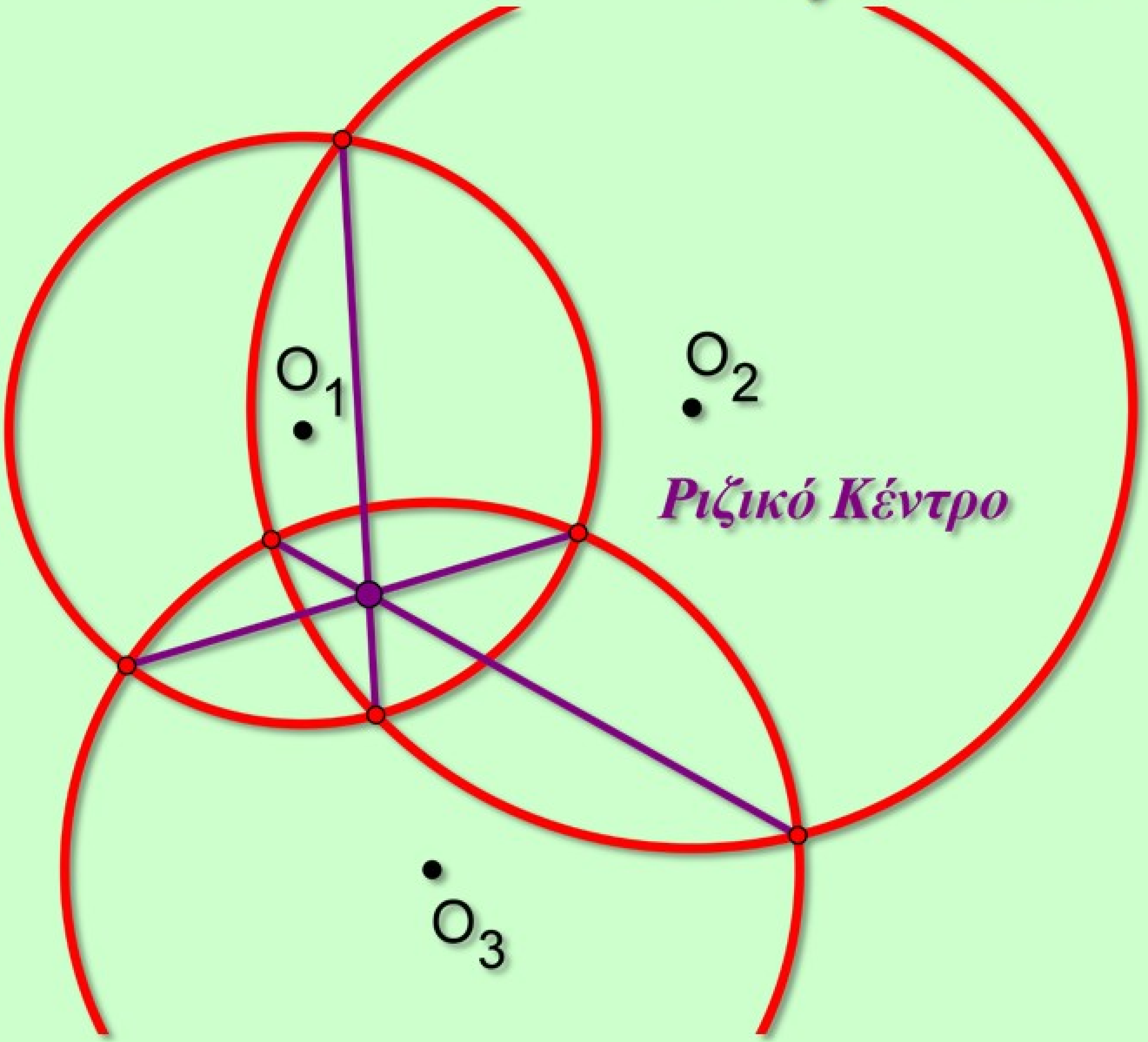
- Ο ριζικός άξονας δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η ευθεία που ορίζουν τα σημεία τομής τους.

✦ $MA \cdot MB = MT^2 = M\Sigma^2$

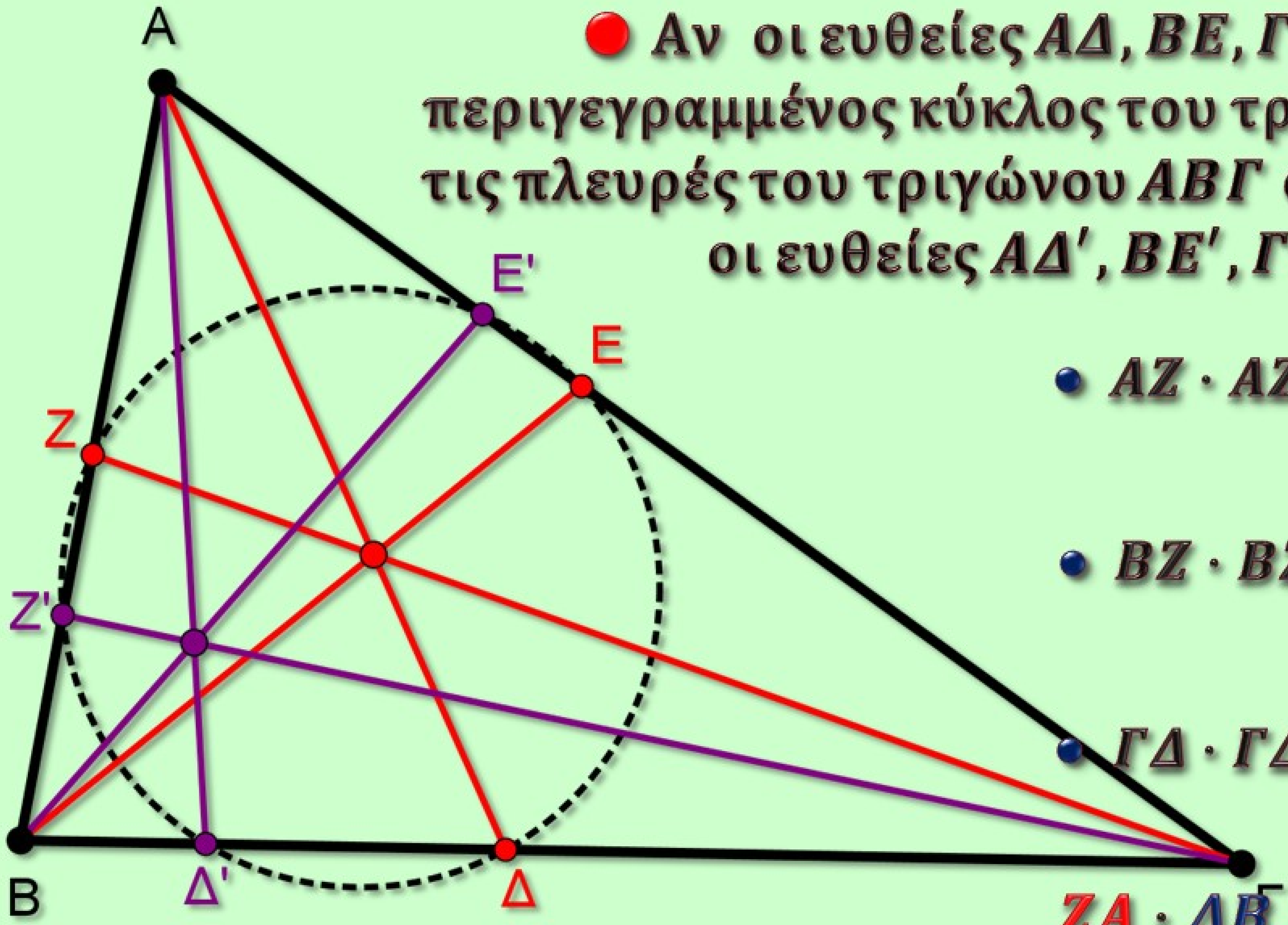
Ριζικό Κέντρο Ι

- Τρεις κύκλοι (ανά δύο) δημιουργούν τρεις ριζικούς άξονες που συντρέχουν στο ριζικό κέντρο.

Ριζικό Κέντρο ΙΙ

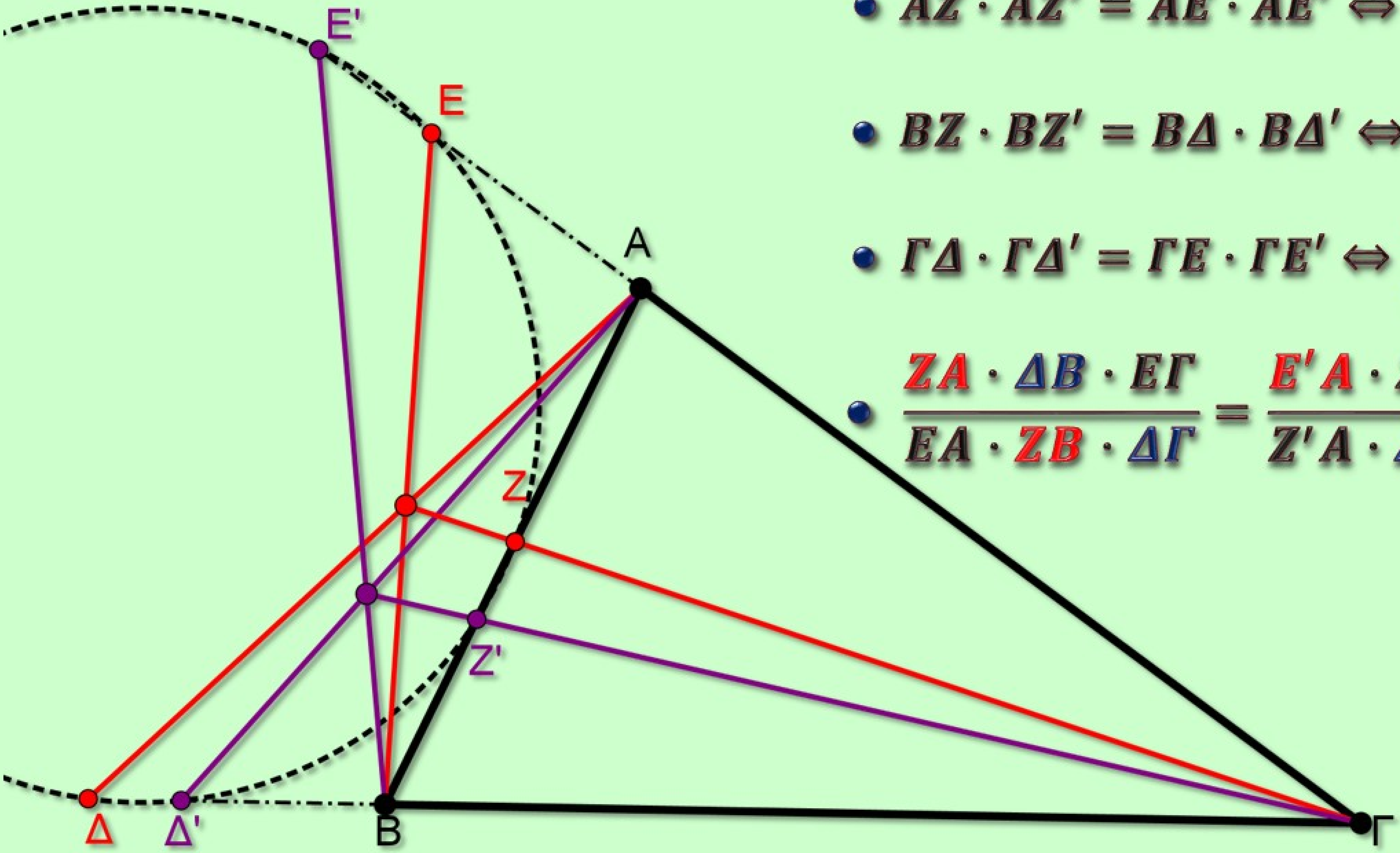


- Τρεις κύκλοι (τεμνόμενοι ανά δύο) δημιουργούν τρεις κοινές χορδές που συντρέχουν (στο ριζικό κέντρο).



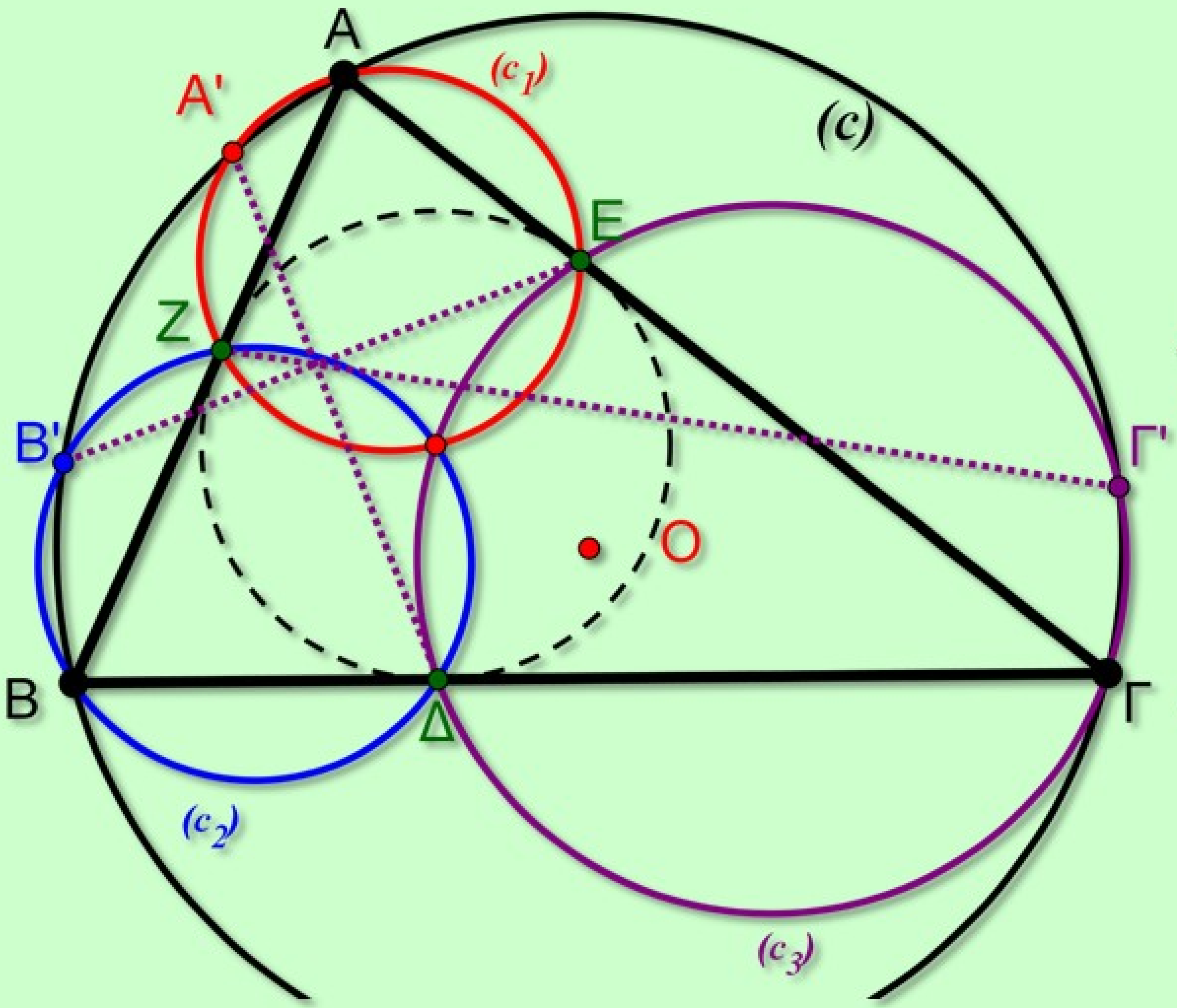
- Αν οι ευθείες $ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ$ συντρέχουν και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΔΕΖ$ επανατέμνει τις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$ στα σημεία $Δ', Ε', Ζ'$, τότε οι ευθείες $ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ'$ συντρέχουν.

- $ΑΖ \cdot ΑΖ' = ΑΕ \cdot ΑΕ' \Leftrightarrow \frac{ΖΑ}{ΕΑ} = \frac{Ε'Α}{Ζ'Α}$
- $ΒΖ \cdot ΒΖ' = ΒΔ \cdot ΒΔ' \Leftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΖΒ} = \frac{Ζ'Β}{Δ'Β}$
- $ΓΔ \cdot ΓΔ' = ΓΕ \cdot ΓΕ' \Leftrightarrow \frac{ΕΓ}{ΔΓ} = \frac{Δ'Γ}{Ε'Γ}$
- $\frac{ΖΑ \cdot ΔΒ \cdot ΕΓ}{ΕΑ \cdot ΖΒ \cdot ΔΓ} = \frac{Ε'Α \cdot Ζ'Β \cdot Δ'Γ}{Ζ'Α \cdot Δ'Β \cdot Ε'Γ} = 1$



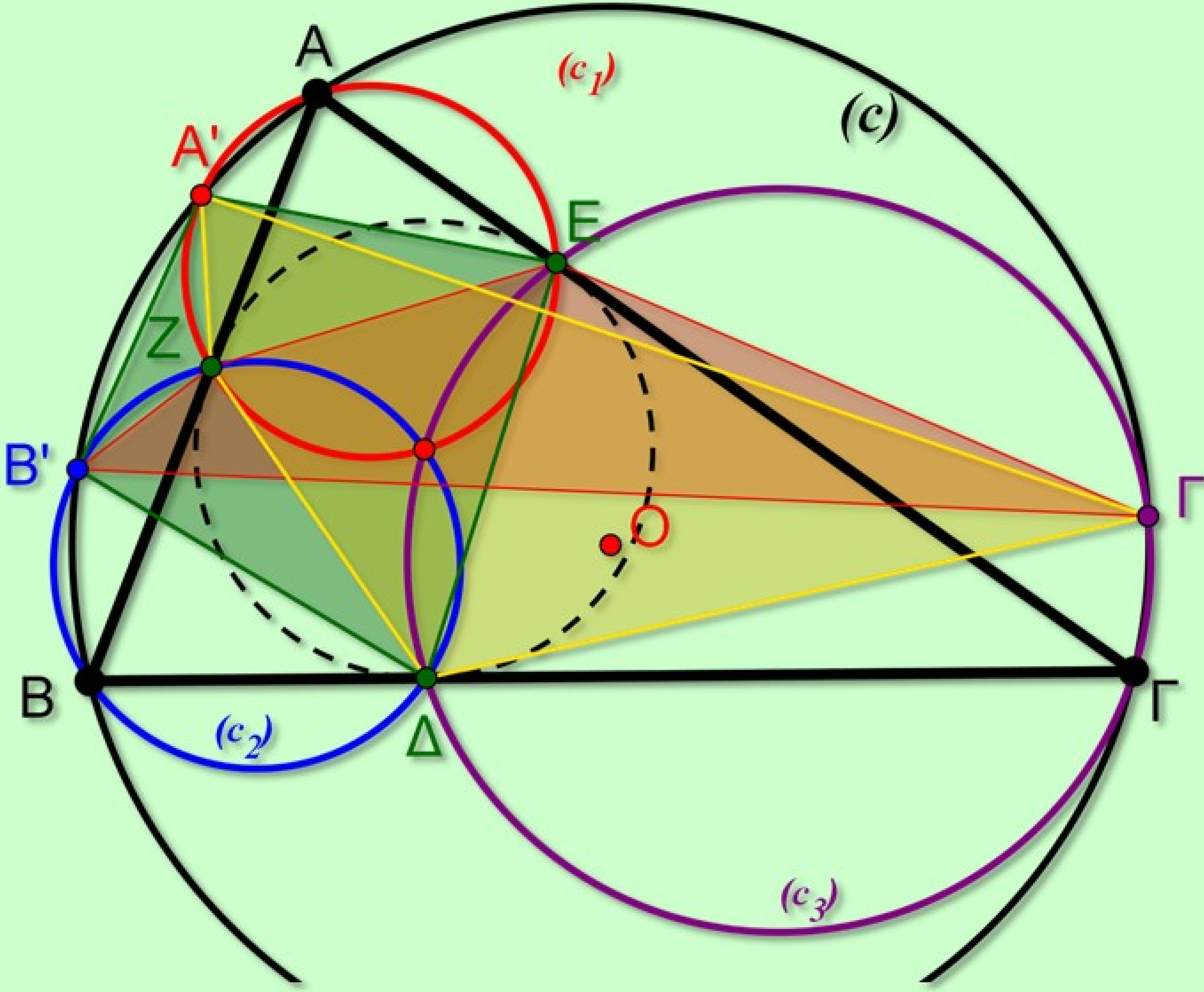
- $AZ \cdot AZ' = AE \cdot AE' \Leftrightarrow \dfrac{ZA}{EA} = \dfrac{E'A}{Z'A}$
- $BZ \cdot BZ' = B\Delta \cdot B\Delta' \Leftrightarrow \dfrac{\Delta B}{ZB} = \dfrac{Z'B}{\Delta'B}$
- $\Gamma\Delta \cdot \Gamma\Delta' = \Gamma E \cdot \Gamma E' \Leftrightarrow \dfrac{E\Gamma}{\Delta\Gamma} = \dfrac{\Delta'\Gamma}{E'\Gamma}$
- $\dfrac{ZA \cdot \Delta B \cdot E\Gamma}{EA \cdot ZB \cdot \Delta\Gamma} = \dfrac{E'A \cdot Z'B \cdot \Delta'\Gamma}{Z'A \cdot \Delta'B \cdot E'\Gamma} = 1$

Προκριματικός 2017



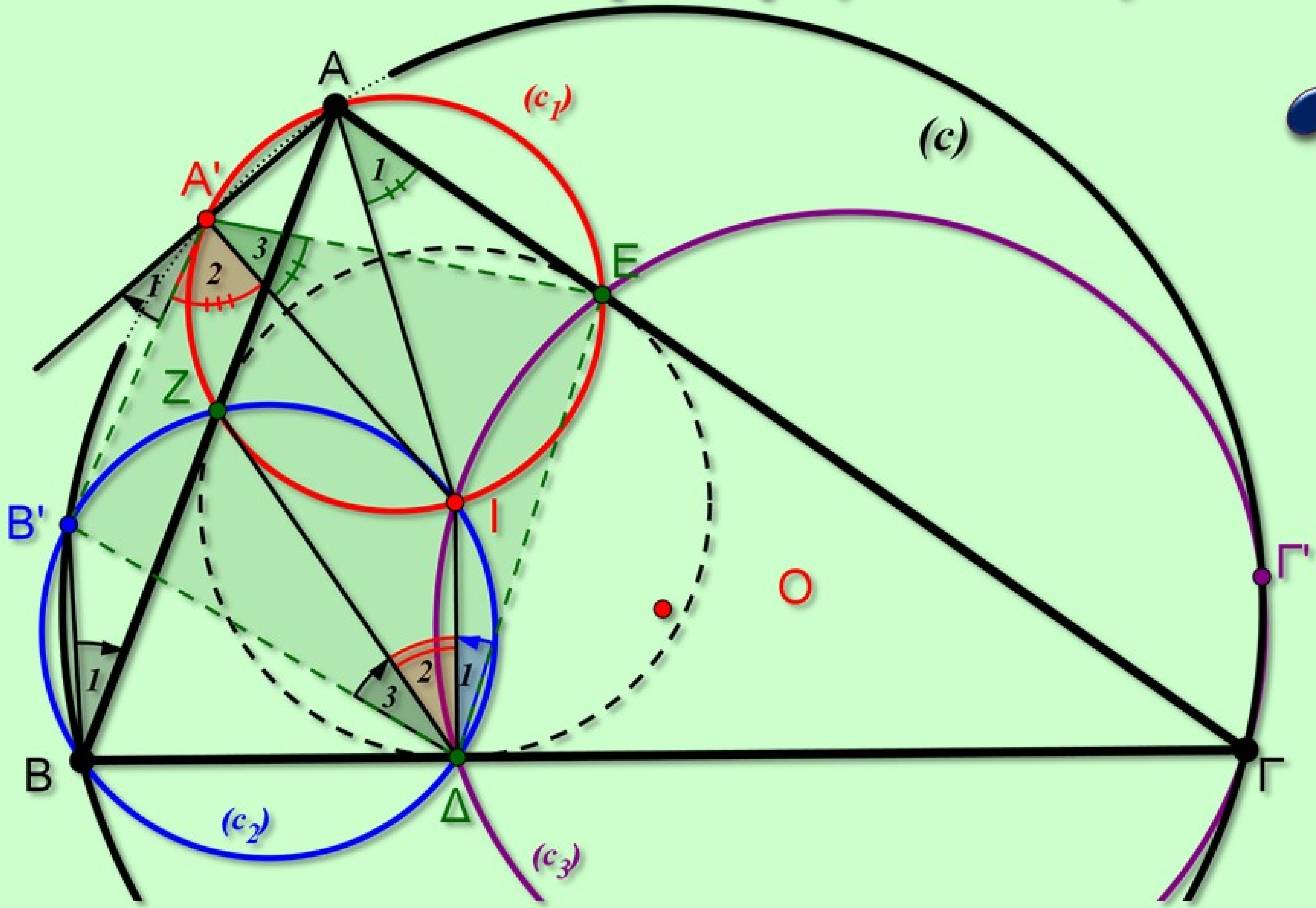
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$) και τα σημεία επαφής $Δ, Ε, Ζ$ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με τις πλευρές $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$ αντίστοιχα. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΕΖ$, $ΒΔΖ$, $ΓΔΕ$ (έστω (c_1), (c_2), (c_3)) τέμνουν τον κύκλο (c) στα σημεία $Α'$, $Β'$, $Γ'$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $ΔΑ'$, $ΕΒ'$ και $ΖΓ'$ συντρέχουν.

Προκριματικός 2017



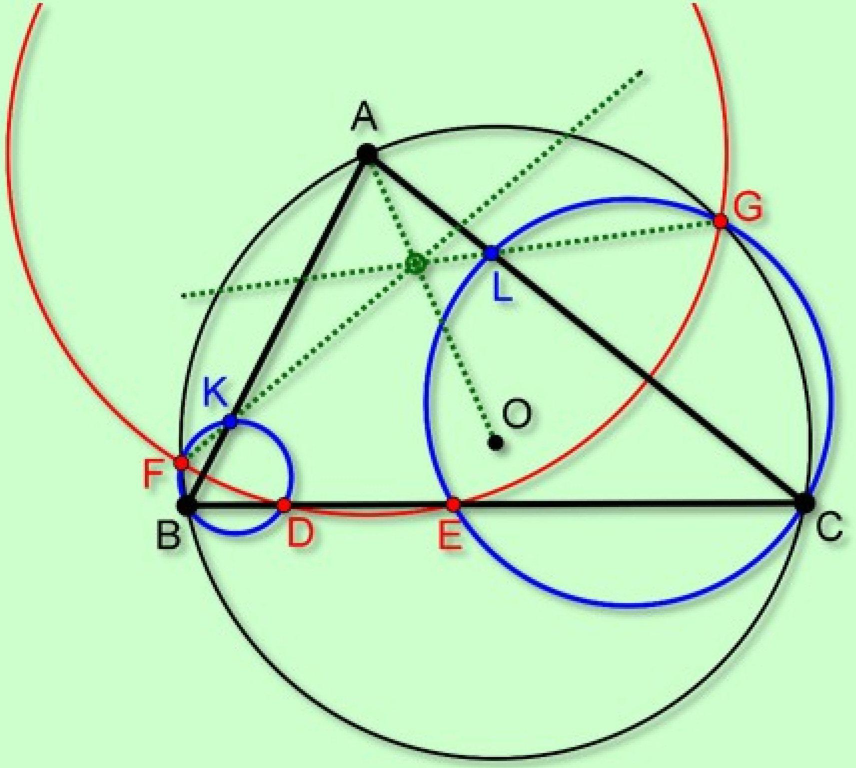
- Θα αποδείξουμε ότι τα τετράπλευρα $\Delta E A' B'$, $\Delta Z A' \Gamma'$ και $E Z B' \Gamma'$ είναι εγγράψιμα … Οπότε οι $\Delta A'$,$E B'$ και $Z \Gamma'$ θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο των τριών περιγεγραμμένων κύκλων.

Προκριματικός 2017



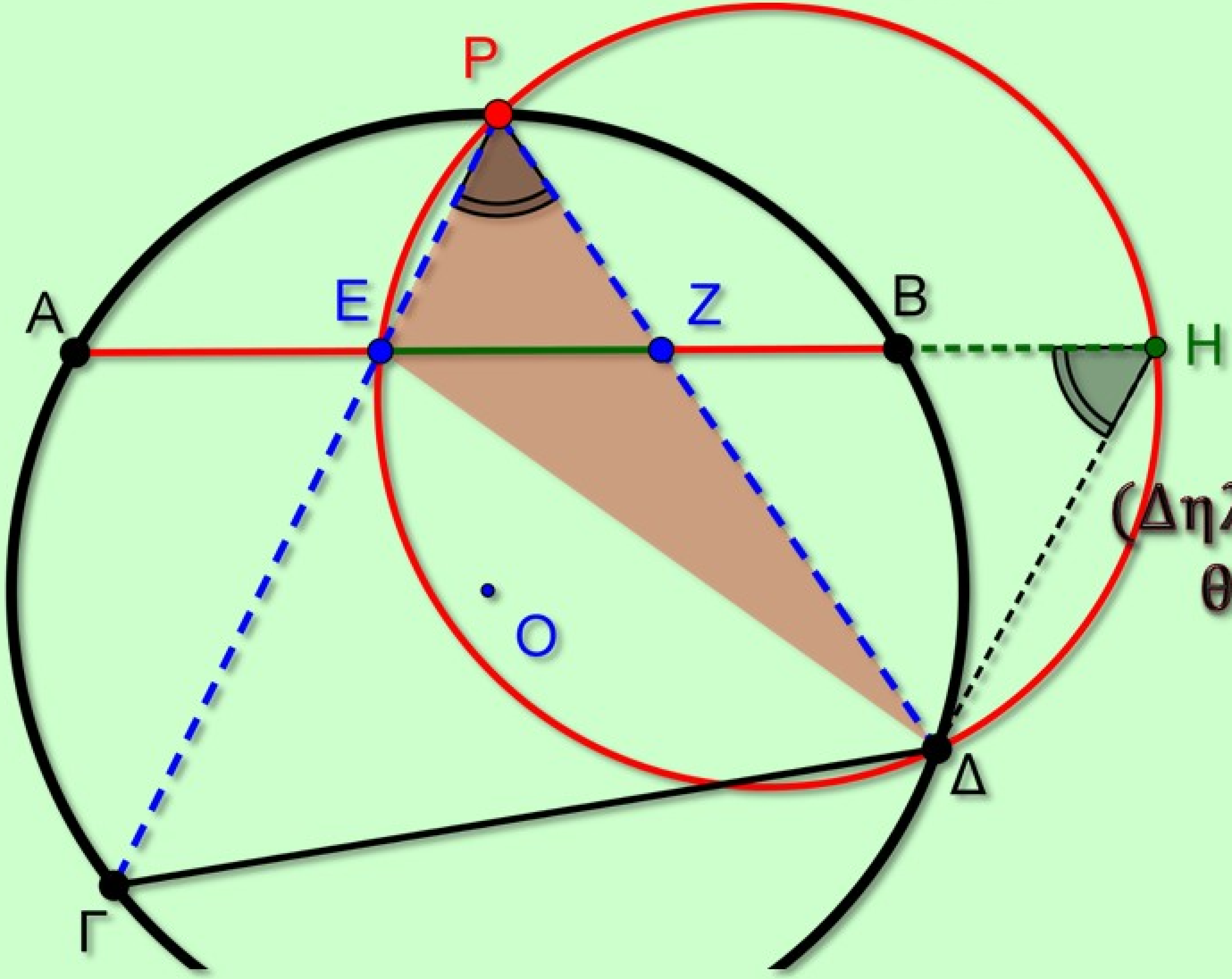
- $\widehat{\Delta}_1 = I\widehat{\Gamma}E = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$
- $\widehat{\Delta}_2 = I\widehat{B}Z = \frac{\widehat{B}}{2}$
- $\widehat{\Delta}_3 = \widehat{B}_1 = \widehat{A}'_1$
- $\widehat{A}'_3 = \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}$
- $\widehat{A}'_2 = 90° - \widehat{A}'_1$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9



Θεώρημα Πεταλούδας

Λήμμα Haruki

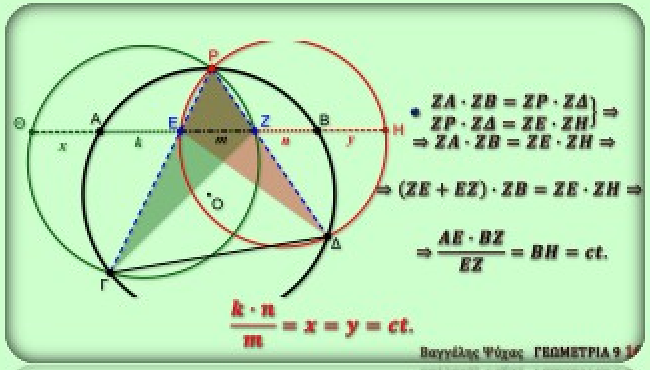


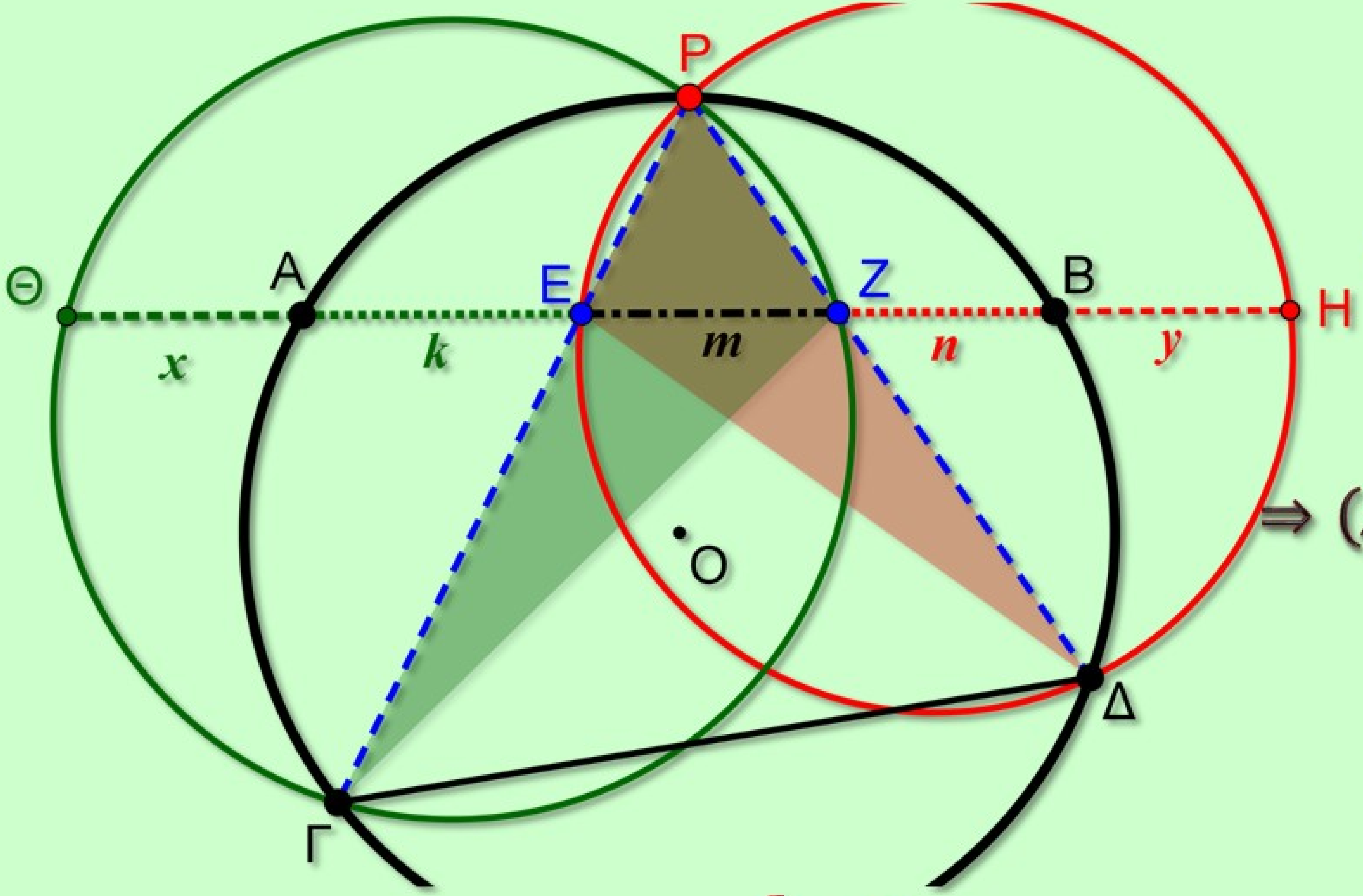
✦ Αν AB, $\Gamma\Delta$ τυχούσες μη τεμνόμενες χορδές, τότε:

$$\frac{AE \cdot BZ}{EZ} = ct.$$

- $\widehat{P} = \widehat{H} \Rightarrow H\ ct$

(Δηλαδή το H βρίσκεται σε σταθερή θέση, επάνω στην ευθεία AB).





- $$\left.\begin{aligned} ZA \cdot ZB &= ZP \cdot Z\Delta \\ ZP \cdot Z\Delta &= ZE \cdot ZH \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

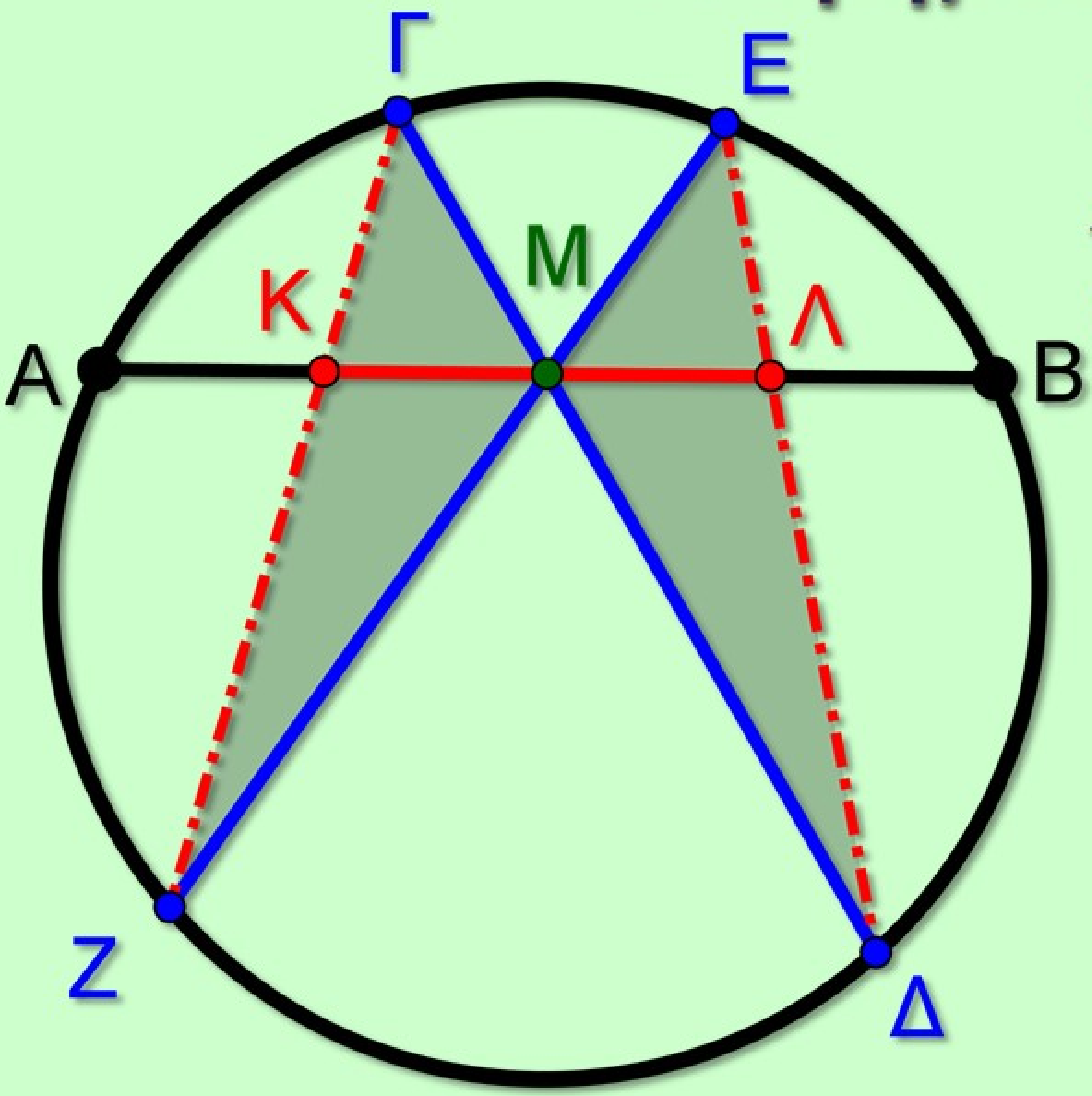
$$\Rightarrow ZA \cdot ZB = ZE \cdot ZH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ZE + EZ) \cdot ZB = ZE \cdot ZH \Rightarrow$$

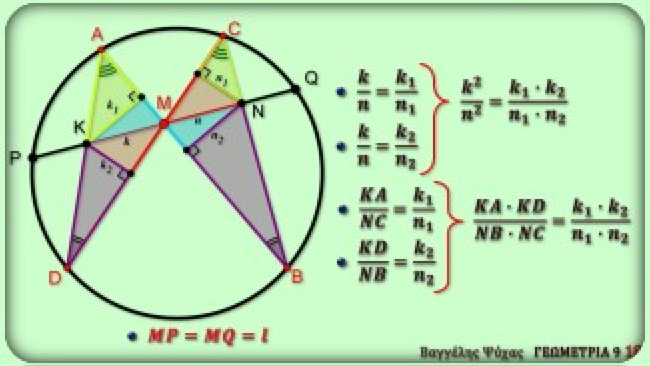
$$\Rightarrow \frac{AE \cdot BZ}{EZ} = BH = ct.$$

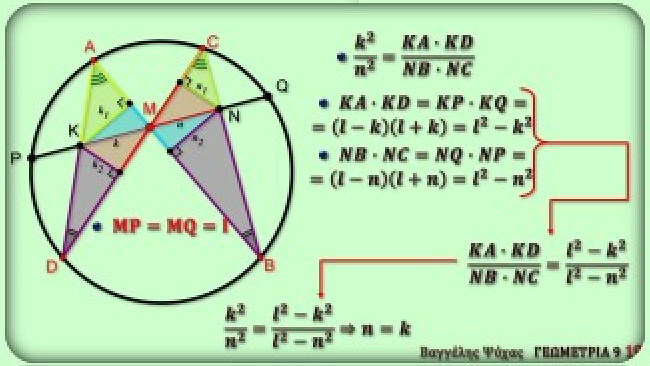
$$\frac{k \cdot n}{m} = x = y = ct.$$

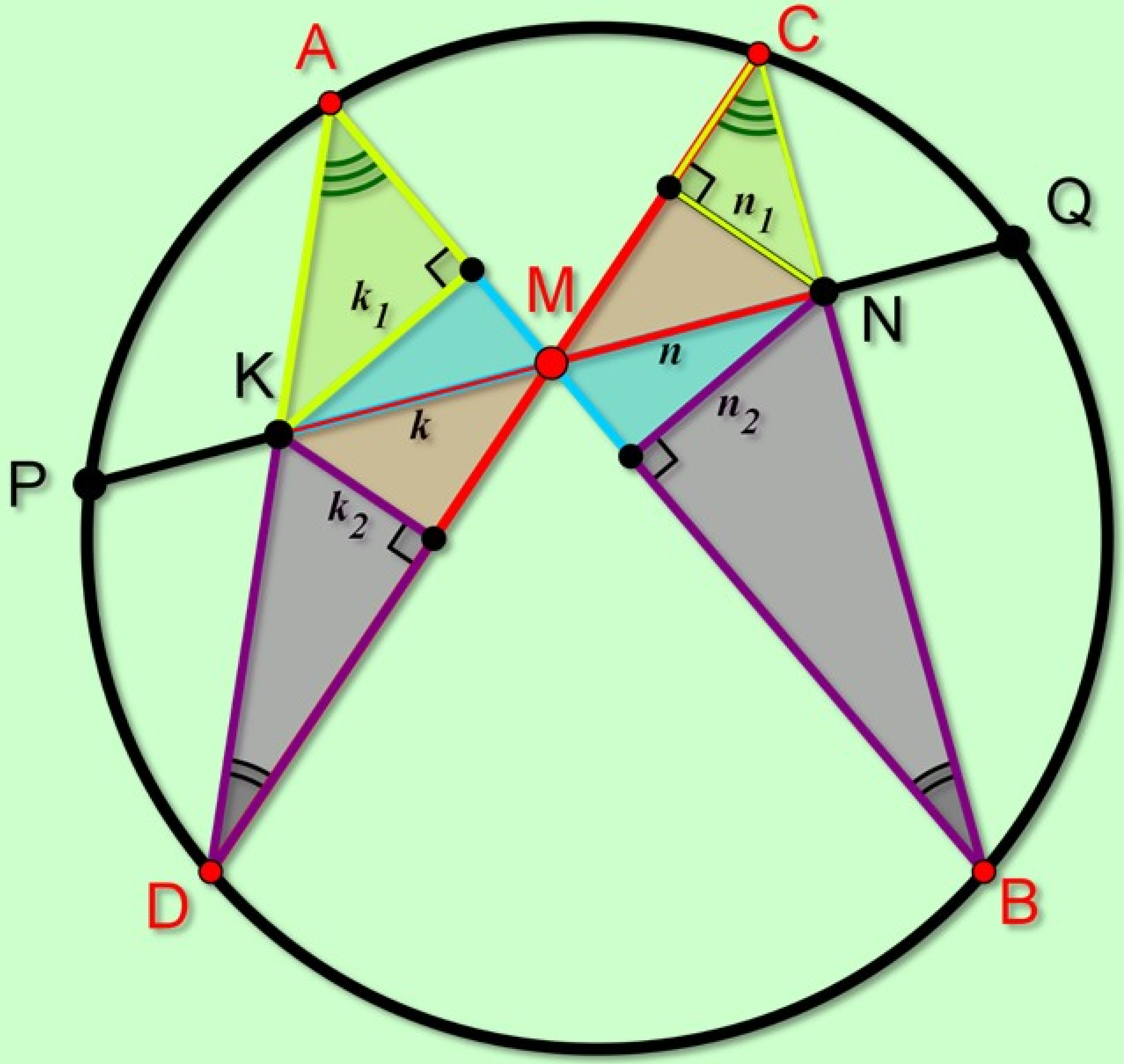
Θεώρημα Πεταλούδας



✦ Αν M μέσο τυχούσας χορδής AB και $\Gamma\Delta$, EZ τυχούσες χορδές από το M, τότε M μέσο της $K\Lambda$.







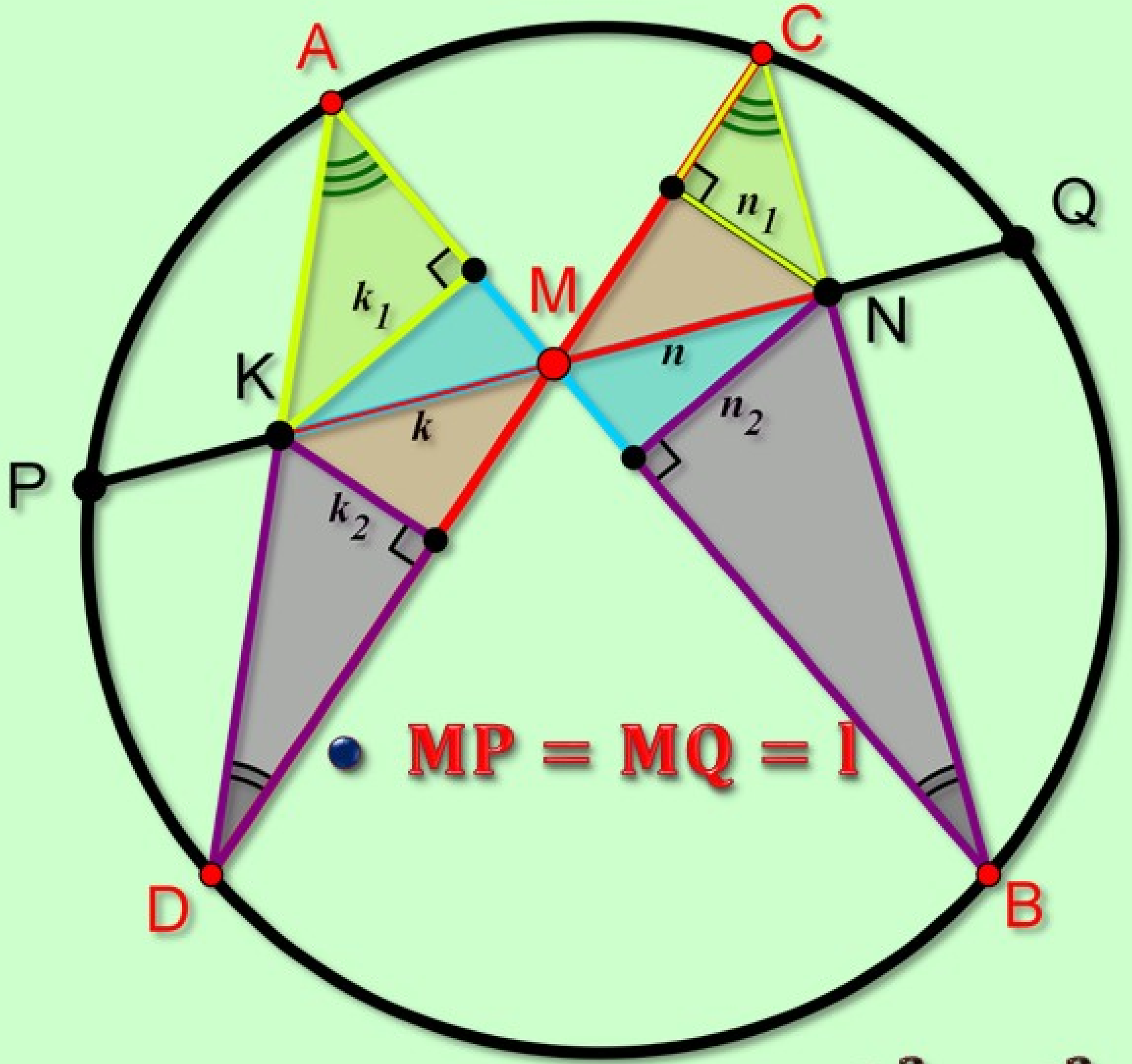
- $\dfrac{k}{n} = \dfrac{k_1}{n_1}$
- $\dfrac{k}{n} = \dfrac{k_2}{n_2}$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{k_1 \cdot k_2}{n_1 \cdot n_2}$$

- $\dfrac{KA}{NC} = \dfrac{k_1}{n_1}$
- $\dfrac{KD}{NB} = \dfrac{k_2}{n_2}$

$$\frac{KA \cdot KD}{NB \cdot NC} = \frac{k_1 \cdot k_2}{n_1 \cdot n_2}$$

- $MP = MQ = l$



- $MP = MQ = l$

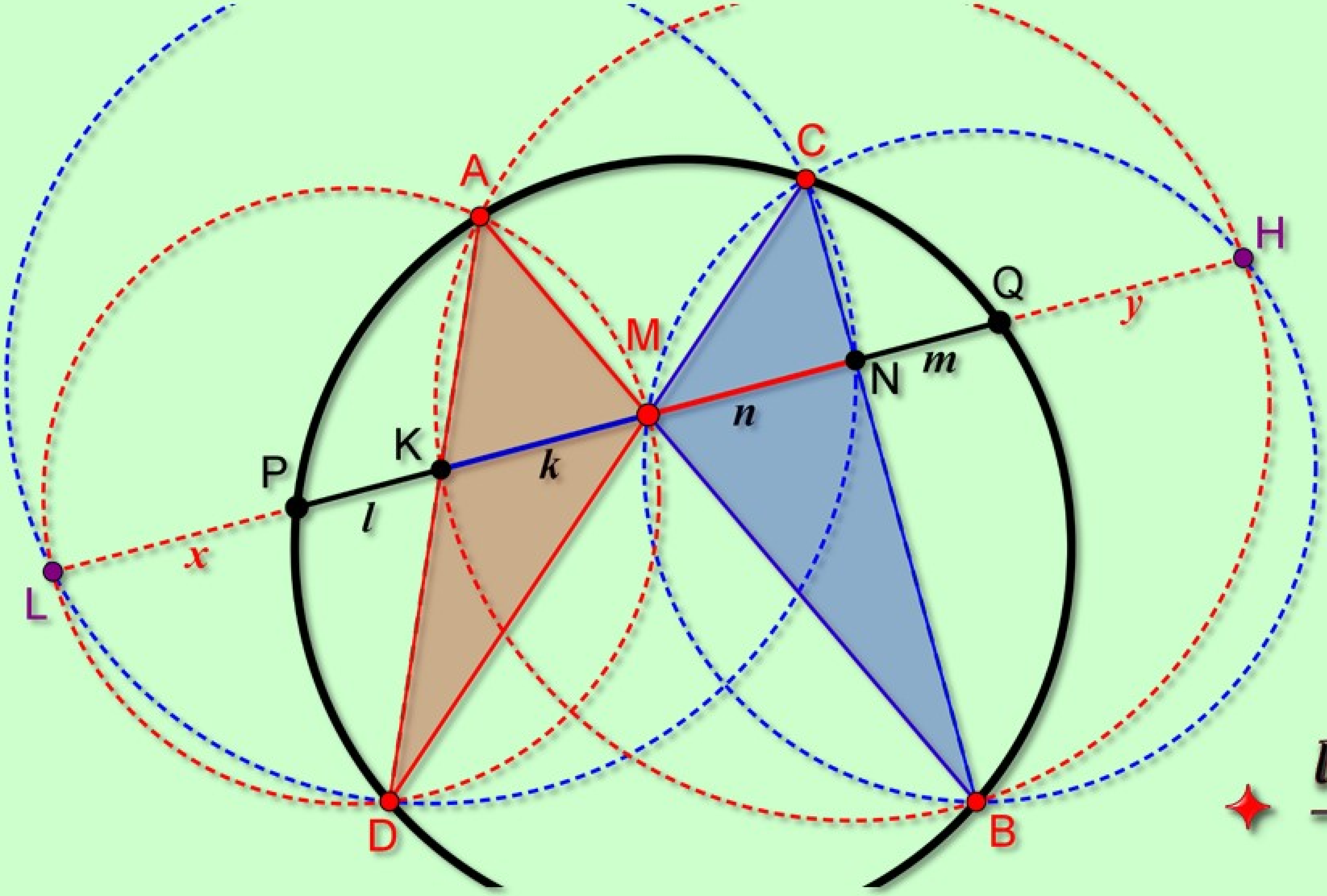
- $\dfrac{k^2}{n^2} = \dfrac{KA \cdot KD}{NB \cdot NC}$

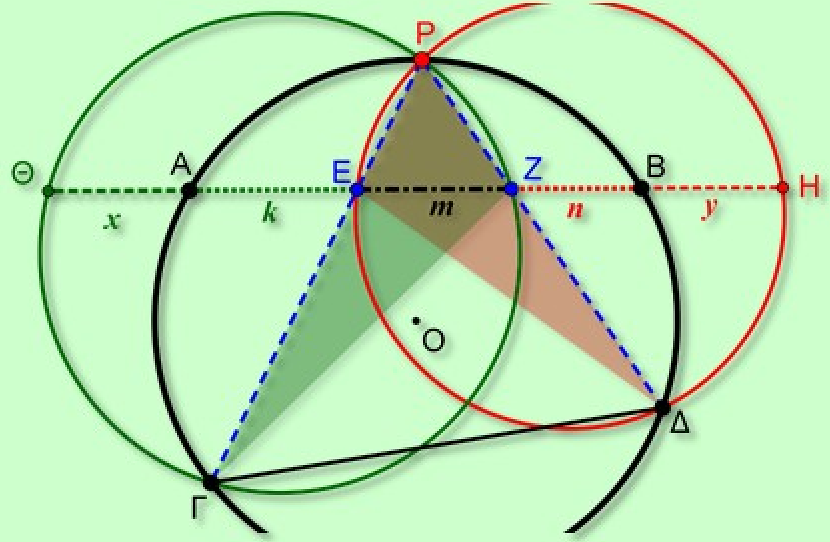
- $KA \cdot KD = KP \cdot KQ =$
$= (l-k)(l+k) = l^2 - k^2$

- $NB \cdot NC = NQ \cdot NP =$
$= (l-n)(l+n) = l^2 - n^2$

$$\frac{KA \cdot KD}{NB \cdot NC} = \frac{l^2 - k^2}{l^2 - n^2}$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{l^2 - k^2}{l^2 - n^2} \Rightarrow n = k$$

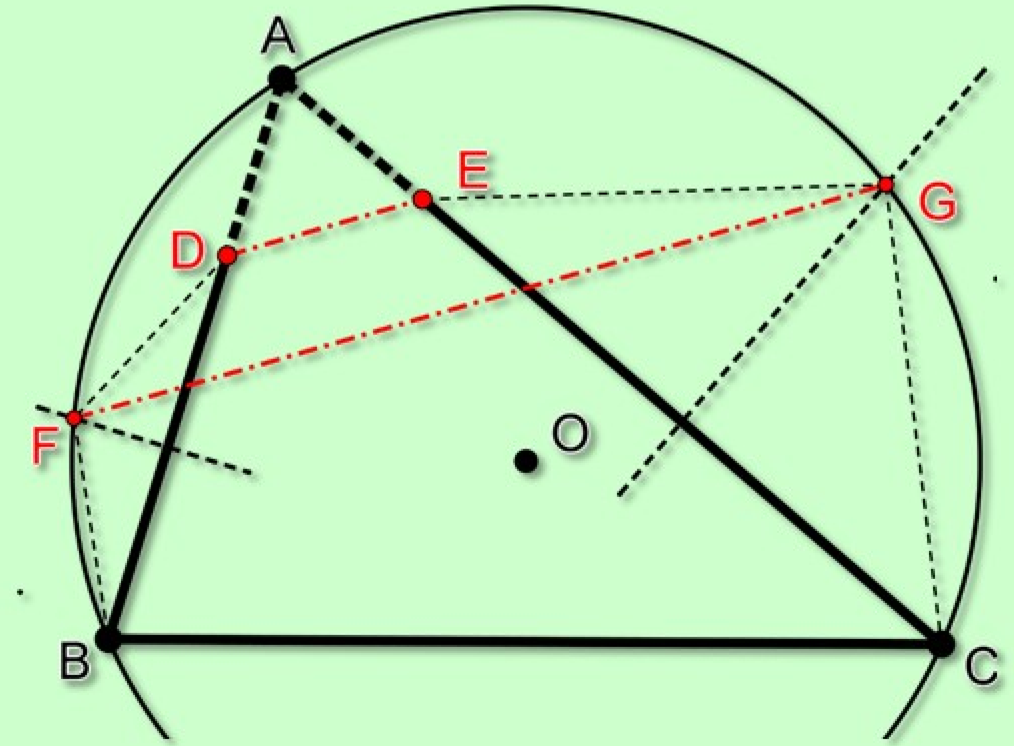




$$\frac{k \cdot n}{m} = x = y = ct.$$

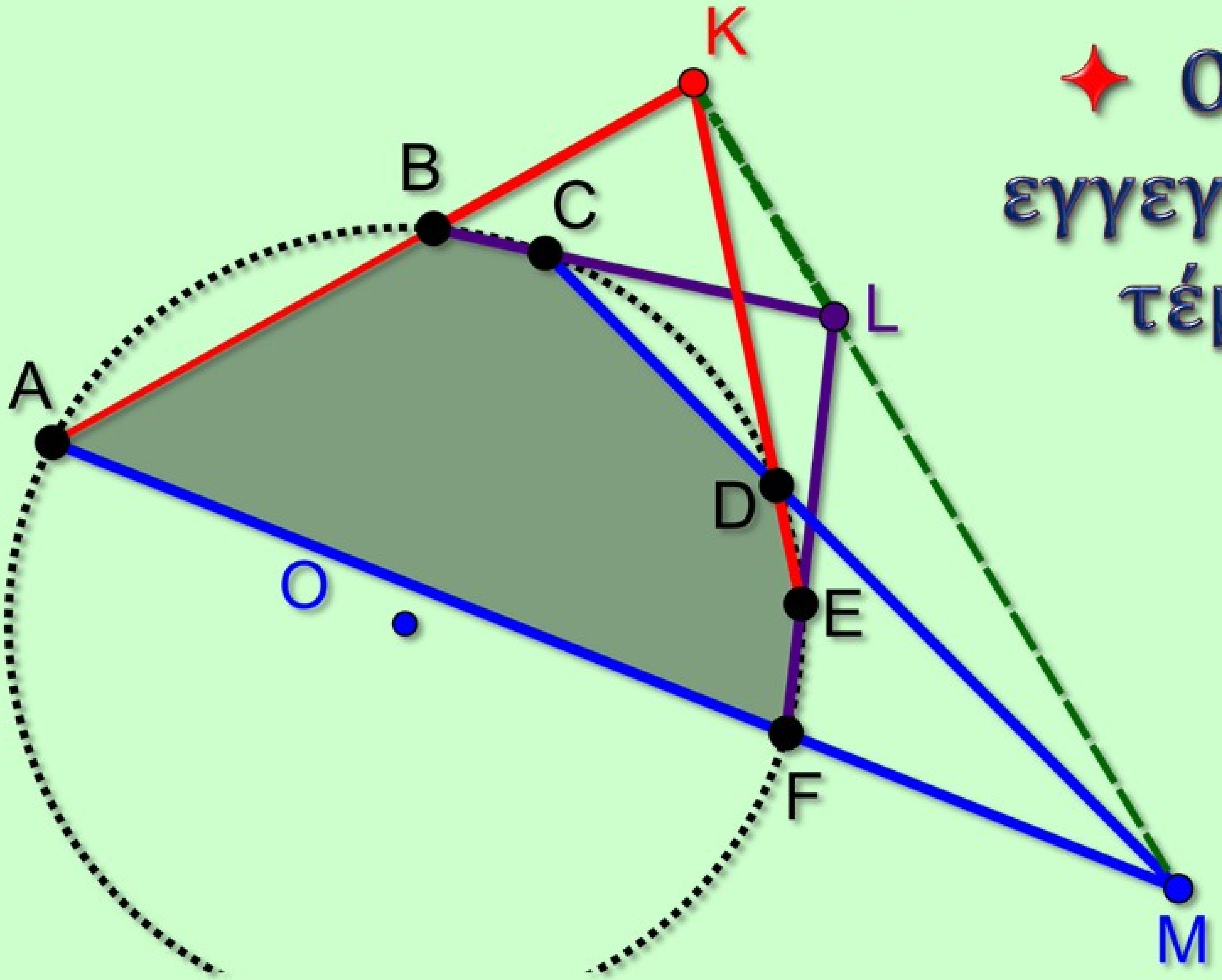
$$\frac{l \cdot (m+n)}{k} = \frac{m \cdot (k+l)}{n}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 9



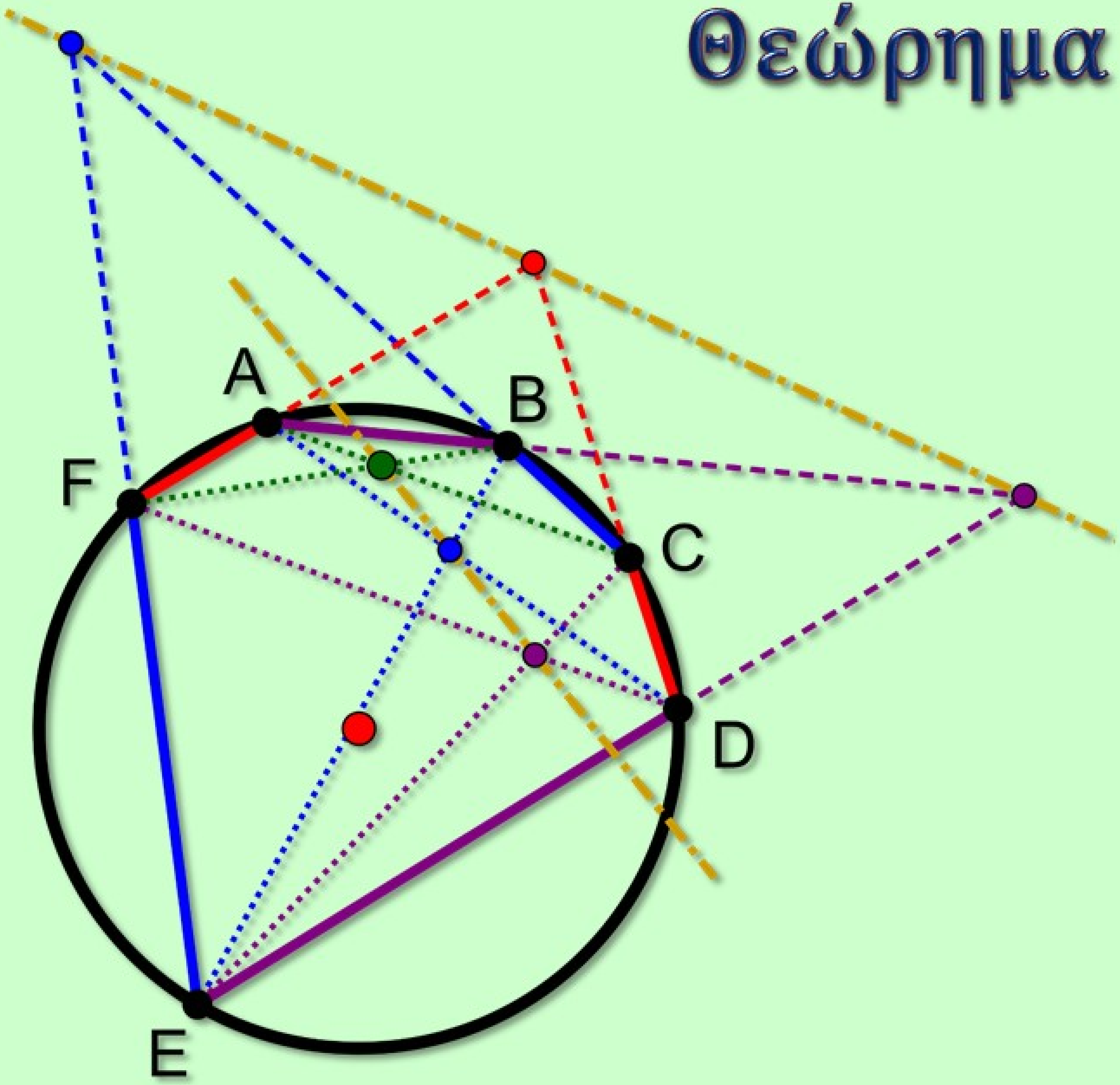
Θεώρημα Pascal

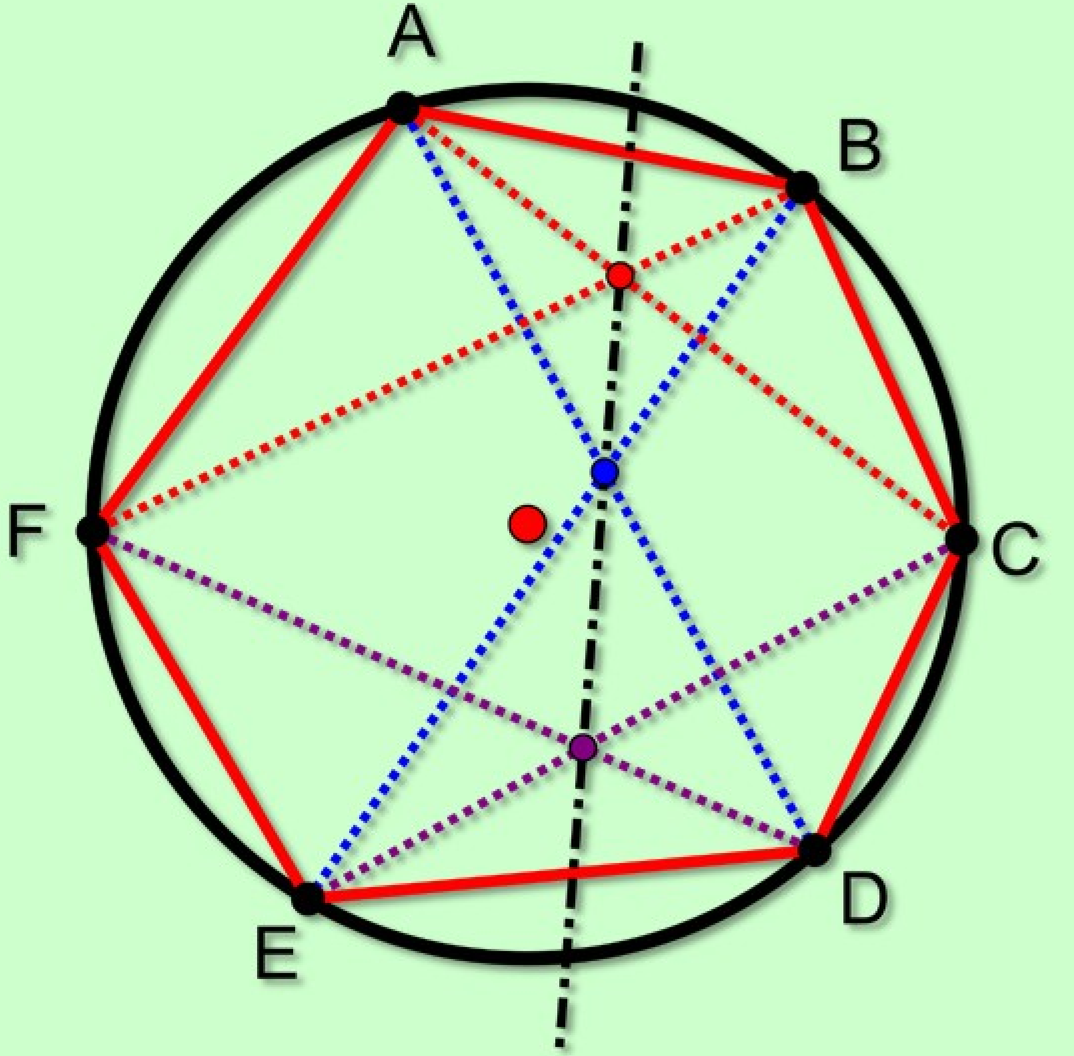
Θεώρημα Pascal



- Οι απέναντι πλευρές εγγεγραμμένου εξαγώνου, τέμνονται σε σημεία συνευθειακά.

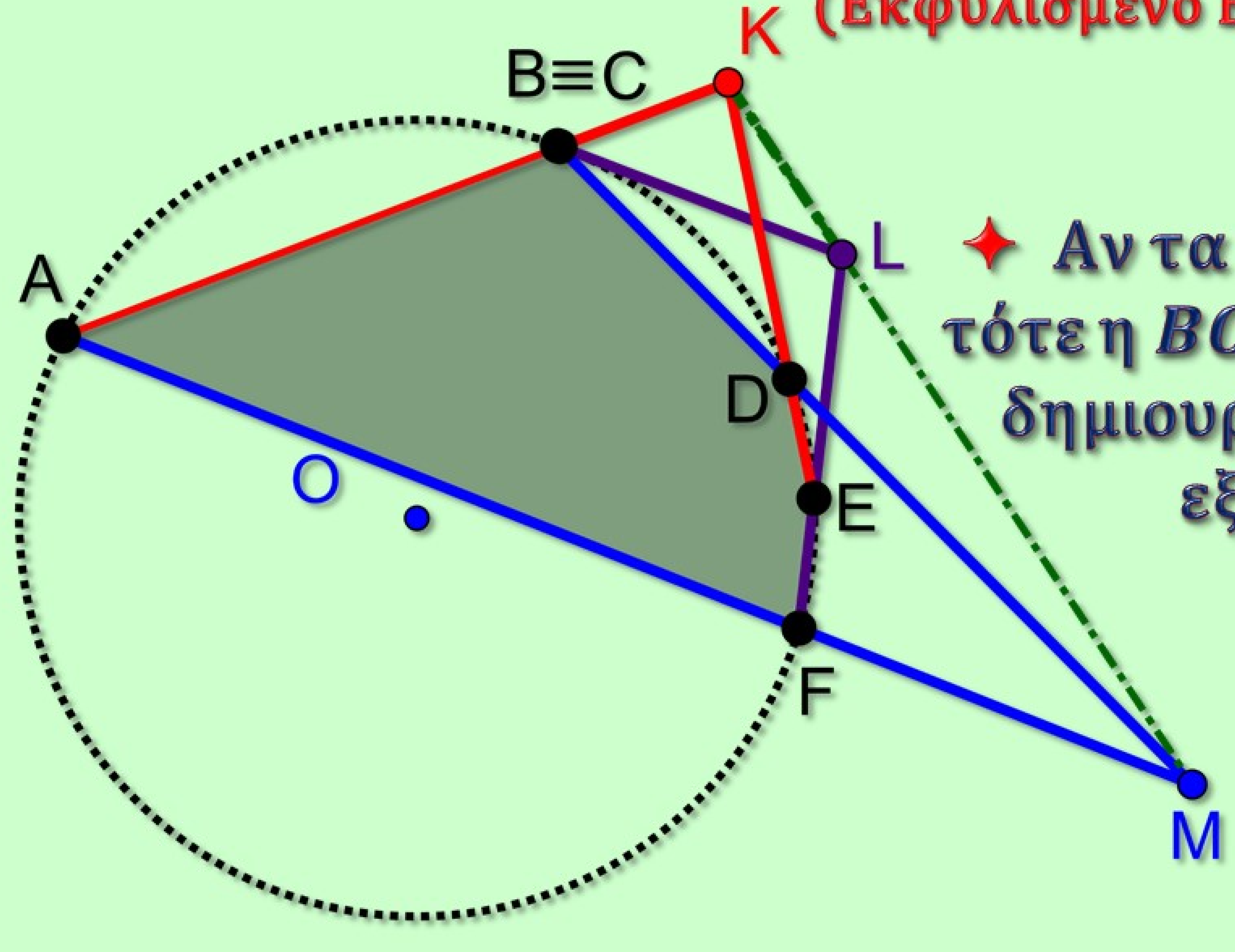
Θεώρημα Pascal



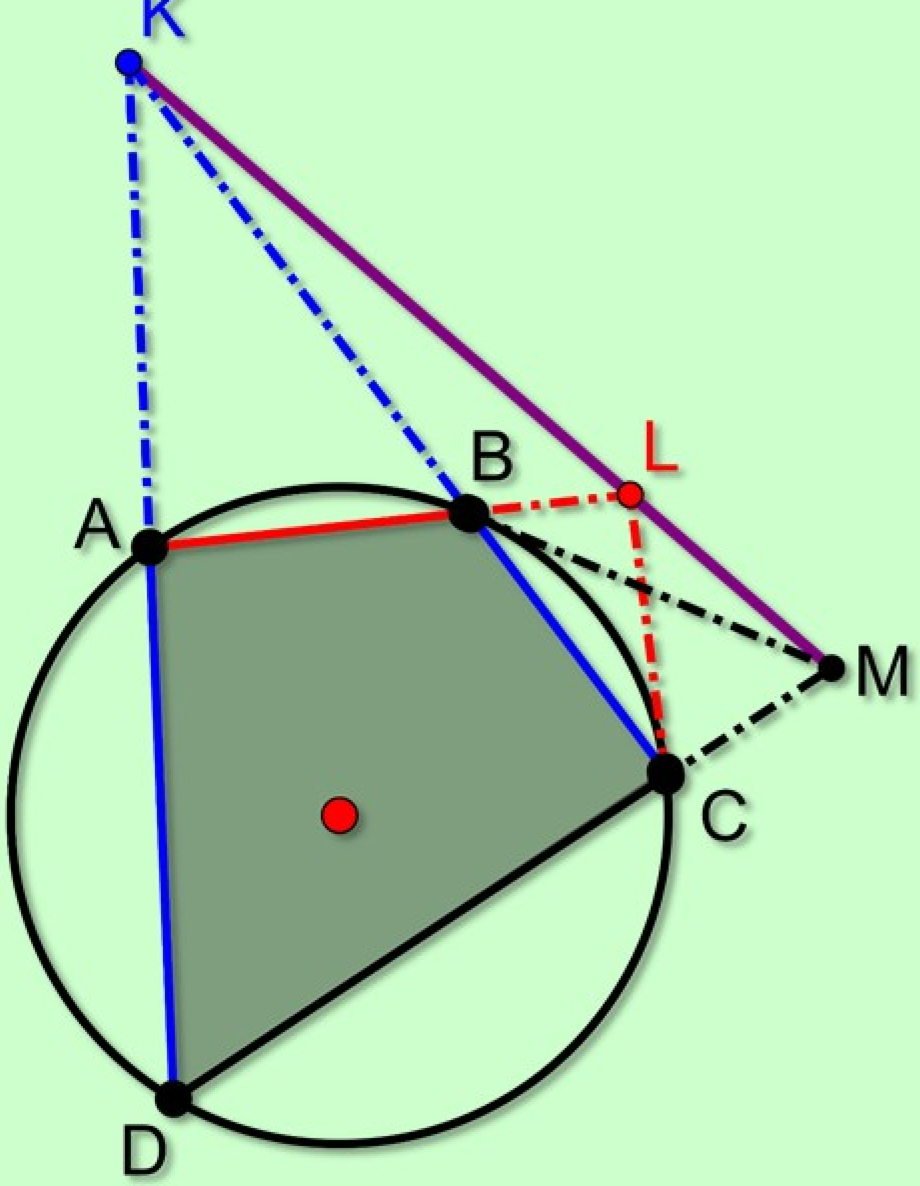


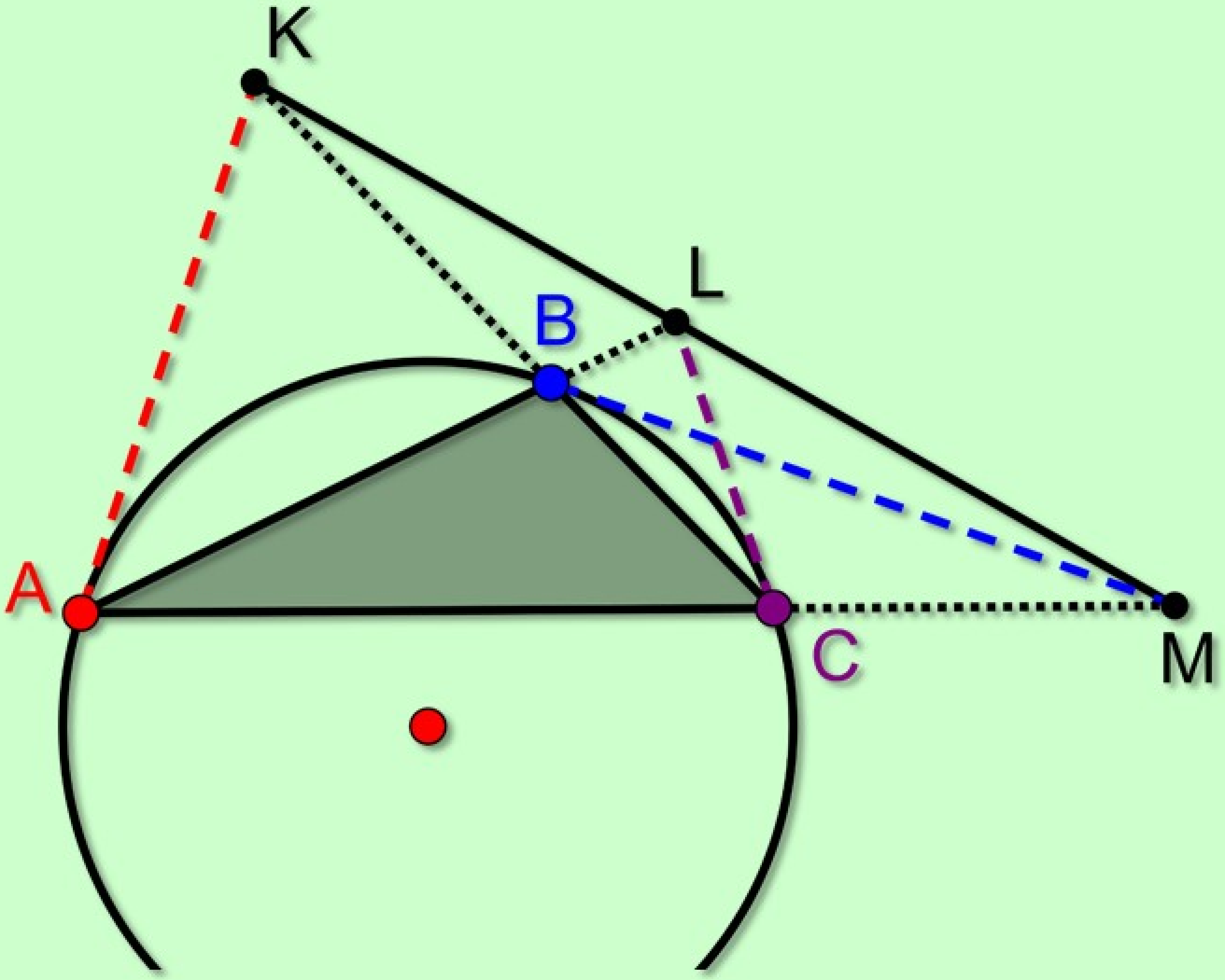
Θεώρημα Pascal

(Εκφυλισμένο Εξάγωνο)



✦ Αν τα σημεία B, C ταυτιστούν, τότε η BC γίνεται εφαπτομένη και δημιουργείται το εκφυλισμένο εξάγωνο $ABBDEF$.


K
B
L
A
M
C
D


K
L
B
A
C
M

✦ Αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο XYZ ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Μενελάου.

Δηλαδή ότι: $\frac{LX}{LY} \cdot \frac{MY}{MZ} \cdot \frac{KZ}{KX} = 1$

$\frac{KZ}{KX} \cdot \frac{MY}{MZ} \cdot \frac{KZ}{KX} = 1$

$\frac{MY}{MZ} \cdot \frac{DZ}{DX} \cdot \frac{CX}{CY} = 1$

$\frac{LX}{LY} \cdot \frac{FY}{FZ} \cdot \frac{EZ}{EX} = 1$

$XC \cdot XB = XD \cdot XE$

$ZD \cdot ZE = ZA \cdot ZF$

$YF \cdot YA = YC \cdot YB$