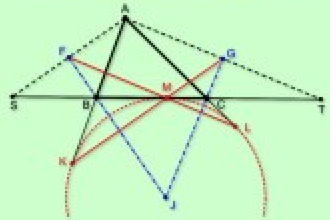
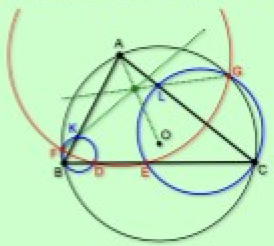
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8



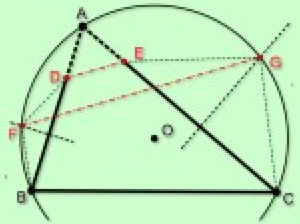
Θεώρημα Μενελάου-Ceva-Aubel

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8



Θεώρημα Ceva (Τριγωνομετρική Εκδοχή)

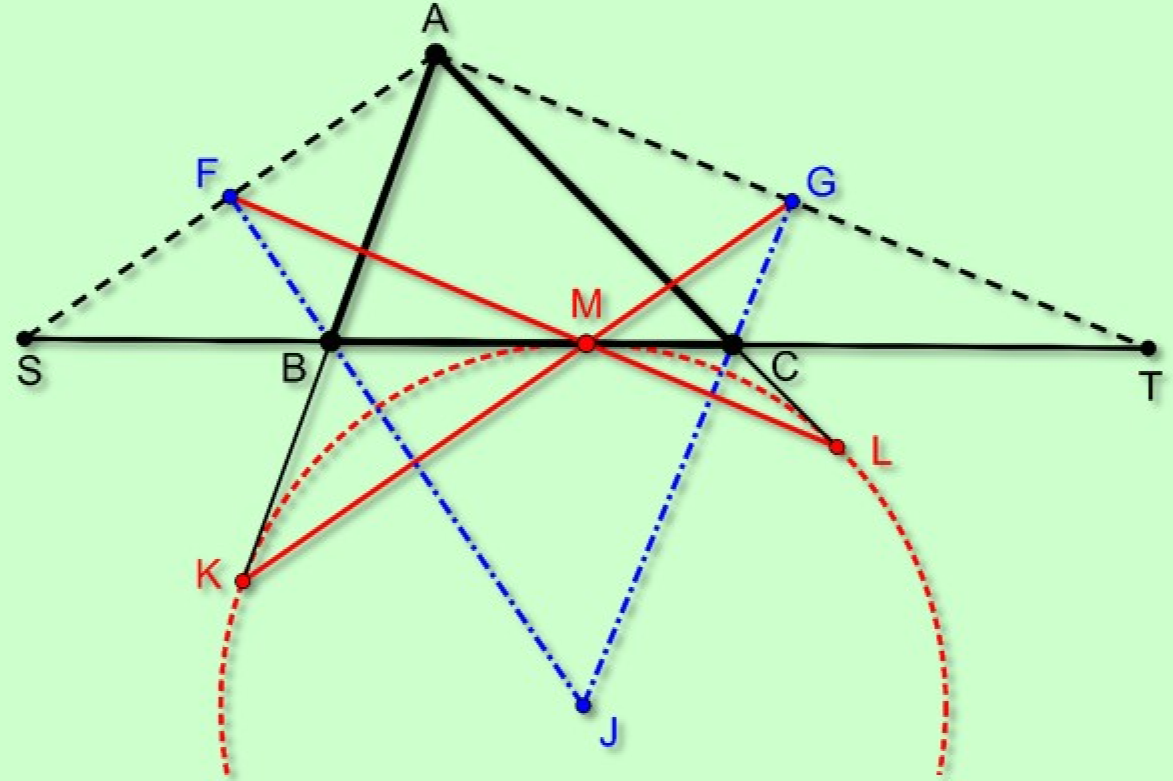
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8



Χαρακτηριστικά Σημεία Τριγώνου

Βαγγέλης Ψύχας

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8

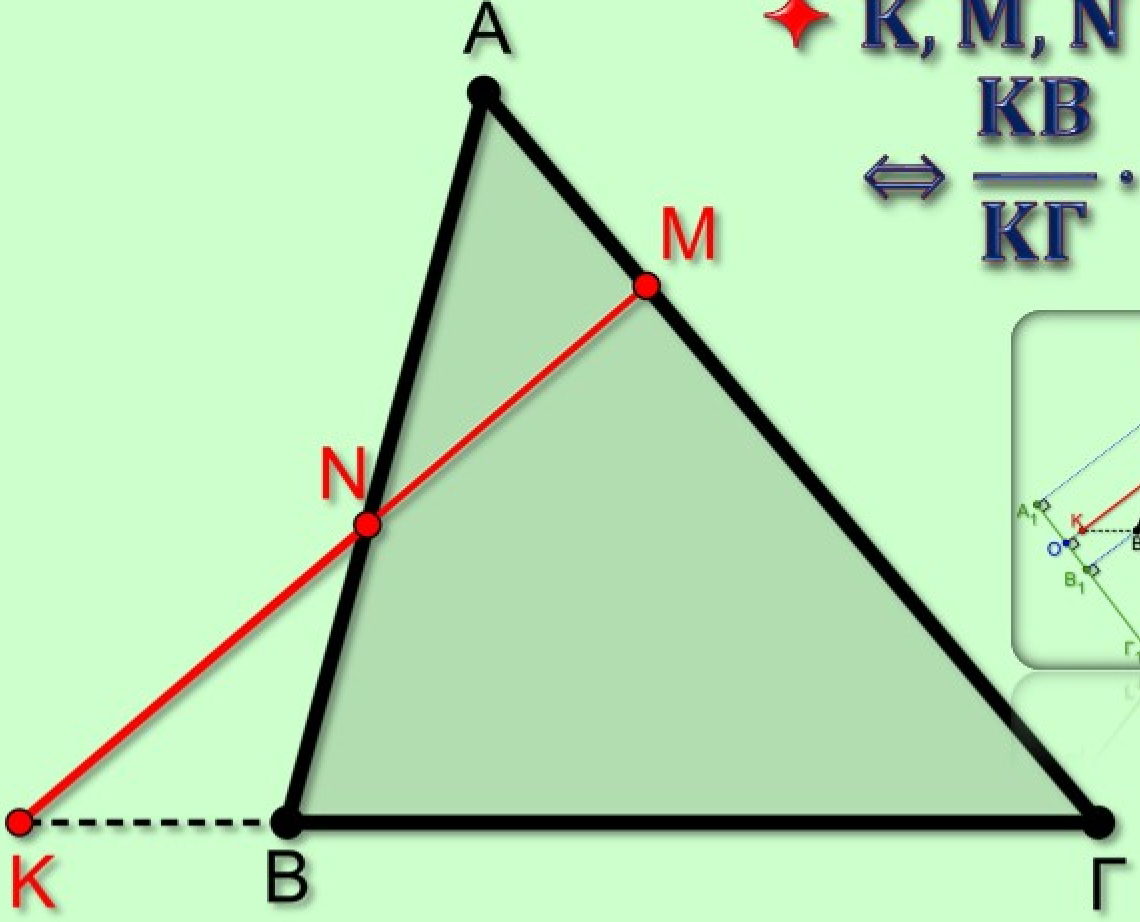


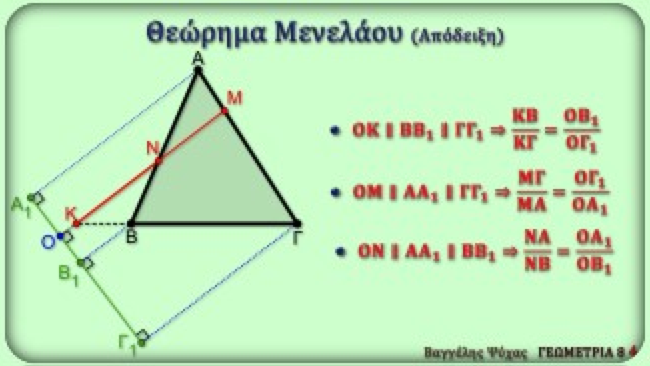
Θεώρημα Μενελάου-Ceva-Aubel

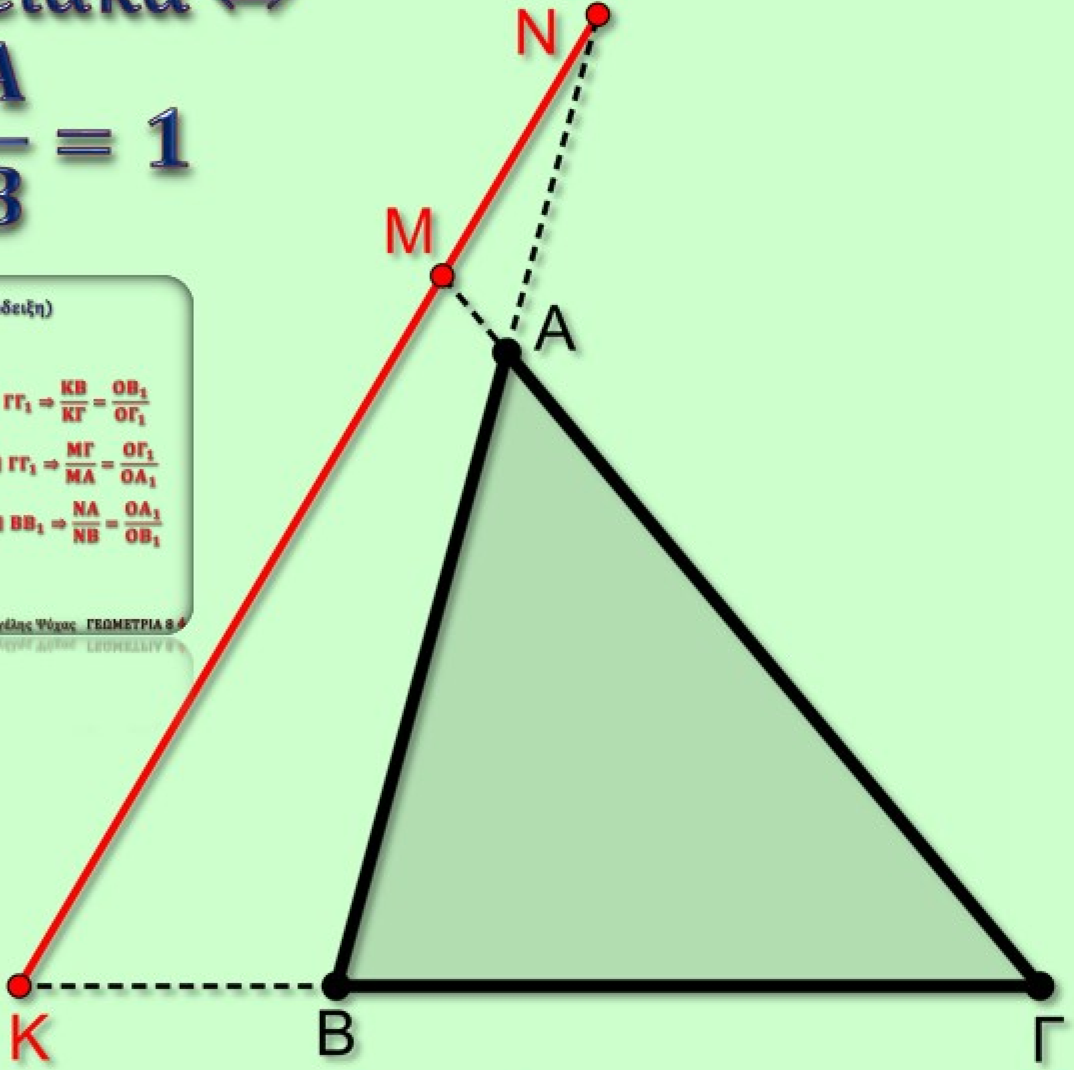
Θεώρημα Μενελάου

✦ **Κ, Μ, Ν συνευθειακά ⇔**

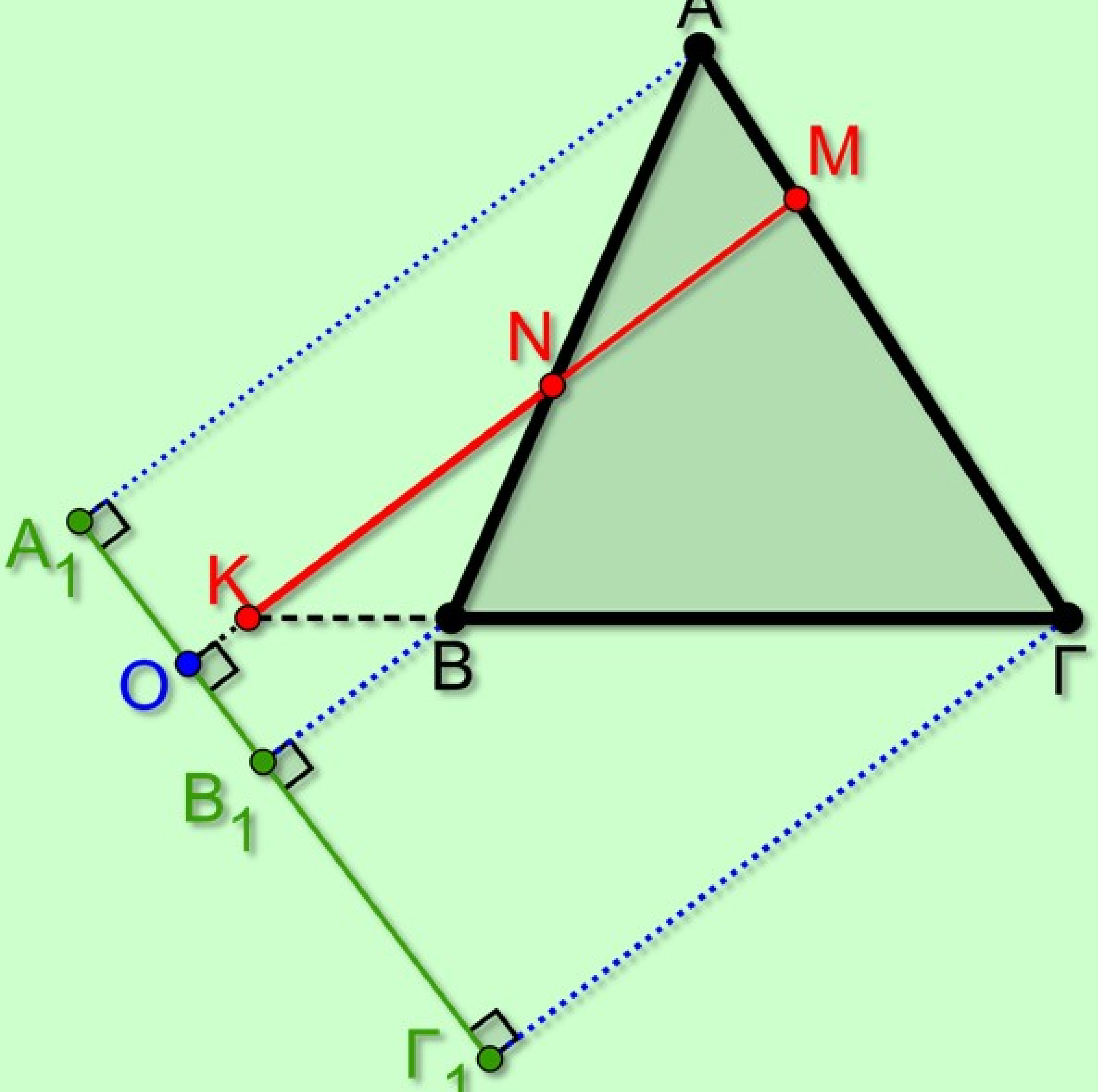
$$\Leftrightarrow \frac{KB}{K\Gamma}\cdot\frac{M\Gamma}{MA}\cdot\frac{NA}{NB} = 1$$





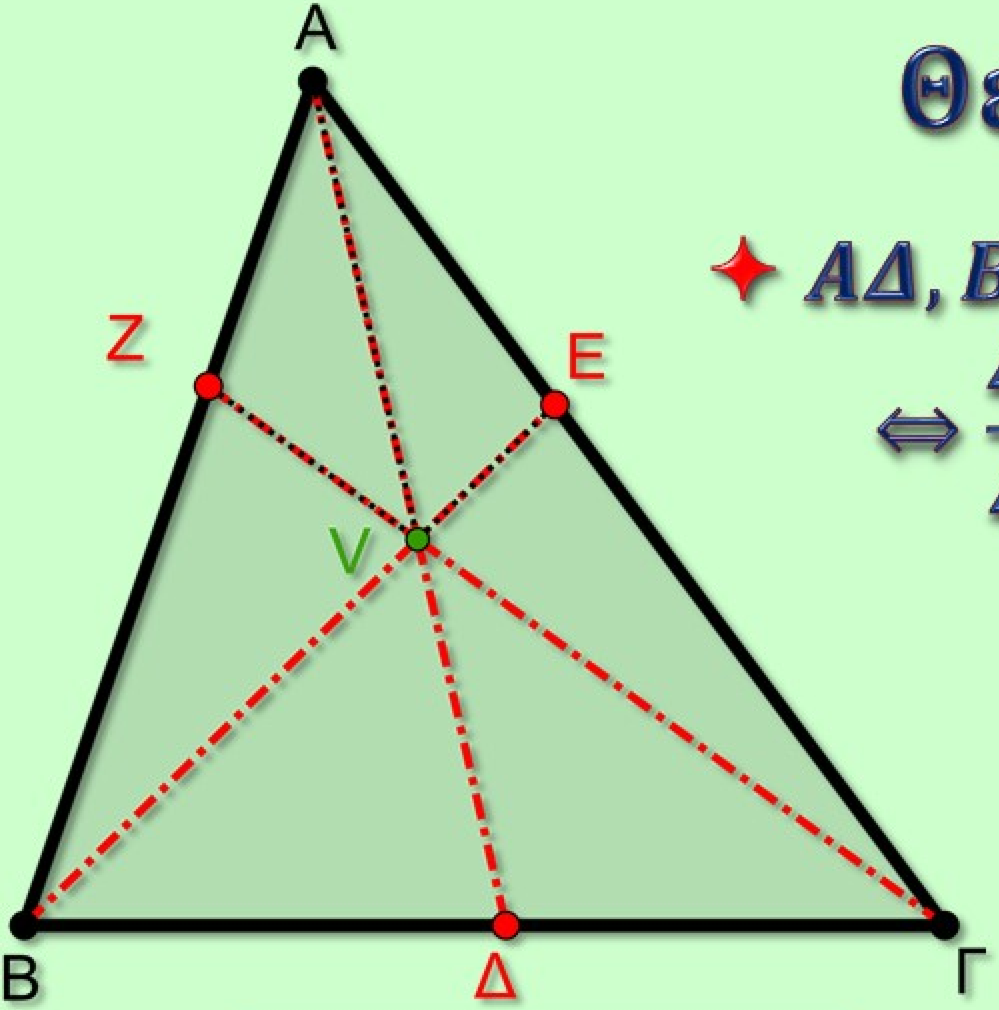


Θεώρημα Μενελάου (Απόδειξη)



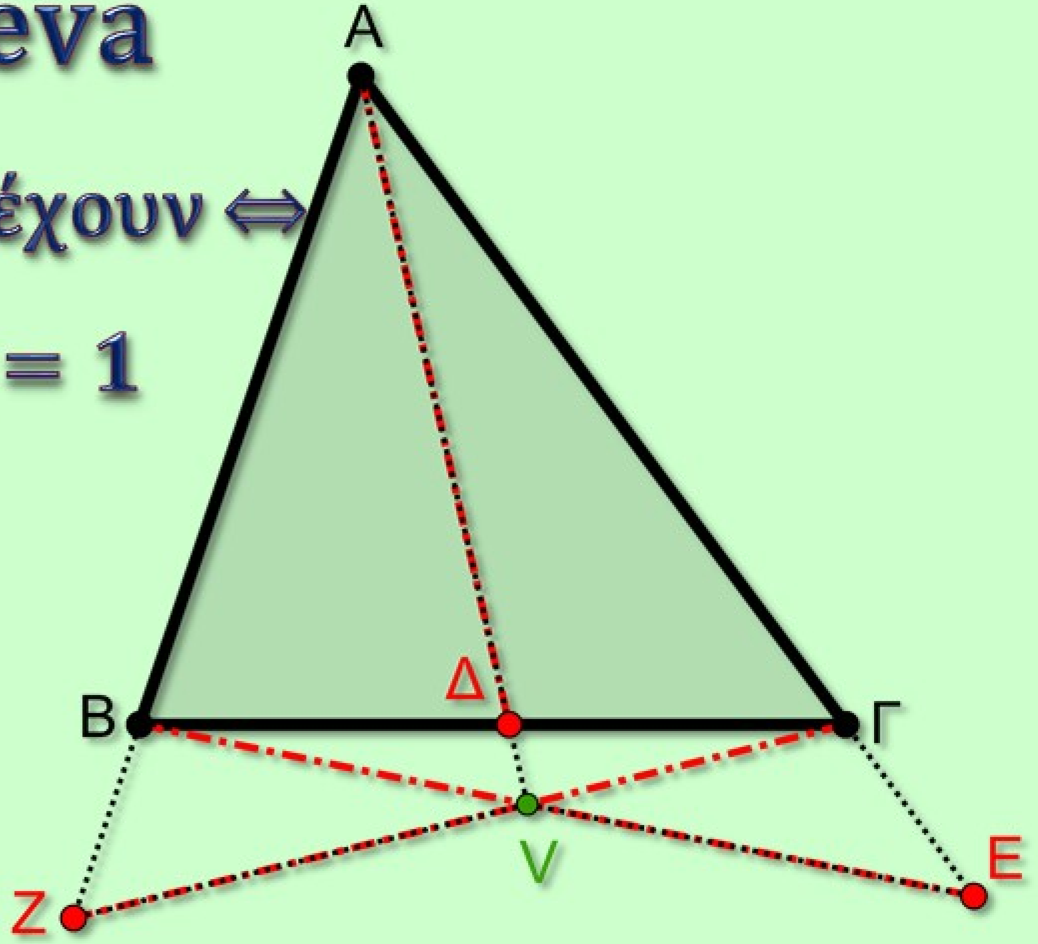
- $OK \parallel BB_1 \parallel \Gamma\Gamma_1 \Rightarrow \dfrac{KB}{K\Gamma} = \dfrac{OB_1}{O\Gamma_1}$
- $OM \parallel AA_1 \parallel \Gamma\Gamma_1 \Rightarrow \dfrac{M\Gamma}{MA} = \dfrac{O\Gamma_1}{OA_1}$
- $ON \parallel AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow \dfrac{NA}{NB} = \dfrac{OA_1}{OB_1}$

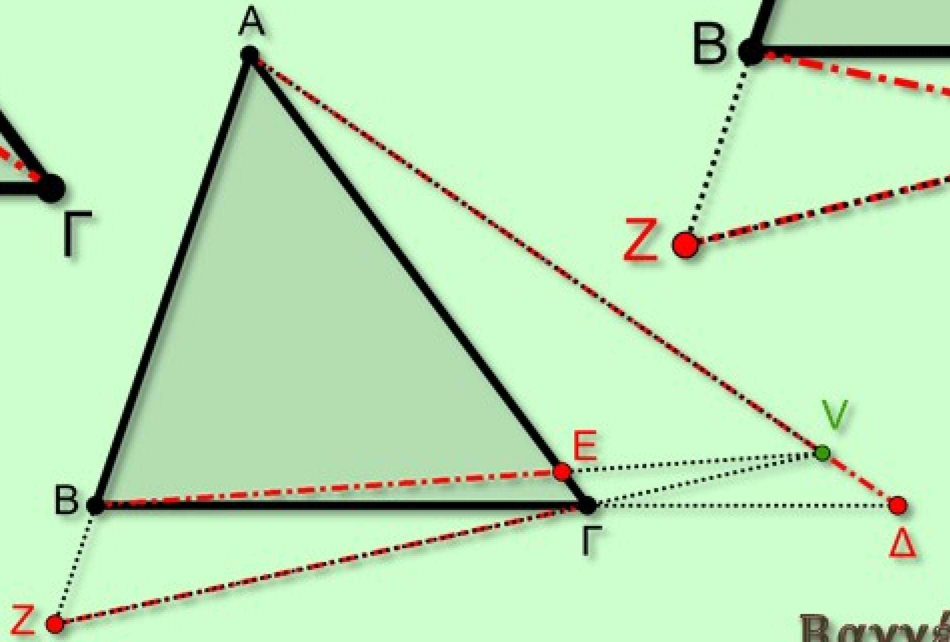
Θεώρημα Ceva

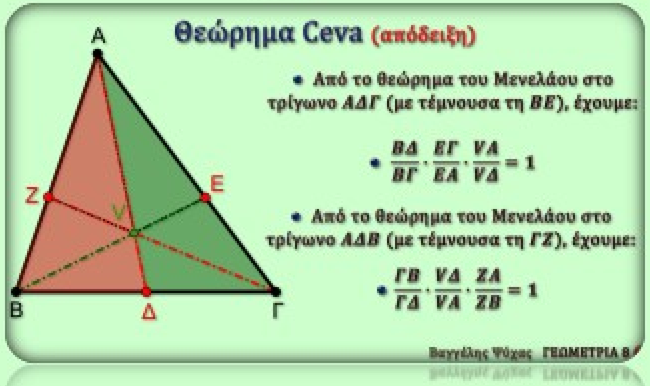


✦ $A\Delta, BE, \Gamma Z$ συντρέχουν $\Leftrightarrow$

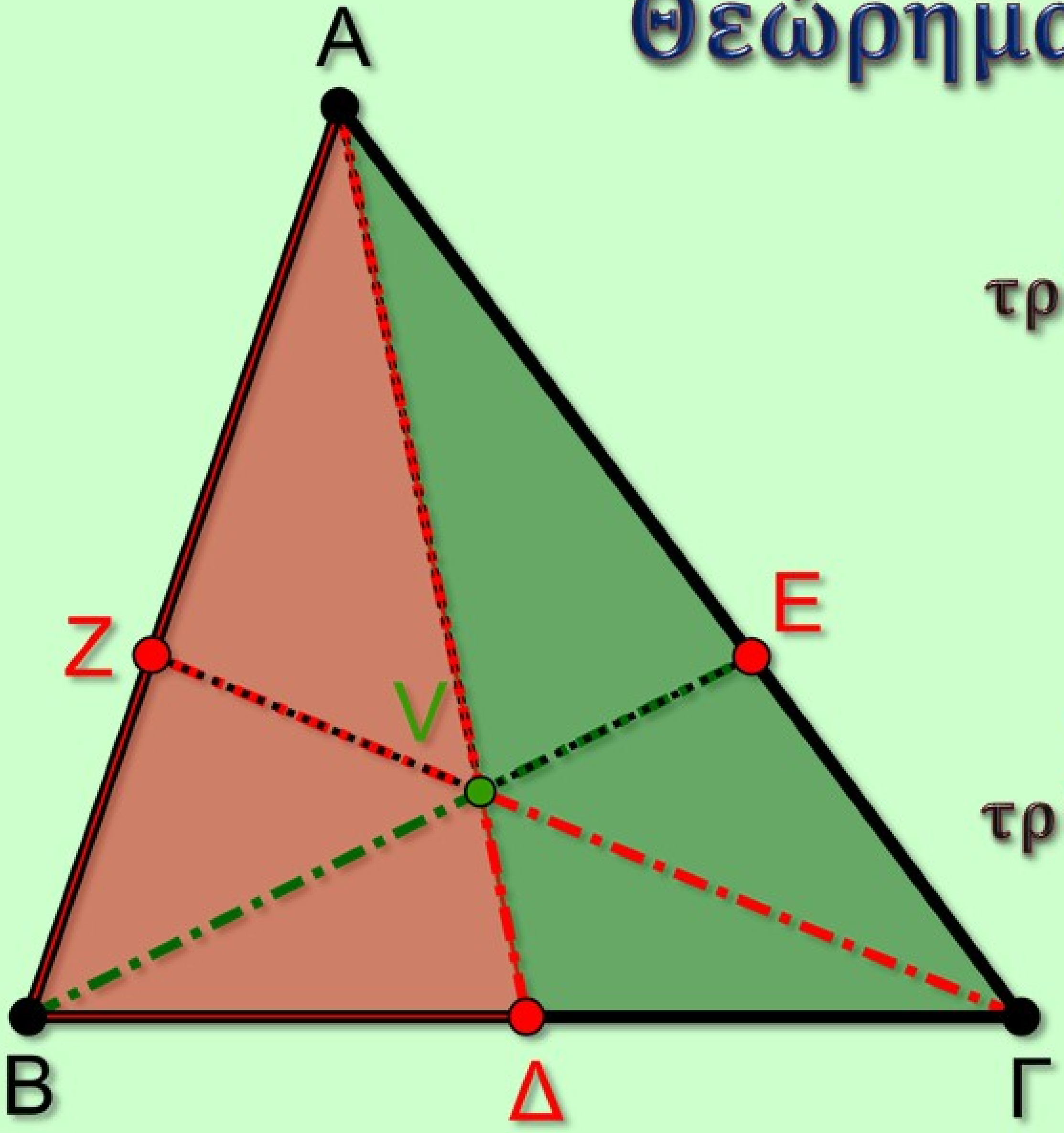
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$







Θεώρημα Ceva (απόδειξη)



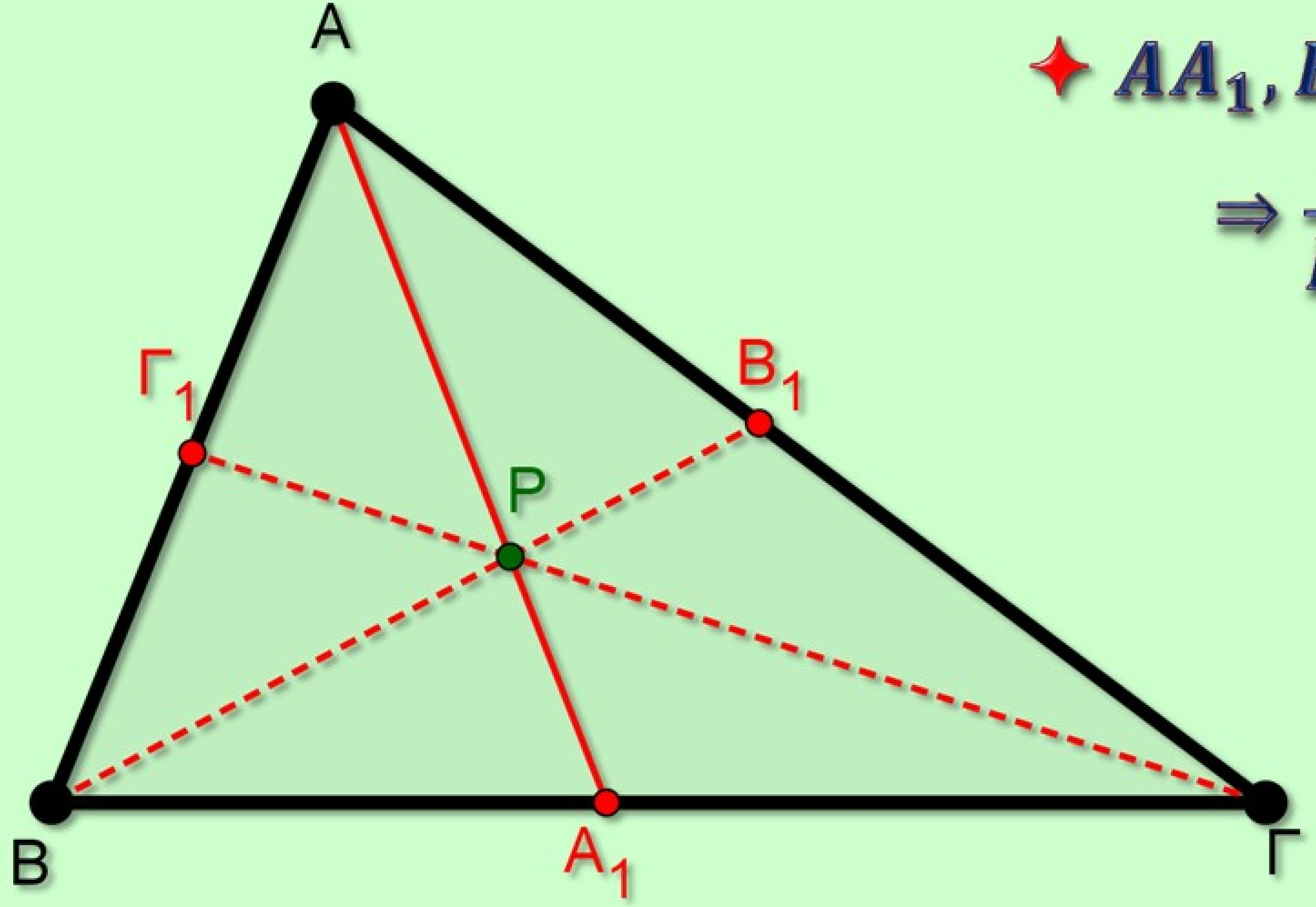
- Από το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ (με τέμνουσα τη $ΒΕ$), έχουμε:

- $\frac{ΒΔ}{ΒΓ} \cdot \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \cdot \frac{VA}{VΔ} = 1$

- Από το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $ΑΔΒ$ (με τέμνουσα τη $ΓΖ$), έχουμε:

- $\frac{ΓΒ}{ΓΔ} \cdot \frac{VΔ}{VA} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1$

Θεώρημα Aubel

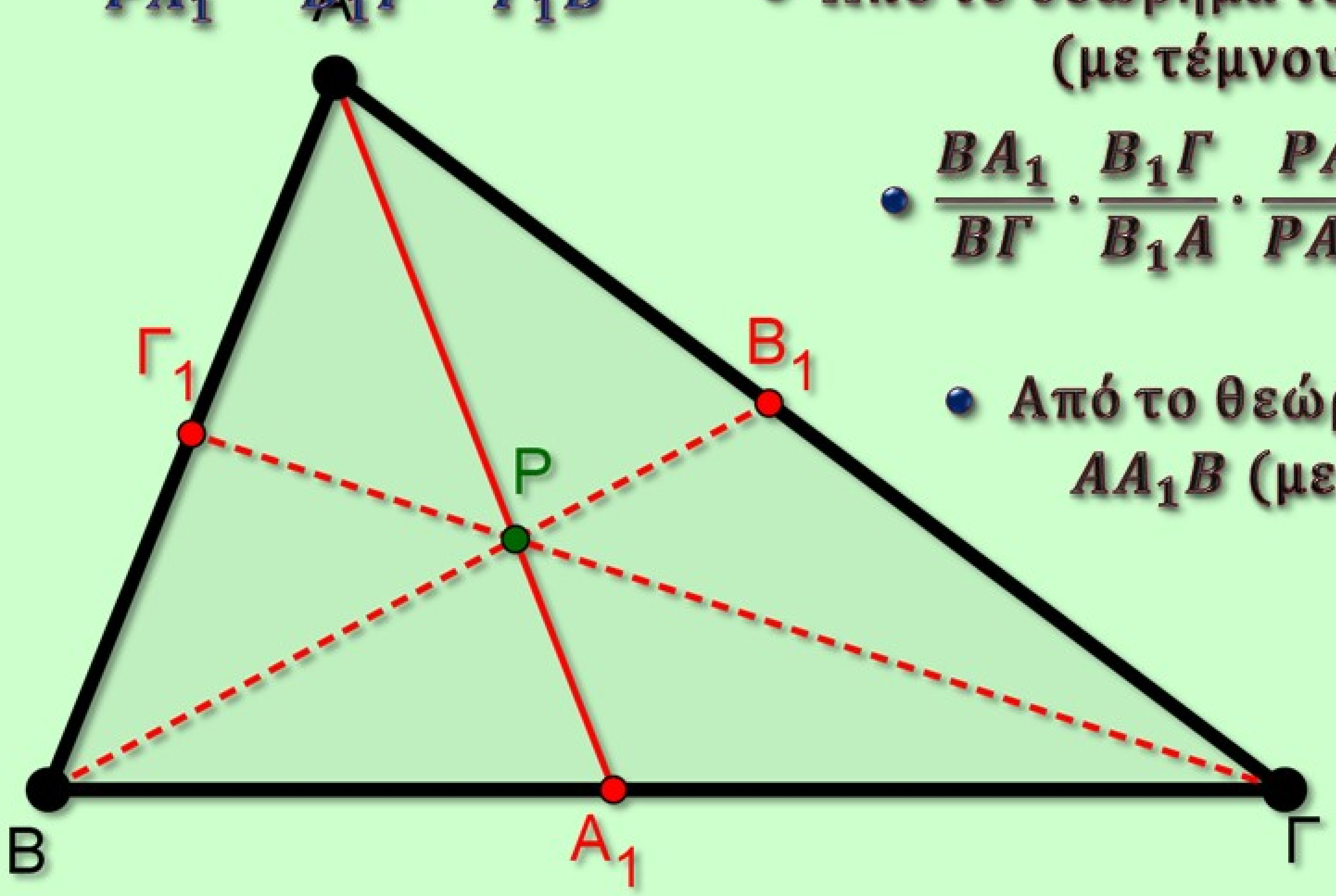


- $AA_1, BB_1, ΓΓ_1$ συντρέχουν ⇒

$$\Rightarrow \frac{PA}{PA_1} = \frac{B_1A}{B_1Γ} + \frac{Γ_1A}{Γ_1B}$$

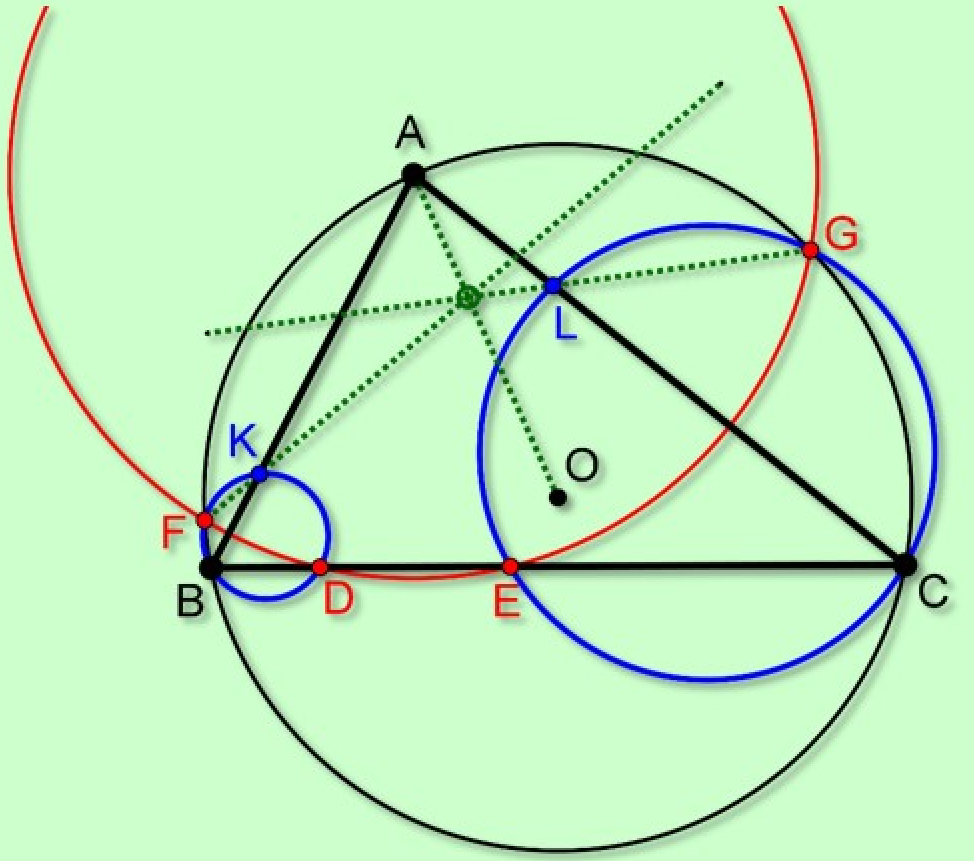
Θεώρημα Aubel (απόδειξη)

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{B_1A}{B_1\Gamma} + \frac{\Gamma_1 A}{\Gamma_1 B}$$



- Από το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $AA_1\Gamma$ (με τέμνουσα τη BB_1), έχουμε:
- $\frac{BA_1}{B\Gamma} \cdot \frac{B_1\Gamma}{B_1A} \cdot \frac{PA}{PA_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{B_1A}{B_1\Gamma} = \frac{BA_1}{B\Gamma} \cdot \frac{PA}{PA_1}$
- Από το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο AA_1B (με τέμνουσα τη $\Gamma\Gamma_1$), έχουμε:
- $\frac{\Gamma B}{\Gamma A_1} \cdot \frac{PA_1}{PA} \cdot \frac{\Gamma_1 A}{\Gamma_1 B} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{\Gamma_1 A}{\Gamma_1 B} = \frac{\Gamma A_1}{\Gamma B} \cdot \frac{PA}{PA_1}$

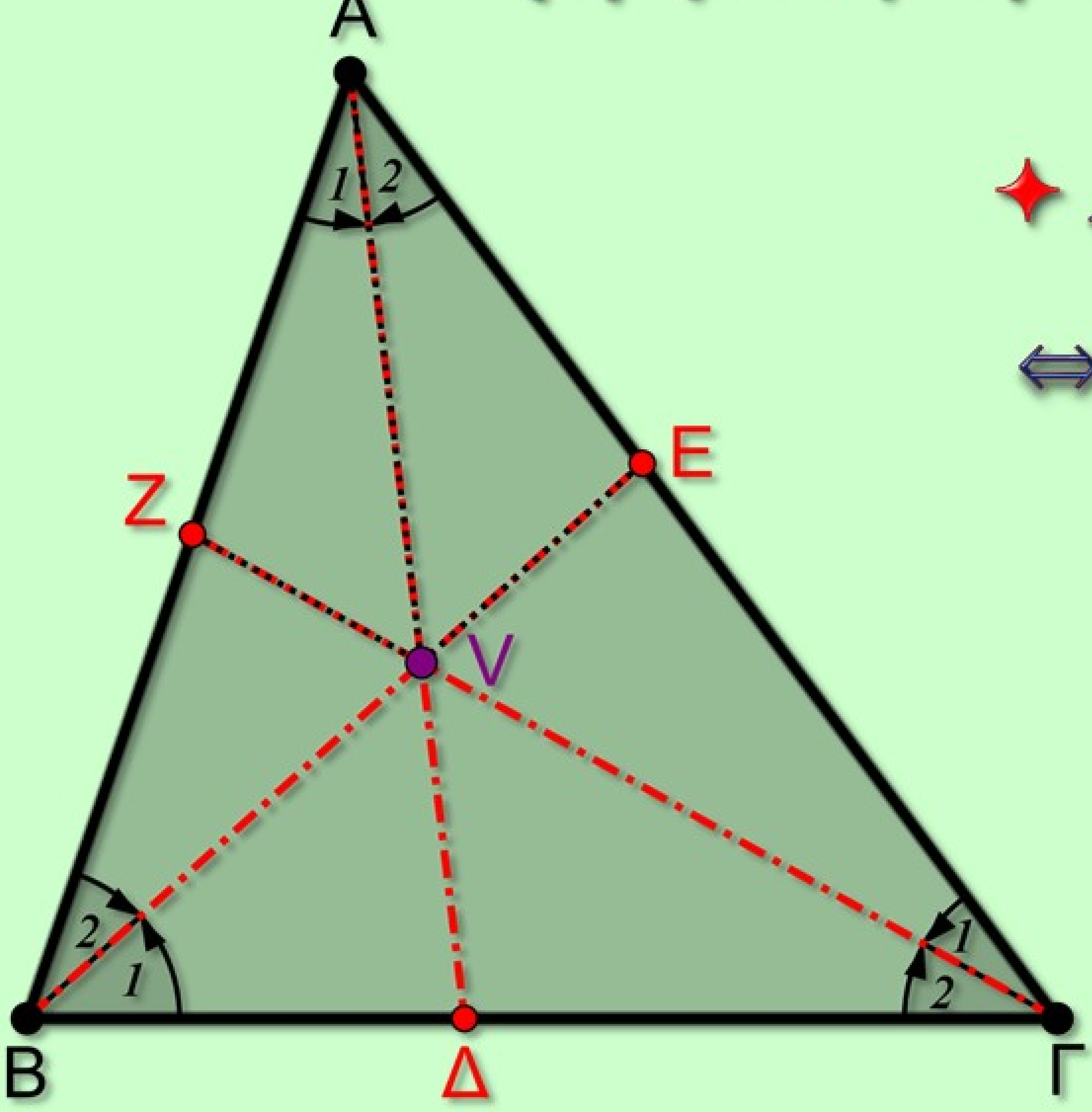
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8



Θεώρημα Ceva (Τριγωνομετρική Εκδοχή)

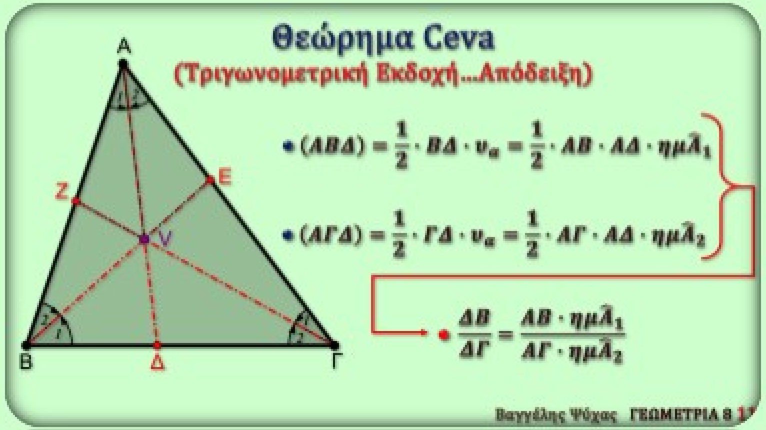
Θεώρημα Ceva

(Τριγωνομετρική Εκδοχή)



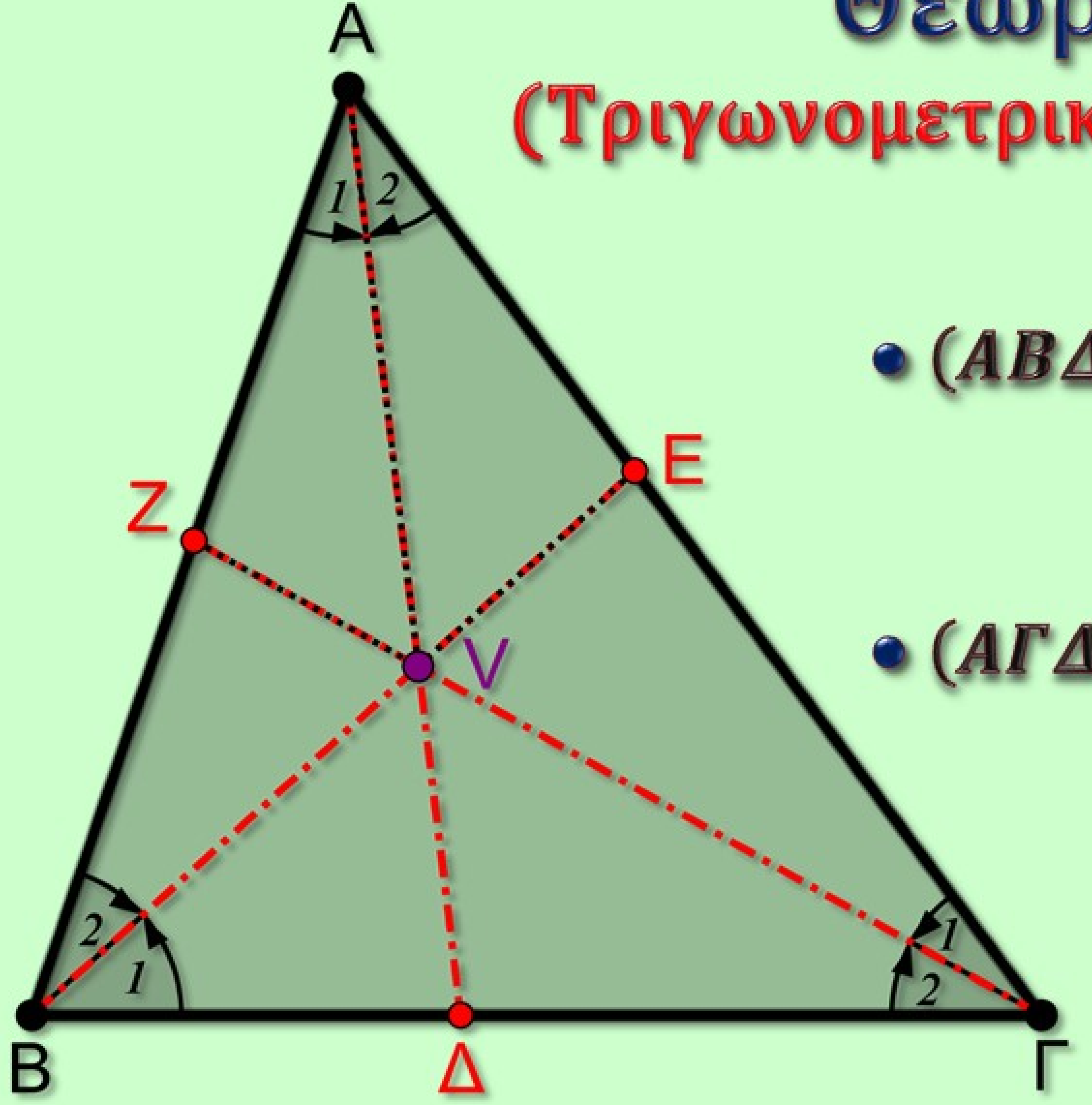
✦ **ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν** $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\widehat{A}_1}{\eta\mu\widehat{A}_2} \cdot \frac{\eta\mu\widehat{B}_1}{\eta\mu\widehat{B}_2} \cdot \frac{\eta\mu\widehat{\Gamma}_1}{\eta\mu\widehat{\Gamma}_2} = 1$$



Θεώρημα Ceva

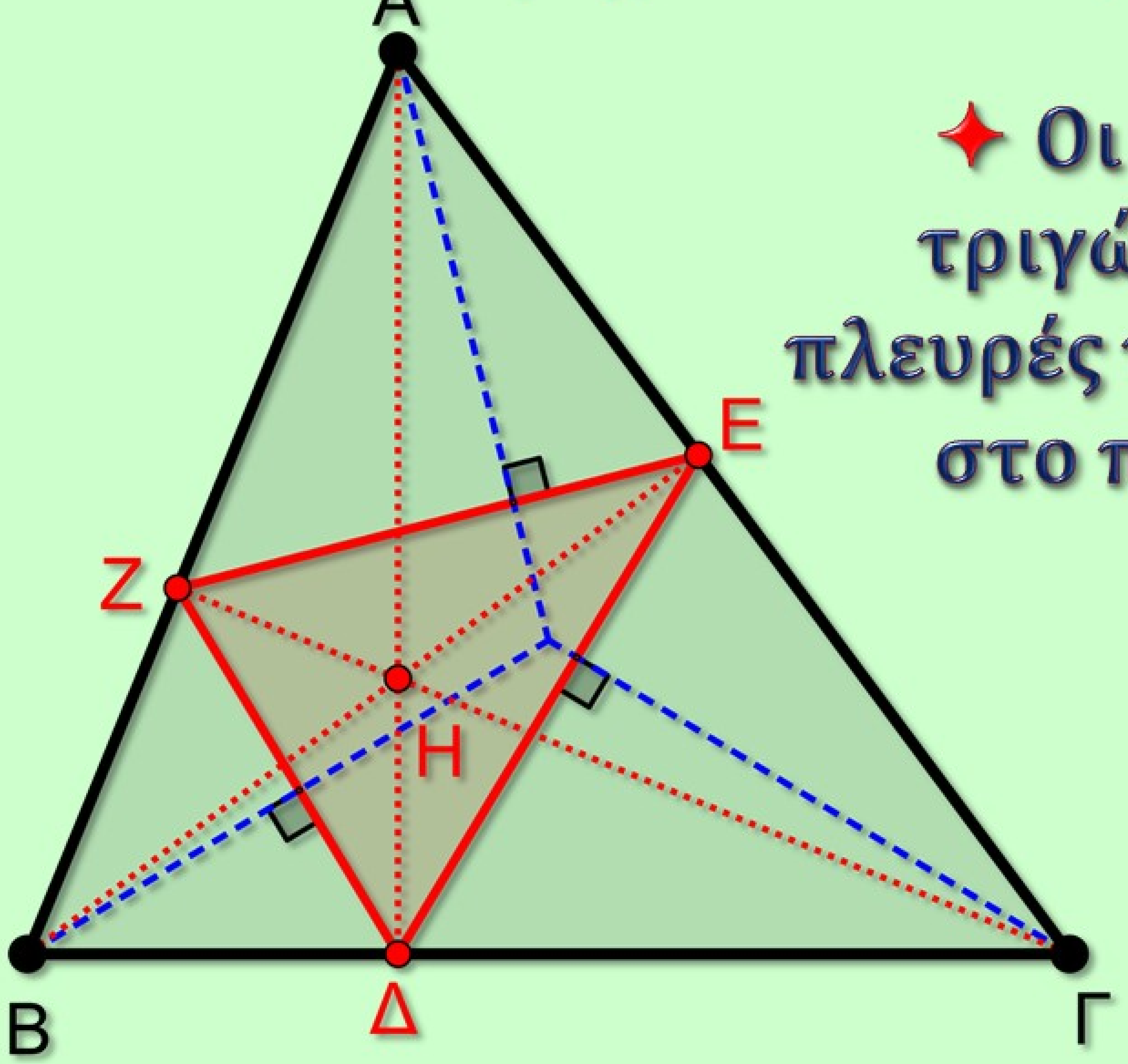
(Τριγωνομετρική Εκδοχή...Απόδειξη)



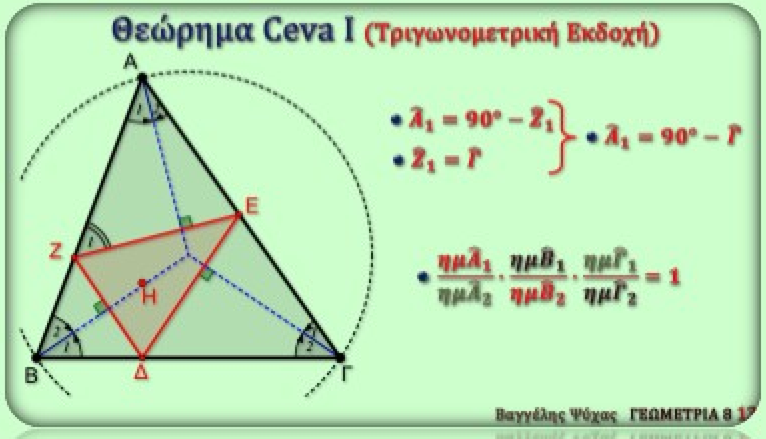
- $(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot B\Delta \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Delta \cdot \eta\mu\widehat{A}_1$
- $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Delta \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot A\Delta \cdot \eta\mu\widehat{A}_2$

- $\dfrac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \dfrac{AB \cdot \eta\mu\widehat{A}_1}{A\Gamma \cdot \eta\mu\widehat{A}_2}$

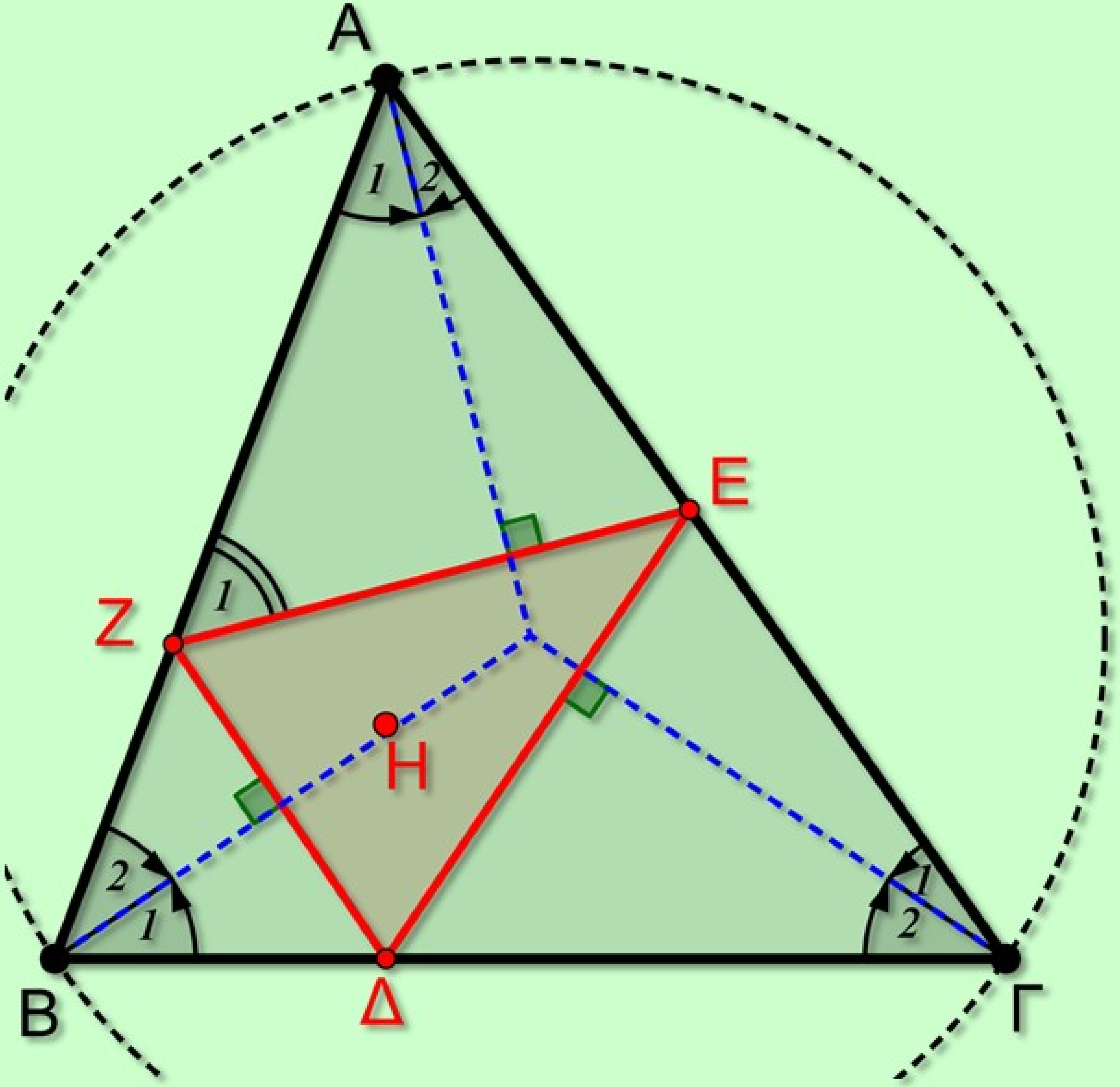
Θεώρημα Ceva I (Τριγωνομετρική Εκδοχή)



✦ Οι κάθετες από τις κορυφές τριγώνου, προς τις αντίστοιχες πλευρές του ορθικού του, συντρέχουν στο περίκεντρο του τριγώνου.



Θεώρημα Ceva I (Τριγωνομετρική Εκδοχή)

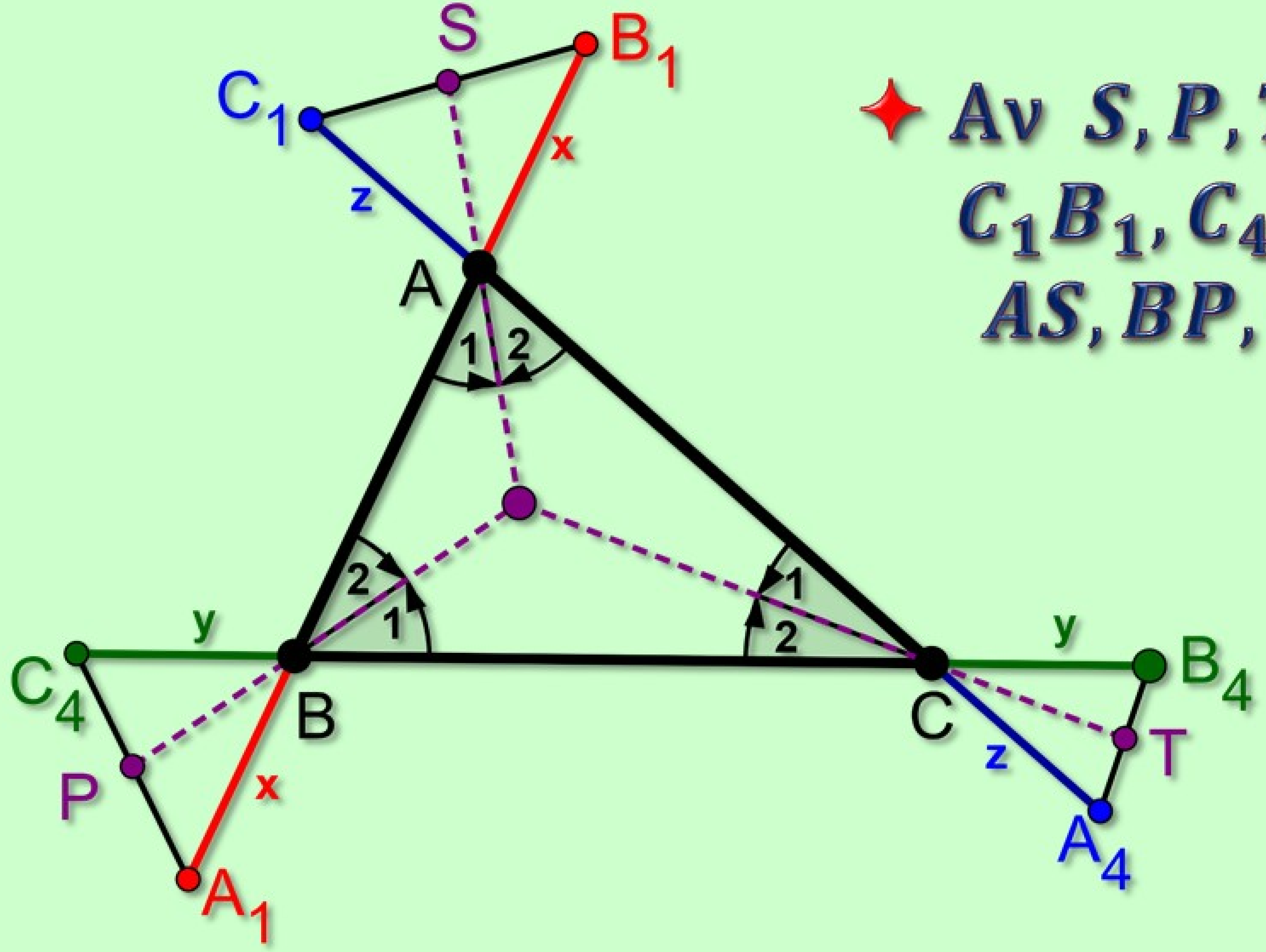


- $\widehat{A}_1 = 90° - \widehat{Z}_1$
- $\widehat{Z}_1 = \widehat{\Gamma}$

- $\widehat{A}_1 = 90° - \widehat{\Gamma}$

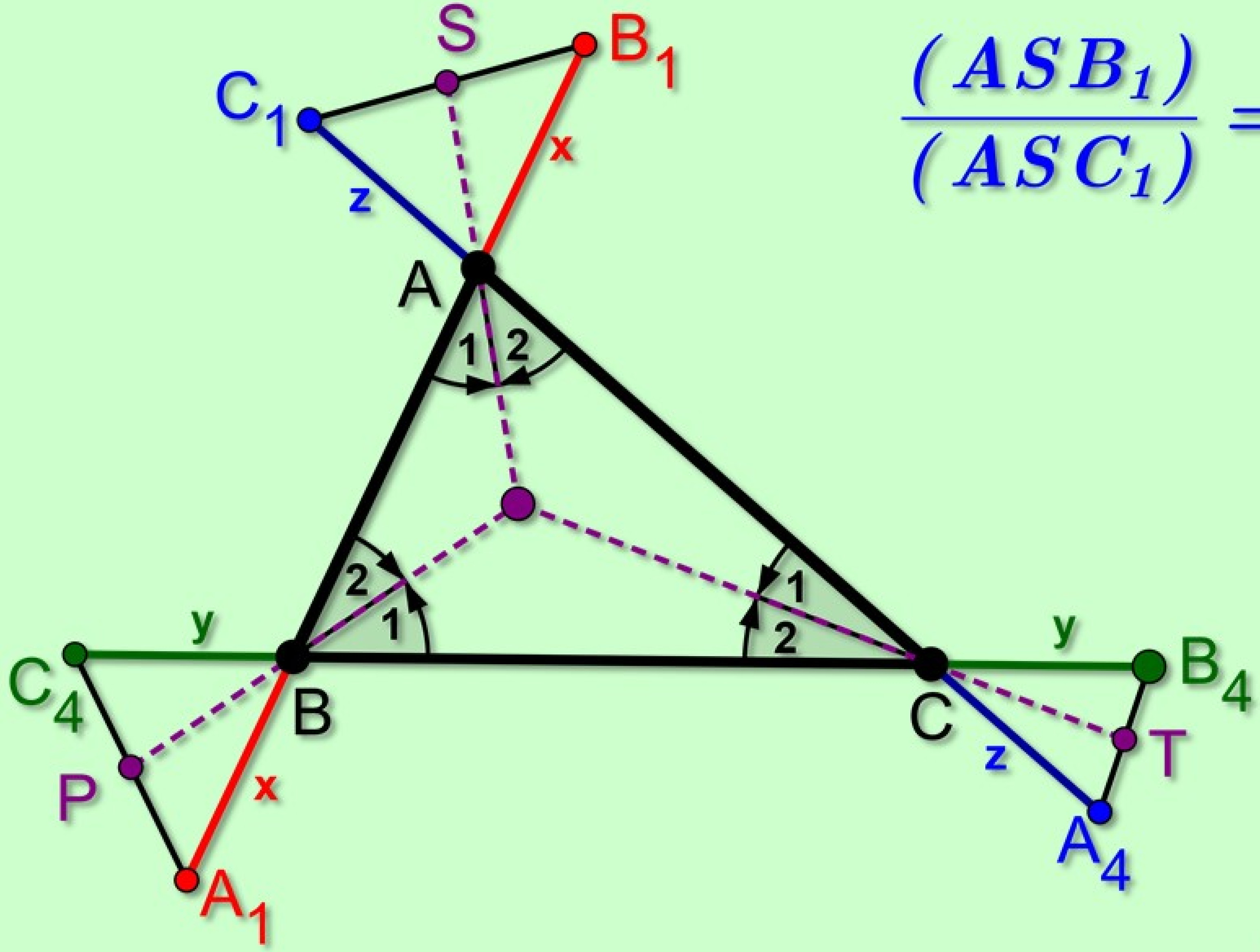
- $\dfrac{\eta\mu\widehat{A}_1}{\eta\mu\widehat{A}_2} \cdot \dfrac{\eta\mu\widehat{B}_1}{\eta\mu\widehat{B}_2} \cdot \dfrac{\eta\mu\widehat{\Gamma}_1}{\eta\mu\widehat{\Gamma}_2} = 1$

Θεώρημα Ceva II (Τριγωνομετρική Εκδοχή)



✦ Αν S, P, T είναι τα μέσα των C_1B_1, C_4A_1, A_4B_4 τότε οι AS, BP, CT συντρέχουν.

Θεώρημα Ceva II (Τριγωνομετρική Εκδοχή)



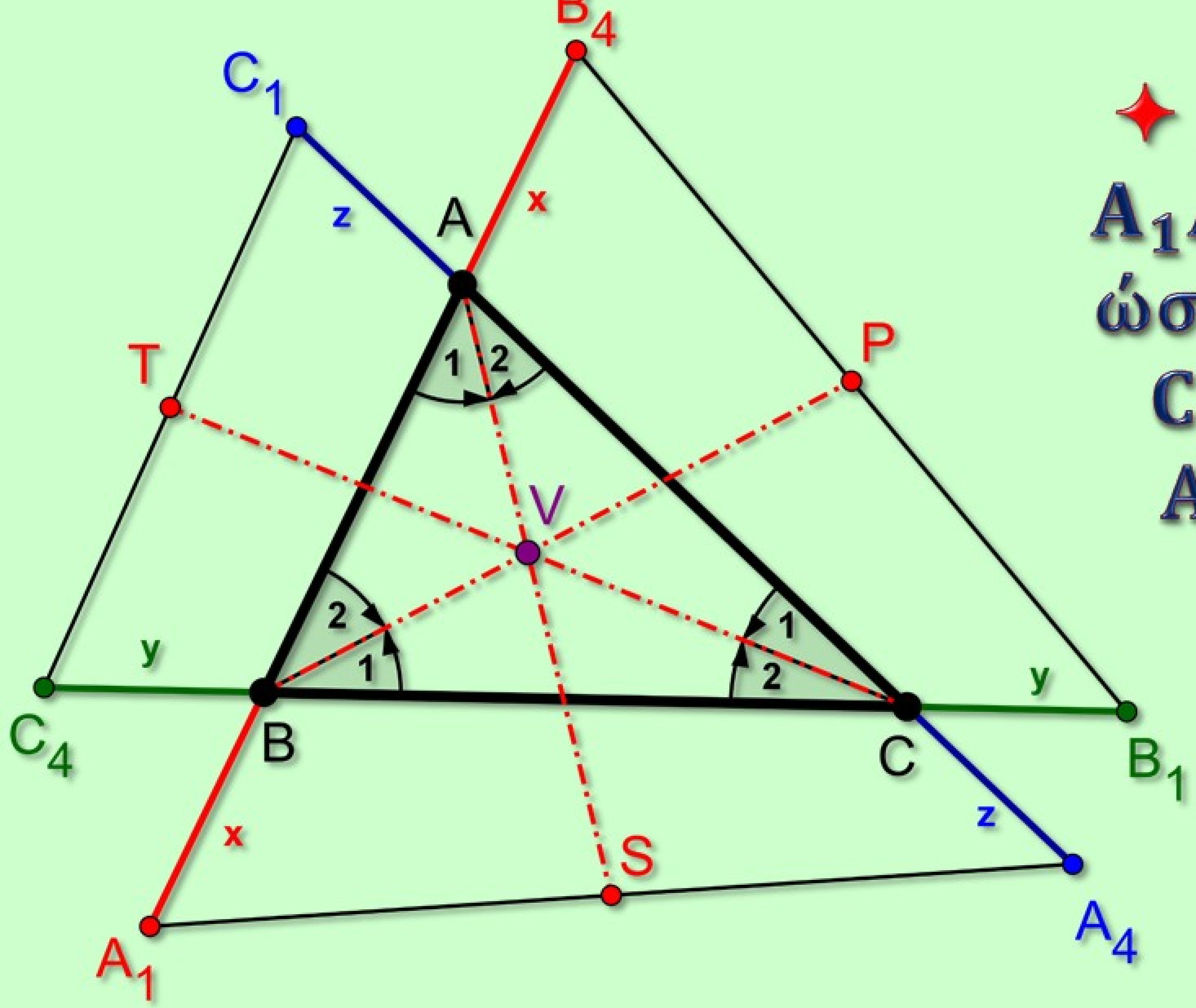
$$\frac{(ASB_1)}{(ASC_1)} = \frac{\frac{1}{2}x\cdot AS\cdot \eta\mu\hat{A}_1}{\frac{1}{2}z\cdot AS\cdot \eta\mu\hat{A}_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\eta\mu\hat{A}_2} = \frac{z}{x}$$

$$\cdots \Rightarrow \frac{\eta\mu\hat{B}_1}{\eta\mu\hat{B}_2} = \frac{x}{y}$$

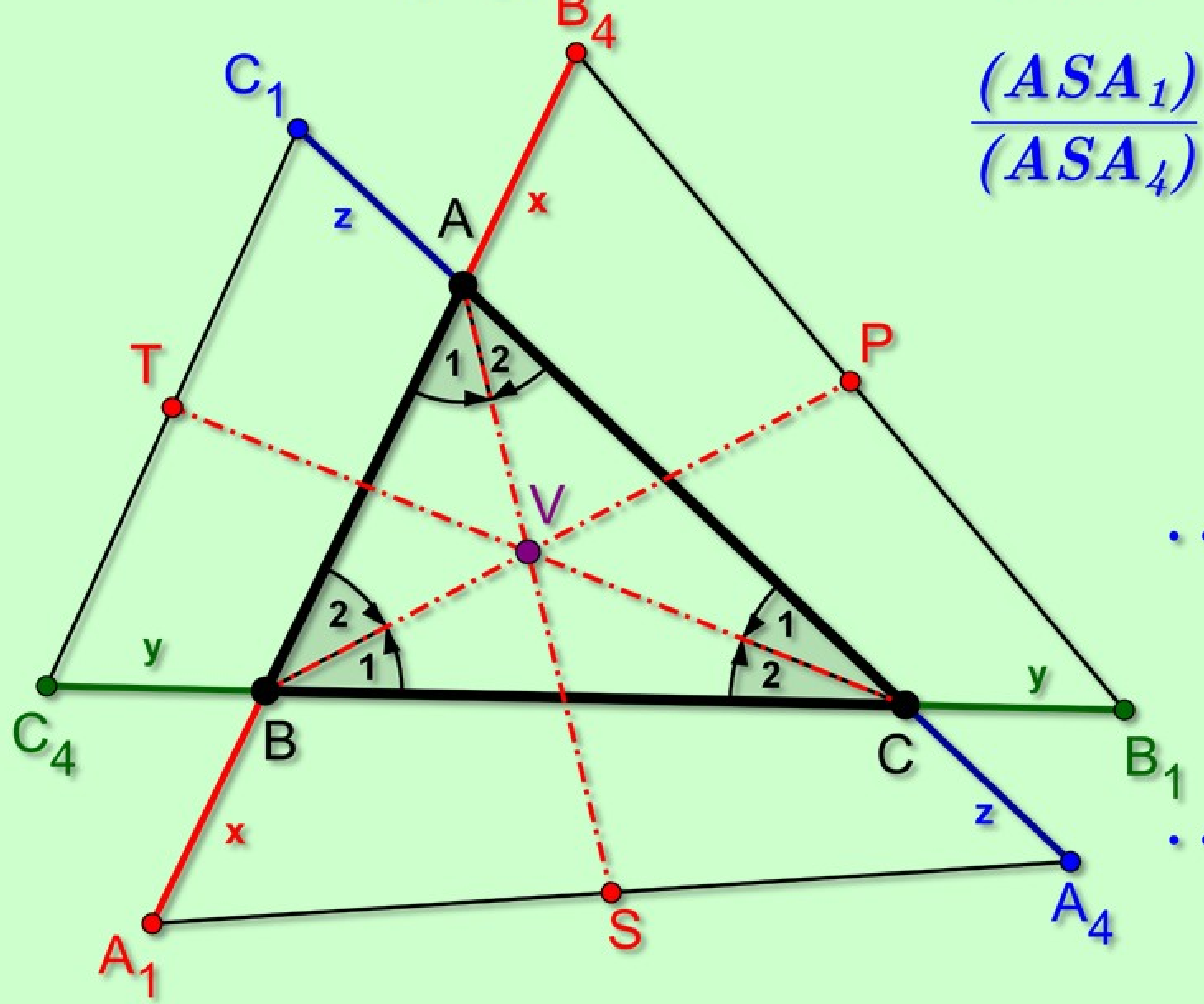
$$\cdots \Rightarrow \frac{\eta\mu\hat{C}_1}{\eta\mu\hat{C}_2} = \frac{y}{z}$$

Θεώρημα Ceva III (Τριγωνομετρική Εκδοχή)



✦ Αν S είναι το μέσο του A_1A_4 και P,T είναι σημεία ώστε: $B_4P = \lambda \cdot B_4B_1$ και $C_1T = \lambda \cdot C_1C_4$ τότε οι AS,BP,CT συντρέχουν.

Θεώρημα Ceva III (Τριγωνομετρική Εκδοχή)



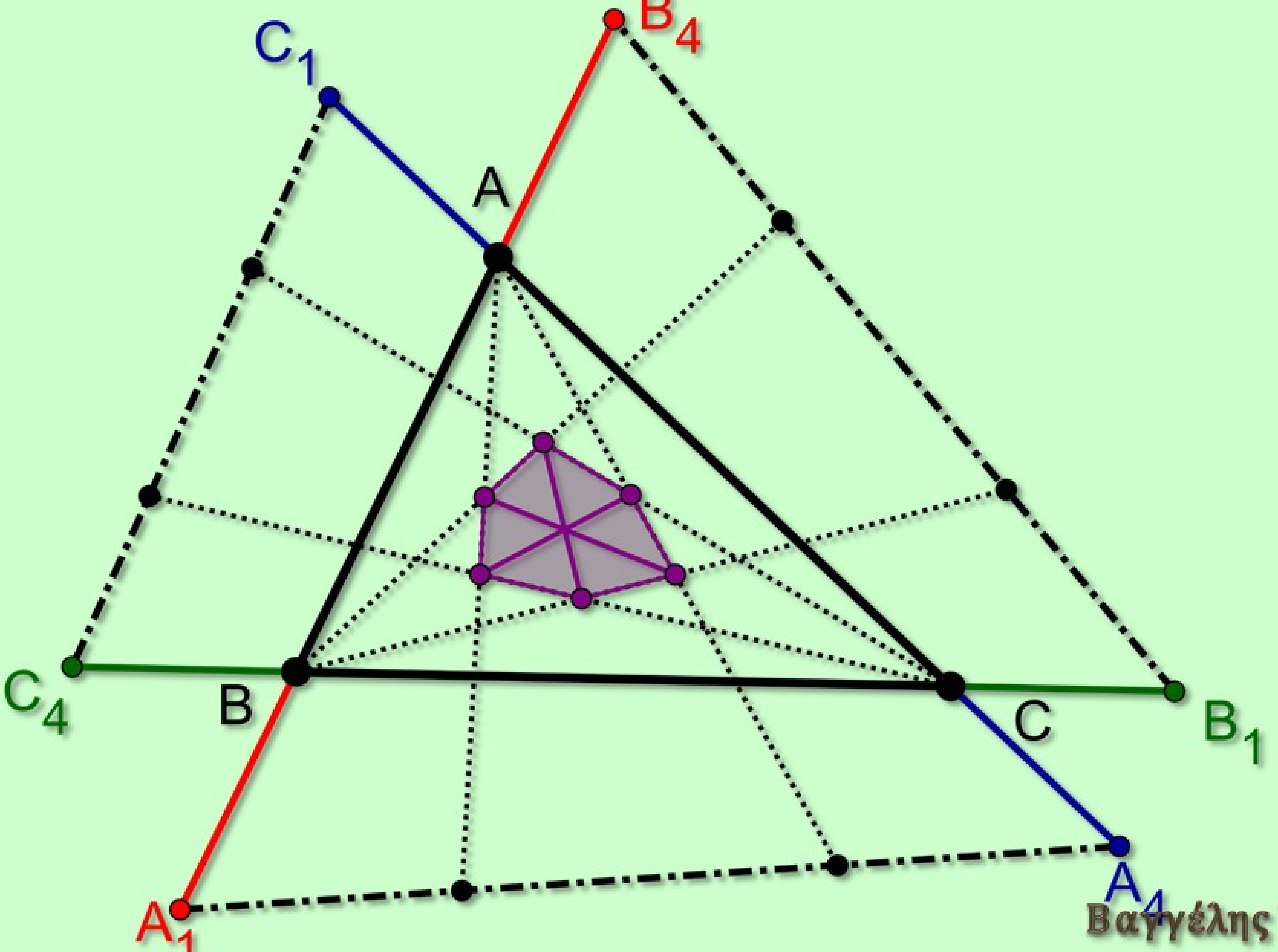
$$\frac{(ASA_1)}{(ASA_4)} = \frac{\frac{1}{2}AS(c+x)\eta\mu\hat{A}_1}{\frac{1}{2}AS(b+z)\eta\mu\hat{A}_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\eta\mu\hat{A}_2} = \frac{b+z}{c+x}$$

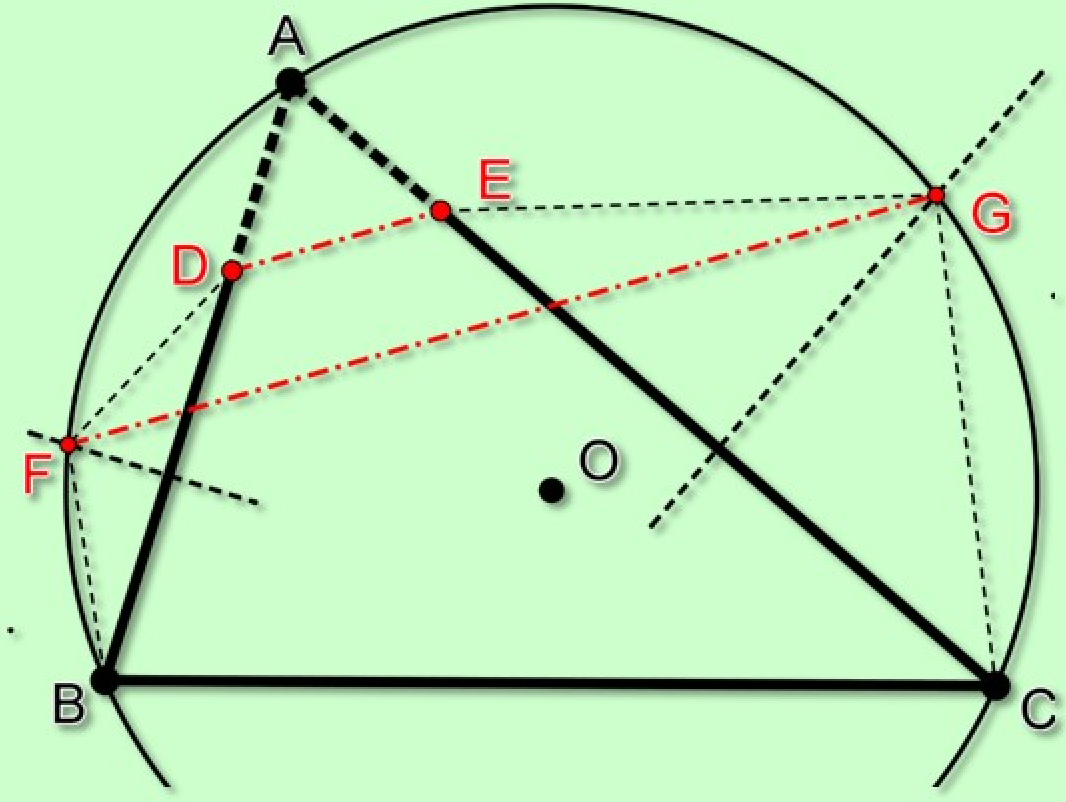
$$\cdots \Rightarrow \frac{\eta\mu\hat{B}_1}{\eta\mu\hat{B}_2} = \frac{(\lambda-1)(c+x)}{\lambda(a+y)}$$

$$\cdots \Rightarrow \frac{\eta\mu\hat{C}_1}{\eta\mu\hat{C}_2} = \frac{\lambda(a+y)}{(\lambda-1)(b+z)}$$

Θεώρημα Ceva IV (Τριγωνομετρική Εκδοχή)

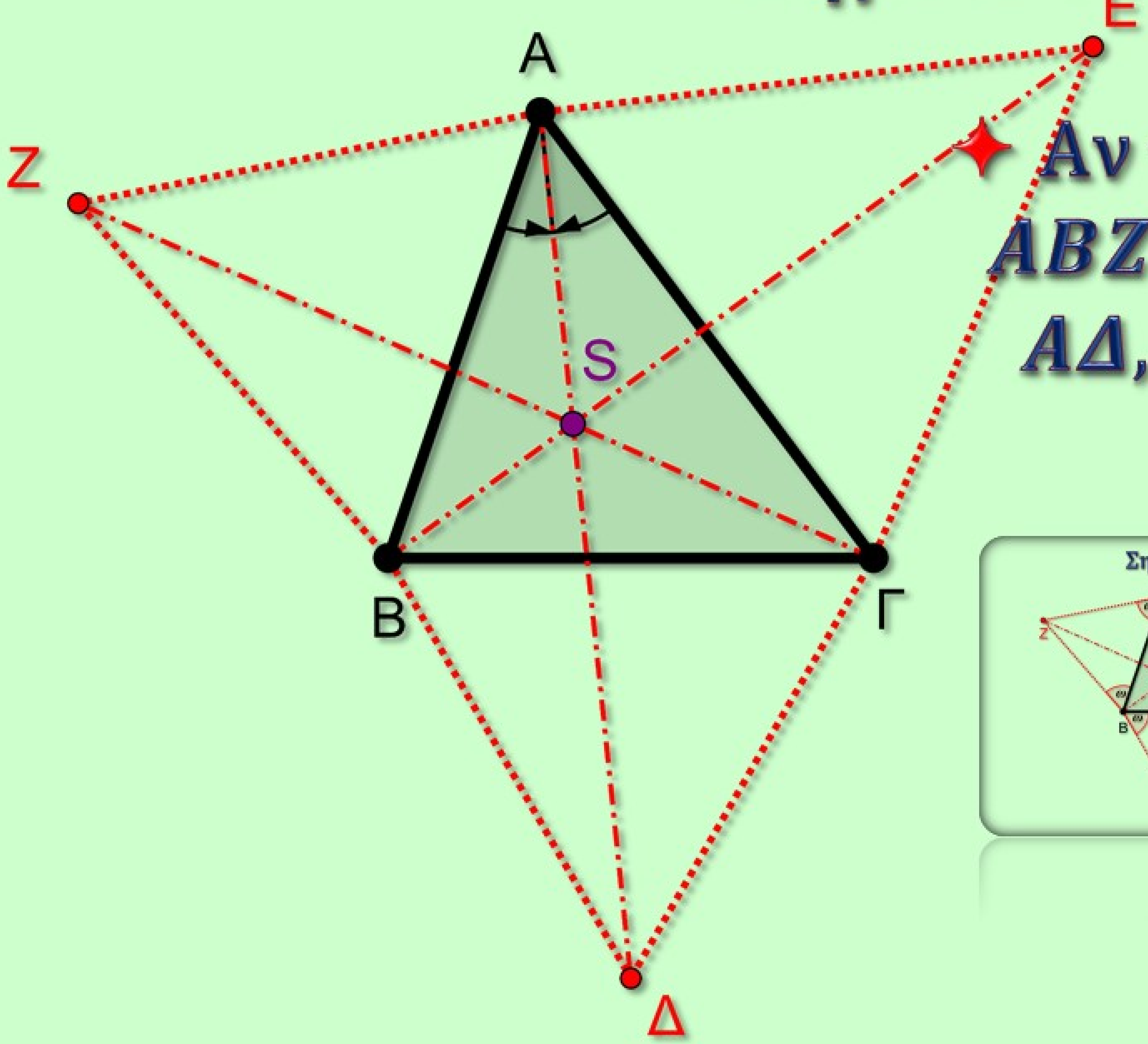


ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 8

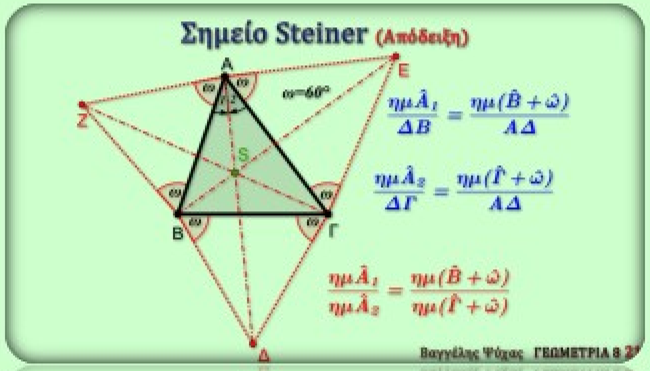


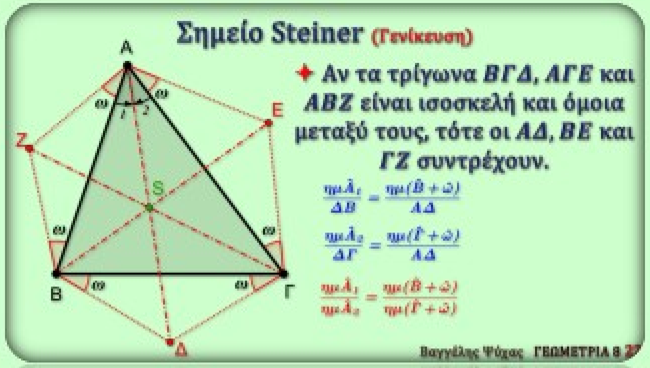
Χαρακτηριστικά Σημεία Τριγώνου

Σημείο Steiner

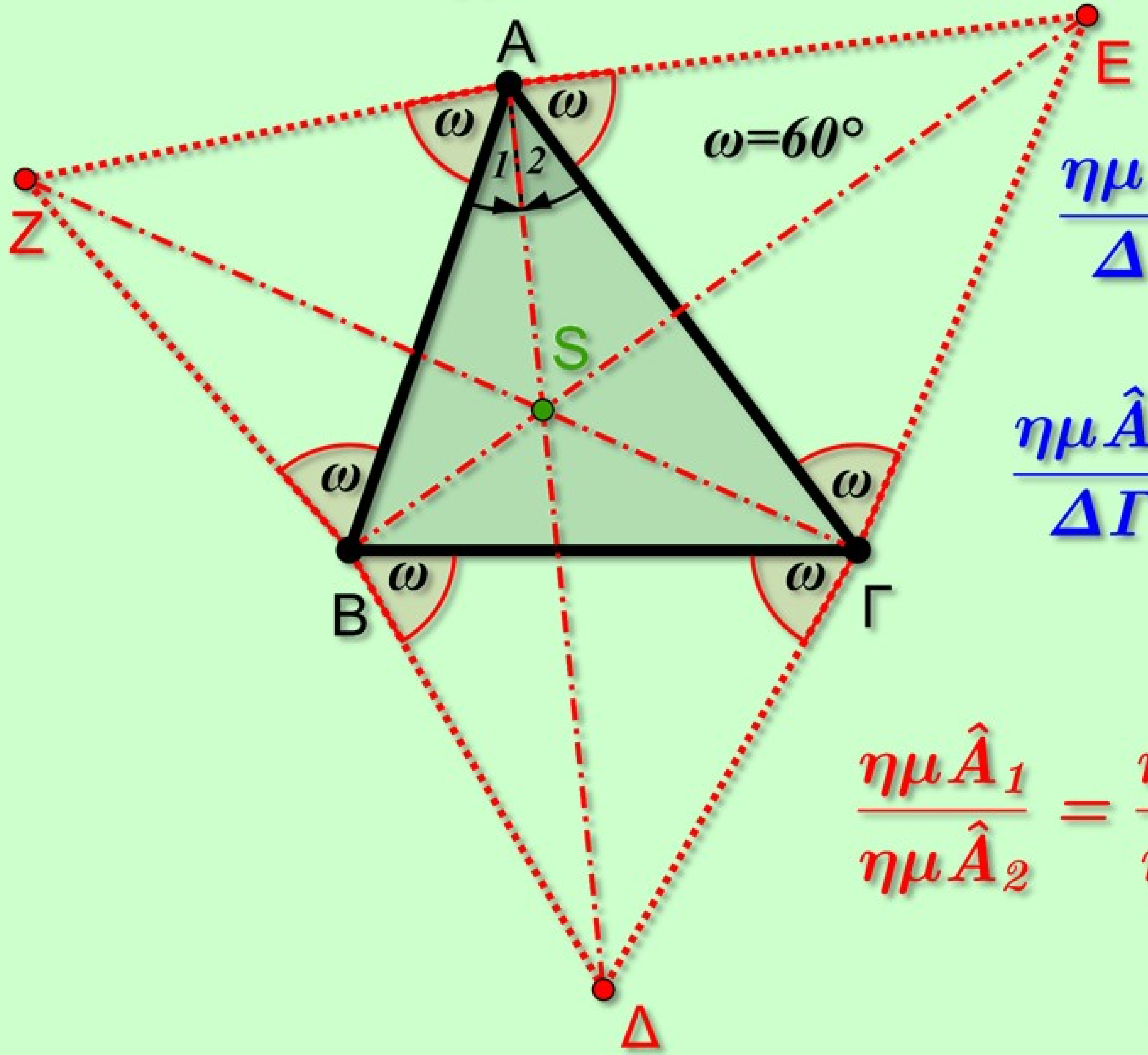


✦ Αν τα τρίγωνα $ΒΓΔ$, $ΑΓΕ$ και $ΑΒΖ$ είναι ισόπλευρα, τότε οι $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$ συντρέχουν.





Σημείο Steiner (Απόδειξη)

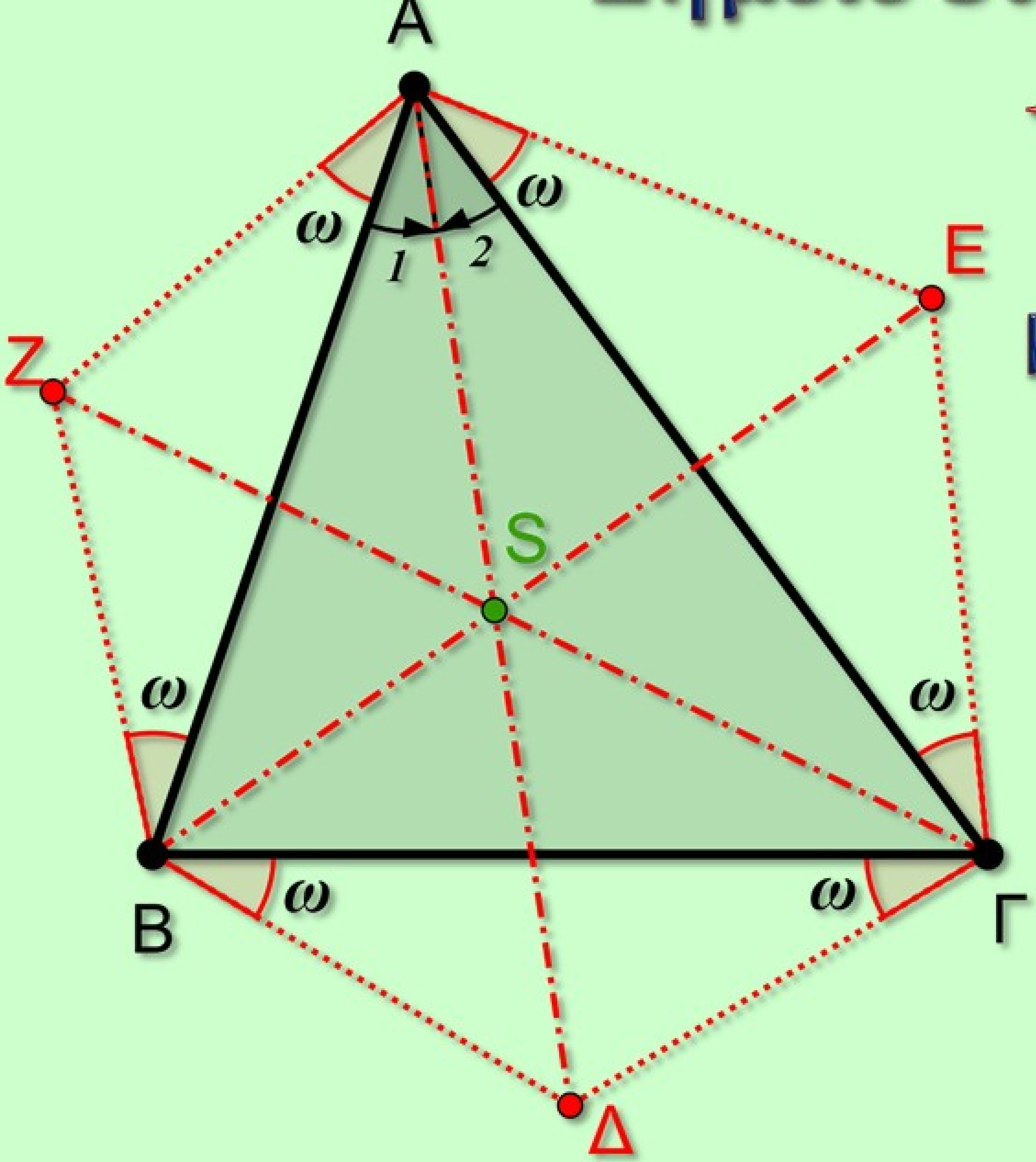


$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\Delta B} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{\omega})}{A\Delta}$$

$$\frac{\eta\mu\hat{A}_2}{\Delta\Gamma} = \frac{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{\omega})}{A\Delta}$$

$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\eta\mu\hat{A}_2} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{\omega})}{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{\omega})}$$

Σημείο Steiner (Γενίκευση)



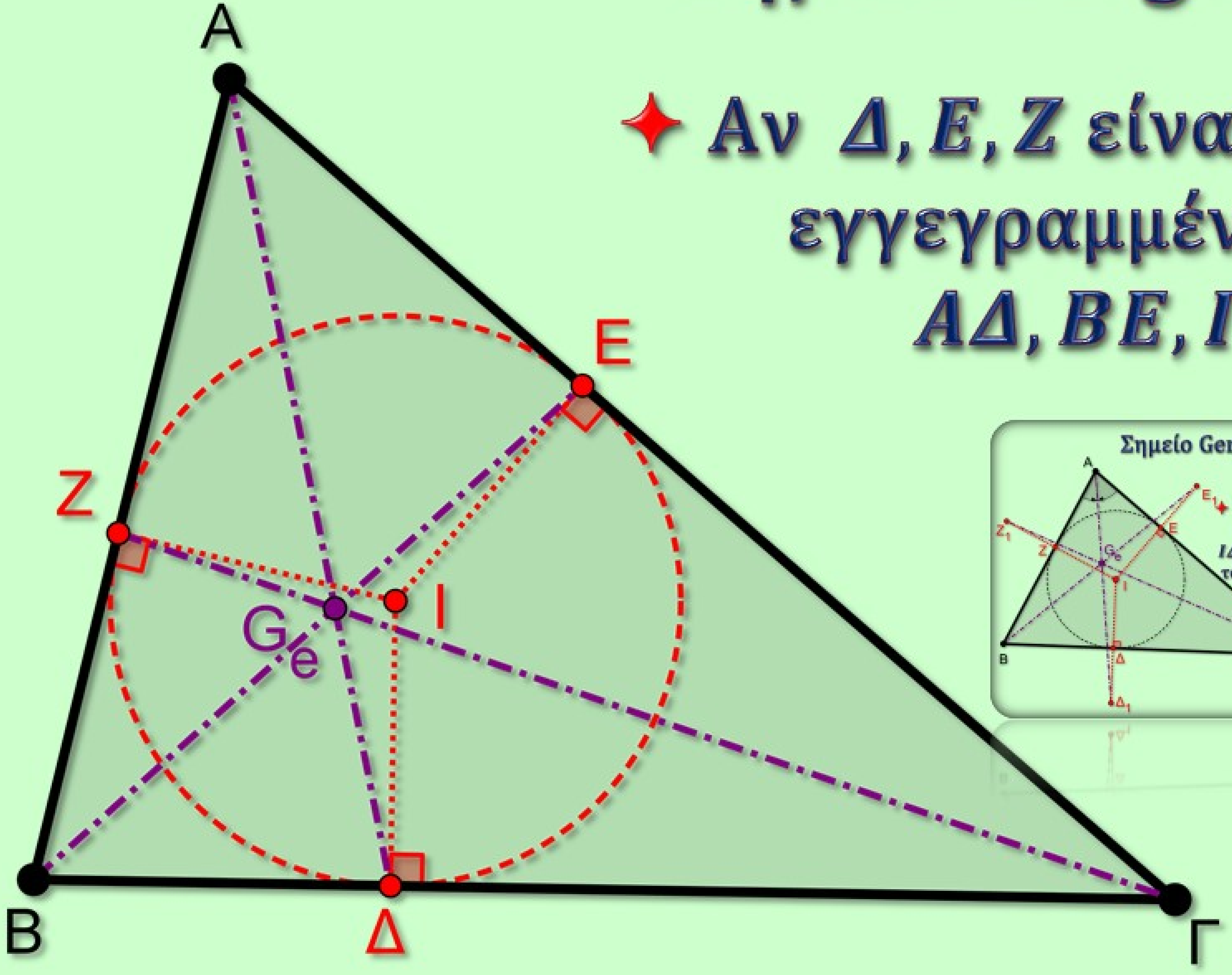
✦ Αν τα τρίγωνα $ΒΓΔ$, $ΑΓΕ$ και $ΑΒΖ$ είναι ισοσκελή και όμοια μεταξύ τους, τότε οι $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$ συντρέχουν.

$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\Delta B} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{\omega})}{A\Delta}$$

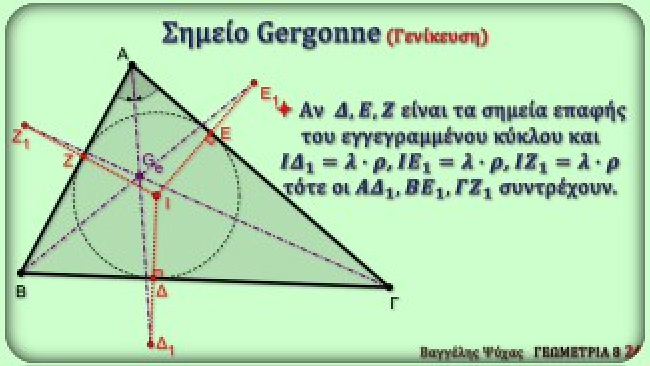
$$\frac{\eta\mu\hat{A}_2}{\Delta \Gamma} = \frac{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{\omega})}{A\Delta}$$

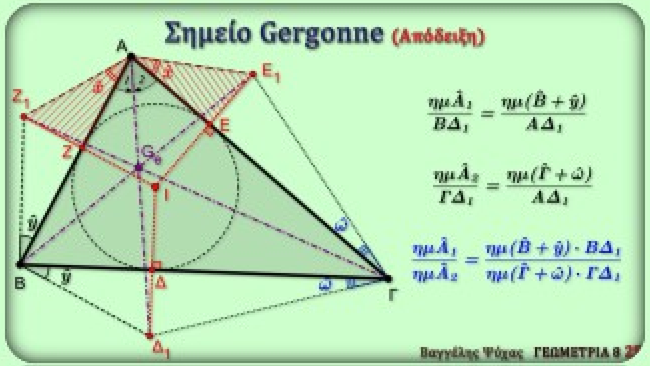
$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\eta\mu\hat{A}_2} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{\omega})}{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{\omega})}$$

Σημείο Gergonne

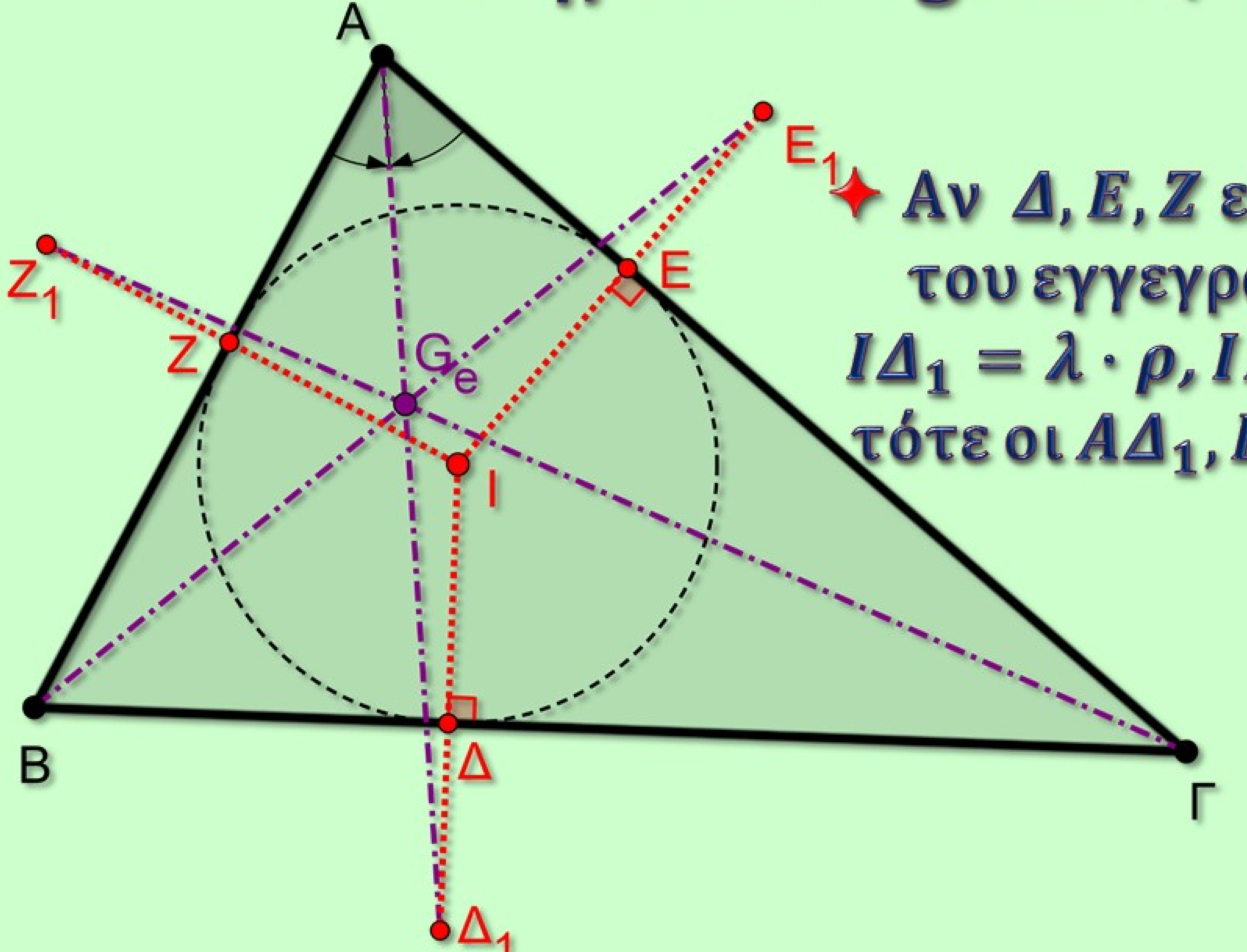


✦ Αν Δ, E, Z είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου, τότε οι $A\Delta, BE, \Gamma Z$ συντρέχουν.



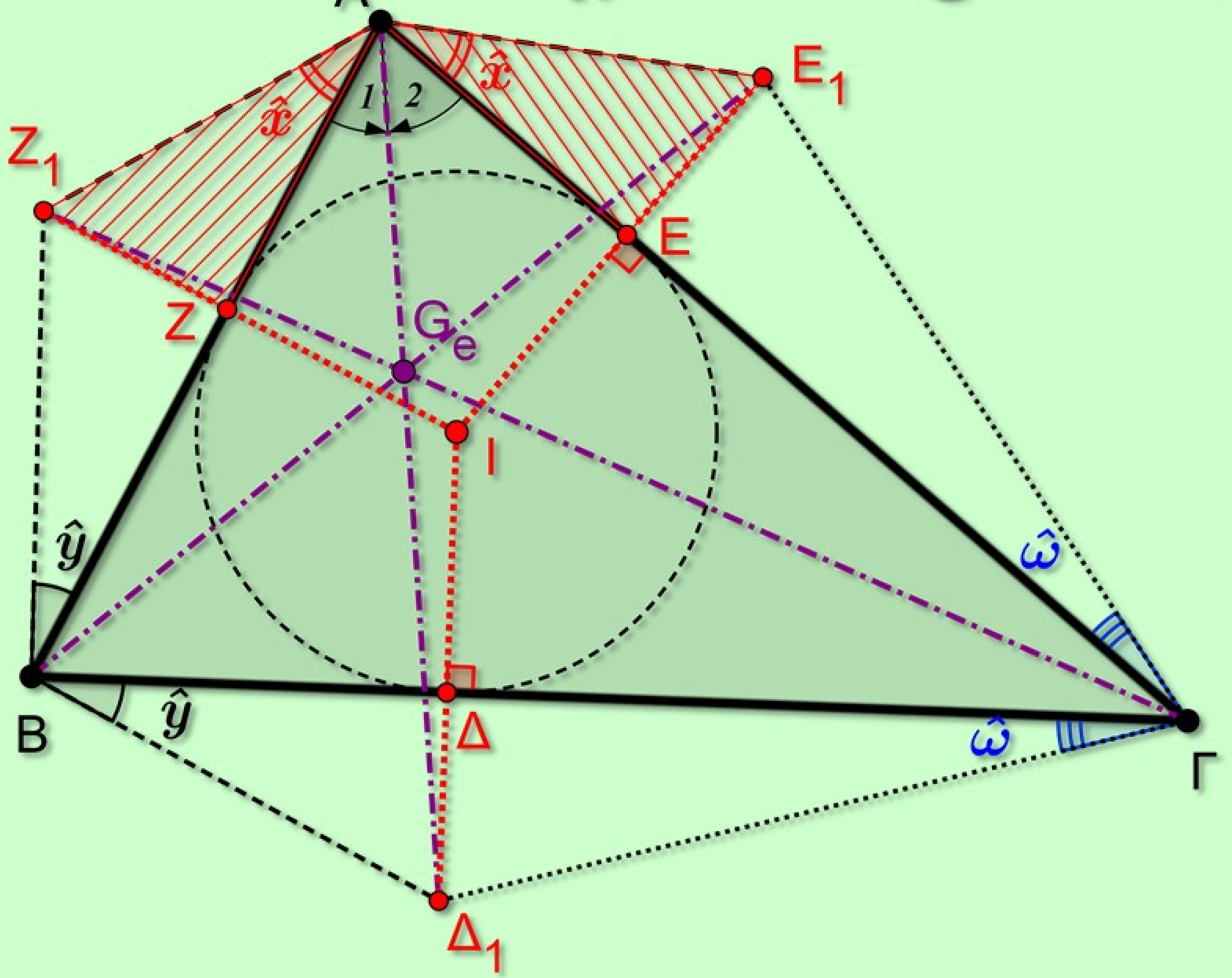


Σημείο Gergonne (Γενίκευση)



✦ Αν Δ, E, Z είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου και $I\Delta_1 = \lambda \cdot \rho, IE_1 = \lambda \cdot \rho, IZ_1 = \lambda \cdot \rho$ τότε οι $A\Delta_1, BE_1, \Gamma Z_1$ συντρέχουν.

Σημείο Gergonne (Απόδειξη)

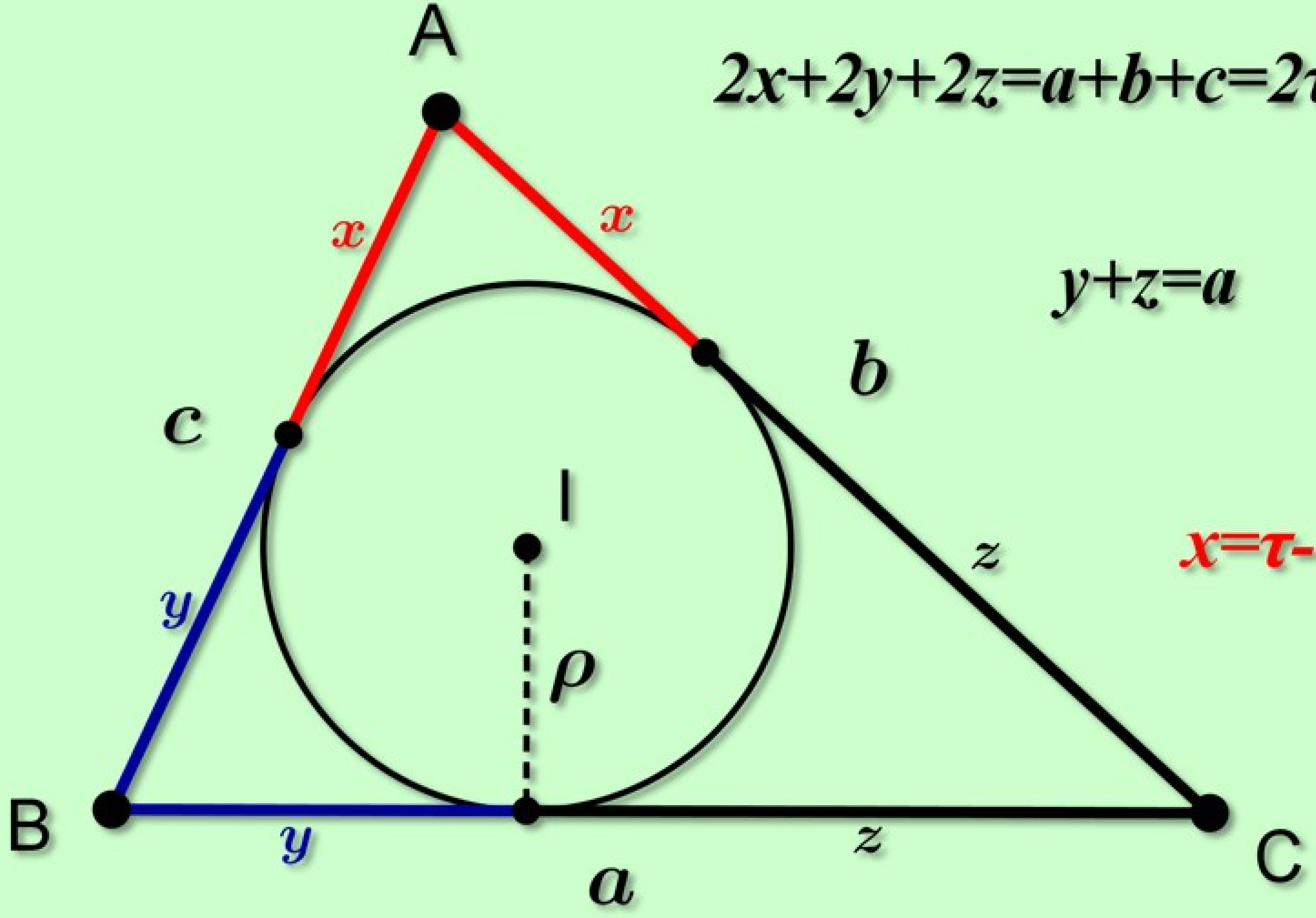


$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{B\Delta_1} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{y})}{A\Delta_1}$$

$$\frac{\eta\mu\hat{A}_2}{\Gamma\Delta_1} = \frac{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{\omega})}{A\Delta_1}$$

$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\eta\mu\hat{A}_2} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{y})\cdot B\Delta_1}{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{\omega})\cdot \Gamma\Delta_1}$$

Εφαπτόμενα Εγγεγραμμένου

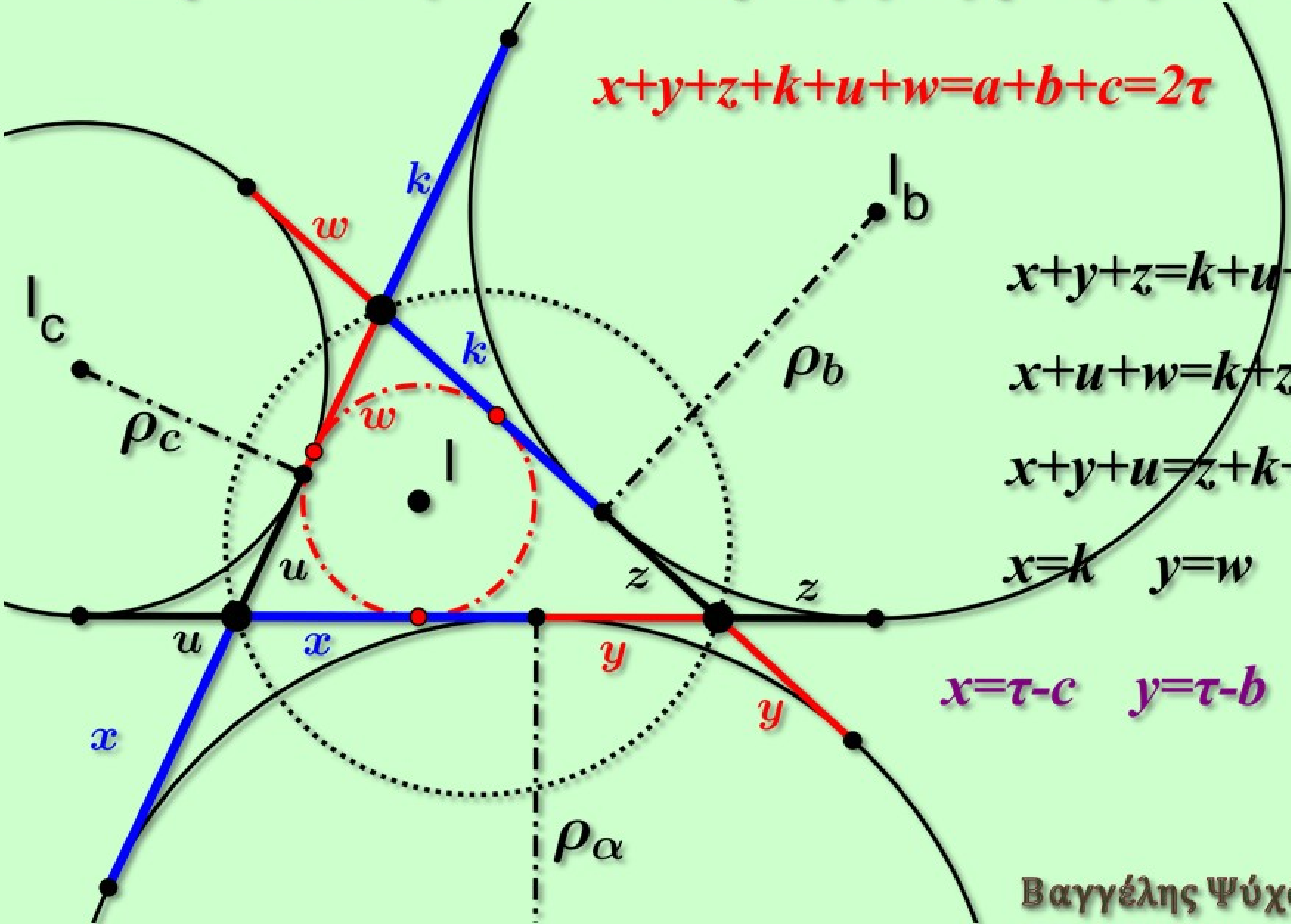


$2x+2y+2z=a+b+c=2\tau \Leftrightarrow x+y+z=\tau$

$y+z=a$ $x+z=b$ $x+y=c$

$x=\tau-a$ $y=\tau-b$ $z=\tau-c$

Εφαπτόμενα Παρεγγεγραμμένων



$x+y+z+k+u+w=a+b+c=2\tau$

$x+y+z=k+u+w=\tau$

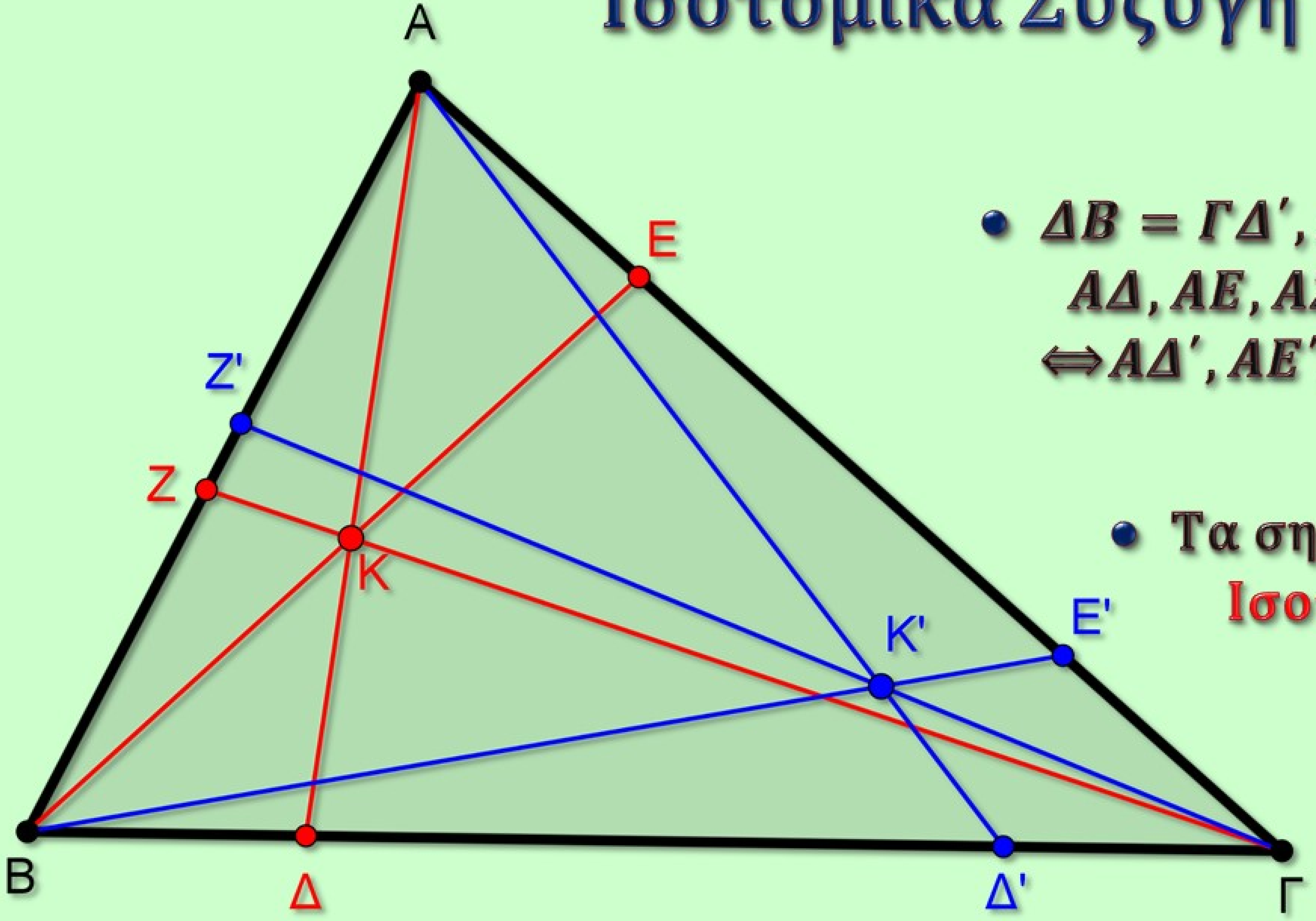
$x+u+w=k+z+y=\tau$

$x+y+u=z+k+w=\tau$

$x=k \quad y=w \quad k=u$

$x=\tau-c \quad y=\tau-b \quad z=\tau-a$

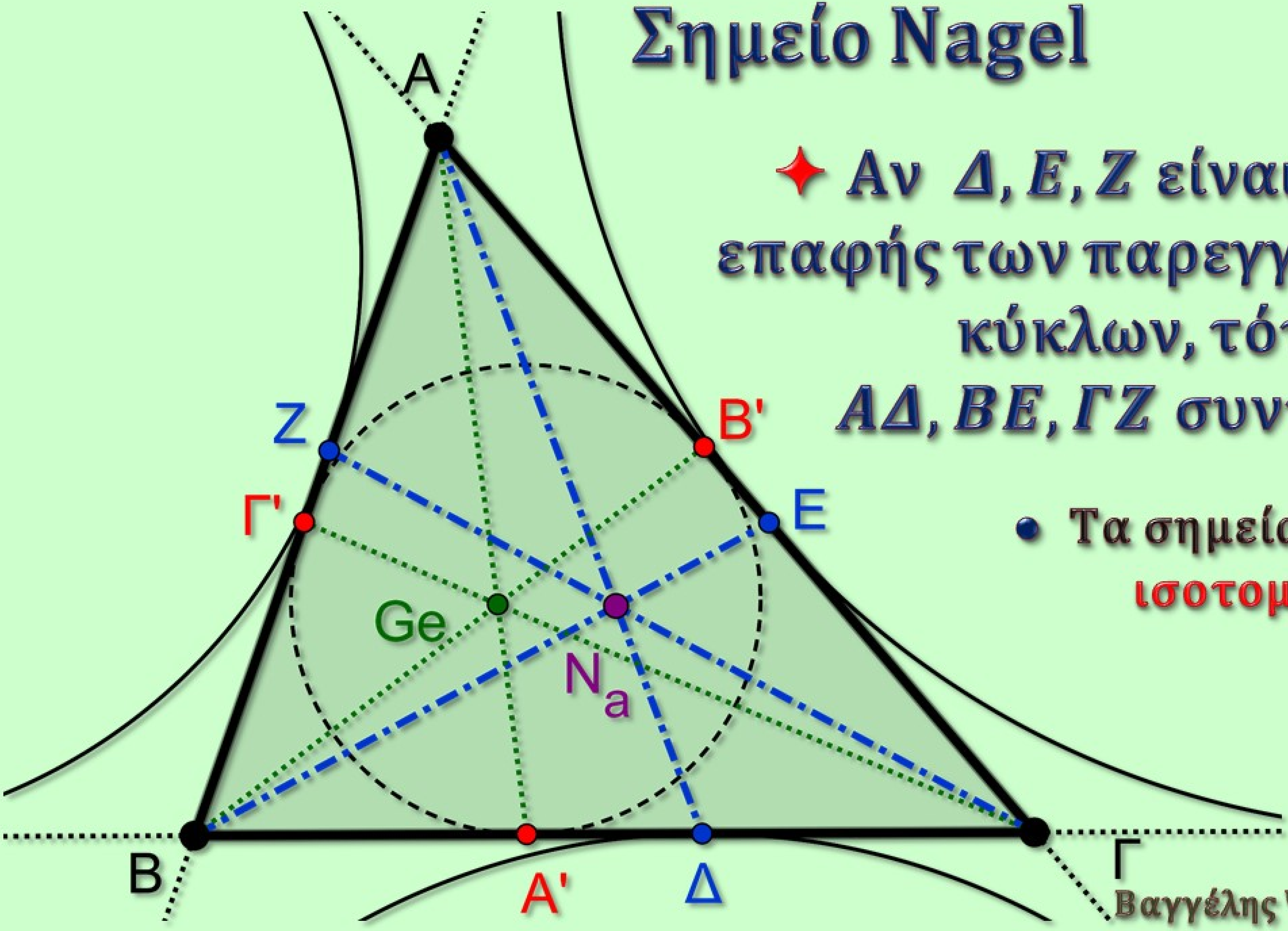
Ισοτομικά Συζυγή



- $\Delta B = \Gamma\Delta', AE = \Gamma E', AZ = AZ'$
  $A\Delta, AE, AZ$ συντρέχουν $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow A\Delta', AE', AZ'$ συντρέχουν.

- Τα σημεία K, K' λέγονται **Ισοτομικά συζυγή**.

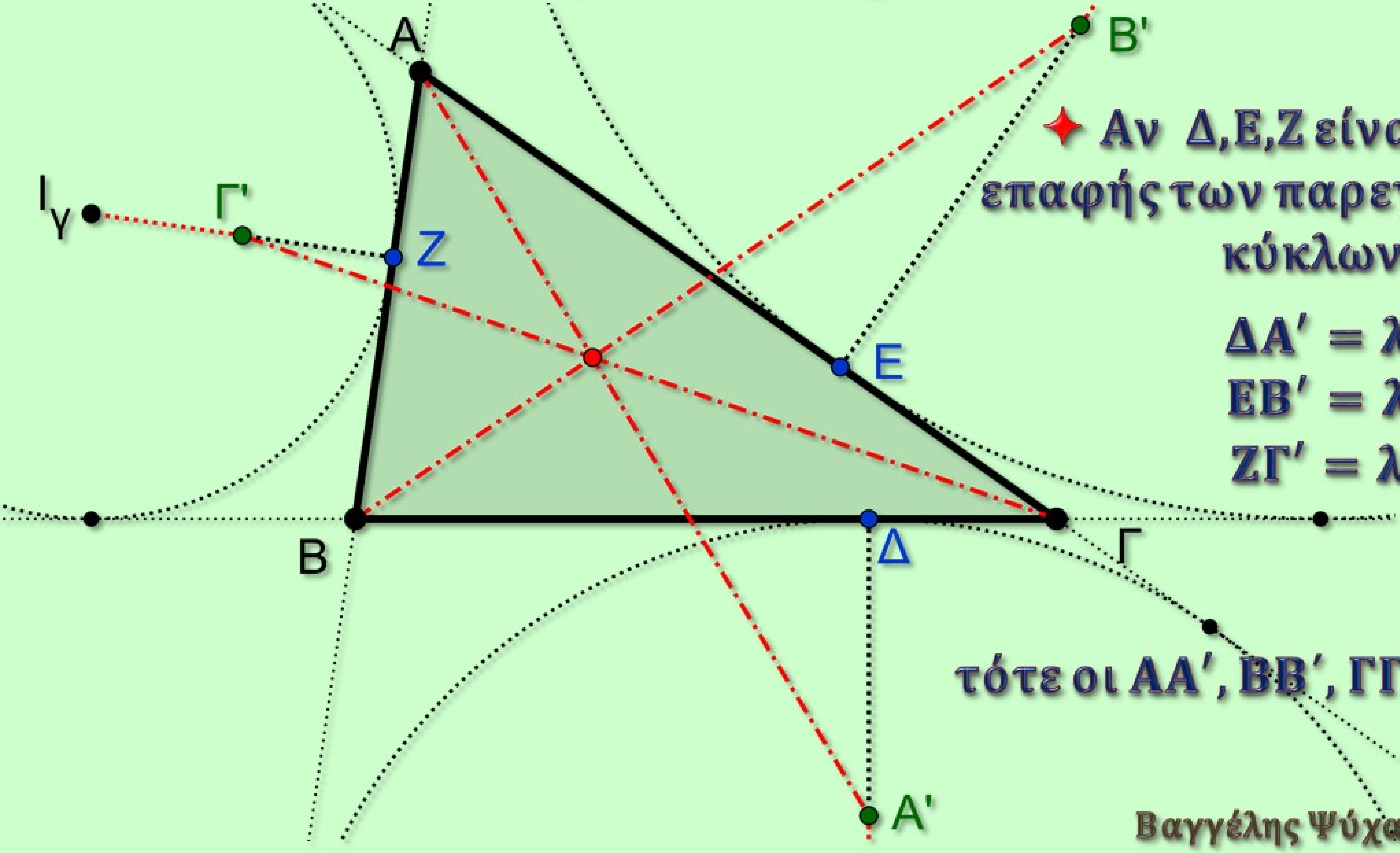
Σημείο Nagel



✦ Αν Δ, E, Z είναι τα σημεία επαφής των παρεγγεγραμμένων κύκλων, τότε οι $A\Delta, BE, \Gamma Z$ συντρέχουν.

- Τα σημεία Ge και Na είναι ισοτομικά συζυγή.

Σημείο Nagel (Γενίκευση)

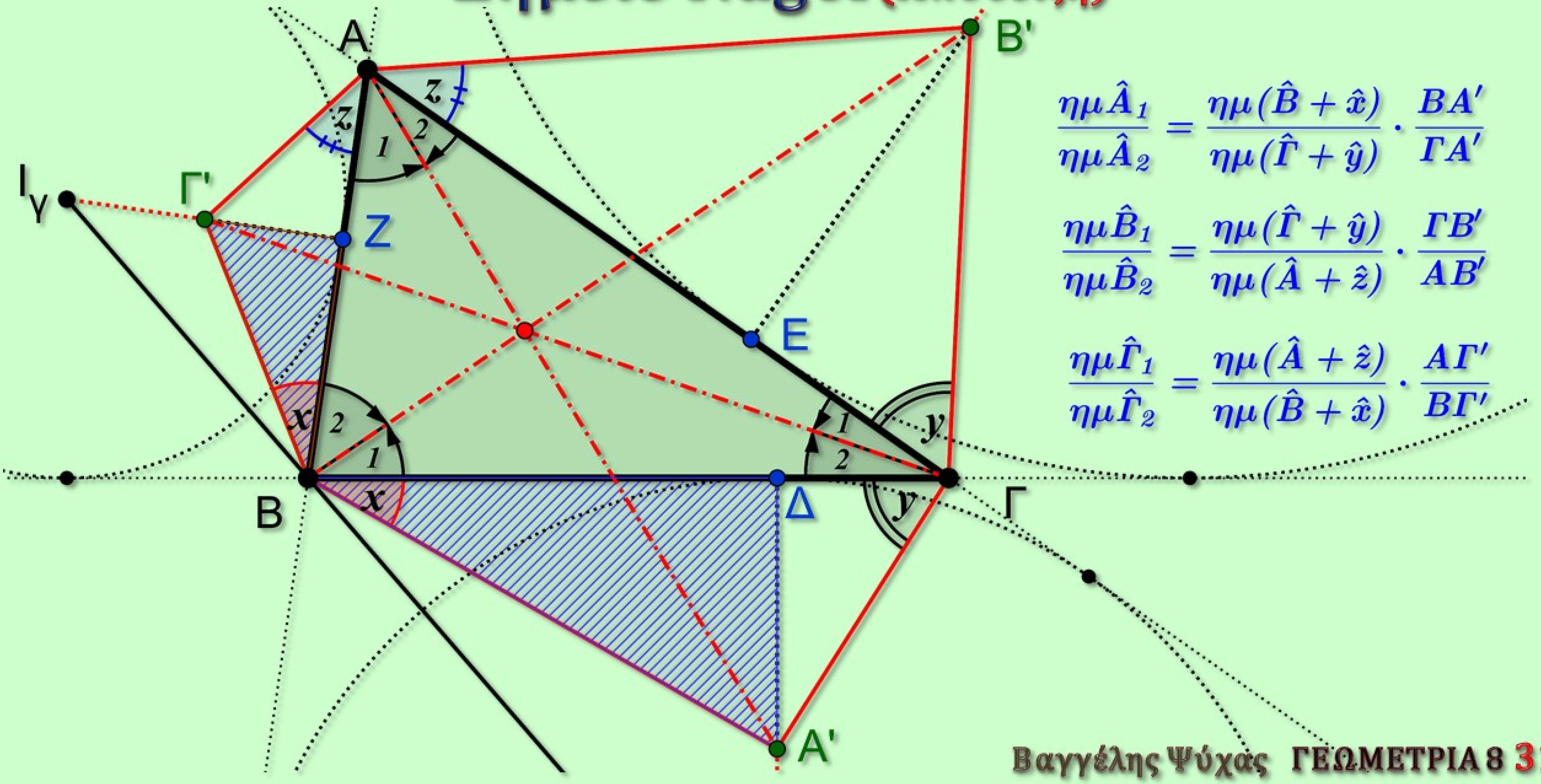


✦ Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα σημεία επαφής των παρεγγεγραμμένων κύκλων και

$$\Delta A' = \lambda \cdot \rho_\alpha$$
$$EB' = \lambda \cdot \rho_\beta$$
$$Z\Gamma' = \lambda \cdot \rho_\gamma$$

τότε οι AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ συντρέχουν.

Σημείο Nagel (Απόδειξη)



$$\frac{\eta\mu\hat{A}_1}{\eta\mu\hat{A}_2} = \frac{\eta\mu(\hat{B}+\hat{x})}{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{y})}\cdot\frac{BA'}{\Gamma A'}$$

$$\frac{\eta\mu\hat{B}_1}{\eta\mu\hat{B}_2} = \frac{\eta\mu(\hat{\Gamma}+\hat{y})}{\eta\mu(\hat{A}+\hat{z})}\cdot\frac{\Gamma B'}{AB'}$$

$$\frac{\eta\mu\hat{\Gamma}_1}{\eta\mu\hat{\Gamma}_2} = \frac{\eta\mu(\hat{A}+\hat{z})}{\eta\mu(\hat{B}+\hat{x})}\cdot\frac{A\Gamma'}{B\Gamma'}$$