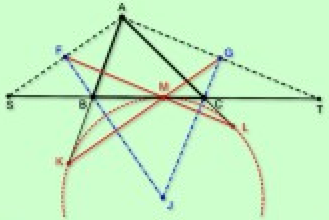
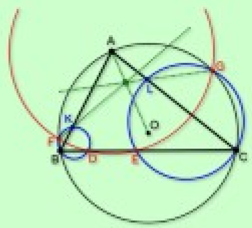
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



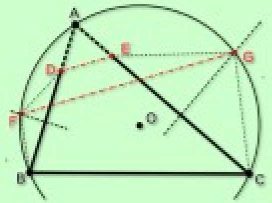
Σημείο Miquel Τριγώνου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



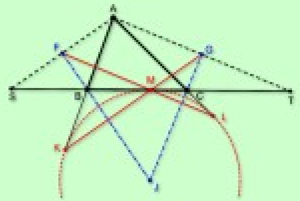
Σημείο Miquel Τετραπλεύρου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



Θεώρημα Θαλή

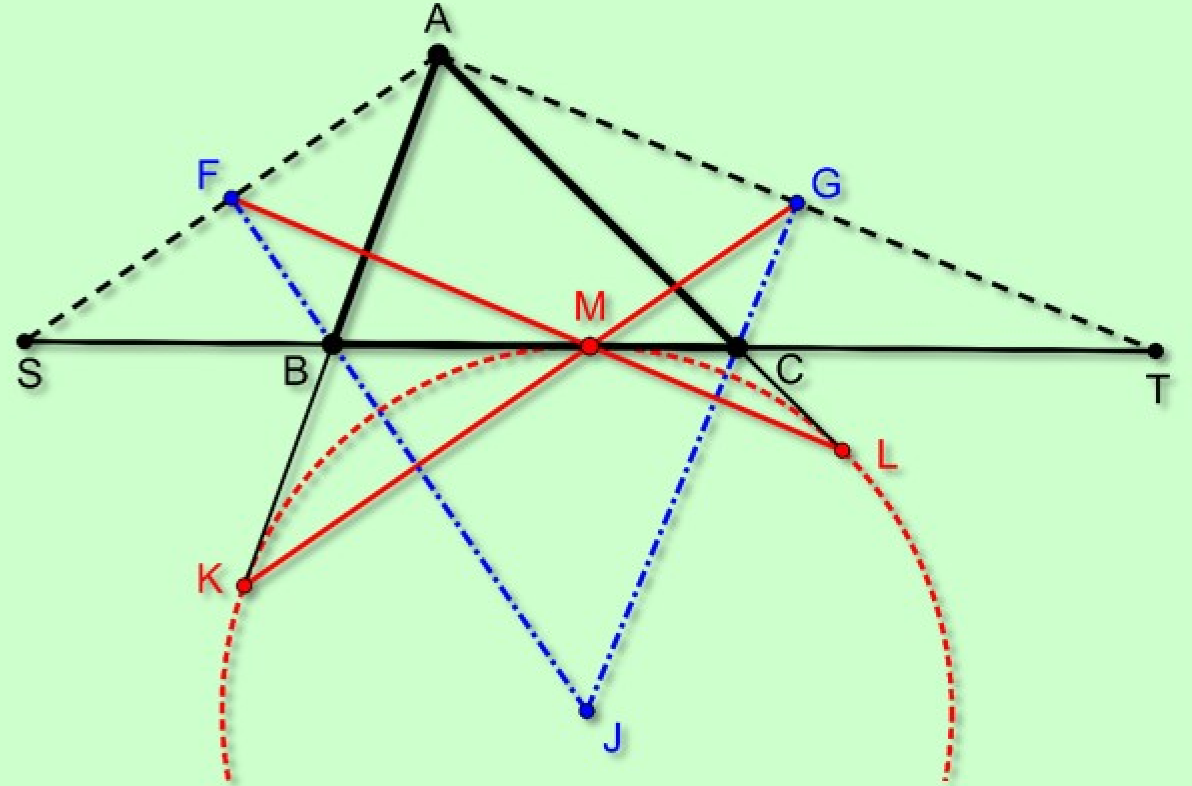
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



Αρμονική Διαίρεση

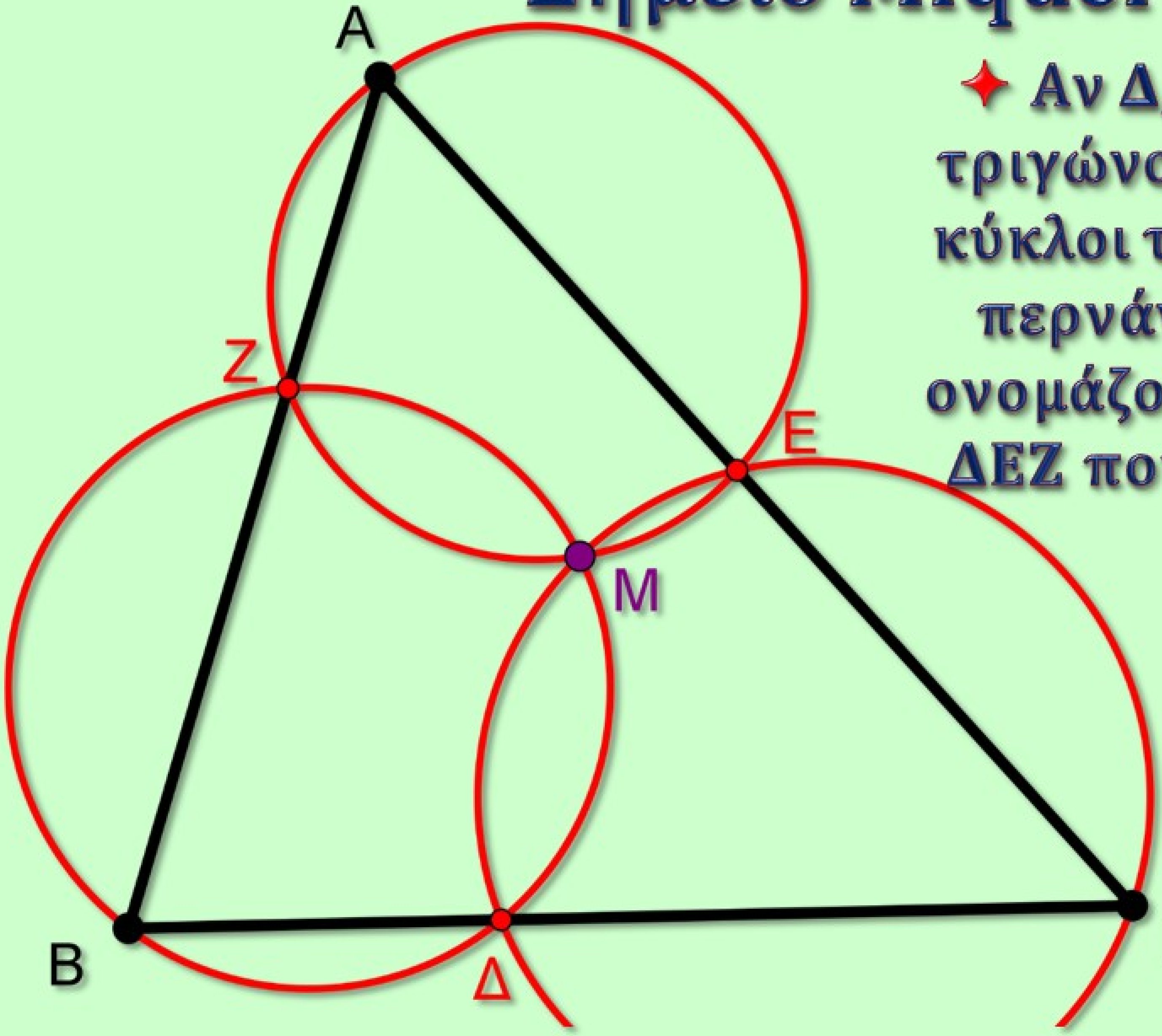
Βαγγέλης Ψύχας

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



Σημείο Miquel Τριγώνου

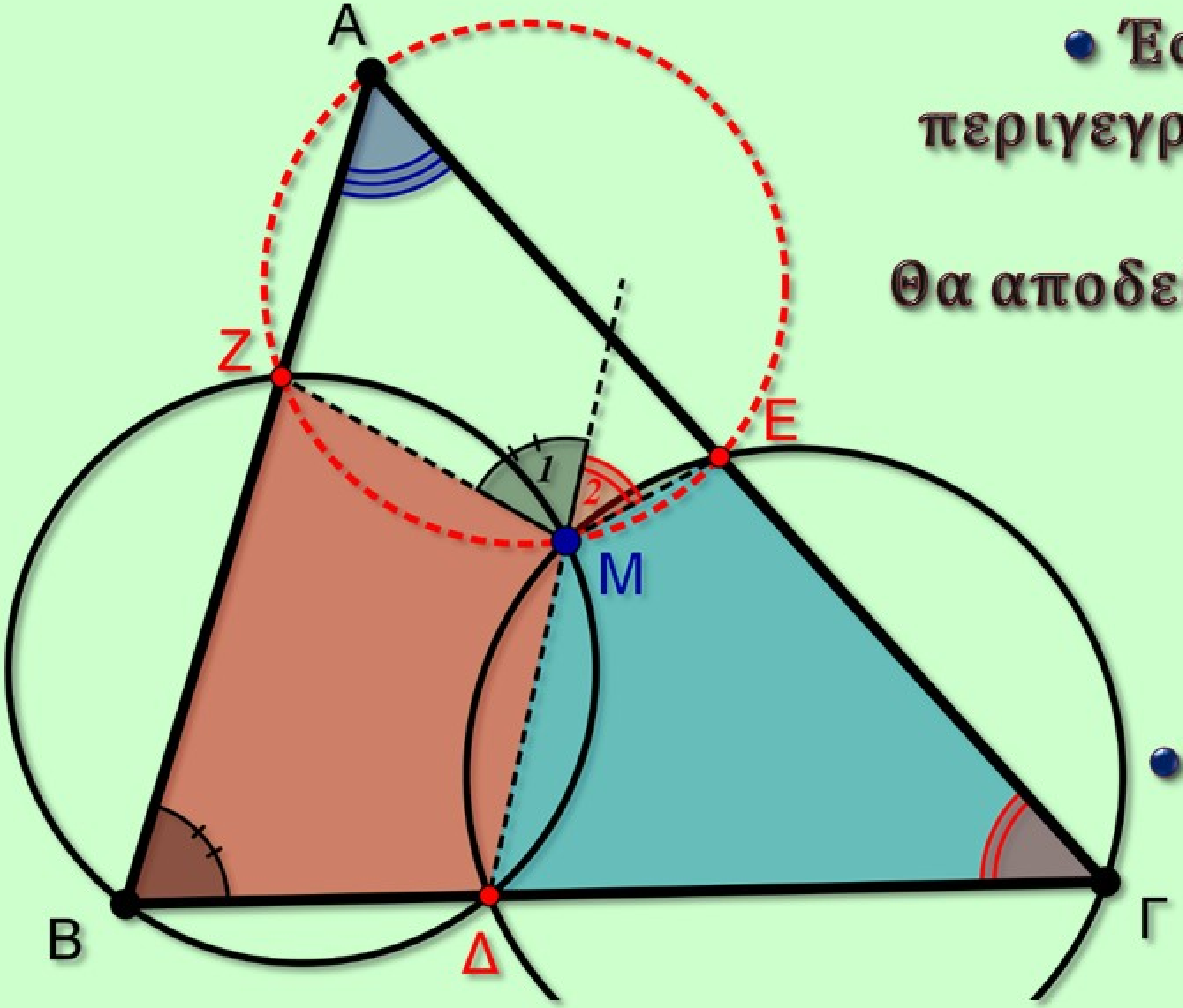
Σημείο Miquel Τριγώνου



✦ Αν Δ, Ε, Ζ είναι σημεία των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, τότε οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΕΖ, ΒΔΖ και ΓΔΕ περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο ονομάζουμε **σημείο Miguel** του τριγώνου ΔΕΖ που αντιστοιχεί στο τρίγωνο ΑΒΓ.

- Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ένα **τρίγωνο Miquel** του σημείου Μ.
- Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι λέγονται **κύκλοι Miquel**.

Σημείο Miquel Τριγώνου (Απόδειξη)

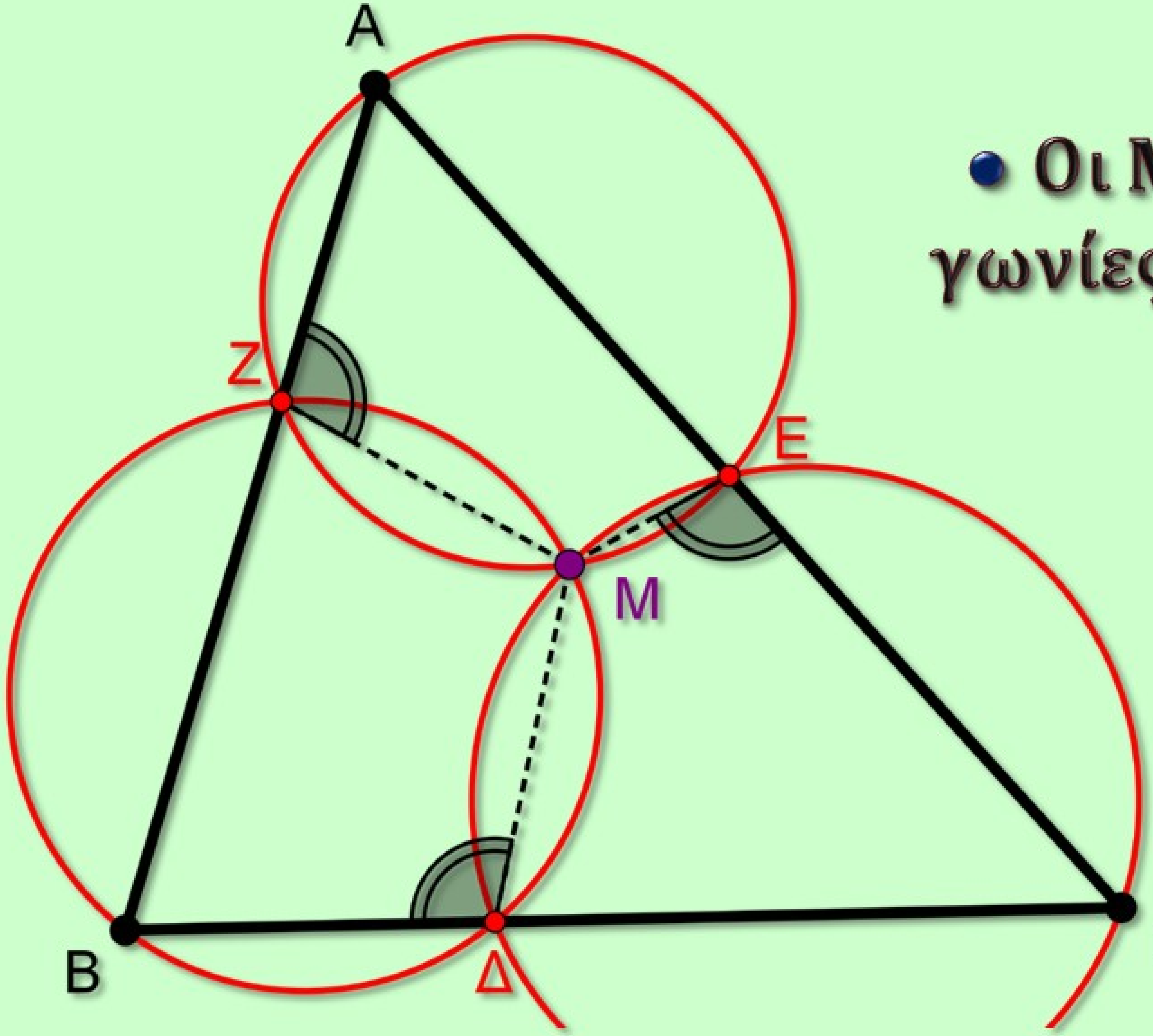


- Έστω Μ το σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΒΔΖ και ΓΔΕ.

Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο.

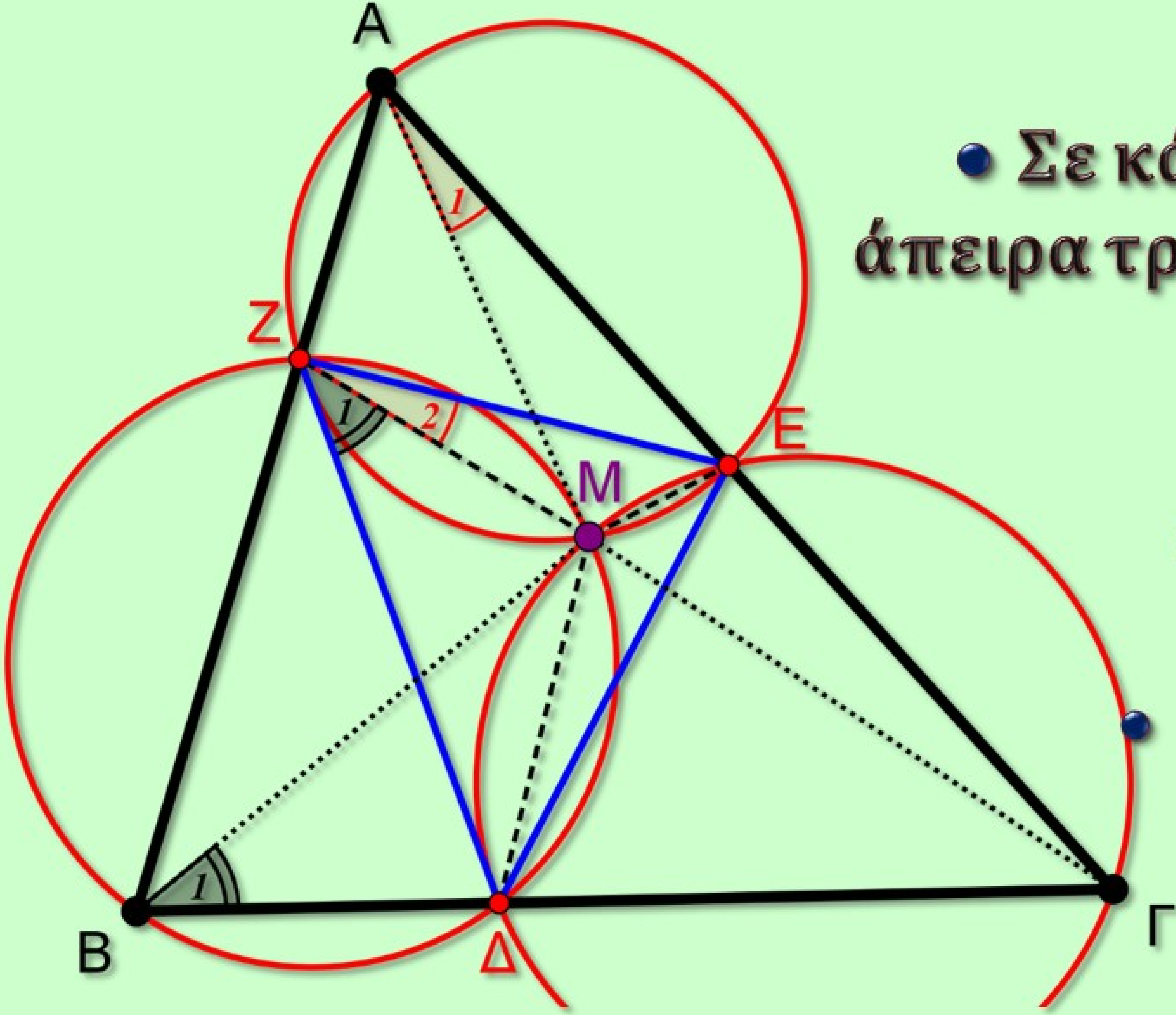
- $\hat{M}_1 = \hat{B}$
- $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}$
- $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{A} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

Σημείο Miquel Τριγώνου Ι



- **Οι ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές του τριγώνου.**

Σημείο Miquel Τριγώνου ΙΙ

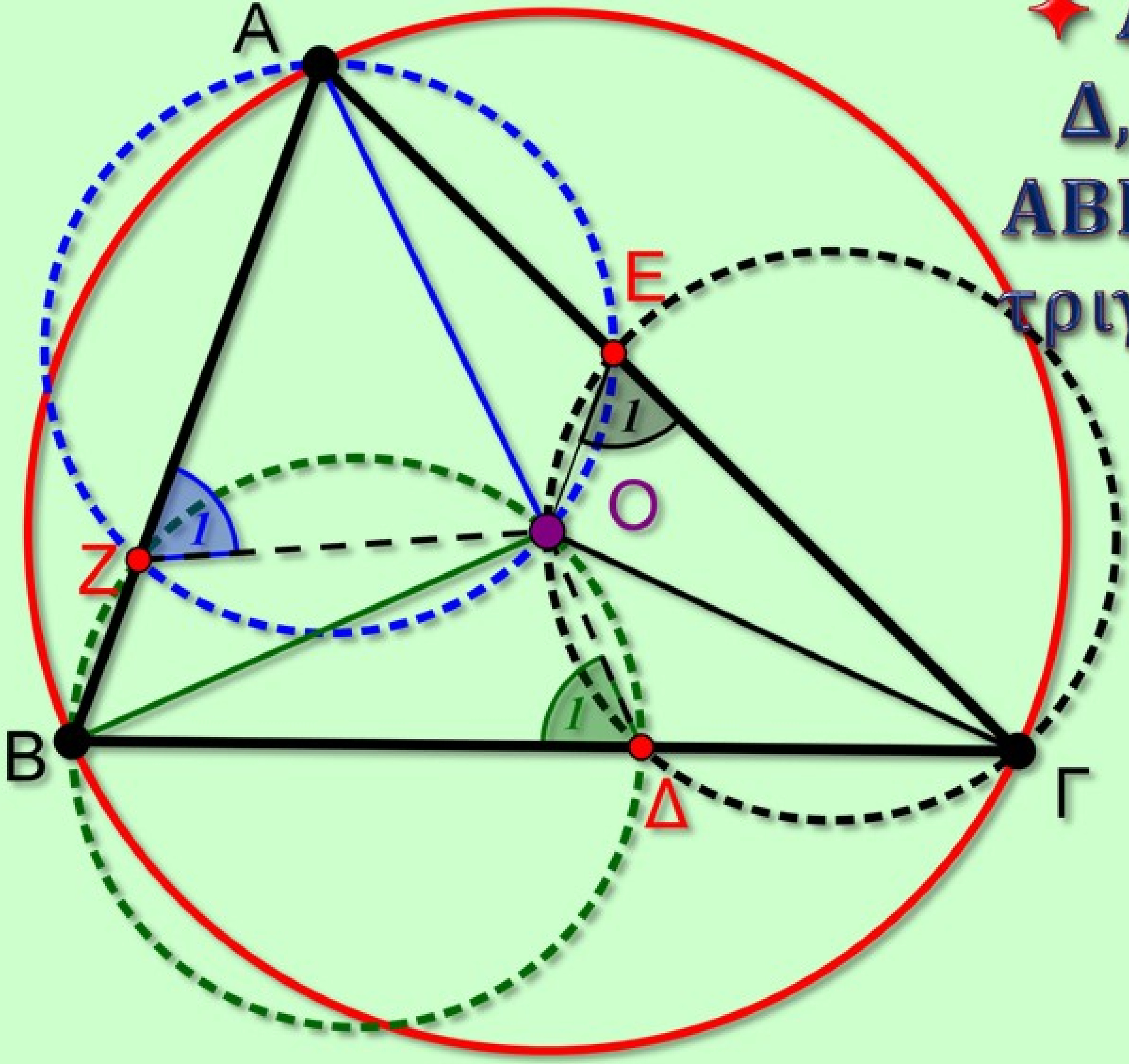


- Σε κάθε σημείο **Μ** αντιστοιχούν άπειρα τρίγωνα Miquel που είναι όμοια μεταξύ τους.

- $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1$
- $\hat{Z}_2 = \hat{A}_1$

- $\Delta\hat{Z}E = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = ct$

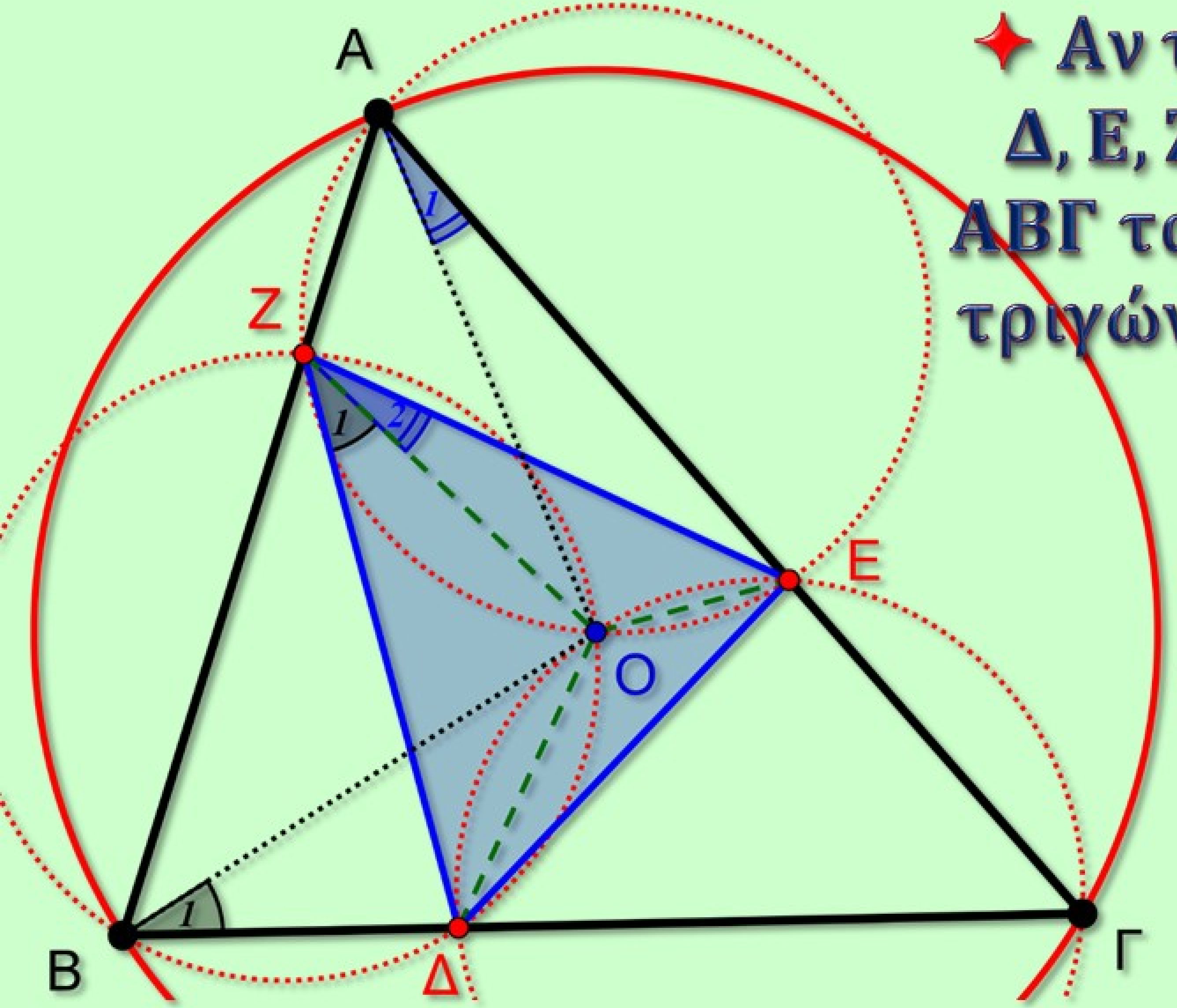
Σημείο Miquel Τριγώνου ΙΙΙ



✦ Αν το σημείο Miquel των σημείων Δ, Ε, Ζ των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ ταυτίζεται με το περίκεντρο του τριγώνου, τότε οι αντίστοιχοι κύκλοι Miquel είναι ίσοι μεταξύ τους.

- $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 = \hat{Z}_1$
- $OA = OB = O\Delta$

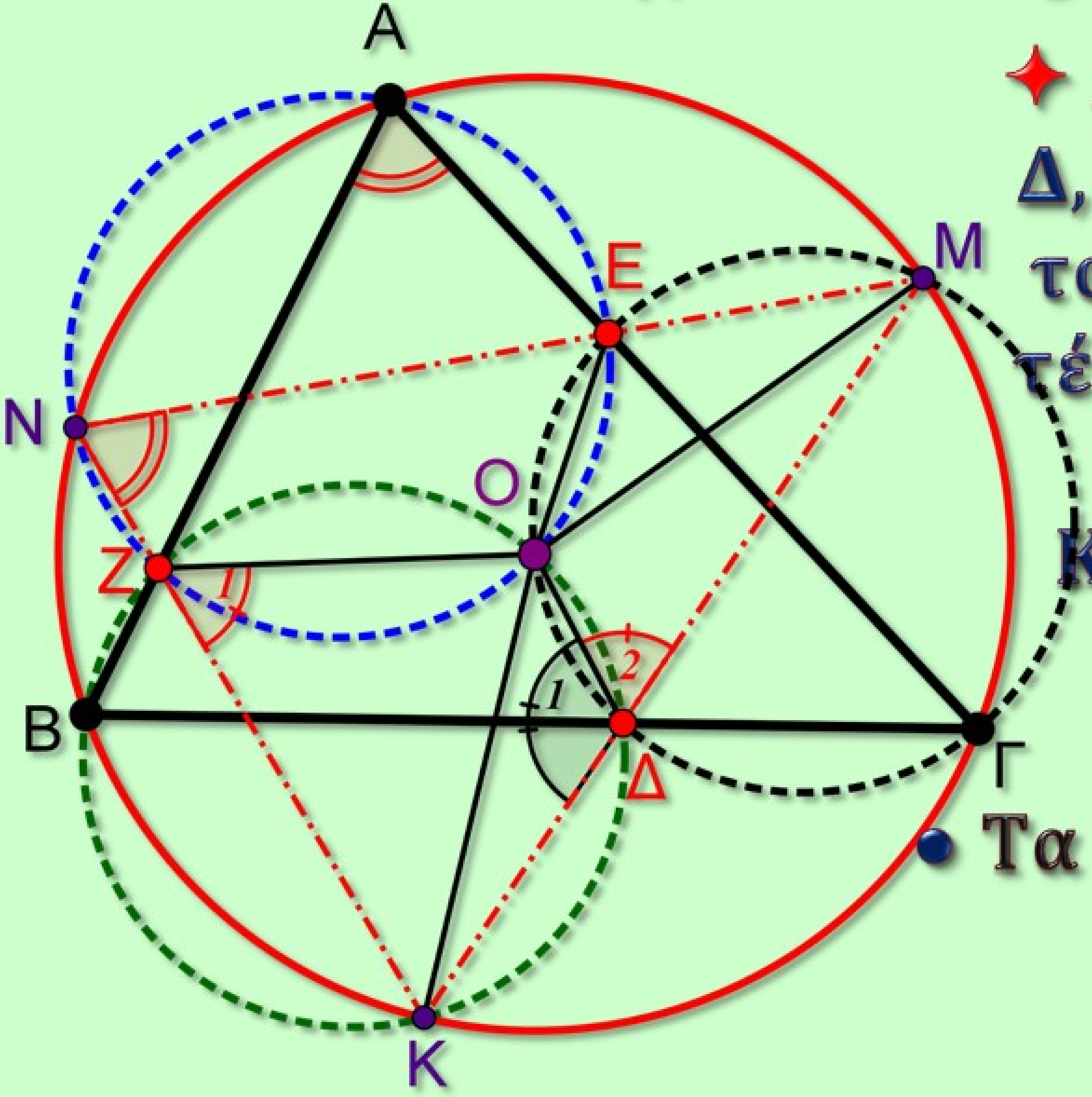
Σημείο Miquel Τριγώνου IV



✦ Αν το σημείο Miquel των σημείων Δ, Ε, Ζ των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ ταυτίζεται με το περίκεντρο του τριγώνου, τότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

- $\widehat{Z}_1 = \widehat{B}_1 = 90° - \widehat{A}$
- $\widehat{Z}_2 = \widehat{A}_1 = 90° - \widehat{B}$
- $\Delta\widehat{Z}E = \widehat{Z}_1 + \widehat{Z}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 =$
$= 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

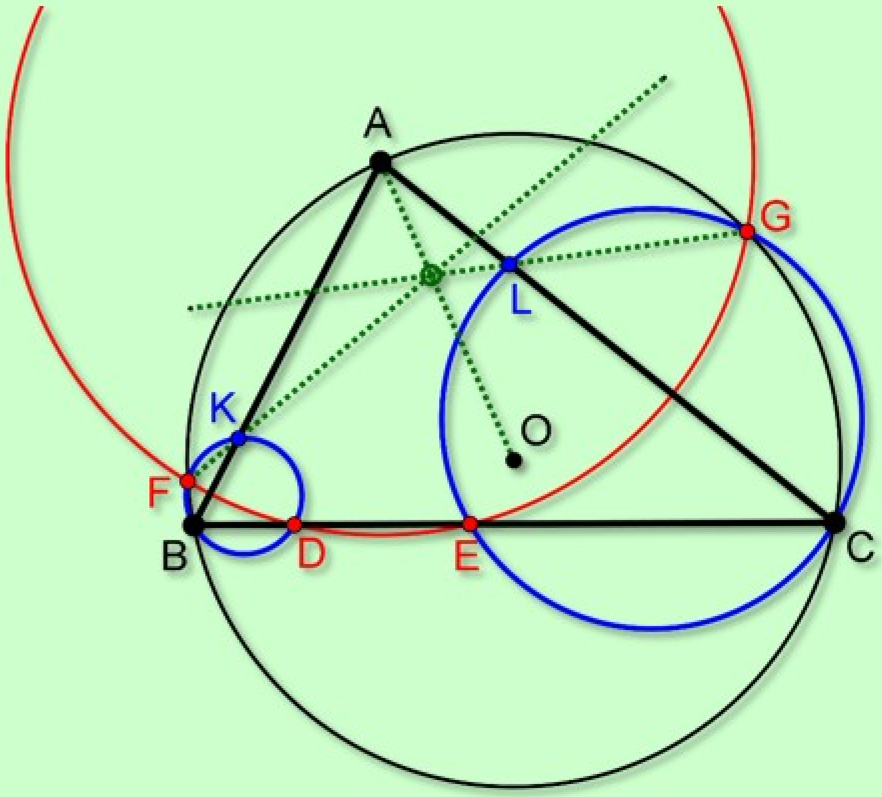
Σημείο Miquel Τριγώνου V



- Αν το σημείο Miquel των σημείων Δ, Ε, Ζ ταυτίζεται με το περίκεντρο του τριγώνου και οι κύκλοι Miquel τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Κ, Μ, Ν, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΜΝ είναι ίσα.

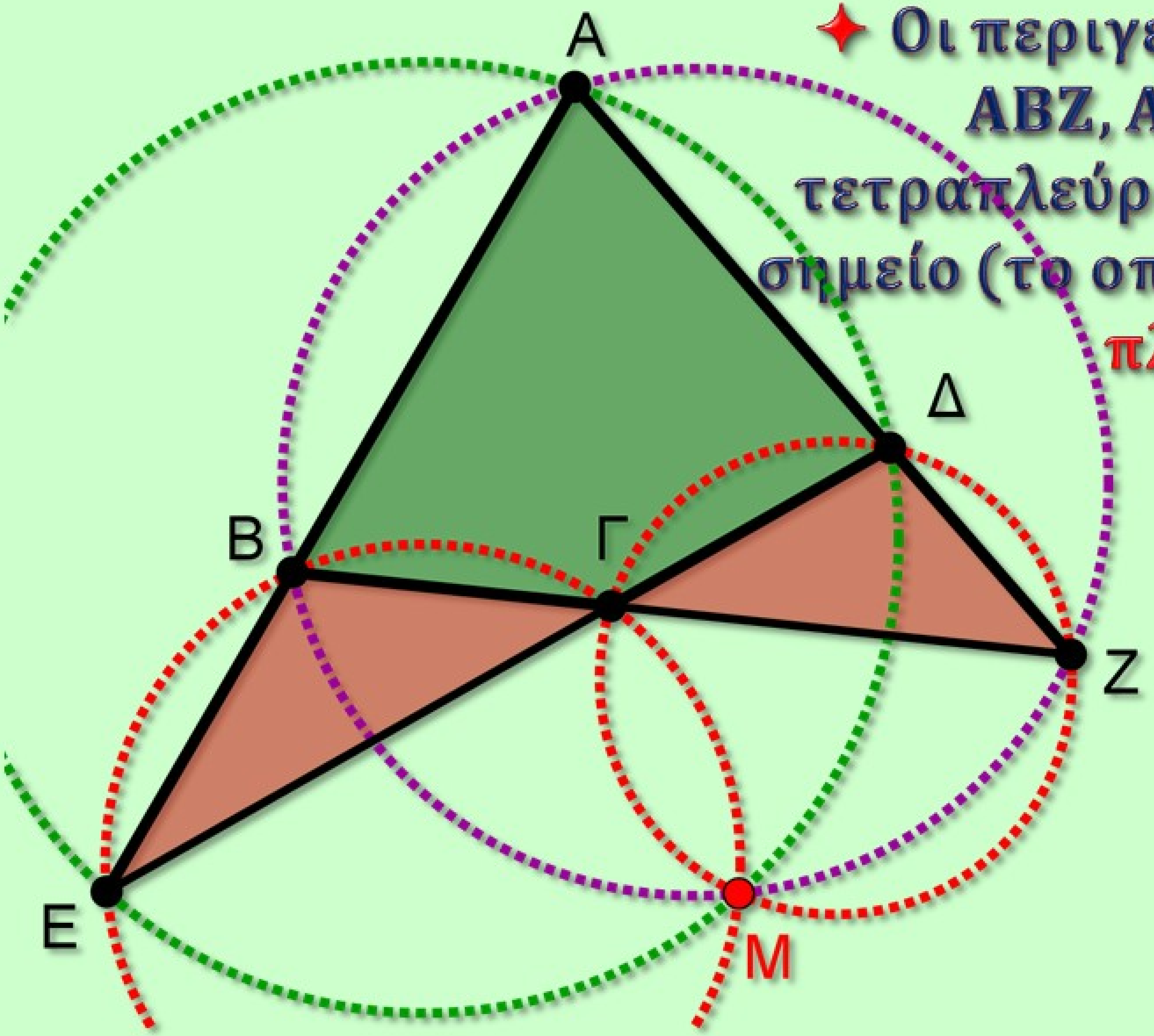
- Τα σημεία Κ, Δ, Μ είναι συνευθειακά, (όμοια Μ, Ε, Ν και Ν, Ζ, Κ).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7

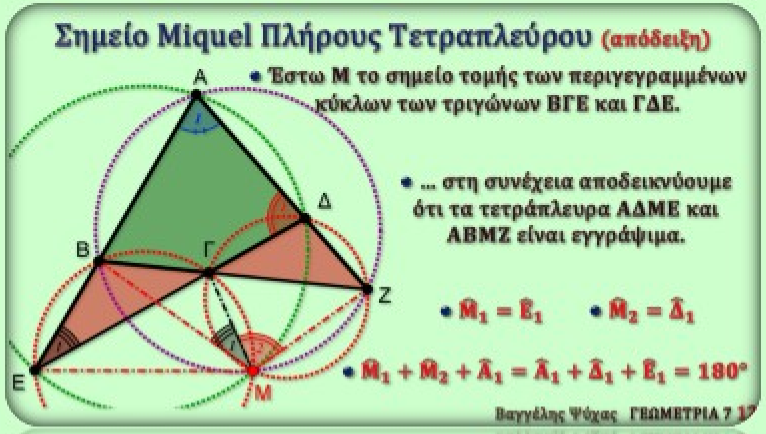


Σημείο Miquel Τετραπλεύρου

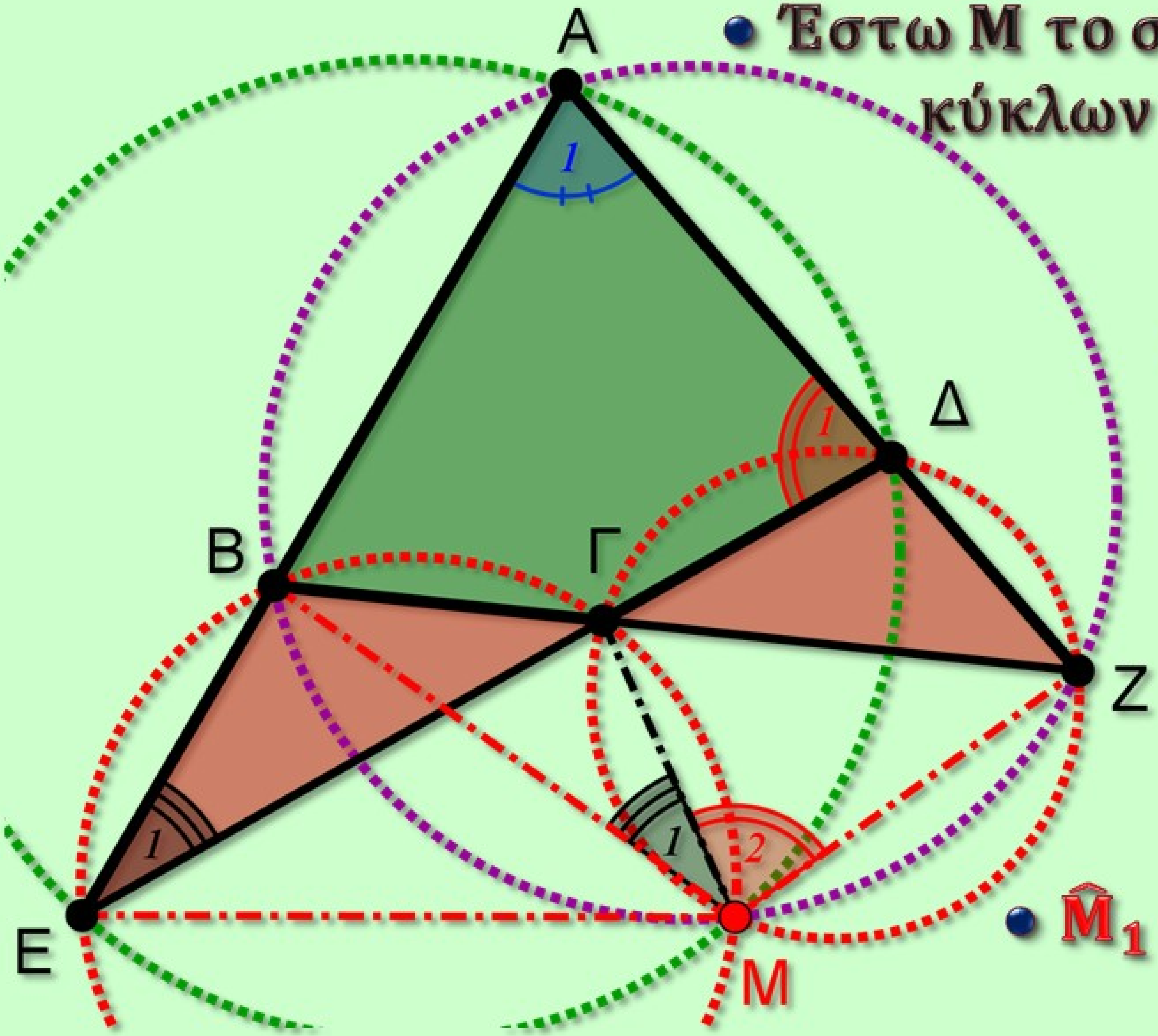
Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου



✦ Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων **ΑΒΖ, ΑΔΕ, ΒΓΕ, ΓΔΖ** (του πλήρους τετραπλεύρου **ΑΒΓΔΕΖ**), περνάνε από το ίδιο σημείο (το οποίο ονομάζουμε **σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου**).

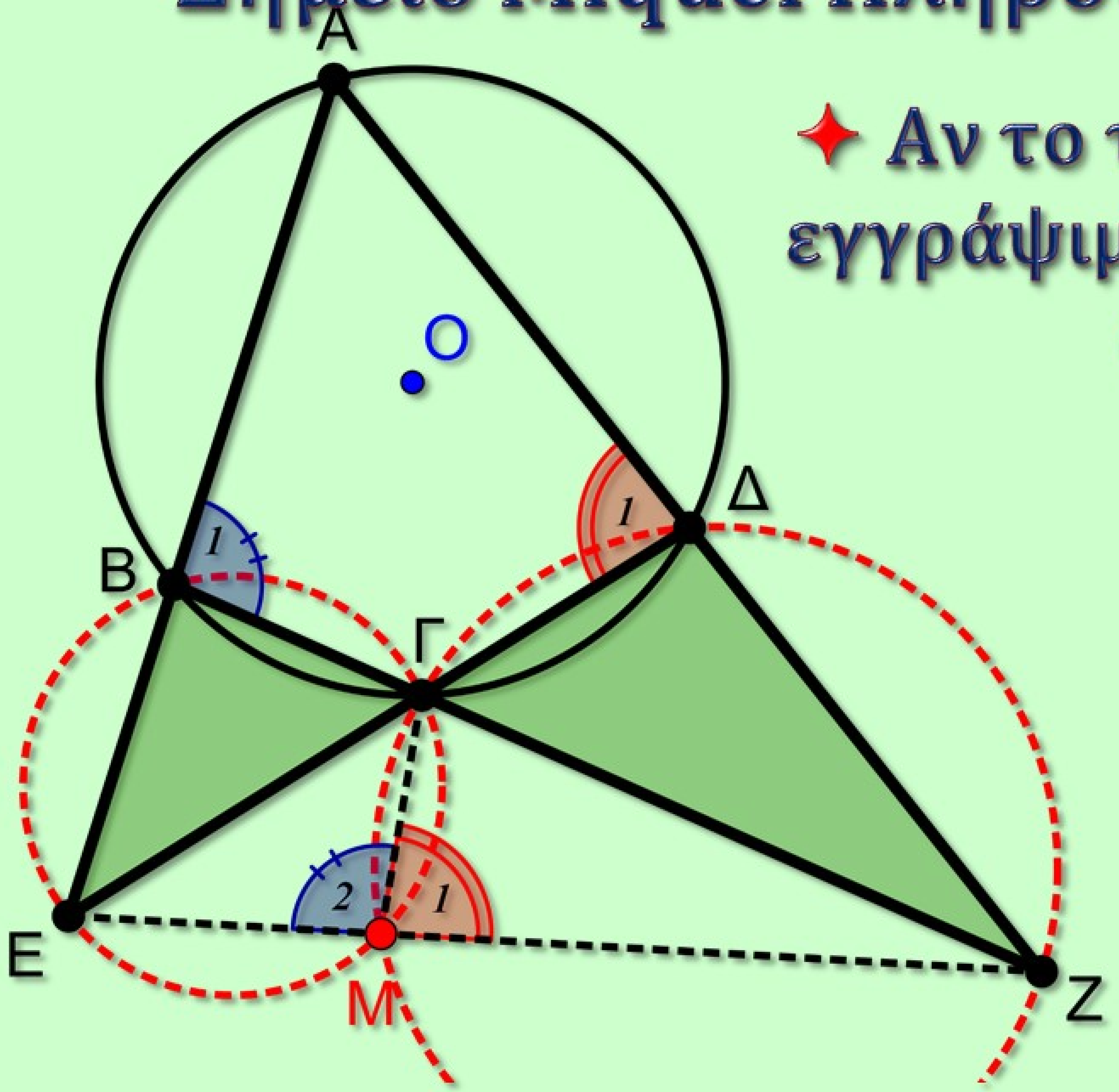


Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου (απόδειξη)



- Έστω **Μ** το σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων **ΒΓΕ** και **ΓΔΕ**.
- … στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι τα τετράπλευρα **ΑΔΜΕ** και **ΑΒΜΖ** είναι εγγράψιμα.
- $\hat{M}_1 = \hat{E}_1$
- $\hat{M}_2 = \hat{\Delta}_1$
- $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{A}_1 = \hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{E}_1 = 180°$

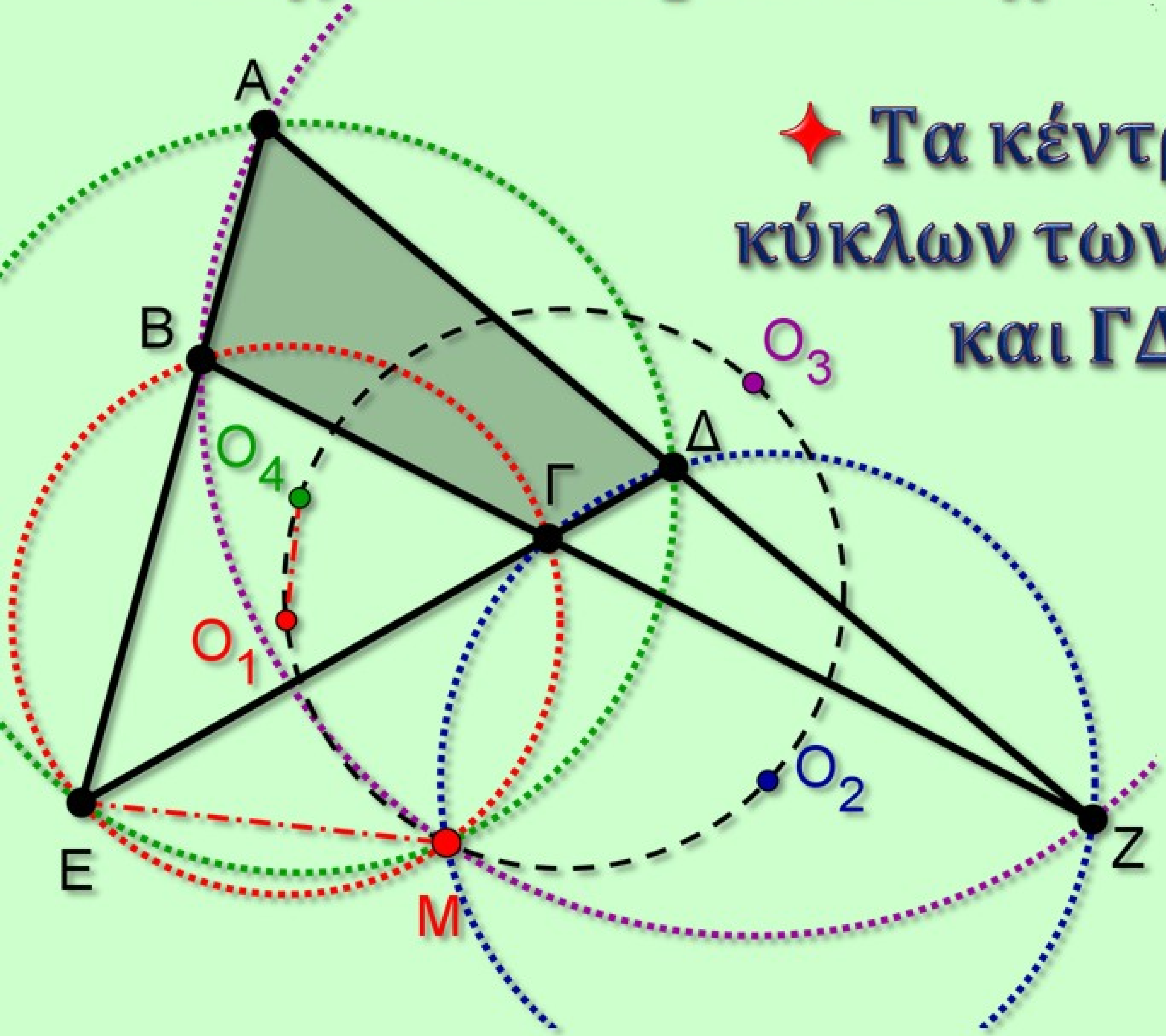
Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου Ι



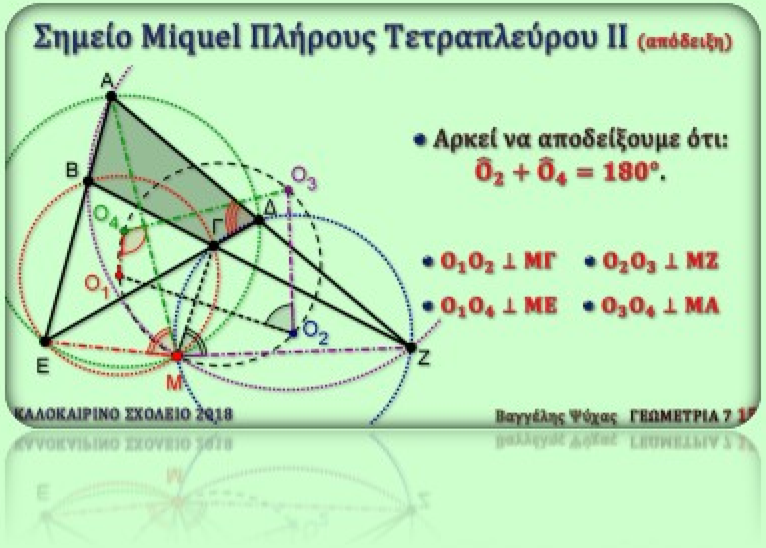
✦ **Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, τότε το σημείο Miquel ανήκει στην ΕΖ.**

- $\hat{M}_1 = \hat{\Delta}_1$
- $\hat{M}_2 = \hat{B}_1$
- $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180°$

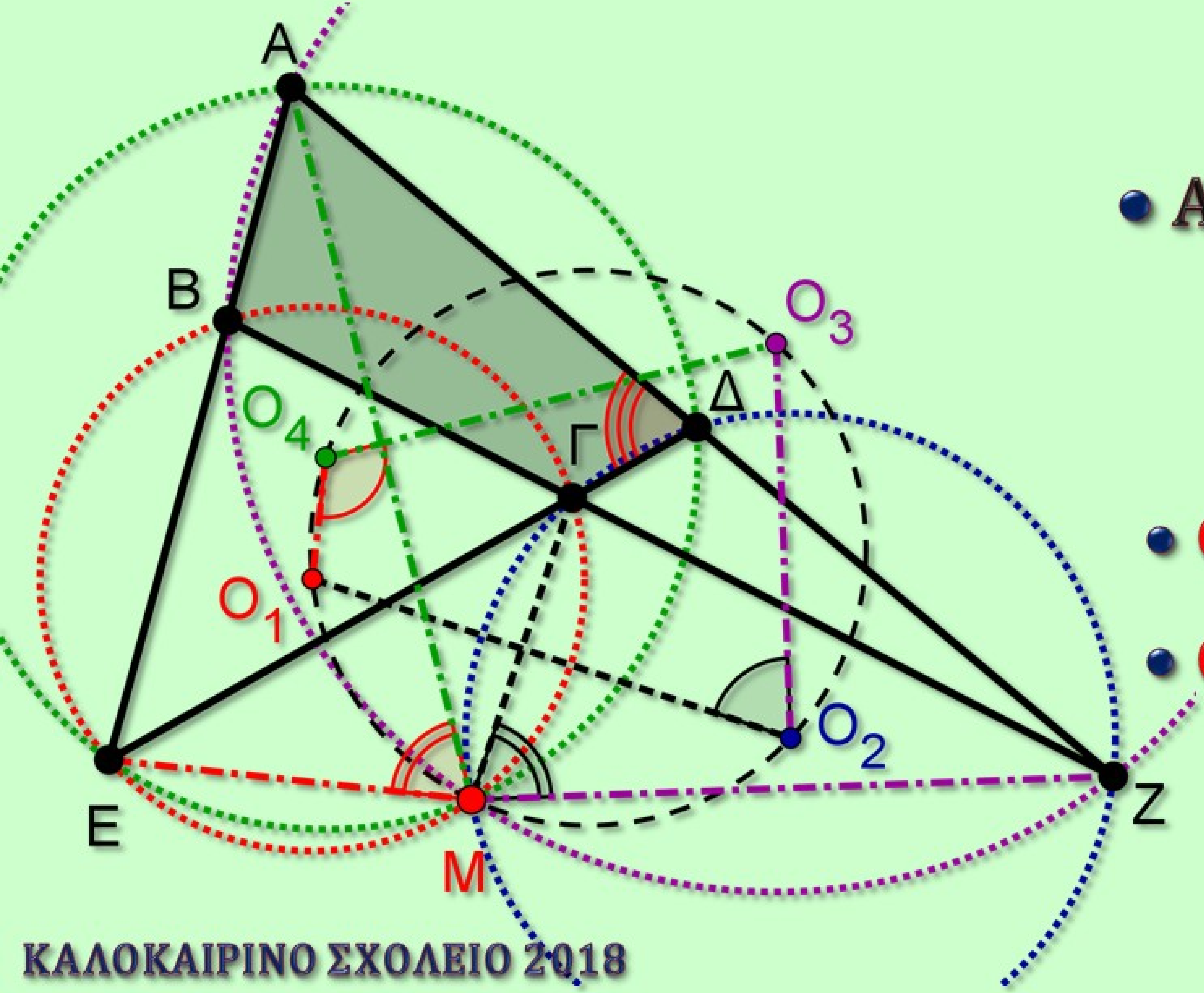
Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου ΙΙ



✦ **Τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΔΕ. ΒΓΕ, ΑΒΖ και ΓΔΖ είναι ομοκυκλικά.**



Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου ΙΙ (απόδειξη)

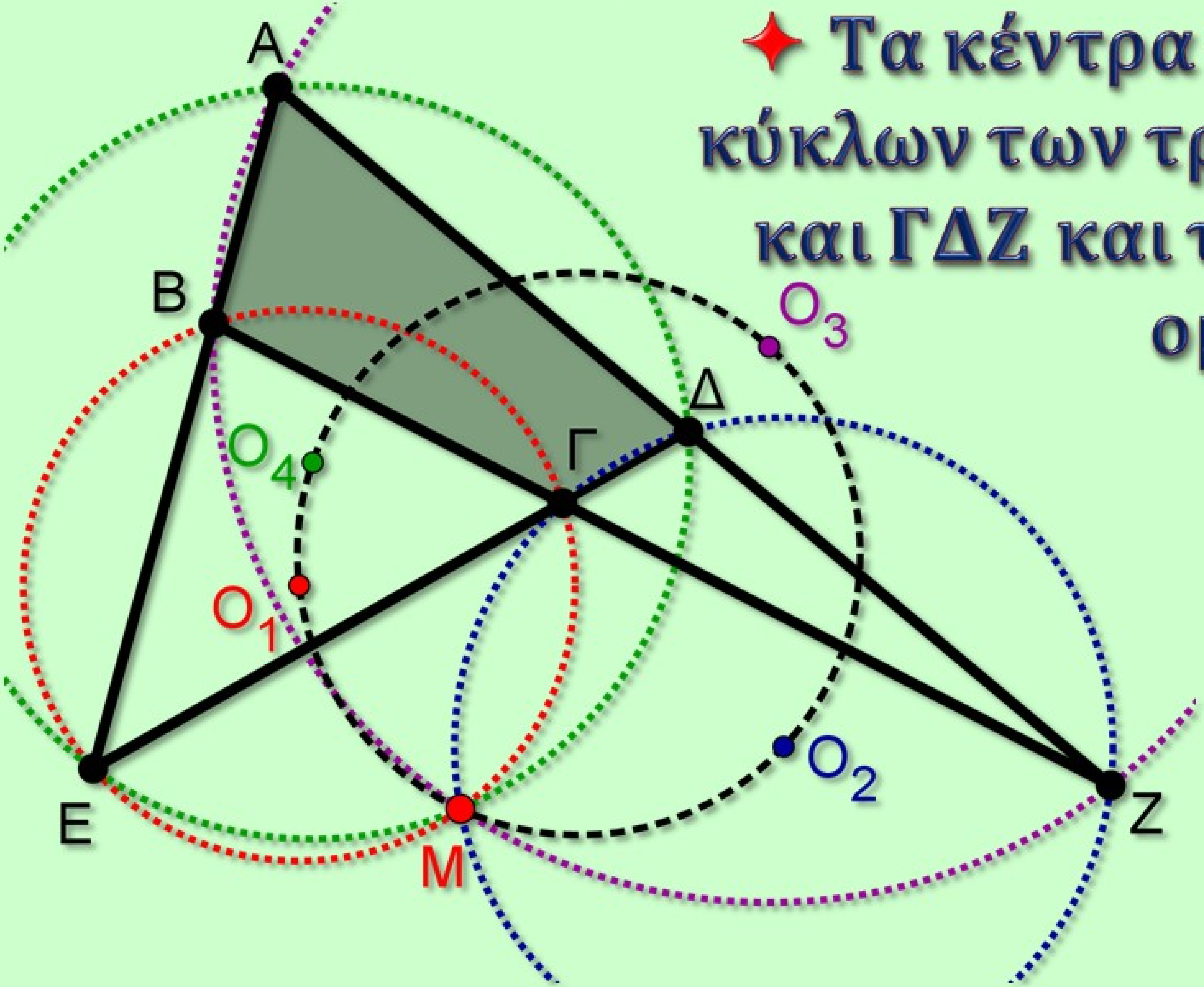


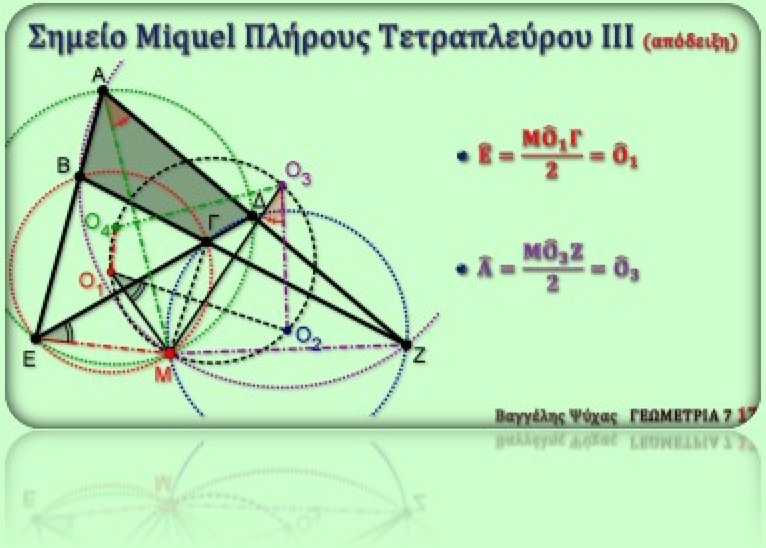
- **Αρκεί να αποδείξουμε ότι:** $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 = 180°$.

- $O_1O_2 \perp M\Gamma$
- $O_2O_3 \perp MZ$
- $O_1O_4 \perp ME$
- $O_3O_4 \perp MA$

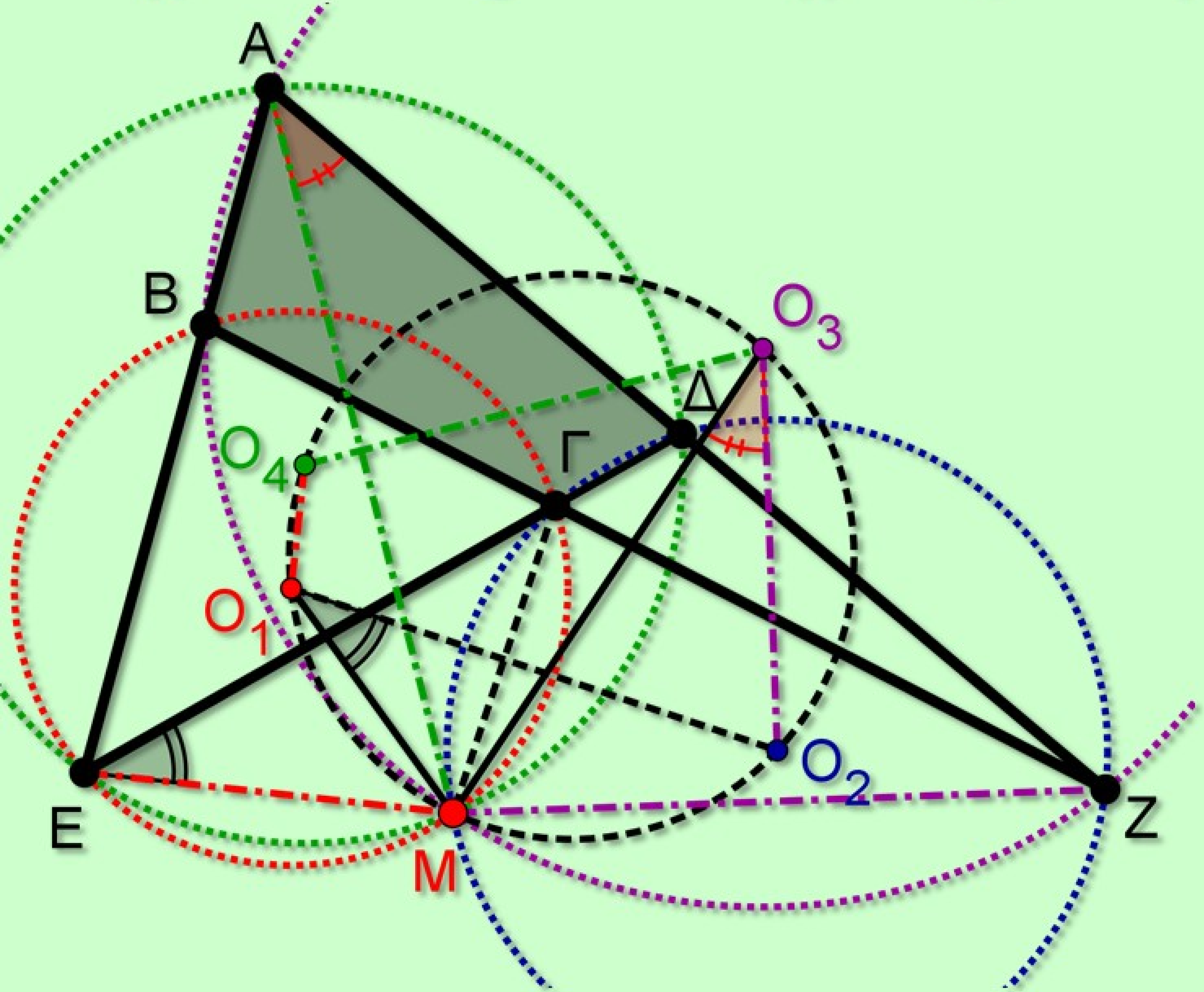
Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου ΙΙΙ

✦ Τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων **ΑΔΕ. ΒΓΕ, ΑΒΖ** και **ΓΔΖ** και το σημείο Miquel είναι ομοκυκλικά.





Σημείο Miquel Πλήρους Τετραπλεύρου ΙΙΙ (απόδειξη)

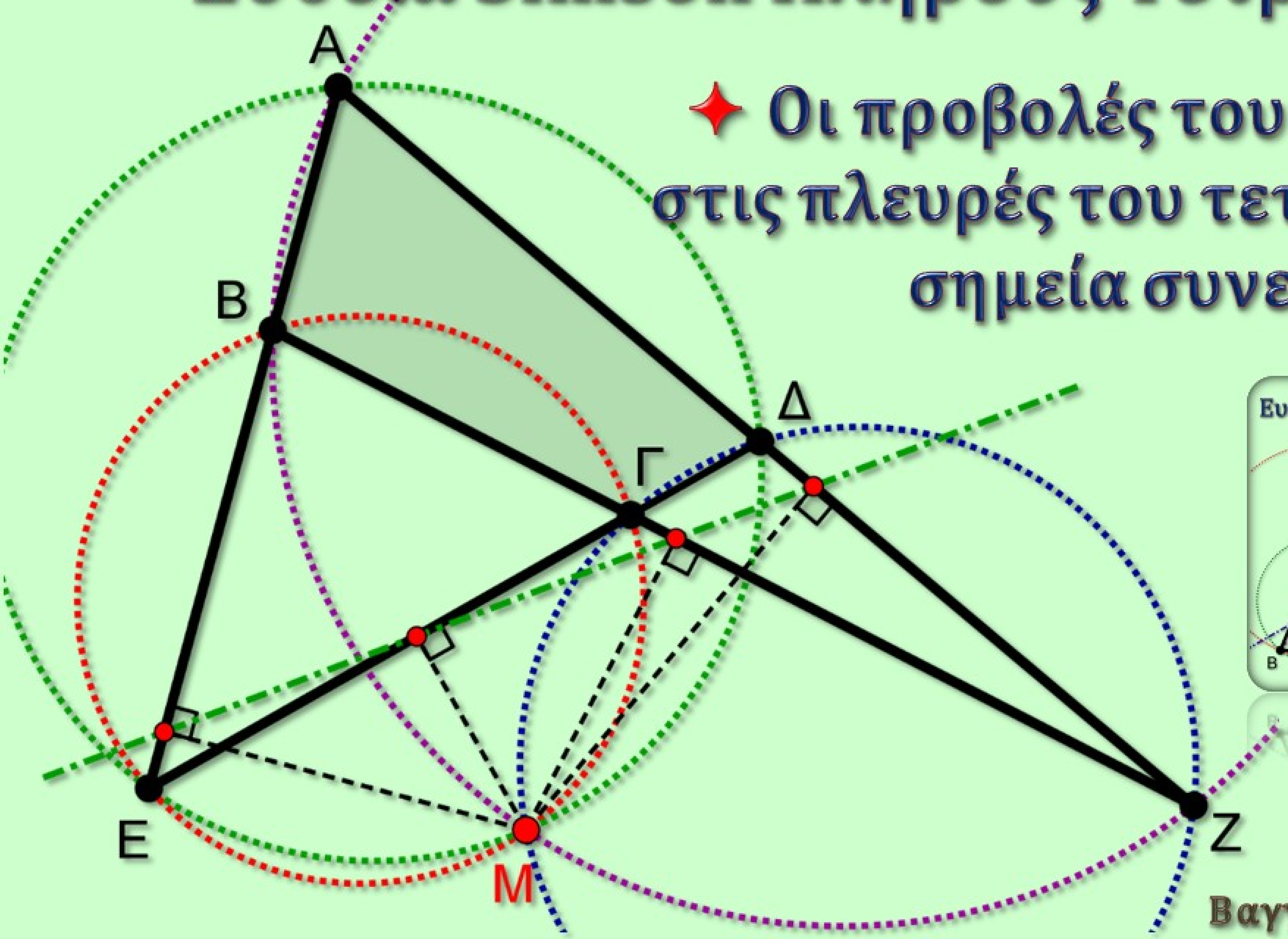


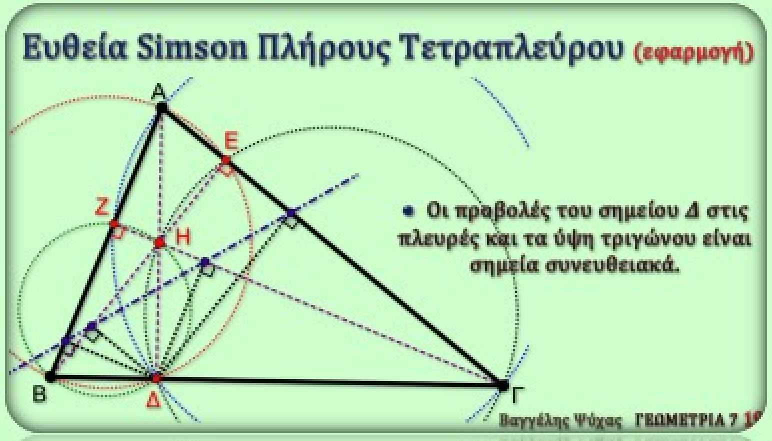
- $\hat{E} = \dfrac{M\hat{O}_1\Gamma}{2} = \hat{O}_1$

- $\hat{A} = \dfrac{M\hat{O}_3 Z}{2} = \hat{O}_3$

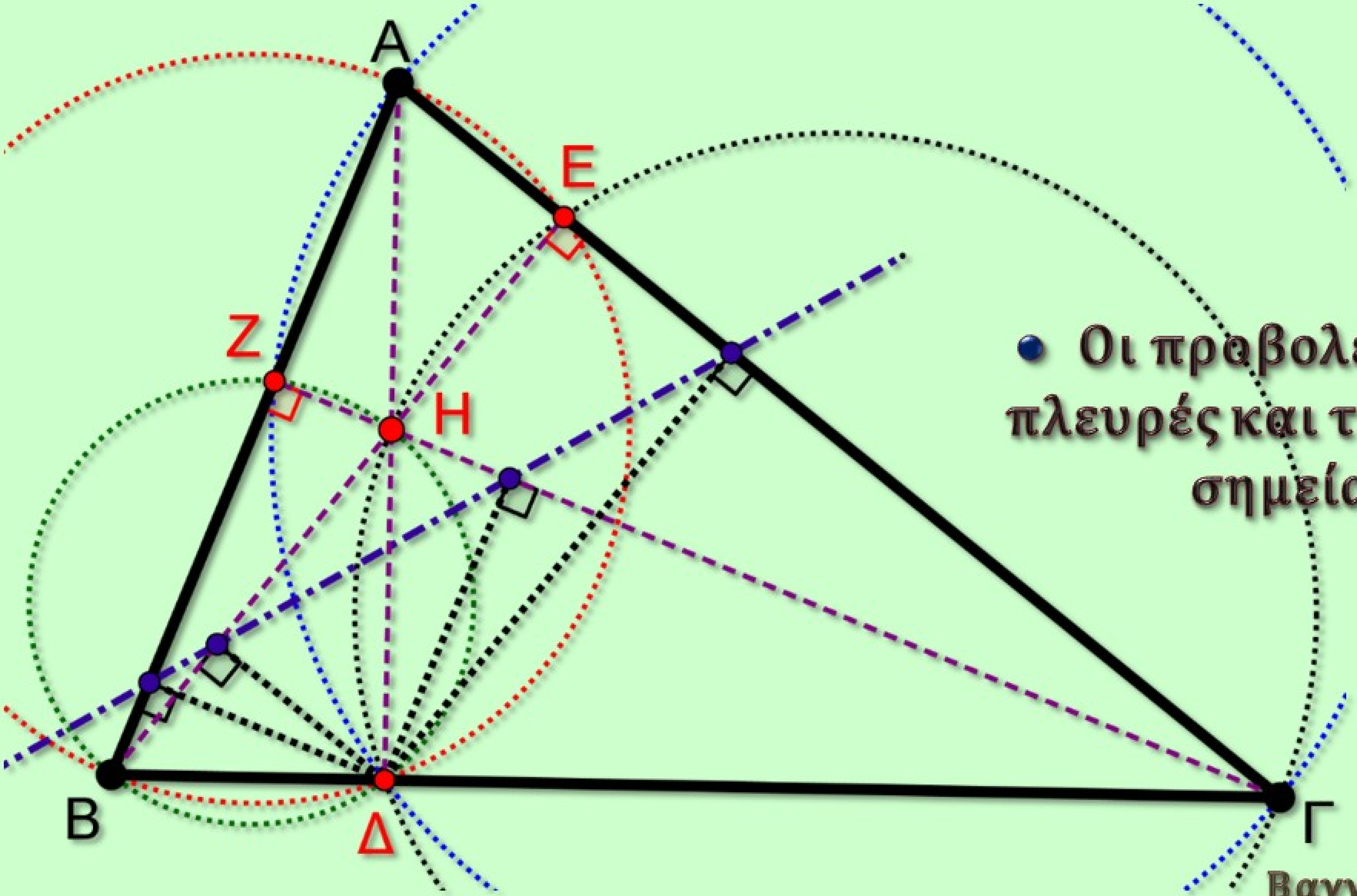
Ευθεία Simson Πλήρους Τετραπλεύρου

✦ Οι προβολές του σημείου Miquel στις πλευρές του τετραπλεύρου είναι σημεία συνευθειακά.



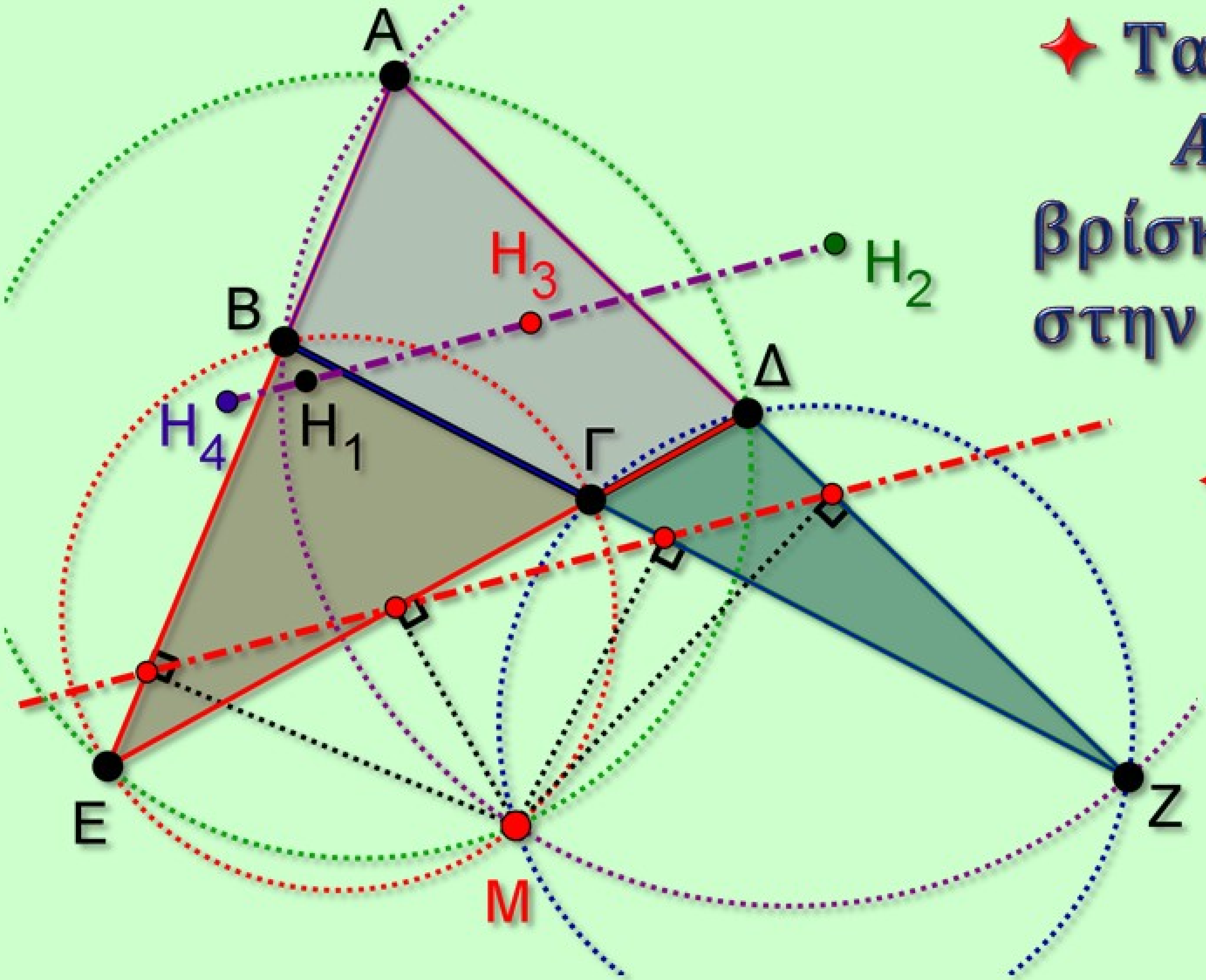


Ευθεία Simson Πλήρους Τετραπλεύρου (εφαρμογή)

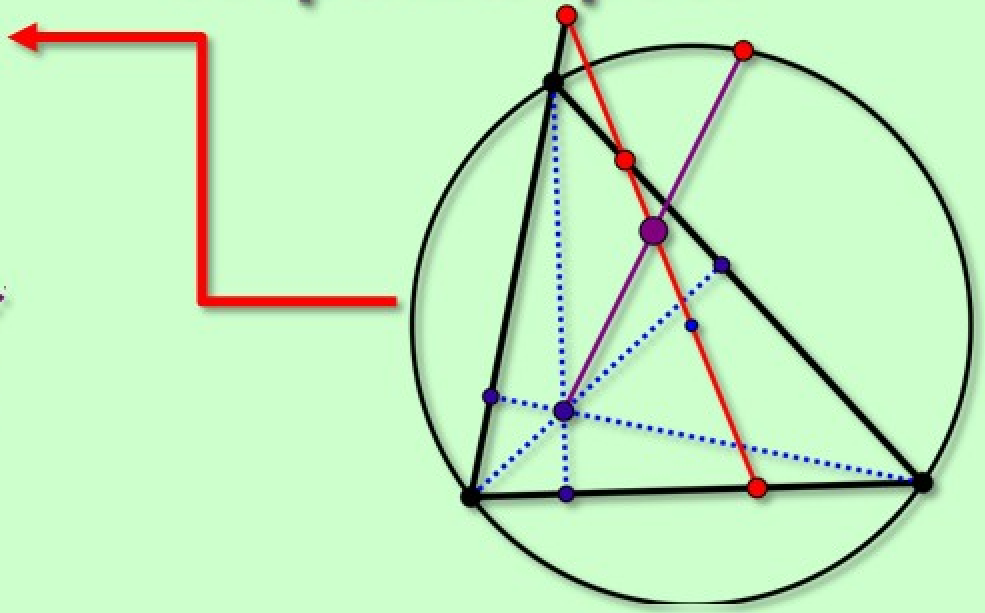


- Οι προβολές του σημείου Δ στις πλευρές και τα ύψη τριγώνου είναι σημεία συνευθειακά.

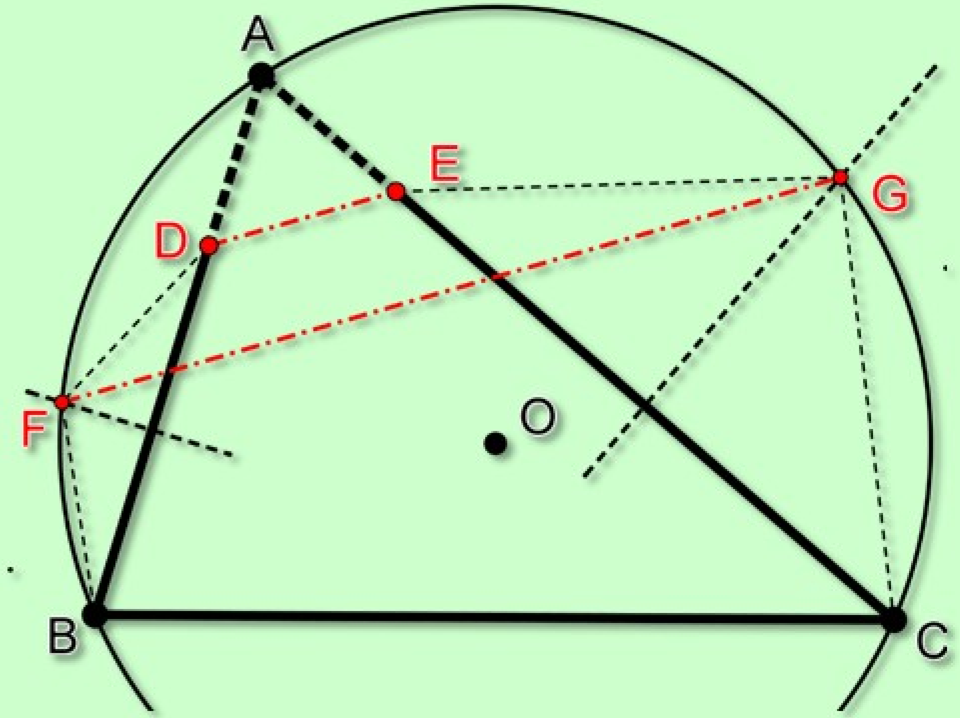
Ευθεία Aubert Πλήρους Τετραπλεύρου



✦ Τα ορθόκεντρα των τριγώνων $ΑΔΕ$. $ΒΓΕ$, $ΑΒΖ$ και $ΓΔΖ$ βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ευθεία Simson του πλήρους τετραπλεύρου.

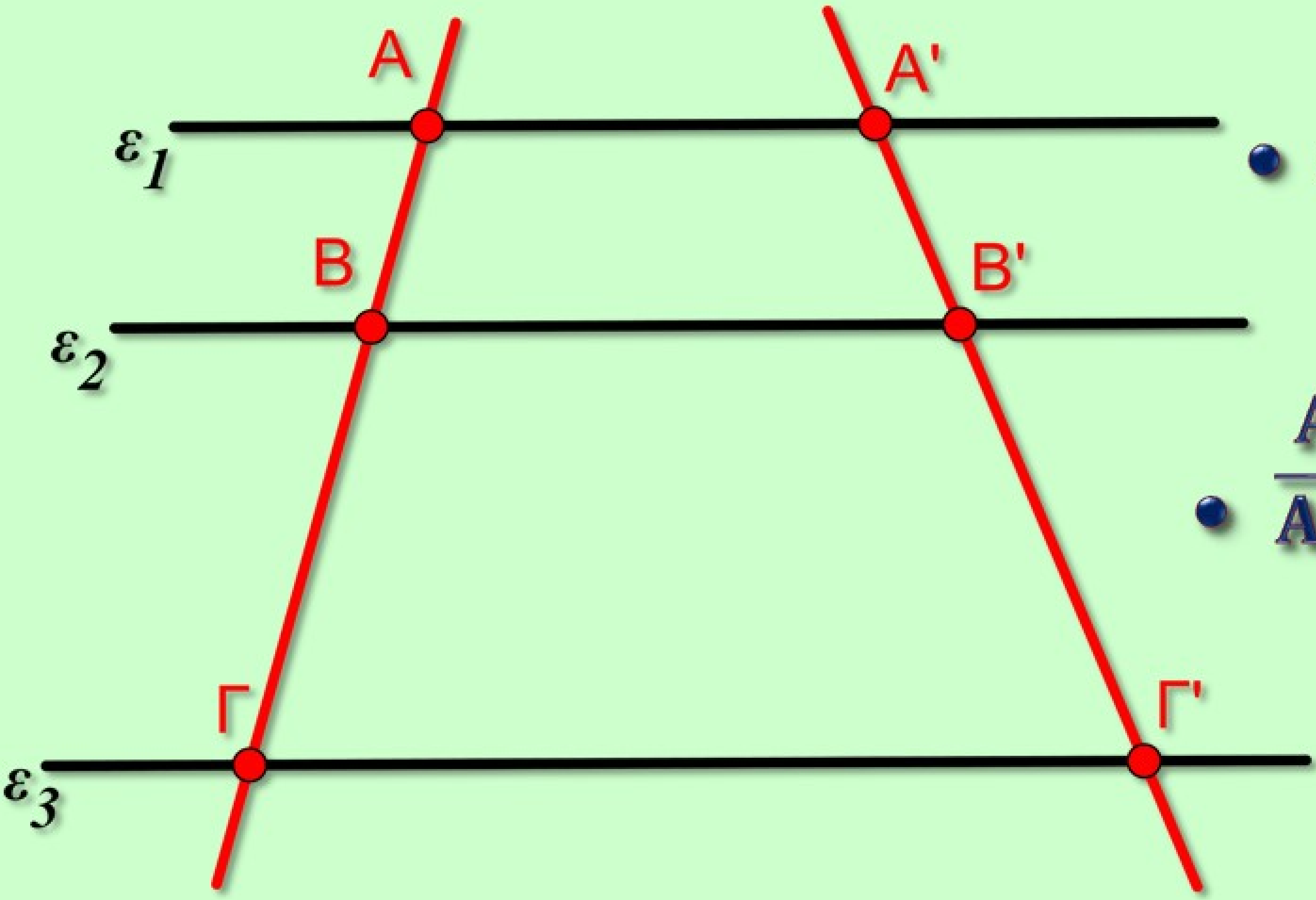


ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



Θεώρημα Θαλή

Θεώρημα Θαλή Ι

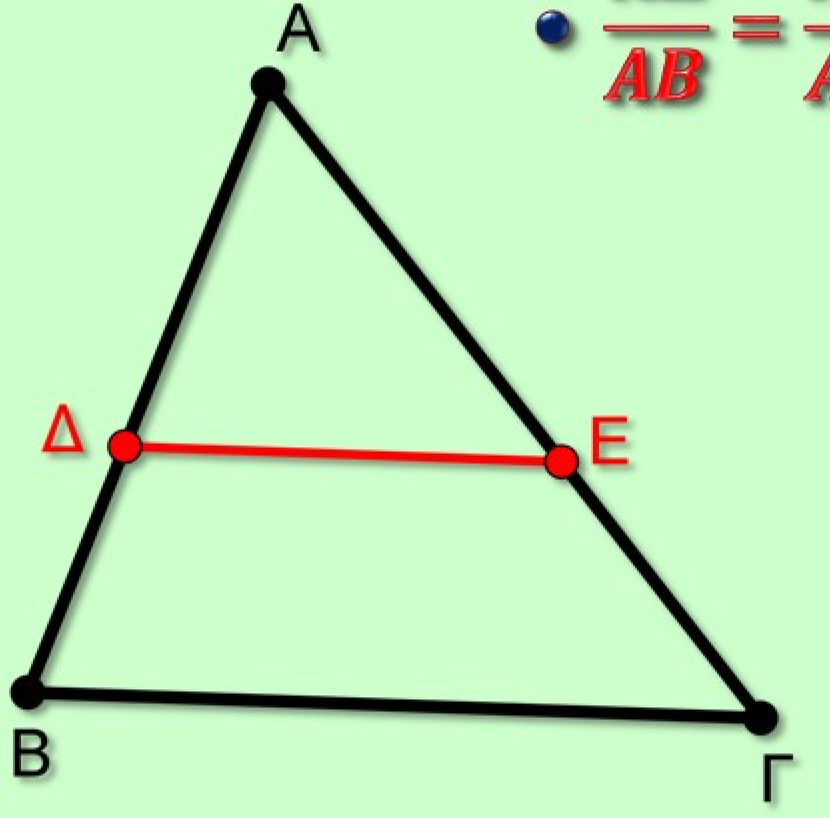


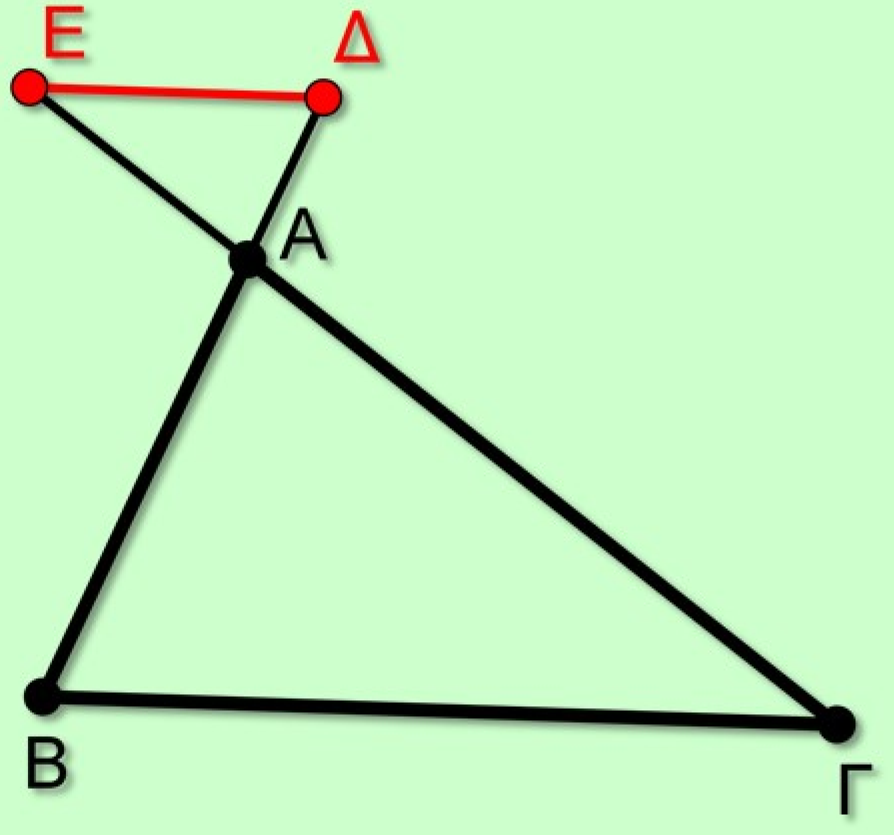
- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$

- $\left.\begin{array}{c} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \\ \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$

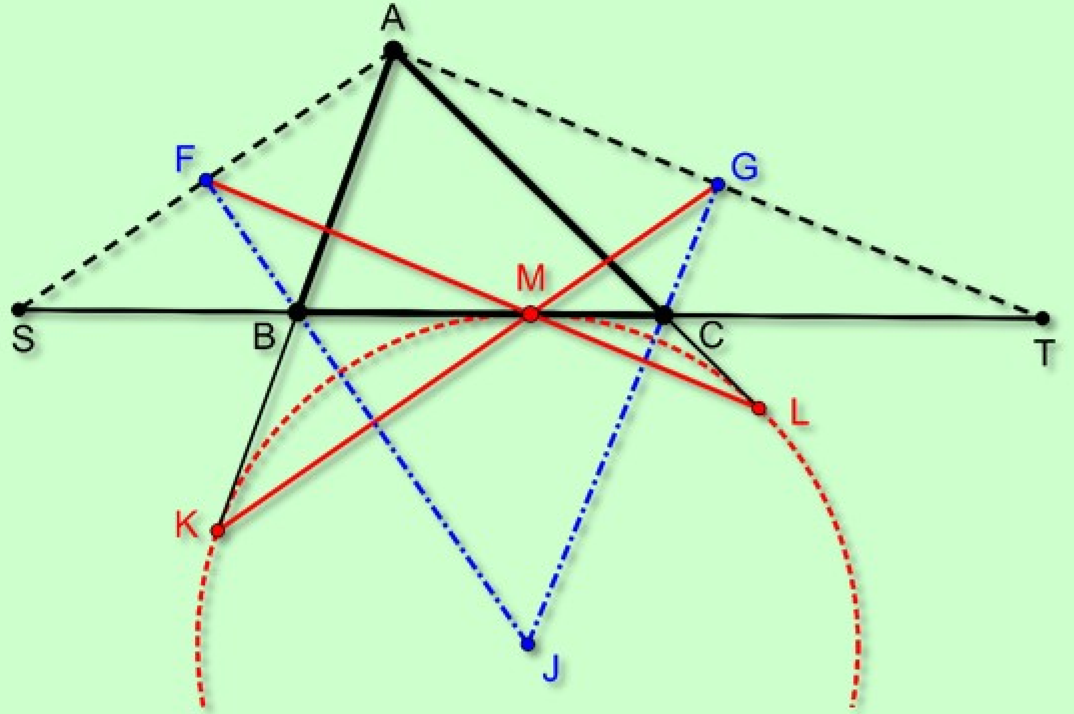
Θεώρημα Θαλή ΙΙ

- $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} \Leftrightarrow B\Gamma \parallel \Delta E$





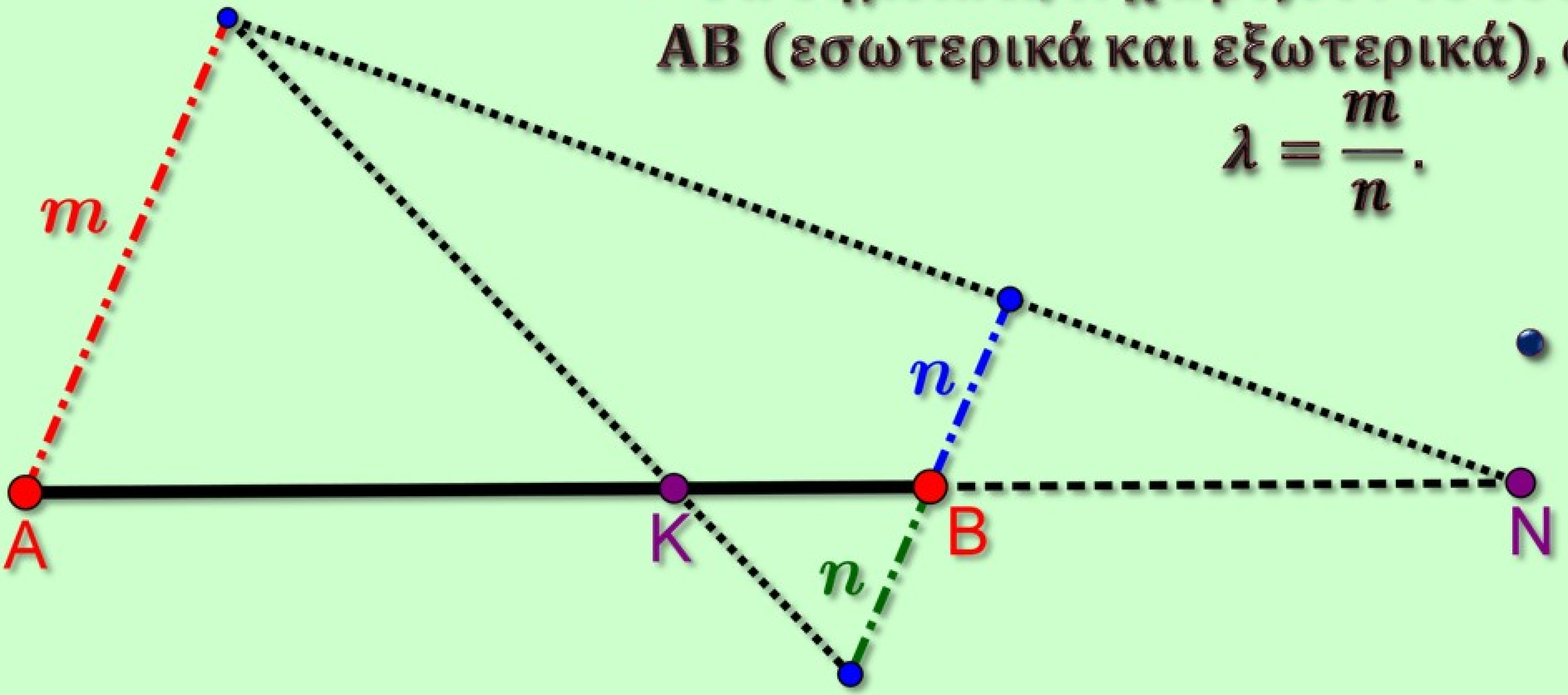
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 7



Αρμονική Διαίρεση

Αρμονική Διαίρεση Ι

- Τα σημεία K, N χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα AB (εσωτερικά και εξωτερικά), στον ίδιο λόγο: $\lambda = \frac{m}{n}$.

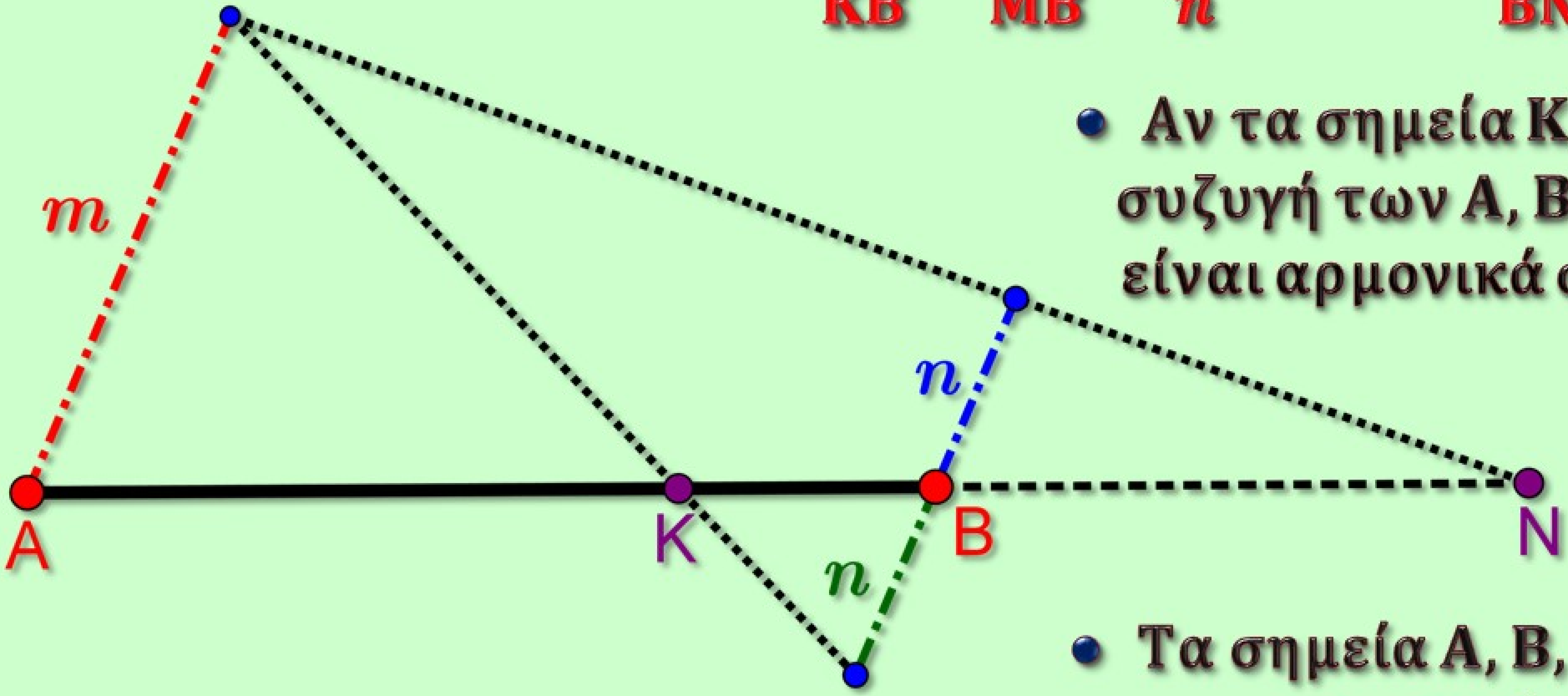


- $\frac{KA}{KB} = \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$

- Τα σημεία K, N λέγονται αρμονικά συζυγή των A, B.

Αρμονική Διαίρεση ΙΙ

- $\frac{KA}{KB} = \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$
- $\frac{BK}{BN} = \frac{AK}{AN} = \frac{m-n}{m+n}$



- **Αν τα σημεία Κ, Ν είναι αρμονικά συζυγή των Α, Β τότε και τα Α, Β είναι αρμονικά συζυγή των Κ, Ν.**
- **Τα σημεία Α, Β, Κ, Ν αποτελούν αρμονική τετράδα.**

Αρμονική Διαίρεση ΙΙΙ

$$\frac{KA}{KB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

$$AB = a$$

$$KN = \beta$$

$$KA = \frac{am}{m+n} \quad KB = \frac{an}{m+n}$$

$$NA = \frac{am}{m-n} \quad NB = \frac{am}{m-n}$$

$$\beta = \frac{2amn}{m^2 - n^2}$$

Αρμονική Διαίρεση (Αντιστροφή)

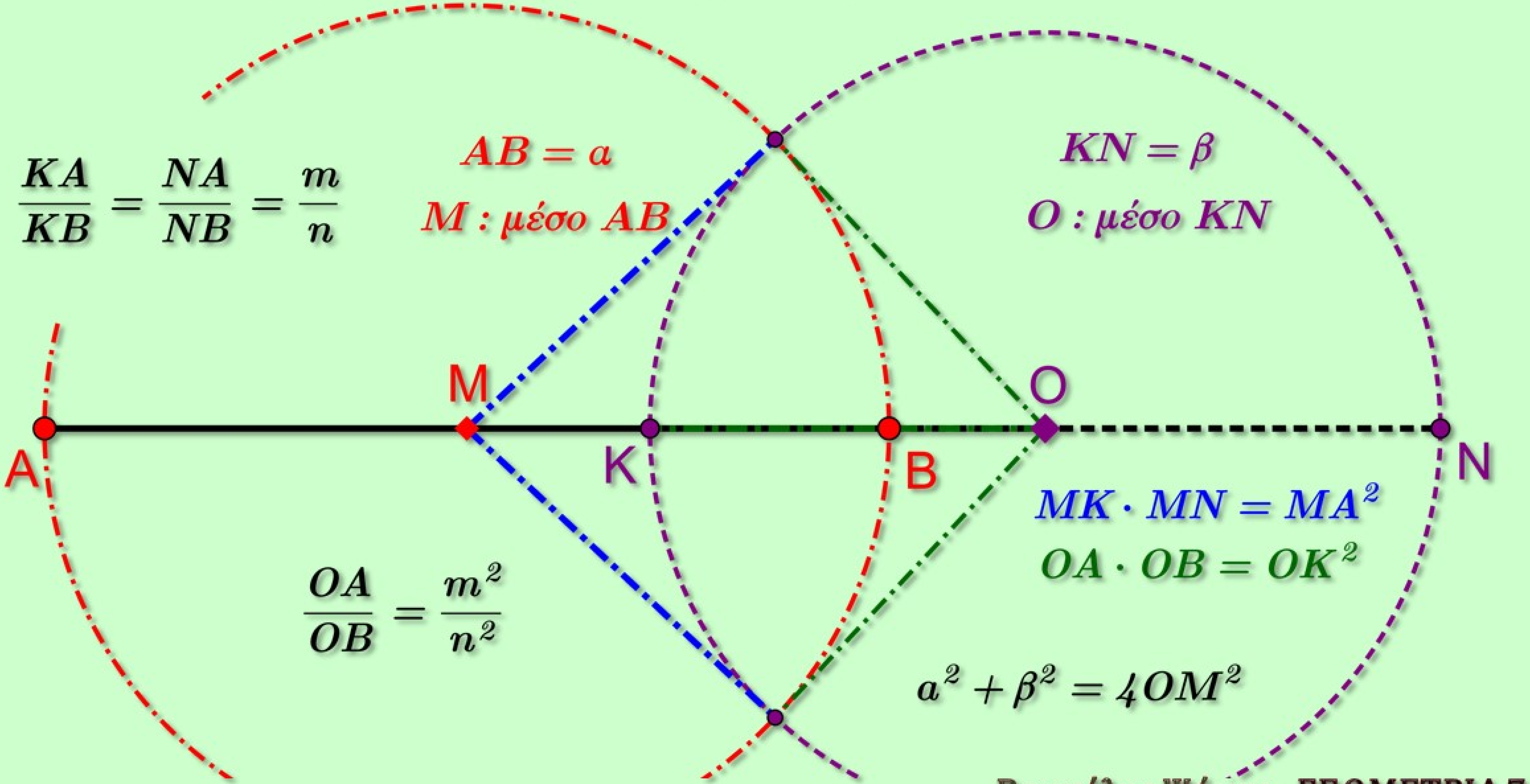
$$\frac{KA}{KB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

$AB = a$

M : μέσο AB

$KN = \beta$

O : μέσο KN



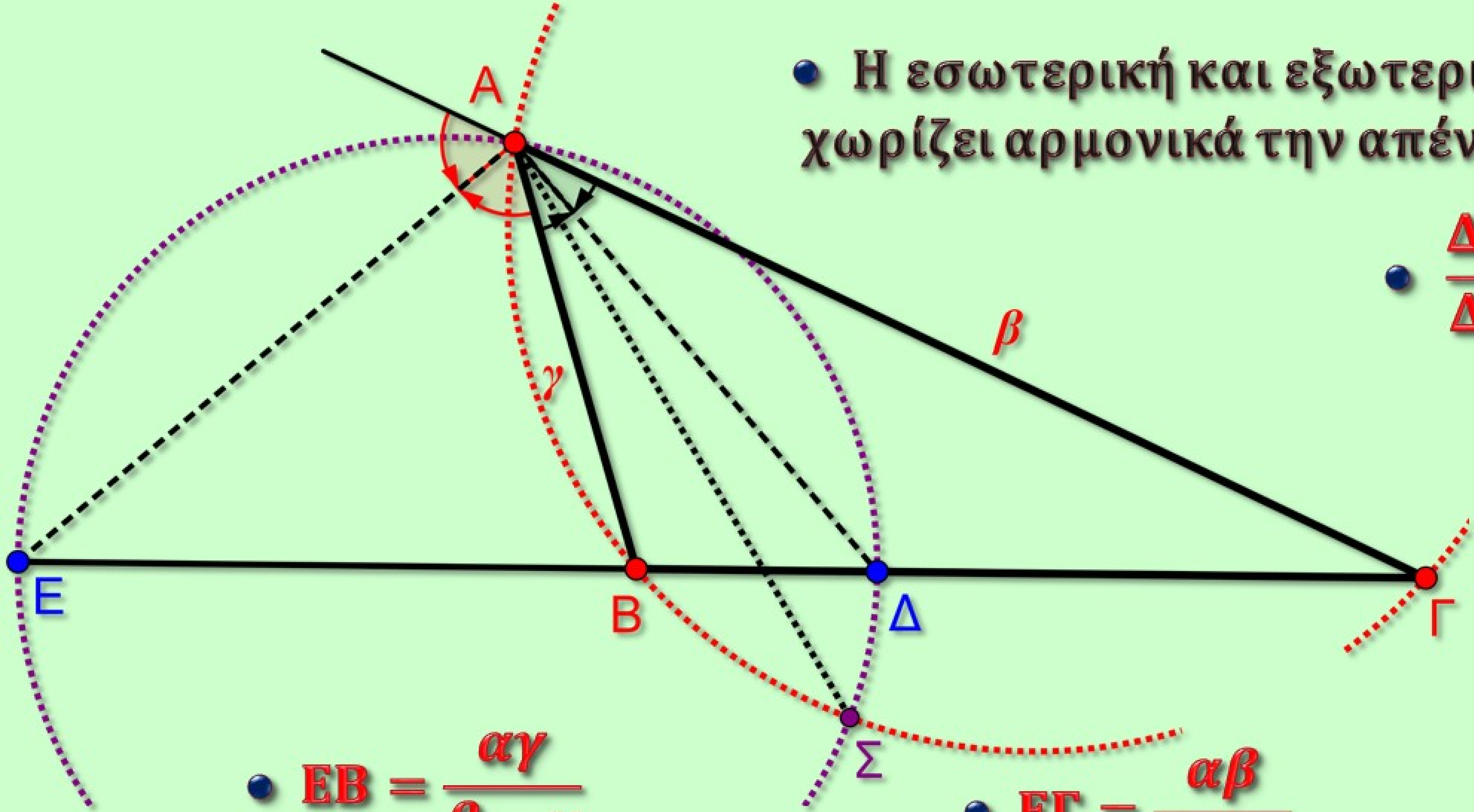
$MK \cdot MN = MA^2$

$OA \cdot OB = OK^2$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{m^2}{n^2}$$

$a^2 + \beta^2 = 4OM^2$

Αρμονική Διαίρεση (Διχοτόμοι)



- Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος χωρίζει αρμονικά την απέναντι πλευρά.
- $\dfrac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \dfrac{EB}{E\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta}$
- $\Delta B = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}$
- $\Delta \Gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}$
- $EB = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma}$
- $E\Gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}$