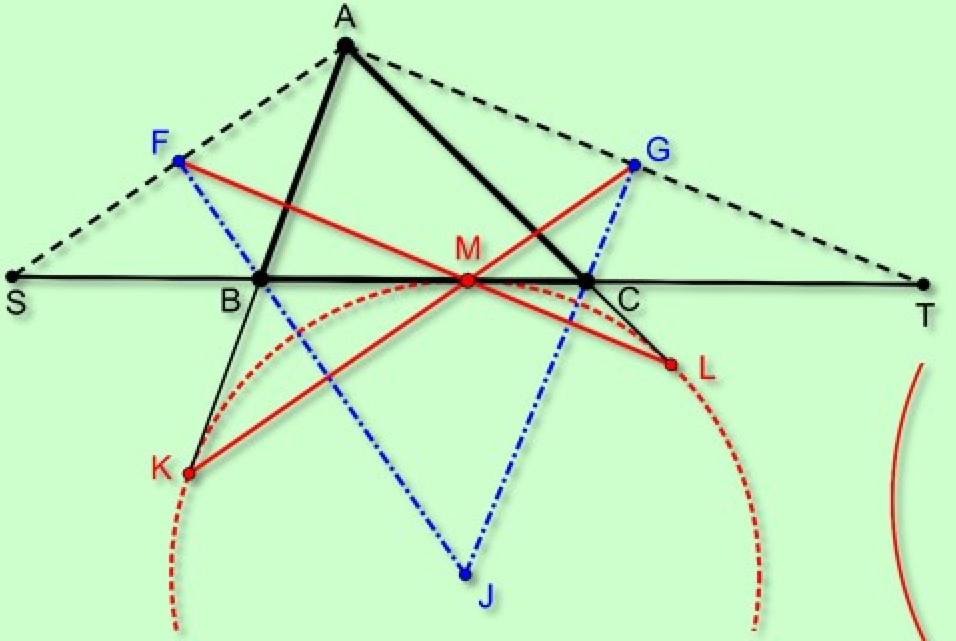
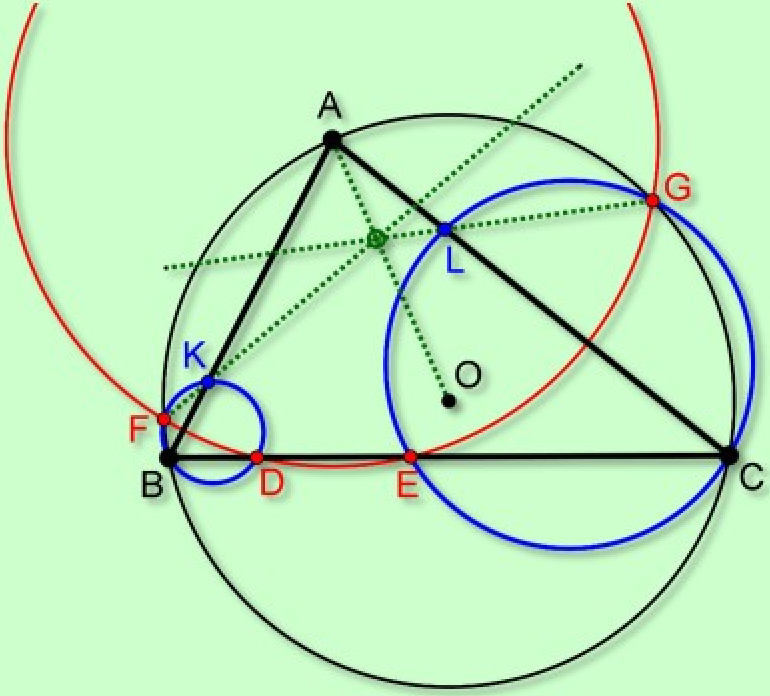
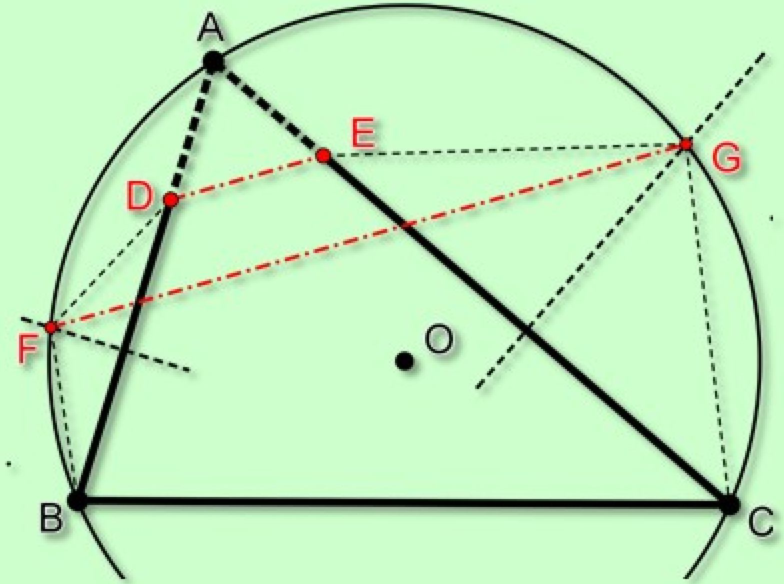
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 5

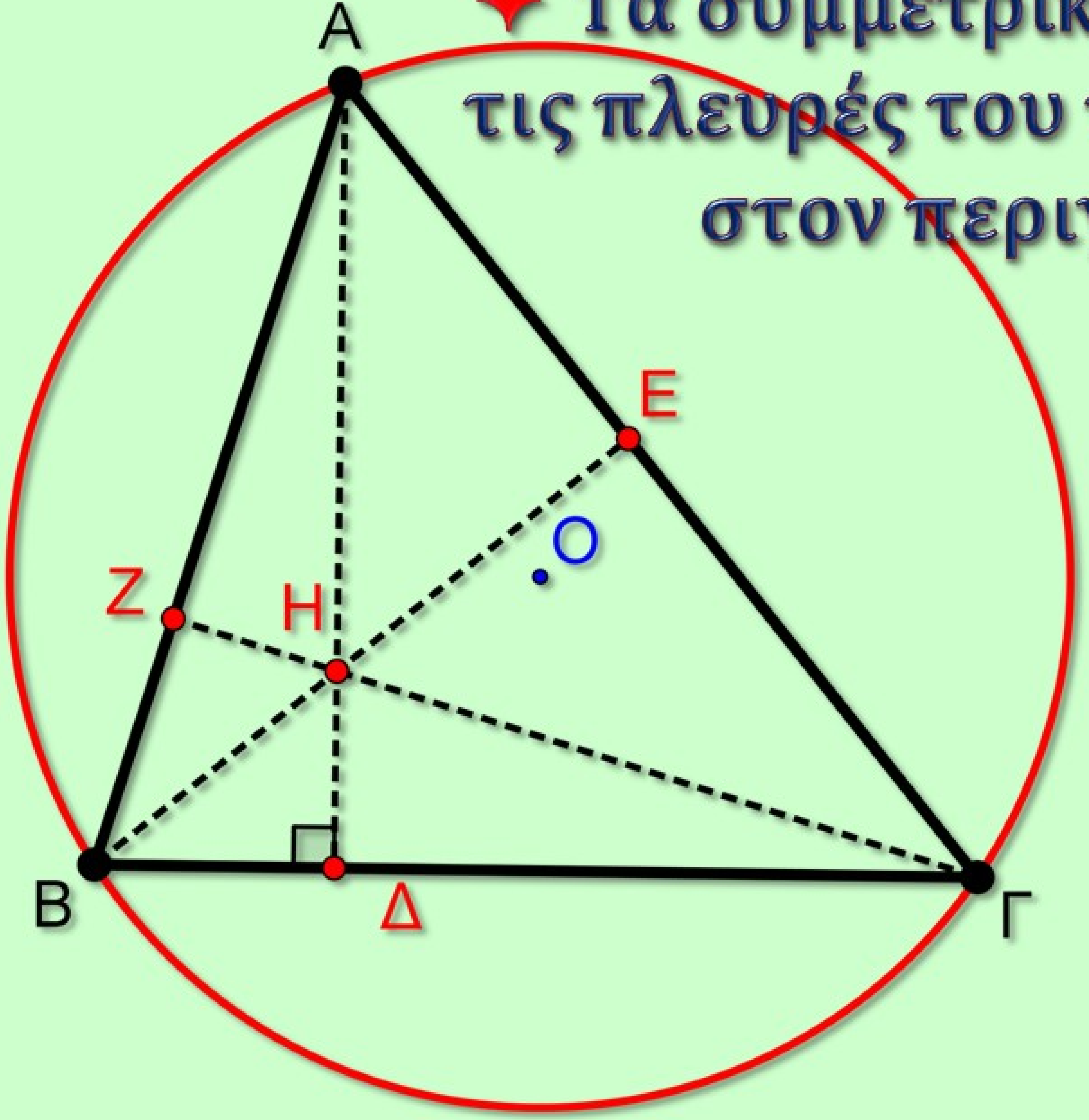


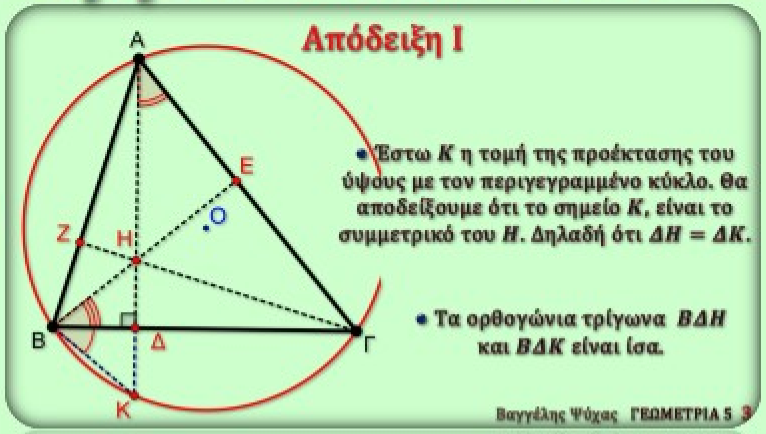


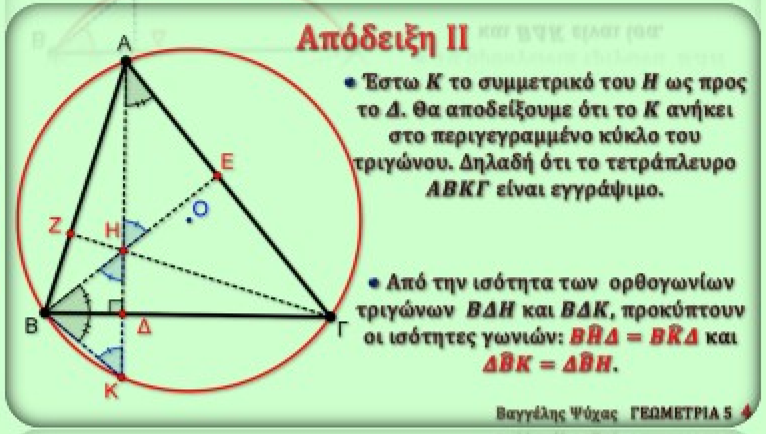


Βαγγέλης Ψύχας

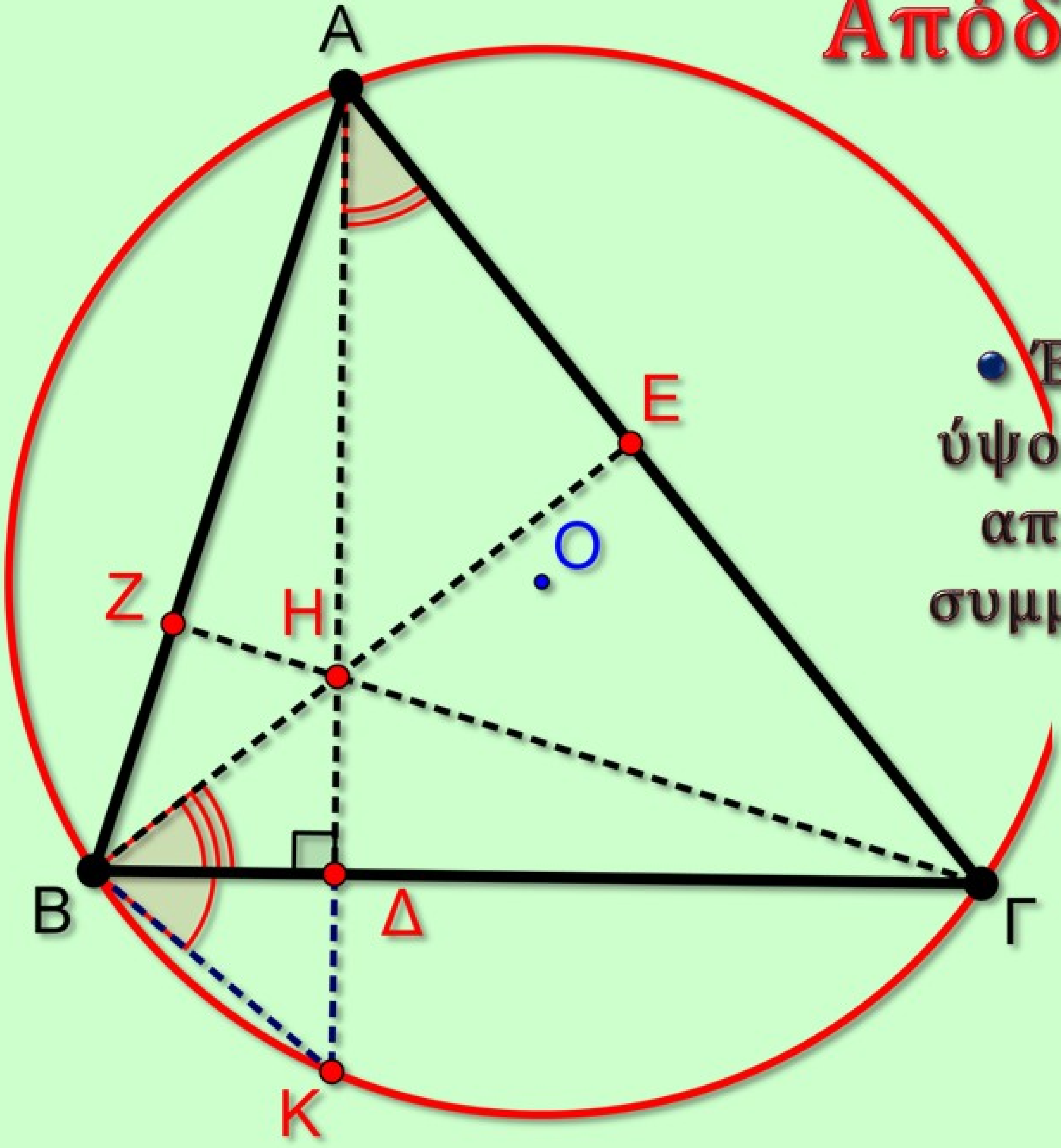
✦ Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου, ως προς τις πλευρές του τριγώνου, βρίσκονται επάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του.







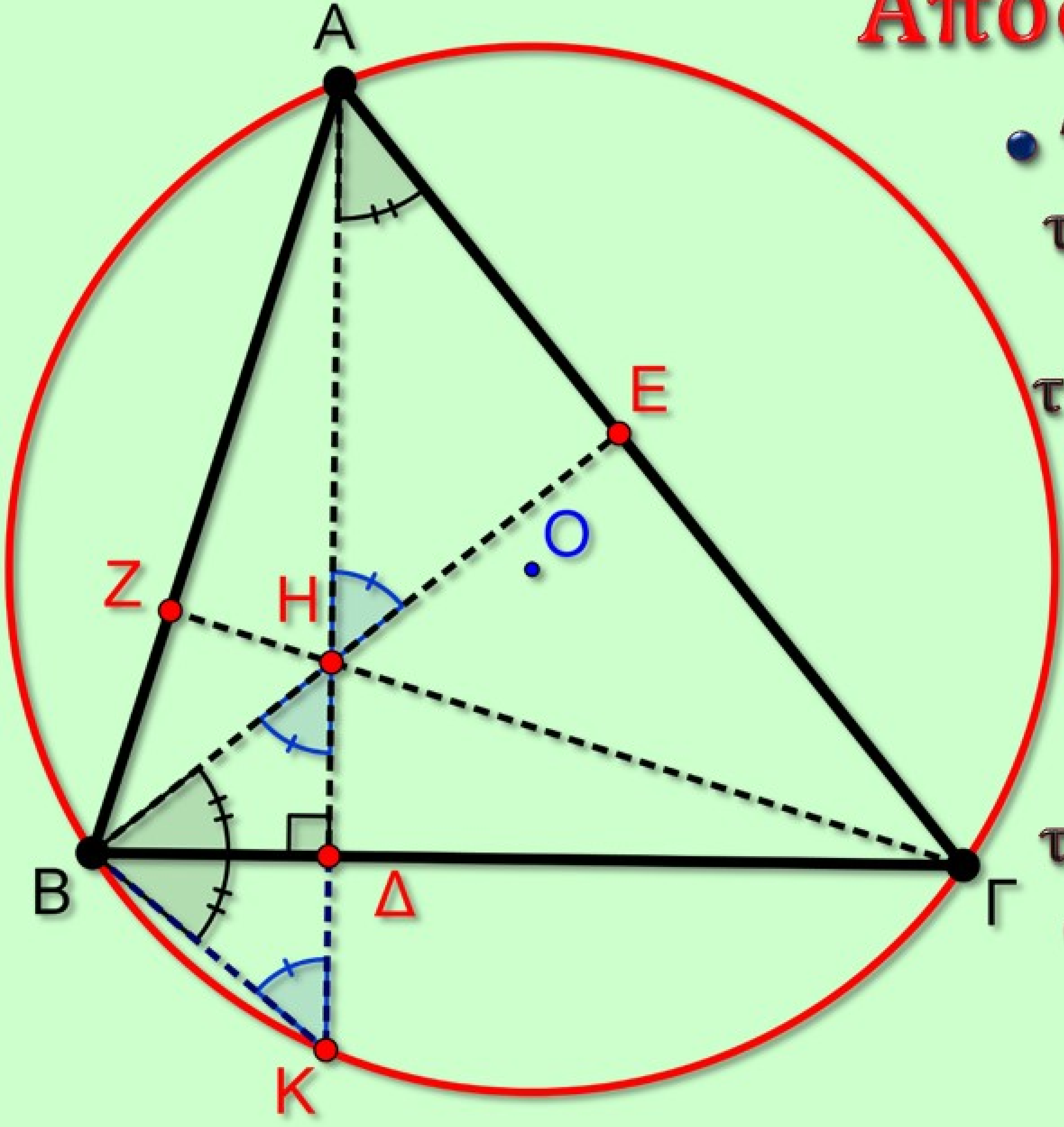
Απόδειξη Ι



- Έστω K η τομή της προέκτασης του ύψους με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K, είναι το συμμετρικό του H. Δηλαδή ότι $ΔH = ΔK$.

- Τα ορθογώνια τρίγωνα $BΔH$ και $BΔK$ είναι ίσα.

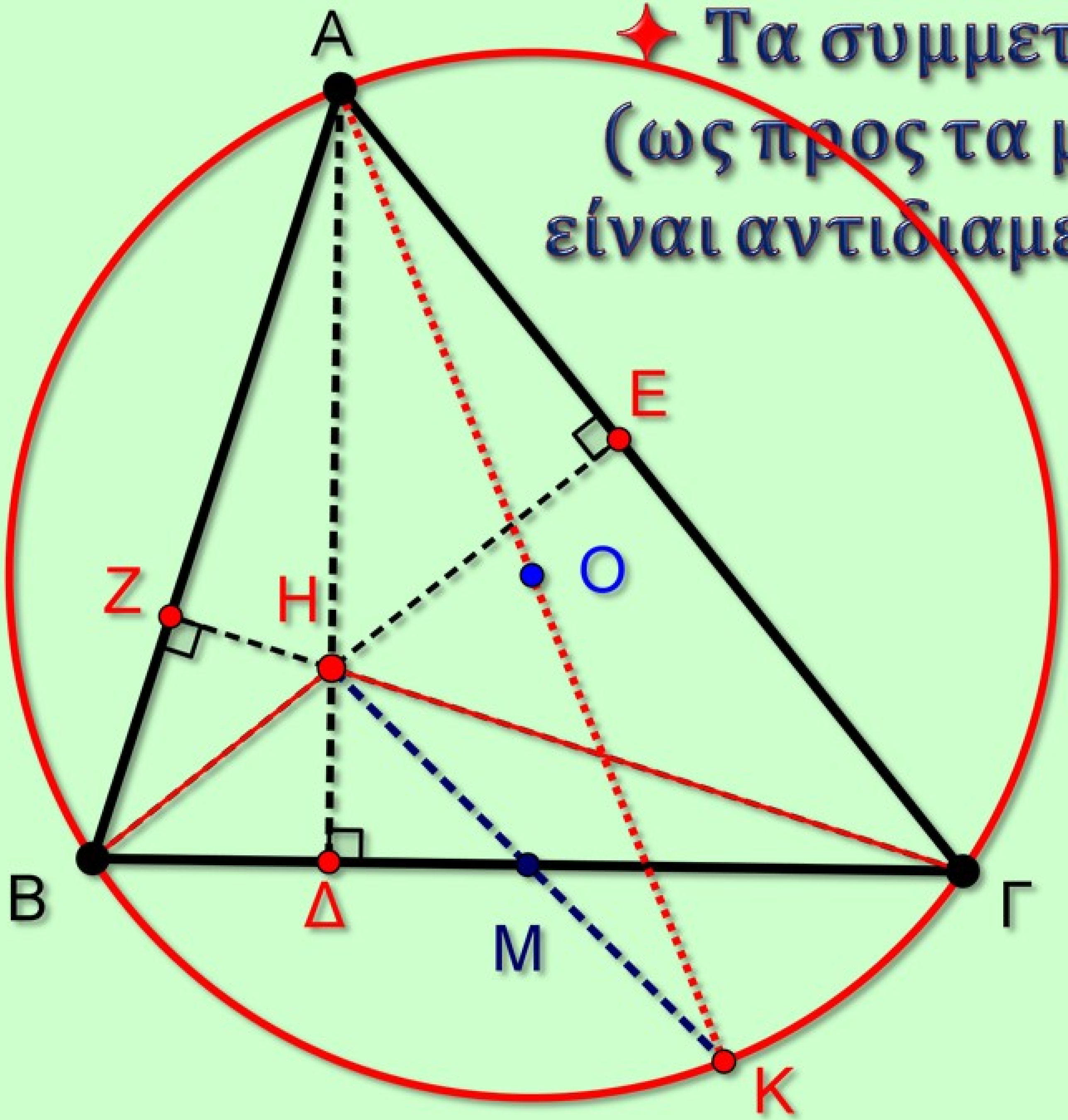
Απόδειξη ΙΙ

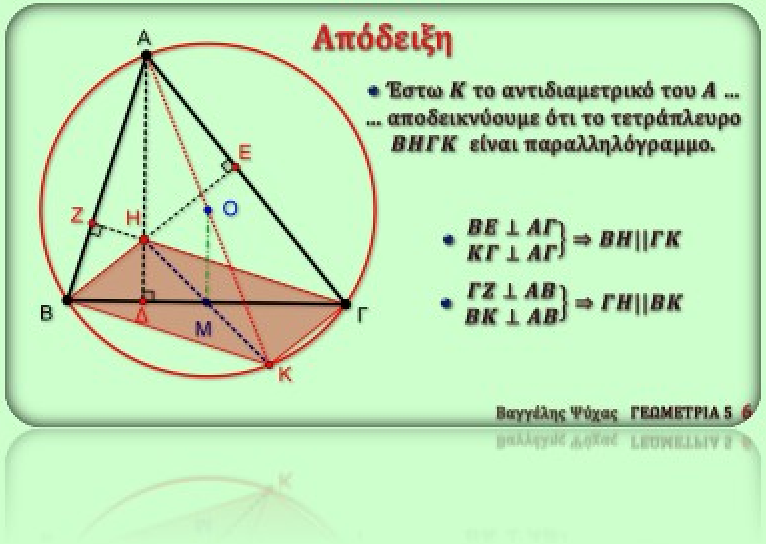


- Έστω K το συμμετρικό του H ως προς το Δ. Θα αποδείξουμε ότι το K ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. Δηλαδή ότι το τετράπλευρο $AB K\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

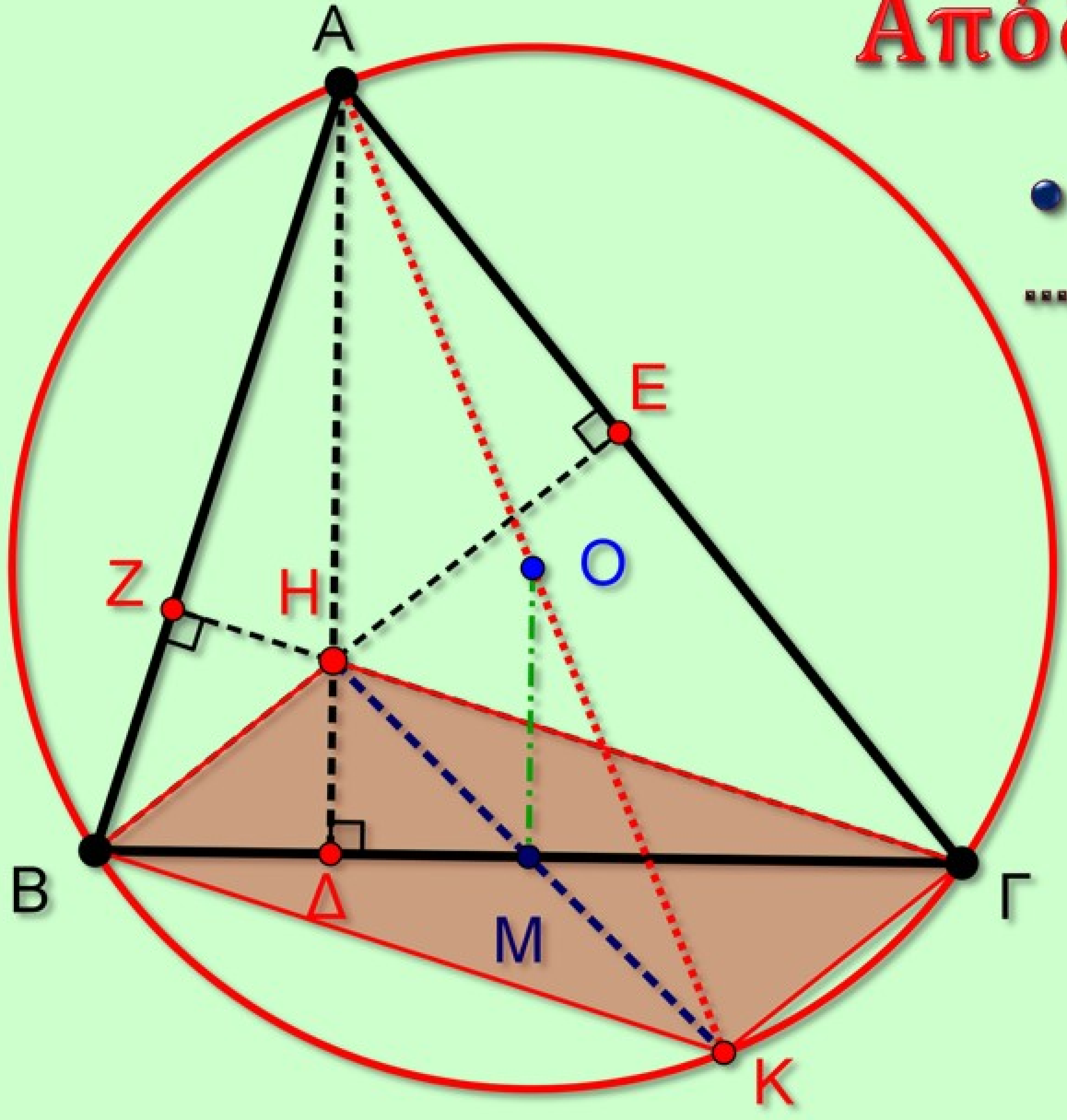
- Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $B\Delta H$ και $B\Delta K$, προκύπτουν οι ισότητες γωνιών: $B\hat{H}\Delta = B\hat{K}\Delta$ και $\Delta\hat{B}K = \Delta\hat{B}H$.

✦ Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου, (ως προς τα μέσα των πλευρών του) είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του.





Απόδειξη

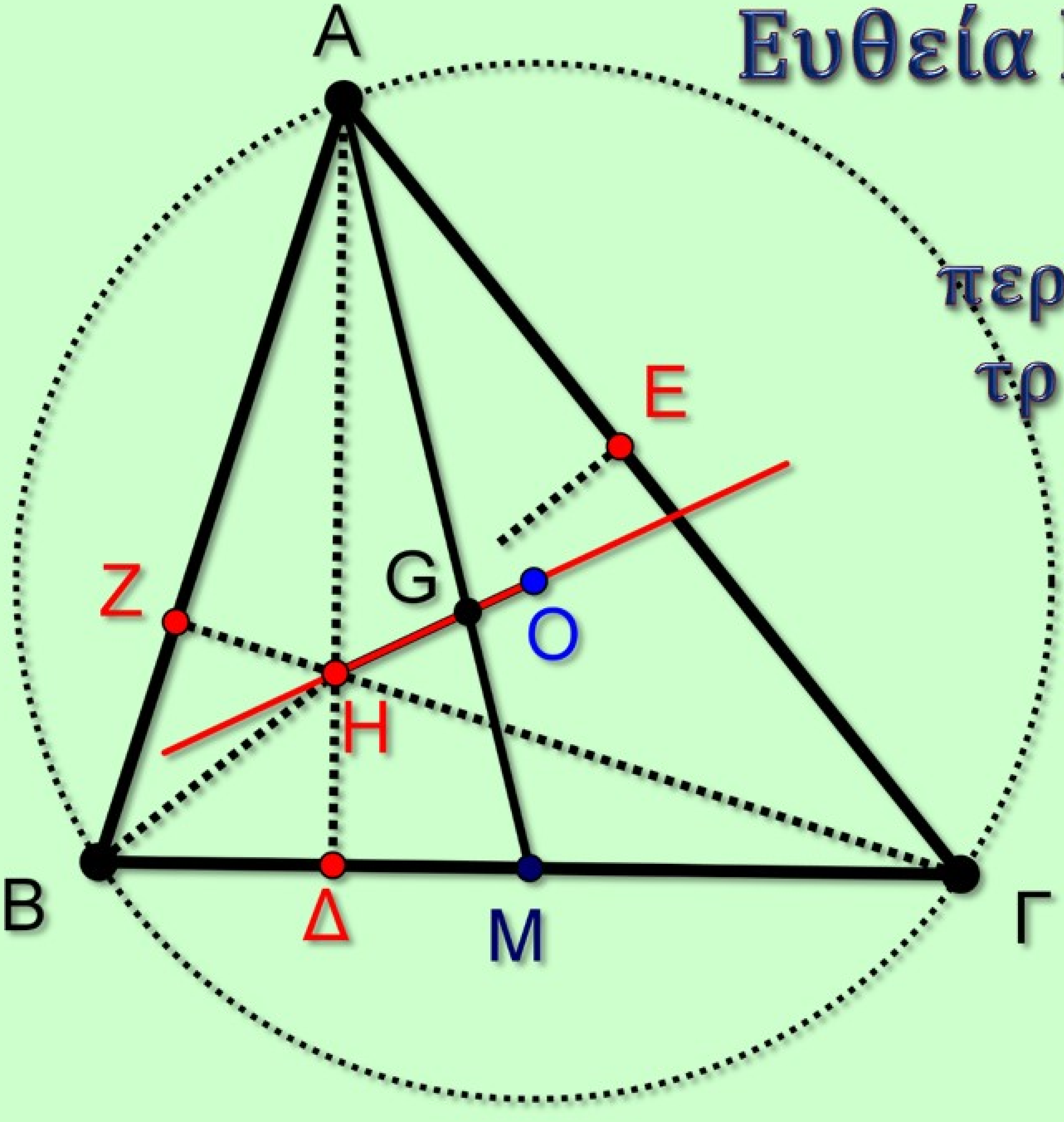


- Έστω K το αντιδιαμετρικό του A …
… αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΗΓΚ$ είναι παραλληλόγραμμο.

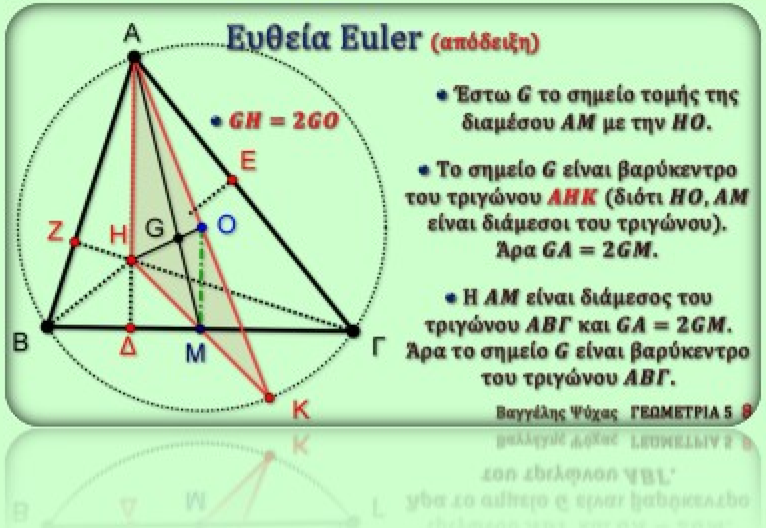
- $\left.\begin{matrix} BE \perp AΓ \\ KΓ \perp AΓ \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH || ΓK$

- $\left.\begin{matrix} ΓZ \perp AB \\ BK \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow ΓH || BK$

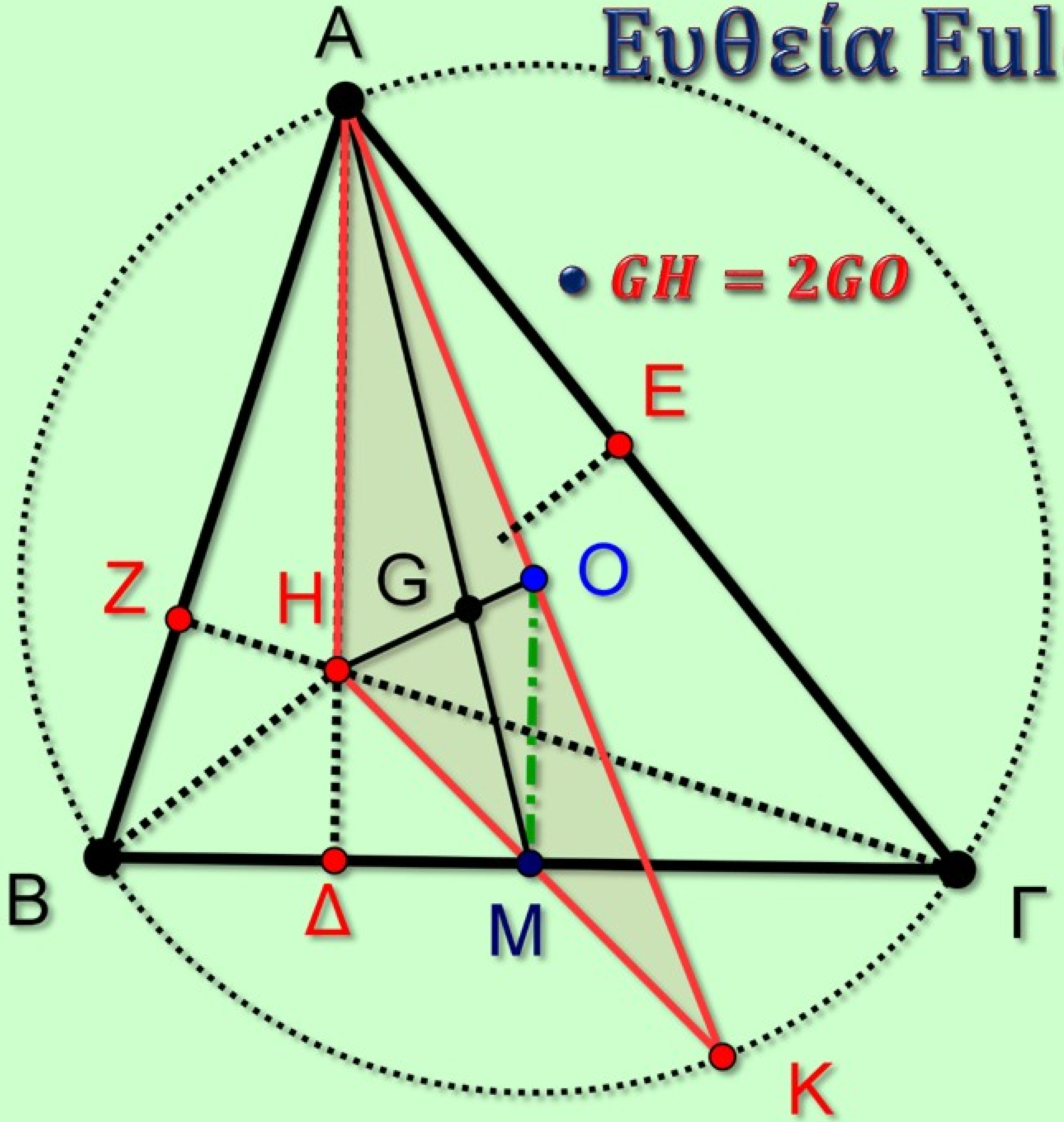
Ευθεία Euler



✦ Το ορθόκεντρο, το περίκεντρο και το βαρύκεντρο τριγώνου βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.



Ευθεία Euler (απόδειξη)

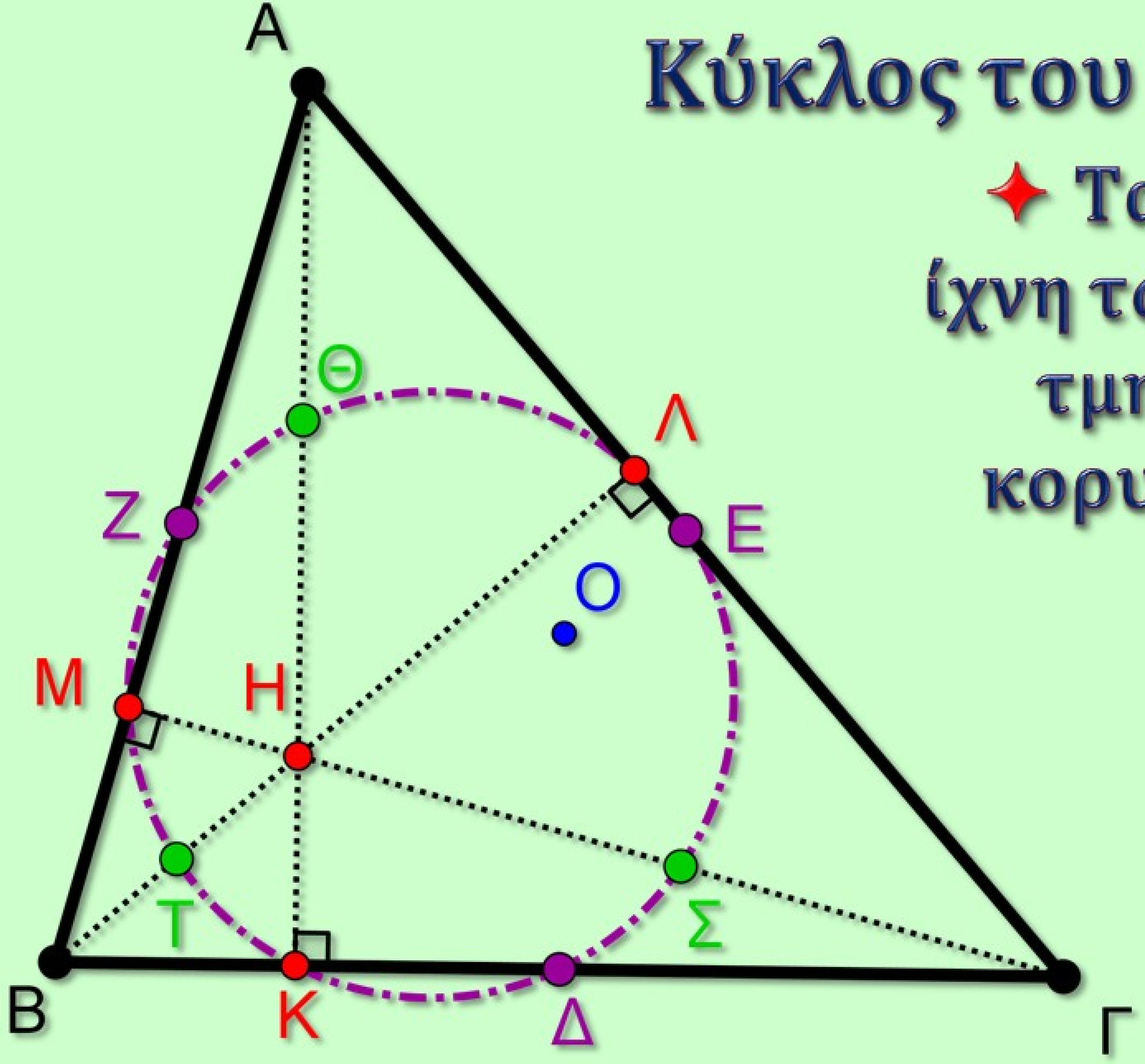


• Έστω G το σημείο τομής της διαμέσου AM με την HO.

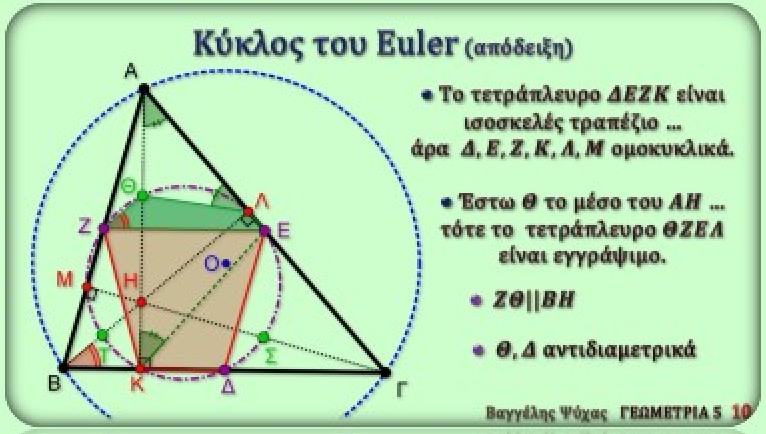
• Το σημείο G είναι βαρύκεντρο του τριγώνου AHK (διότι HO, AM είναι διάμεσοι του τριγώνου). Άρα $GA = 2GM$.

• Η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $GA = 2GM$. Άρα το σημείο G είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

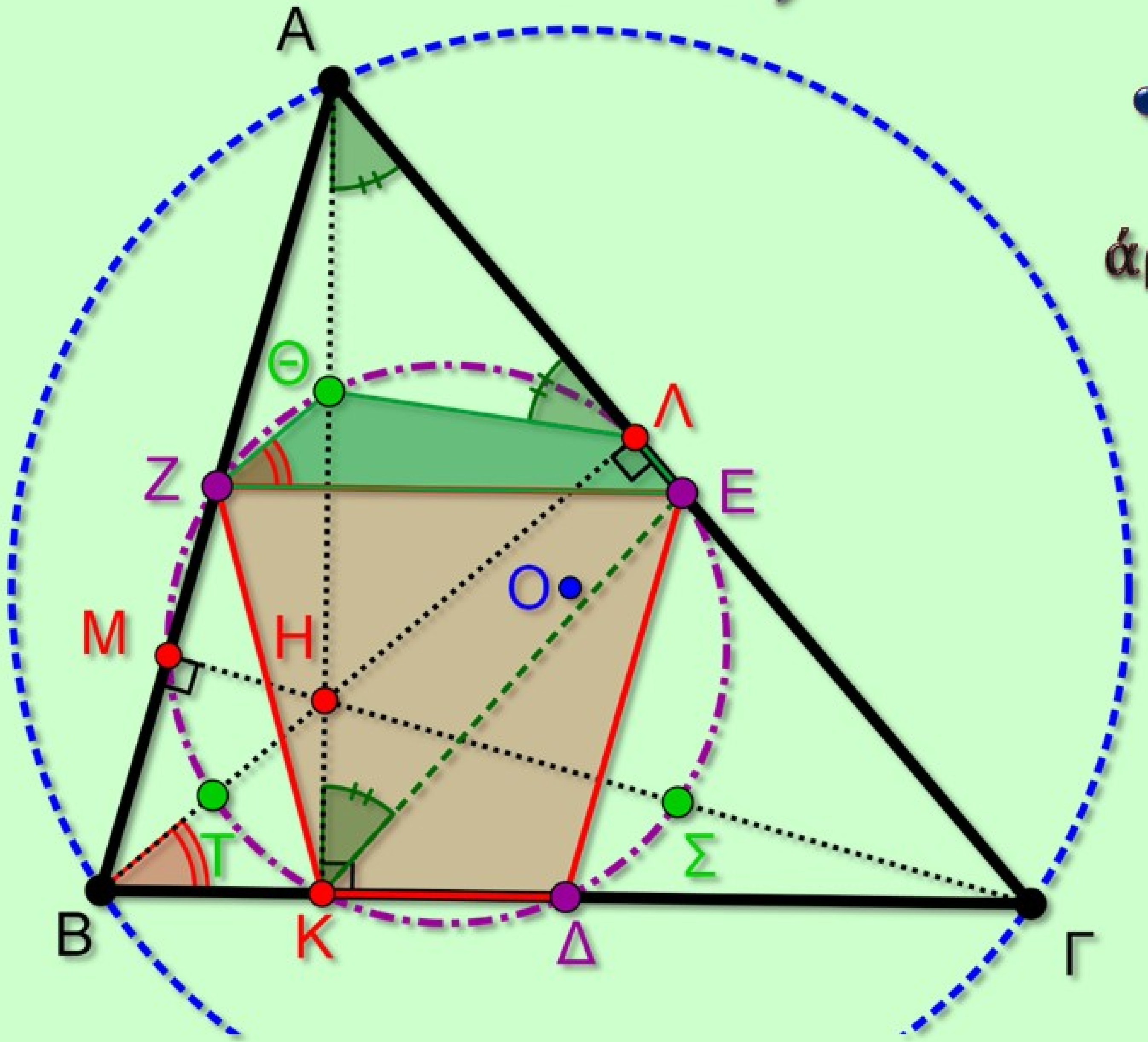
Κύκλος του Euler



✦ Τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των τμημάτων ορθοκέντρου - κορυφών βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο.



Κύκλος του Euler (απόδειξη)

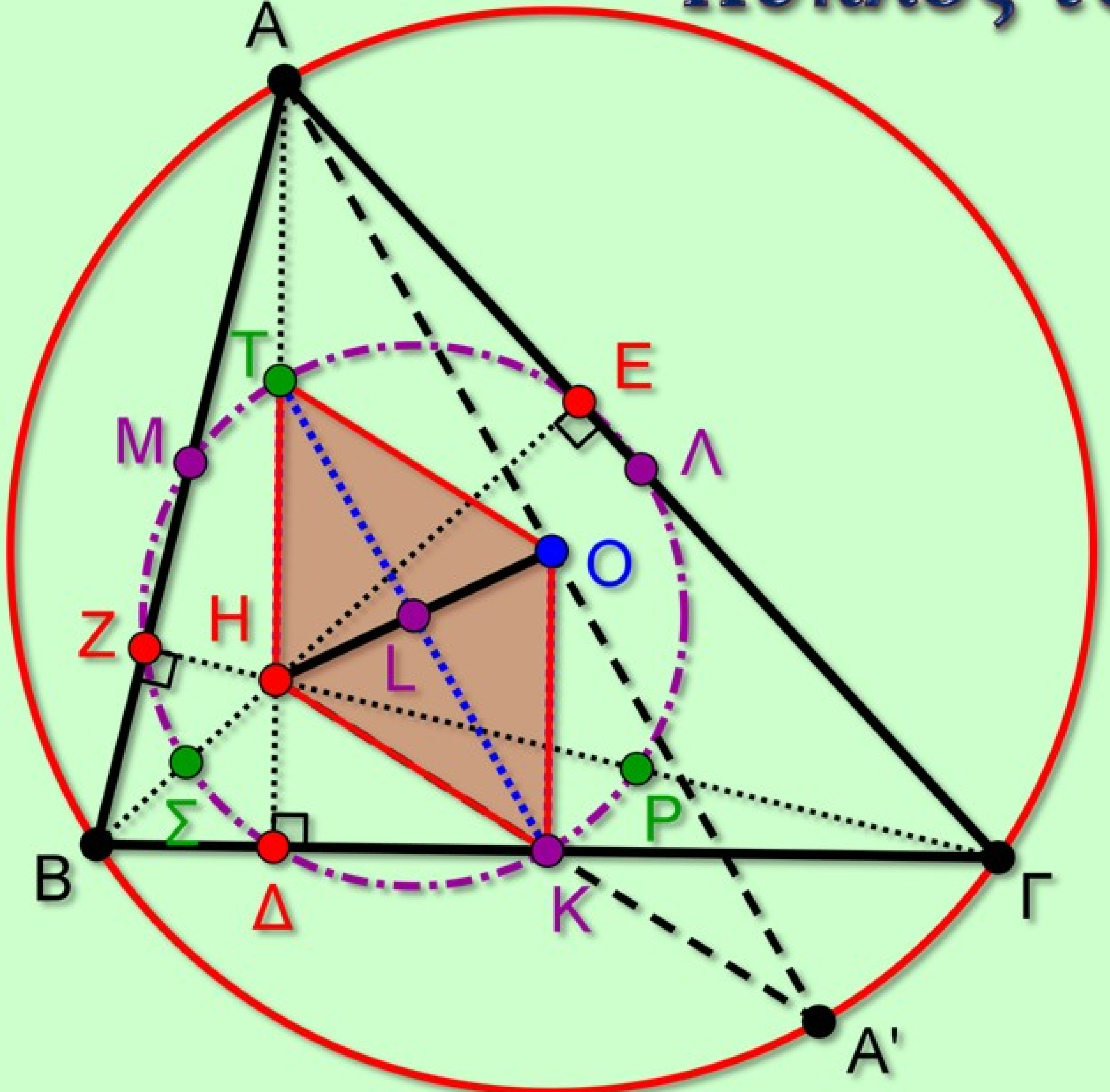


- Το τετράπλευρο ΔEZK είναι ισοσκελές τραπέζιο ...
  άρα $\Delta, E, Z, K, \Lambda, M$ ομοκυκλικά.

- Έστω Θ το μέσο του AH ...
  τότε το τετράπλευρο $\Theta ZE\Lambda$ είναι εγγράψιμο.

- $Z\Theta || BH$
- Θ, Δ αντιδιαμετρικά

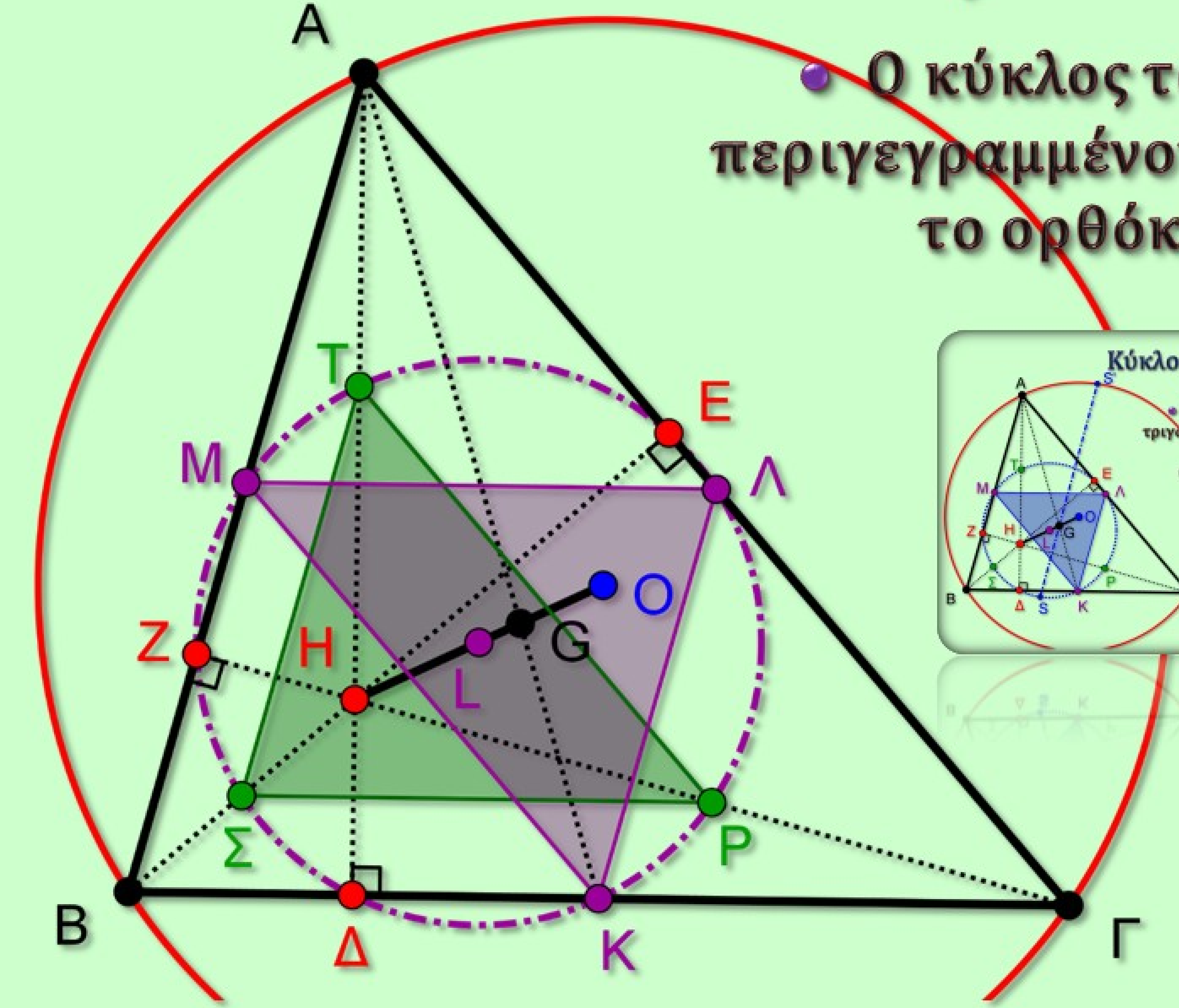
Κύκλος του Euler I

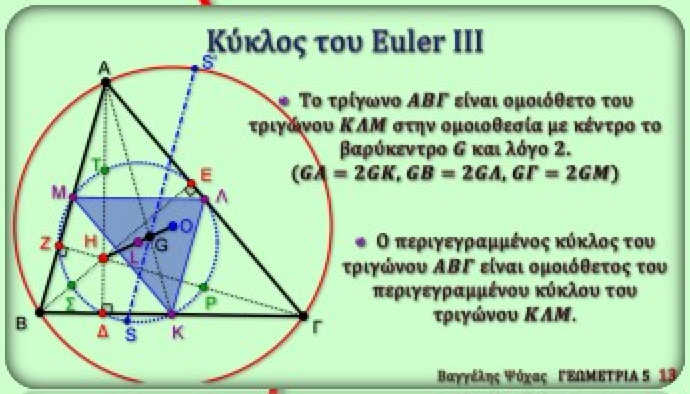


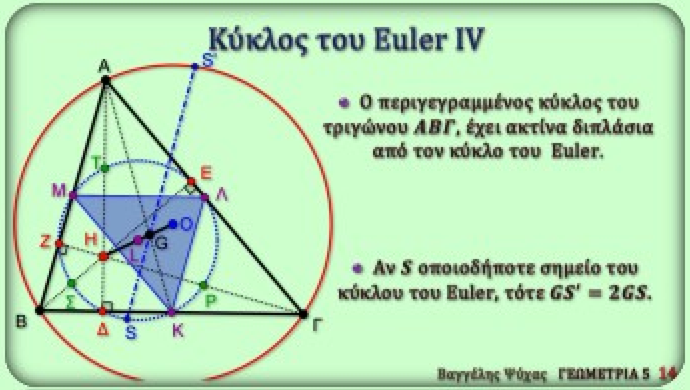
- Κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του OH.
  ($TOKH$ παραλληλόγραμμο)
  (T, K αντιδιαμετρικά)

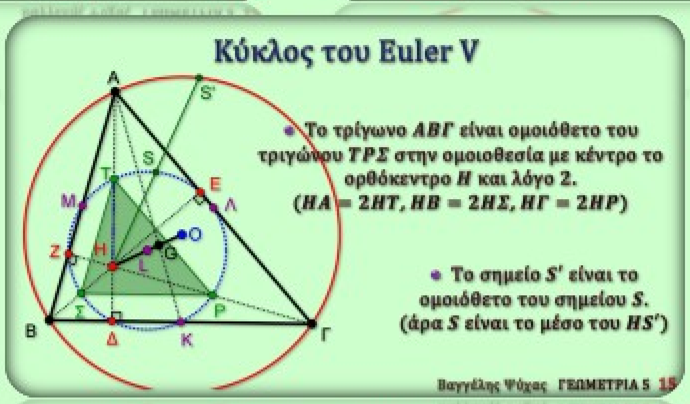
Κύκλος του Euler II

- Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρα ομοιοθεσίας το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο.

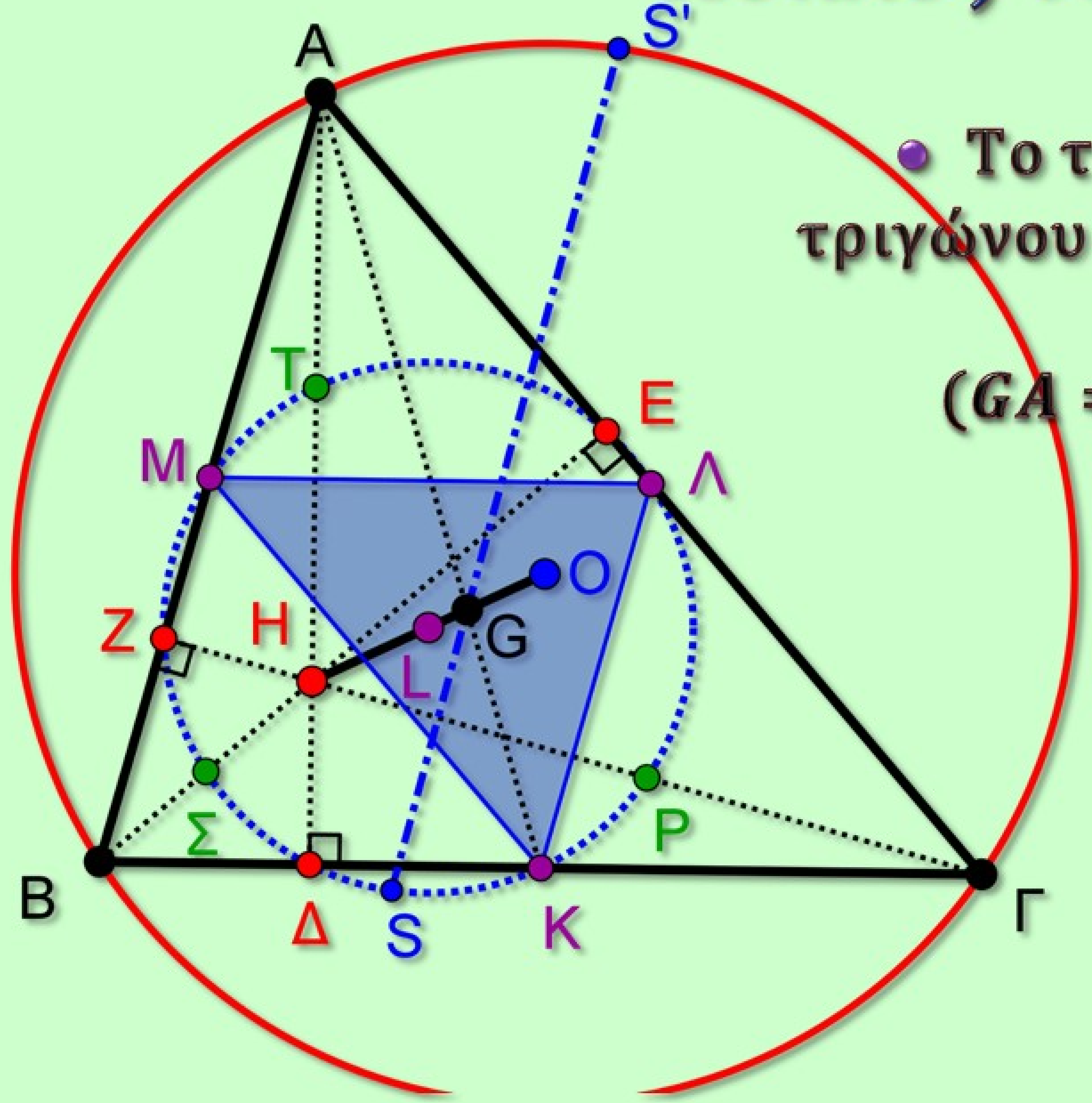








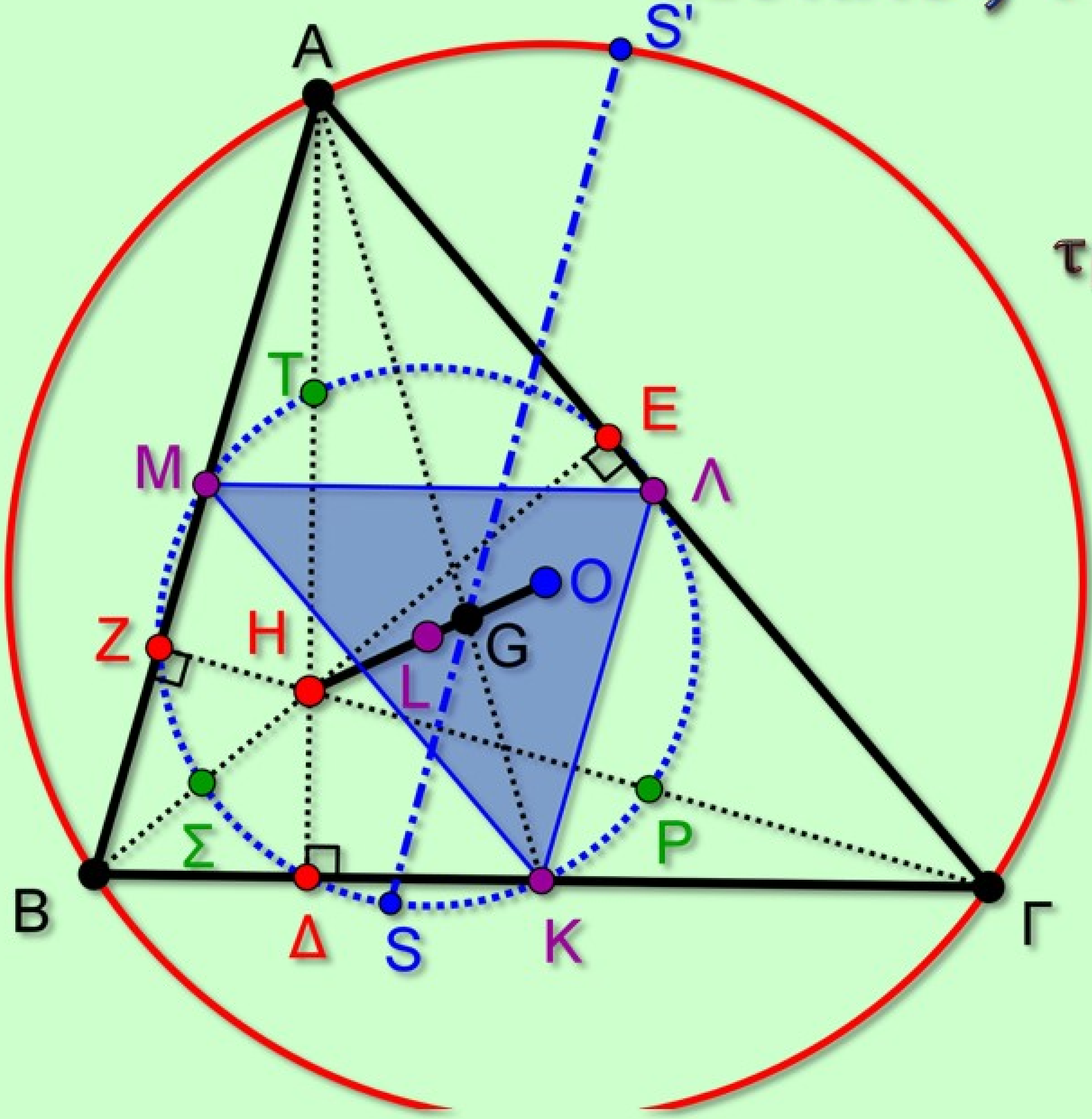
Κύκλος του Euler III



- Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $ΚΛΜ$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το βαρύκεντρο G και λόγο 2. $(GA = 2GK, GB = 2GΛ, GΓ = 2GM)$

- Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΚΛΜ$.

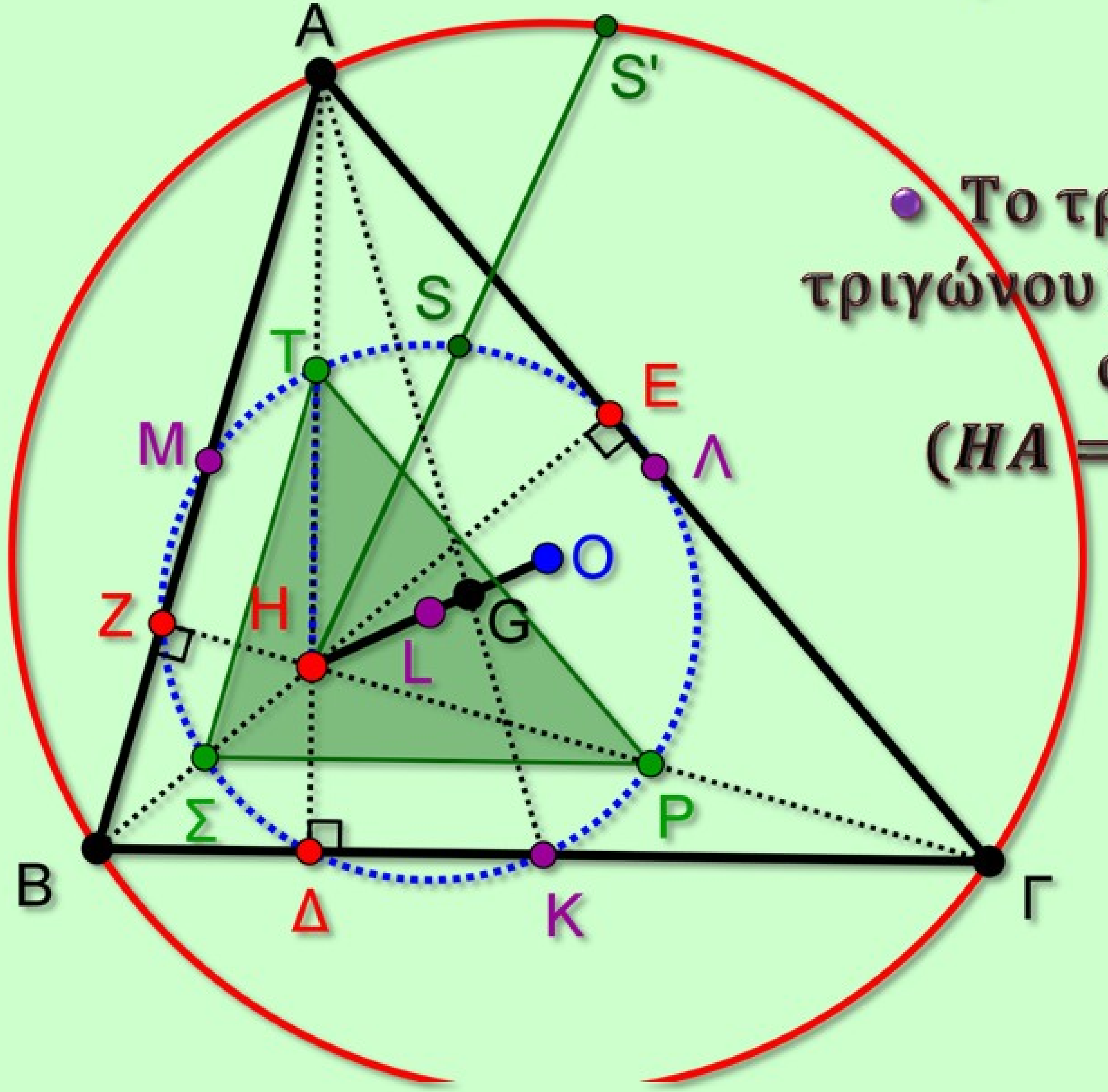
Κύκλος του Euler IV



- Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒΓ$, έχει ακτίνα διπλάσια από τον κύκλο του Euler.

- Αν S οποιοδήποτε σημείο του κύκλου του Euler, τότε $GS' = 2GS$.

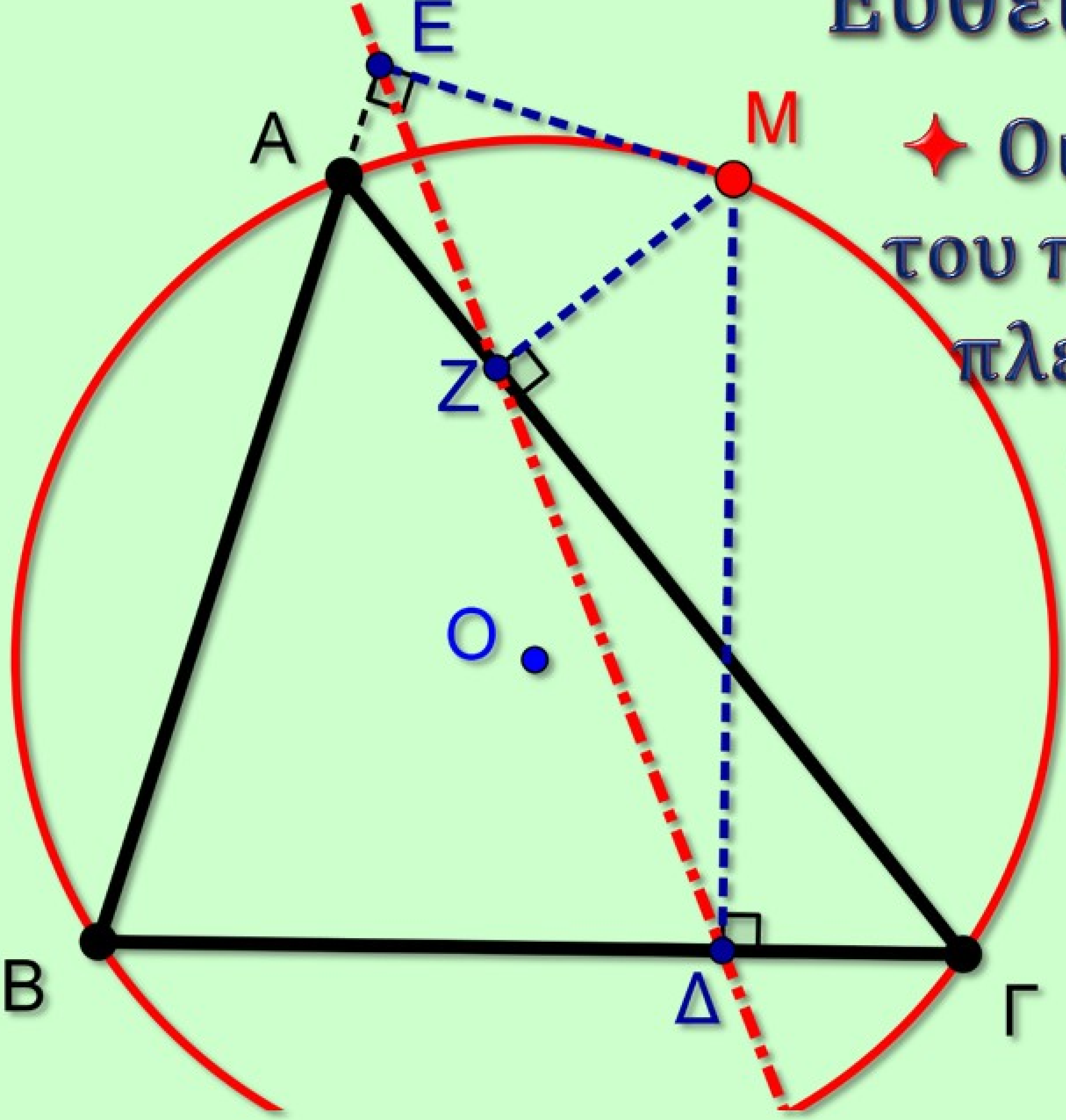
Κύκλος του Euler V



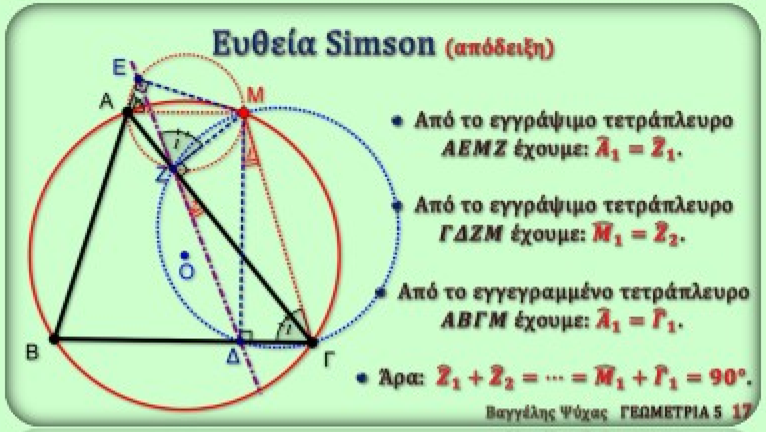
- Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $TPΣ$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H και λόγο 2. $(HA = 2HT, HB = 2HΣ, HΓ = 2HP)$

- Το σημείο S' είναι το ομοιόθετο του σημείου S. (άρα S είναι το μέσο του HS')

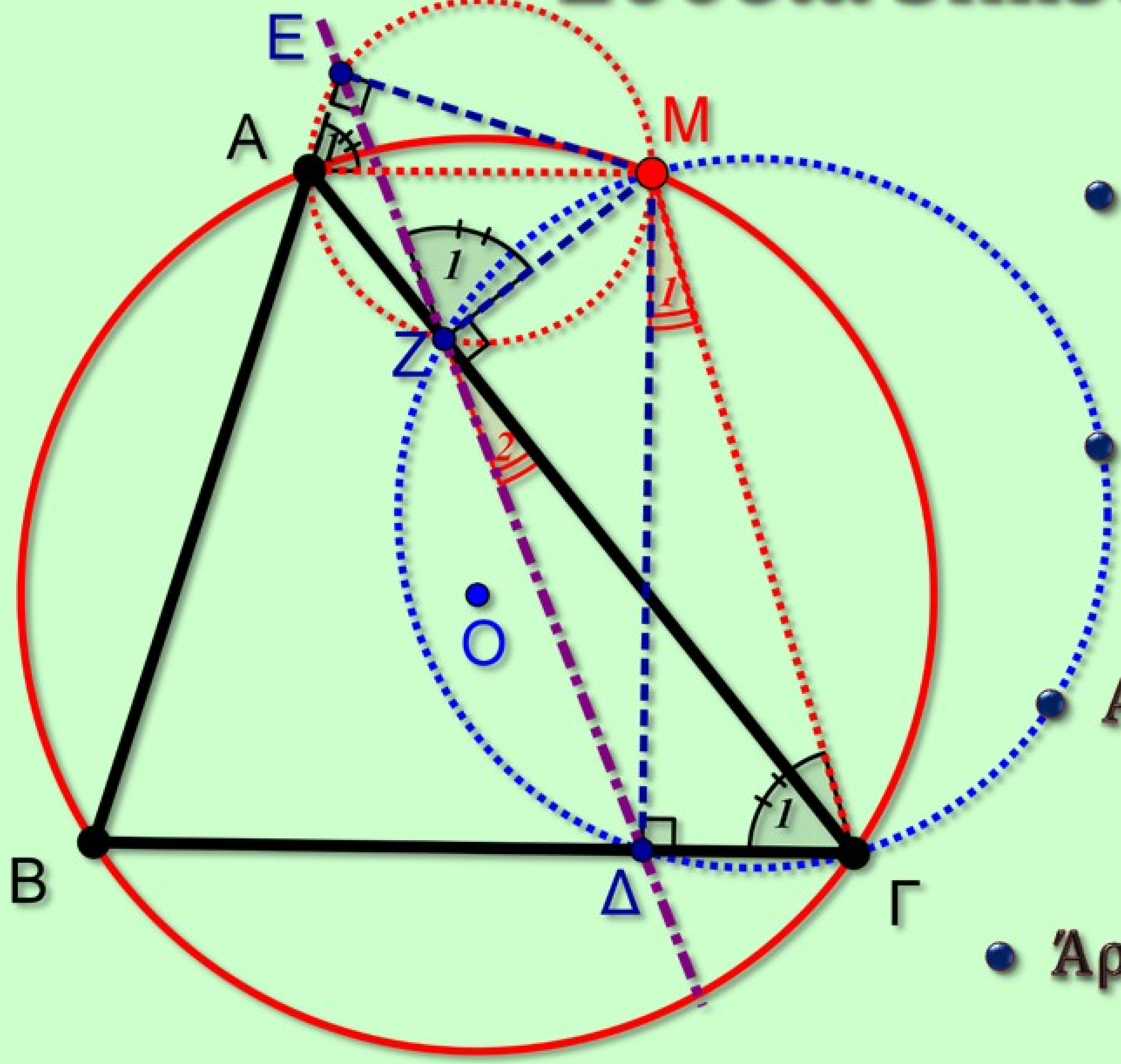
Ευθεία Simson



✦ Οι προβολές τυχόντος σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου στις πλευρές τριγώνου, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

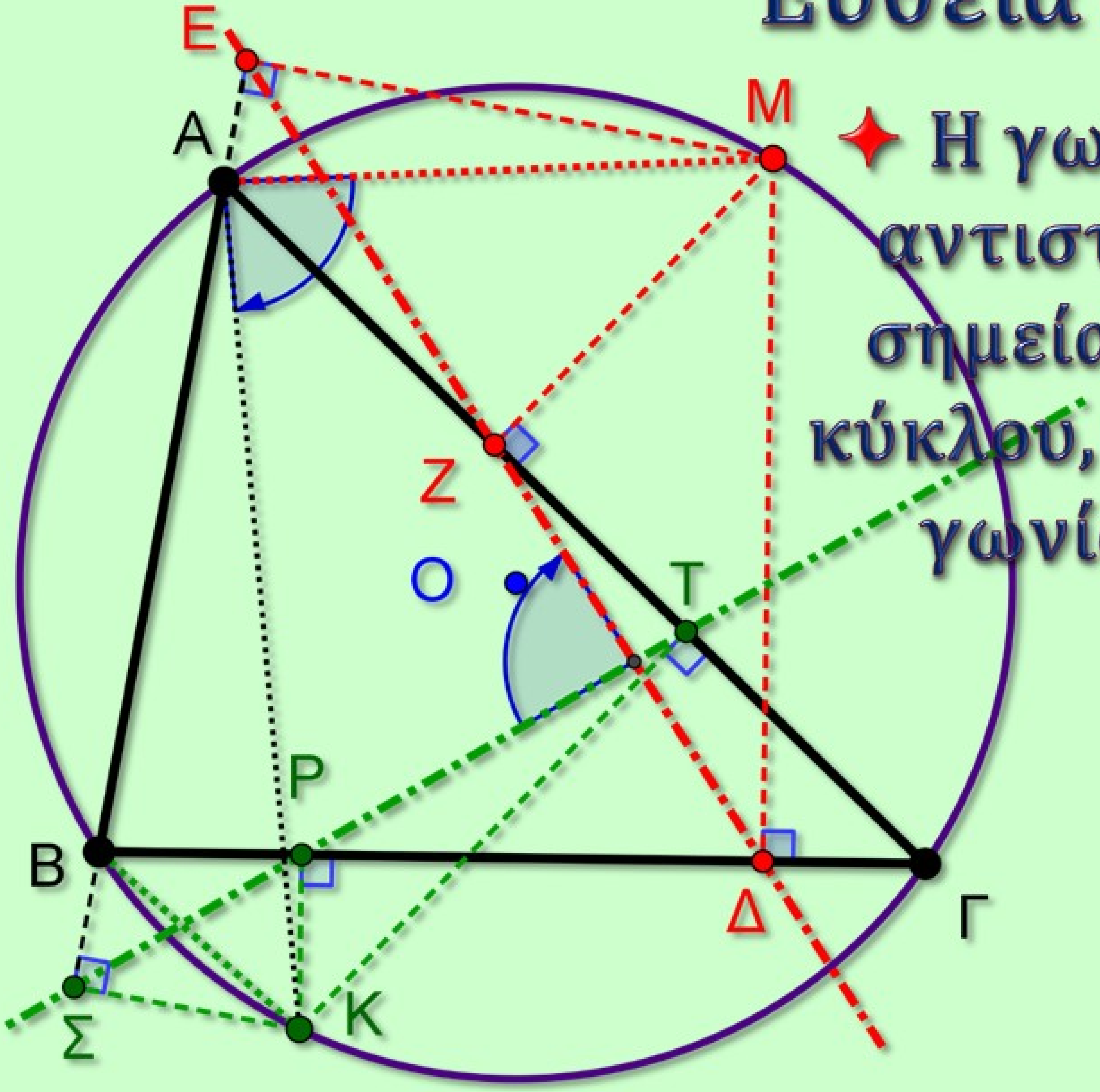


Ευθεία Simson (απόδειξη)

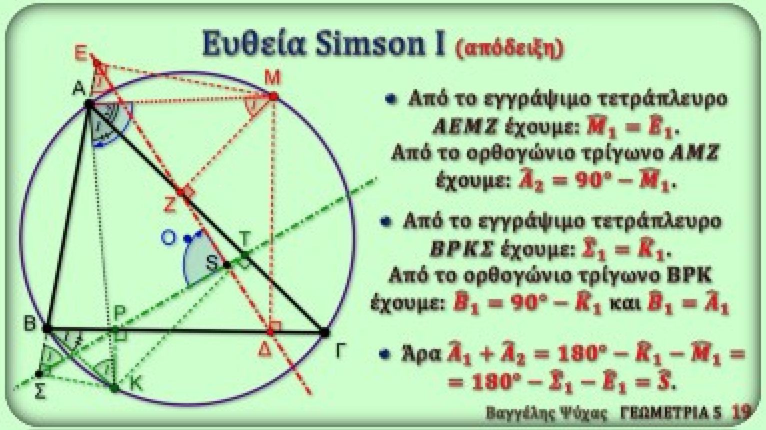


- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AEMZ$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$.
- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\Gamma\Delta ZM$ έχουμε: $\widehat{M}_1 = \hat{Z}_2$.
- Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma M$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$.
- Άρα: $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = \cdots = \widehat{M}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 90°$.

Ευθεία Simson I



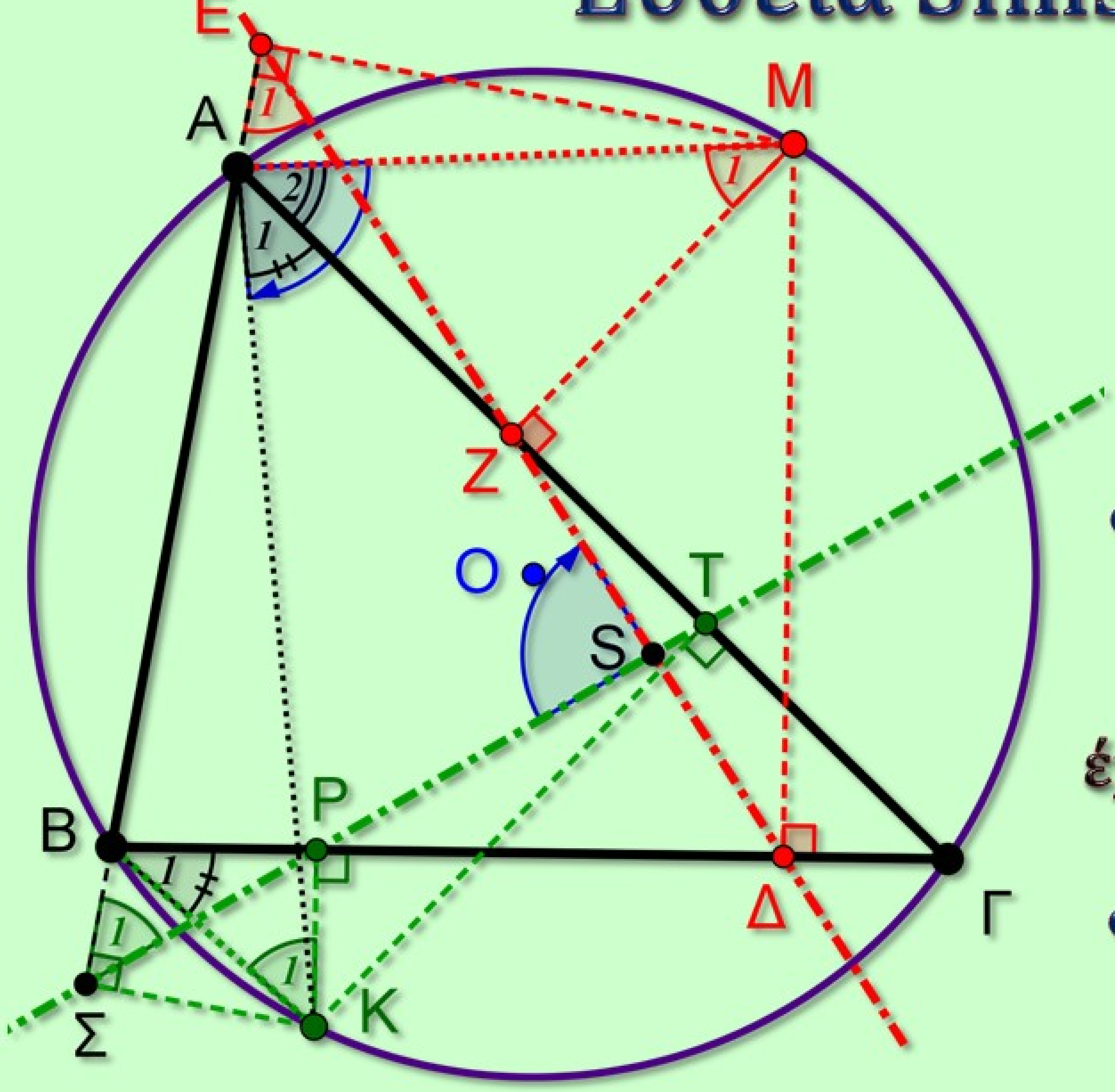
✦ Η γωνία των ευθειών Simson που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικά σημεία K, M του περιγεγραμμένου κύκλου, ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο KM.


Ευθεία Simson I (απόδειξη)

- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AEMZ$ έχουμε: $\hat{M}_1 = \hat{E}_1$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο AMZ έχουμε: $\hat{A}_2 = 90° - \hat{M}_1$.
- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $BPK\Sigma$ έχουμε: $\hat{\Sigma}_1 = \hat{K}_1$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BPK έχουμε: $\hat{B}_1 = 90° - \hat{K}_1$ και $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$
- Άρα $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180° - \hat{K}_1 - \hat{M}_1 =$ $= 180° - \hat{\Sigma}_1 - \hat{E}_1 = \hat{S}$.

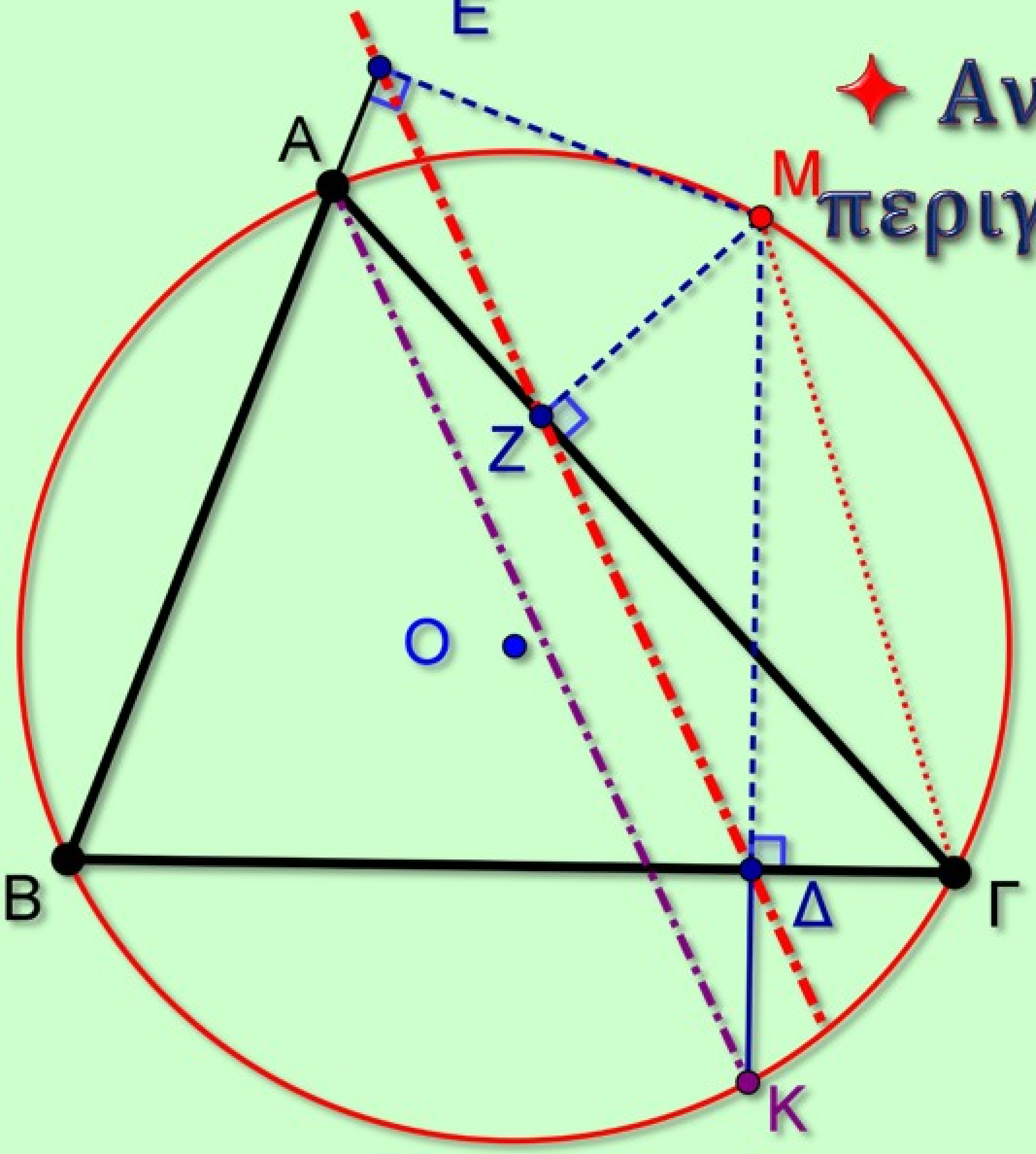
Βαγγέλης Ψύχας ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 5 19

Ευθεία Simson I (απόδειξη)

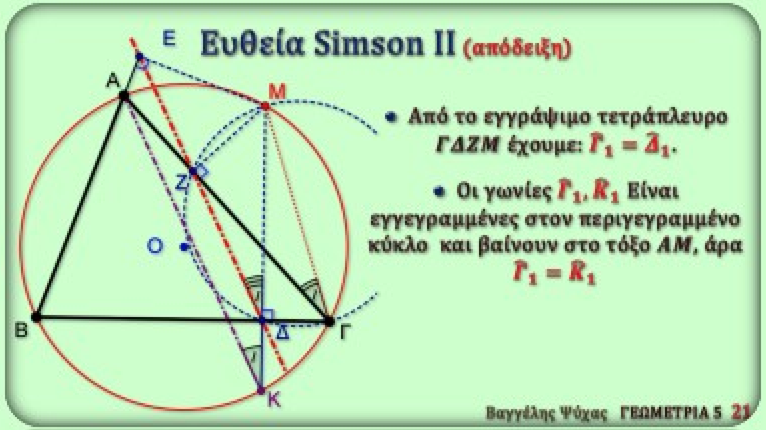


- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AEMZ$ έχουμε: $\widehat{M}_1 = \widehat{E}_1$.
  Από το ορθογώνιο τρίγωνο AMZ έχουμε: $\widehat{A}_2 = 90° - \widehat{M}_1$.
- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $BPK\Sigma$ έχουμε: $\widehat{\Sigma}_1 = \widehat{K}_1$.
  Από το ορθογώνιο τρίγωνο BPK έχουμε: $\widehat{B}_1 = 90° - \widehat{K}_1$ και $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$
- Άρα $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180° - \widehat{K}_1 - \widehat{M}_1 =$
  $= 180° - \widehat{\Sigma}_1 - \widehat{E}_1 = \widehat{S}$.

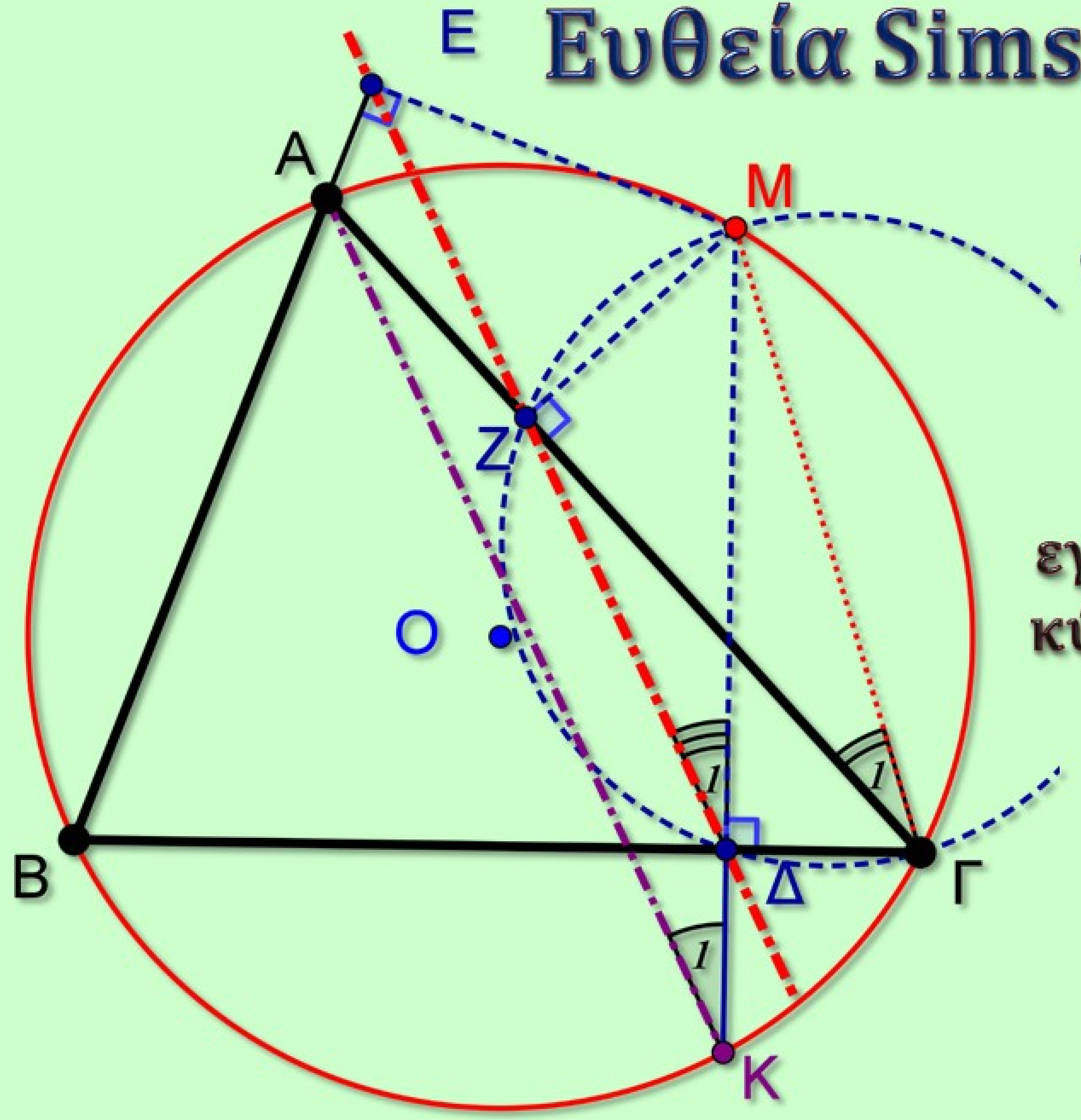
Ευθεία Simson II



✦ Αν η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο στο K, τότε $AK \parallel \Delta E$.

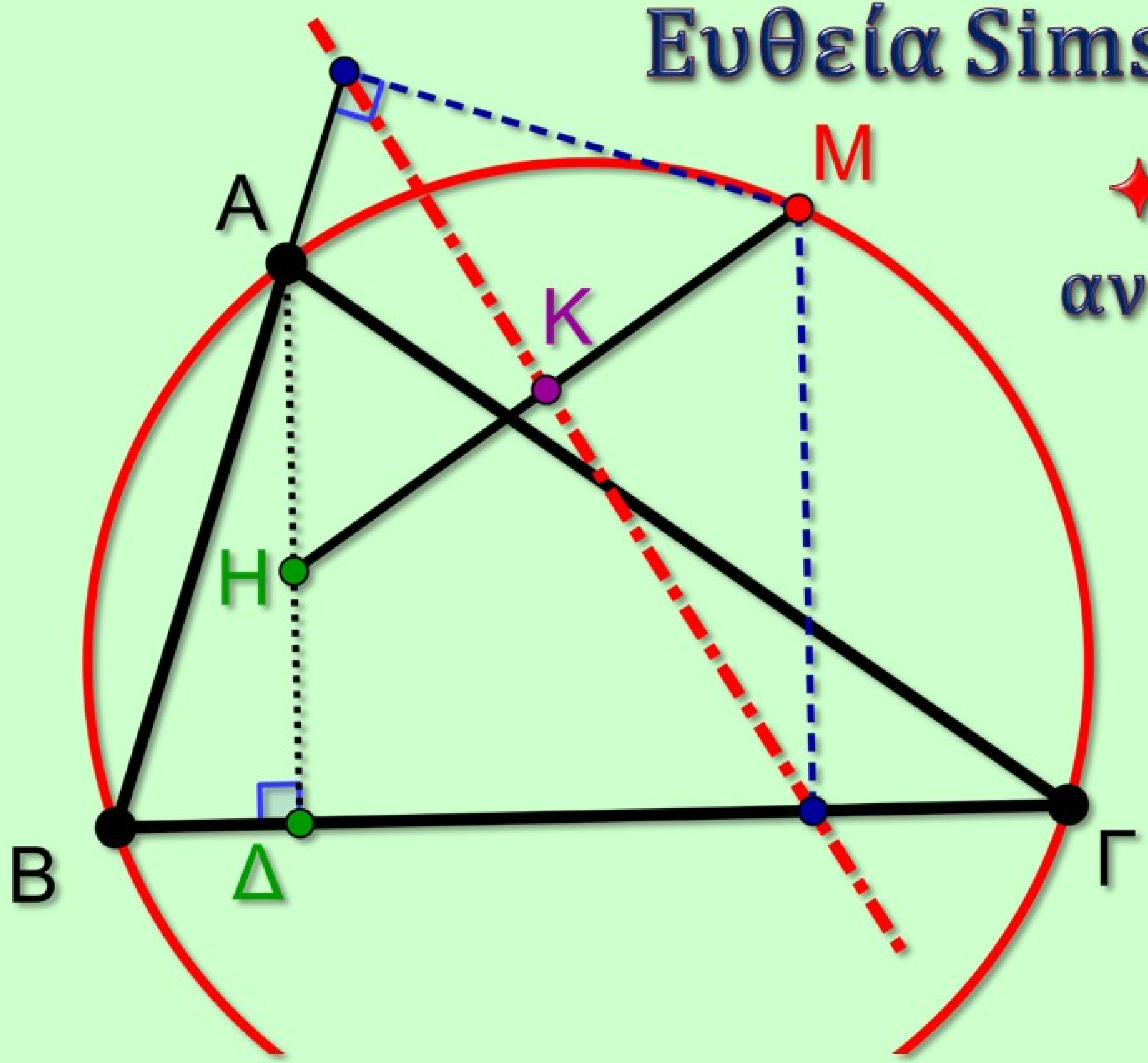


Ευθεία Simson II (απόδειξη)

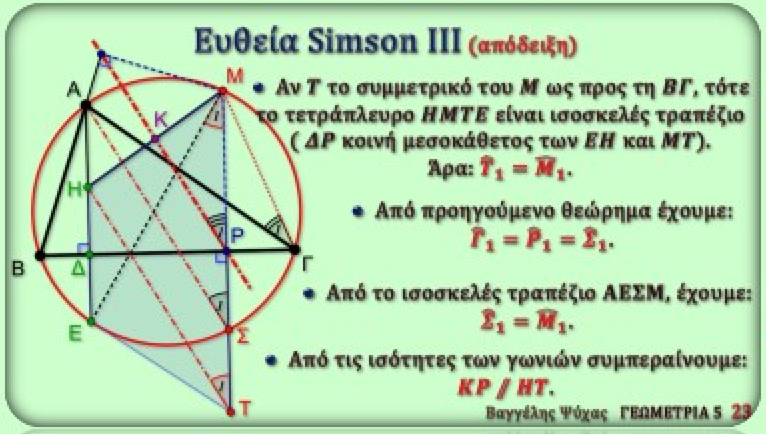


- Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $ΓΔZM$ έχουμε: $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$.
- Οι γωνίες $\hat{Γ}_1, \hat{K}_1$ Είναι εγγεγραμμένες στον περιγεγραμμένο κύκλο και βαίνουν στο τόξο AM, άρα $\hat{Γ}_1 = \hat{K}_1$

Ευθεία Simson III



✦ Η ευθεία Simson που αντιστοιχεί στο σημείο M, διχοτομεί την HM.

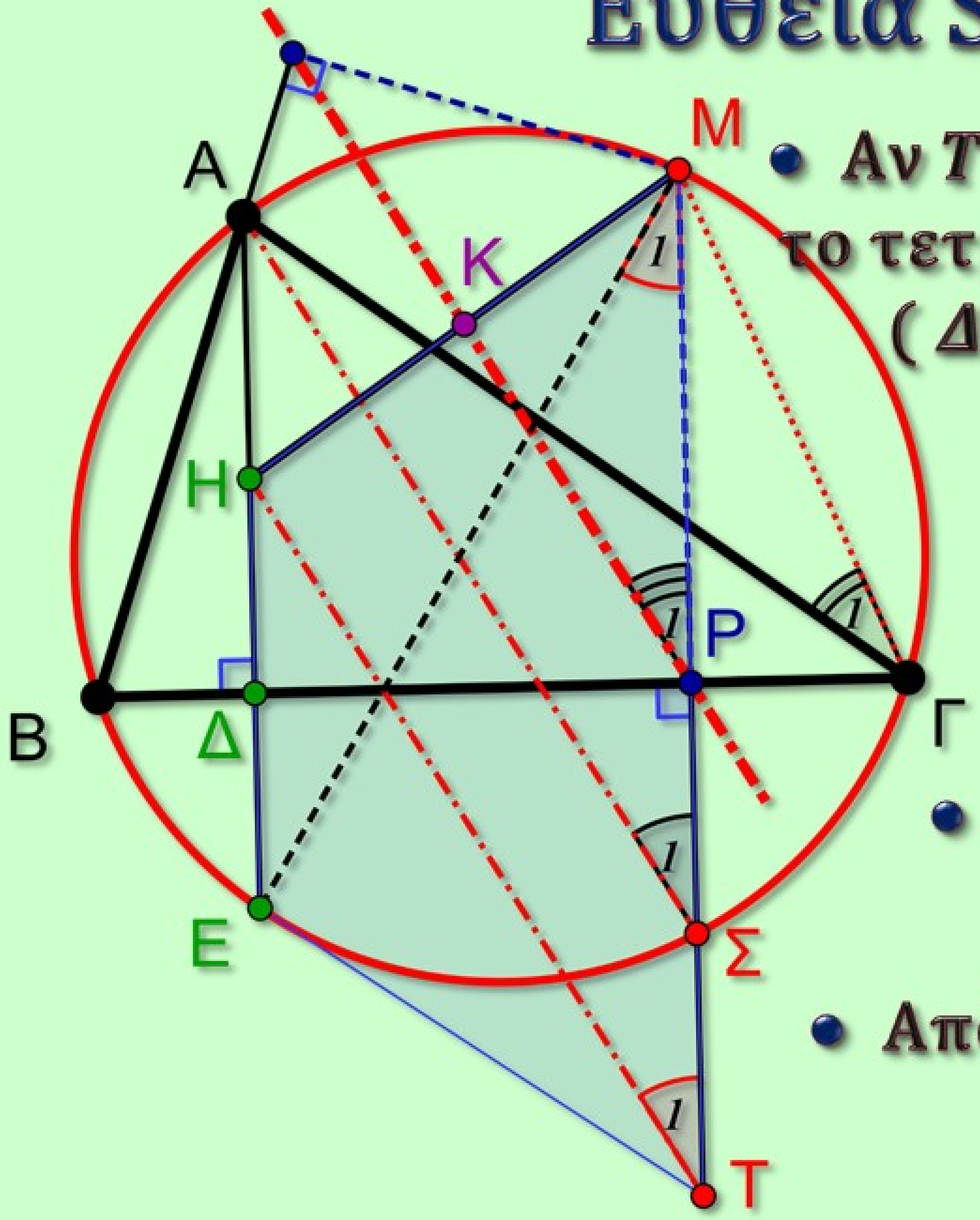


Ευθεία Simson III (απόδειξη)

- Αν T το συμμετρικό του M ως προς τη $B\Gamma$, τότε το τετράπλευρο $HMTE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο (ΔP κοινή μεσοκάθετος των EH και MT). Άρα: $\hat{T}_1 = \hat{M}_1$.
- Από προηγούμενο θεώρημα έχουμε: $\hat{T}_1 = \hat{P}_1 = \hat{\Sigma}_1$.
- Από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΕΣΜ, έχουμε: $\hat{\Sigma}_1 = \hat{M}_1$.
- Από τις ισότητες των γωνιών συμπεραίνουμε: $KP // HT$.

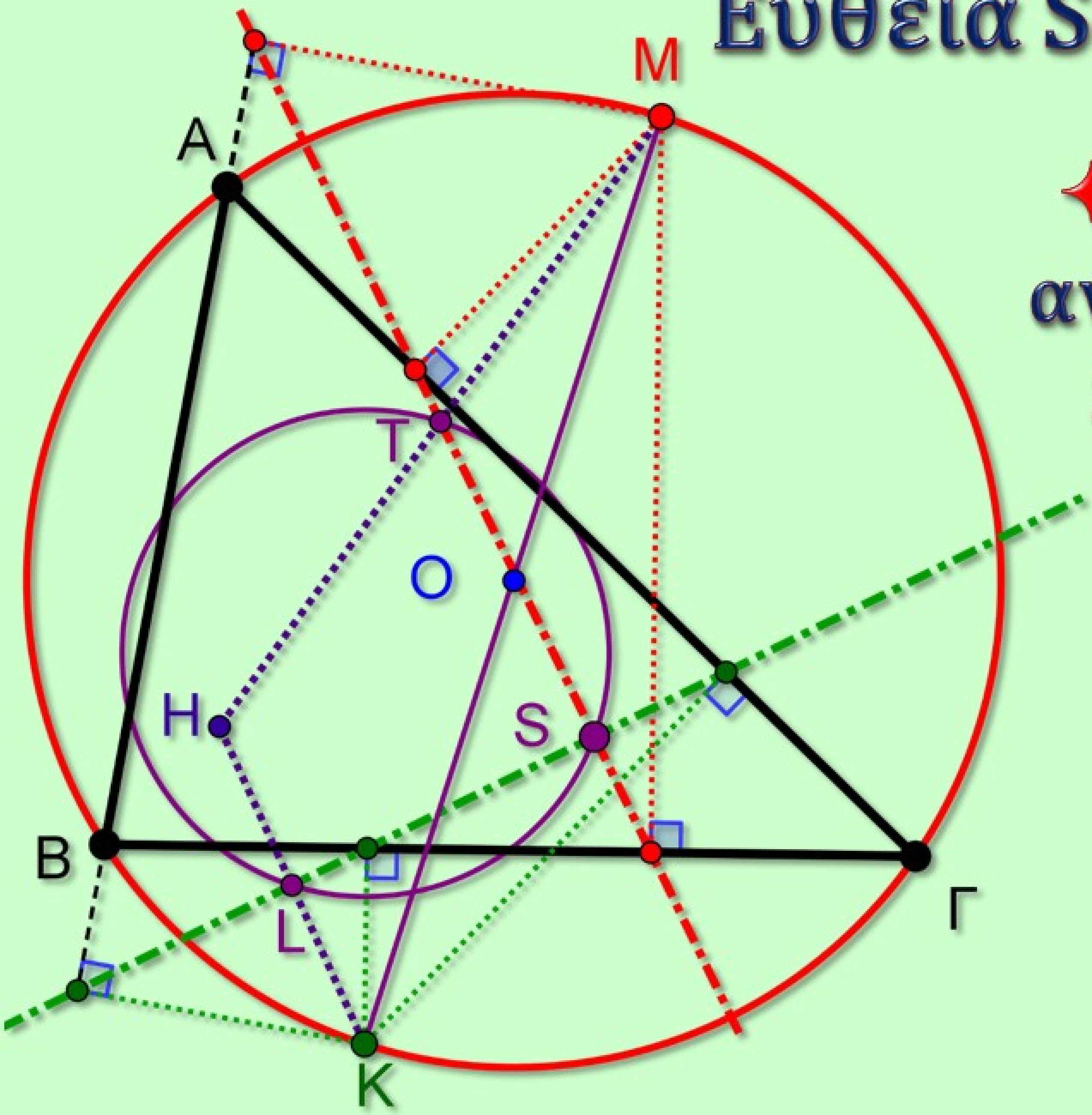
Βαγγέλης Ψύχας ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 5 23

Ευθεία Simson III (απόδειξη)



- Αν T το συμμετρικό του M ως προς τη $ΒΓ$, τότε το τετράπλευρο $ΗΜΤΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ($ΔΡ$ κοινή μεσοκάθετος των $ΕΗ$ και $ΜΤ$). Άρα: $\widehat{T}_1 = \widehat{M}_1$.
- Από προηγούμενο θεώρημα έχουμε: $\widehat{Γ}_1 = \widehat{P}_1 = \widehat{Σ}_1$.
- Από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΕΣΜ, έχουμε: $\widehat{Σ}_1 = \widehat{M}_1$.
- Από τις ισότητες των γωνιών συμπεραίνουμε: $KP \parallel HT$.

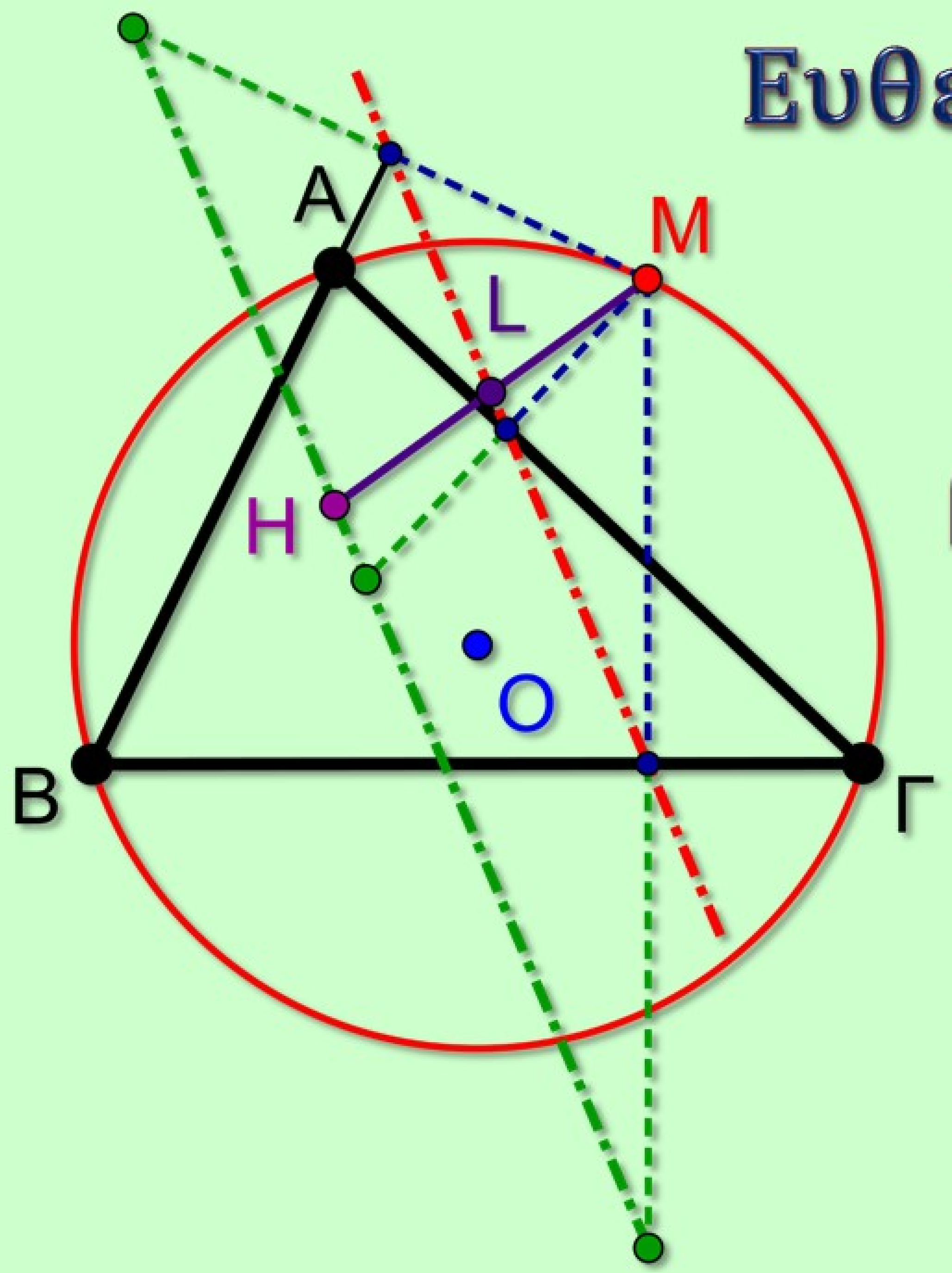
Ευθεία Simson IV



✦ Σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν κάθετες ευθείες Simson που τέμνονται στο κύκλο του Euler.

- Τα T, L είναι μέσα των HM, HK αντίστοιχα και ανήκουν στο κύκλο του Euler.

Ευθεία Simson V



✦ Τα συμμετρικά του σημείου **Μ** (ως προς τις πλευρές του) βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ευθεία Simson, που διέρχεται από το ορθόκεντρο.