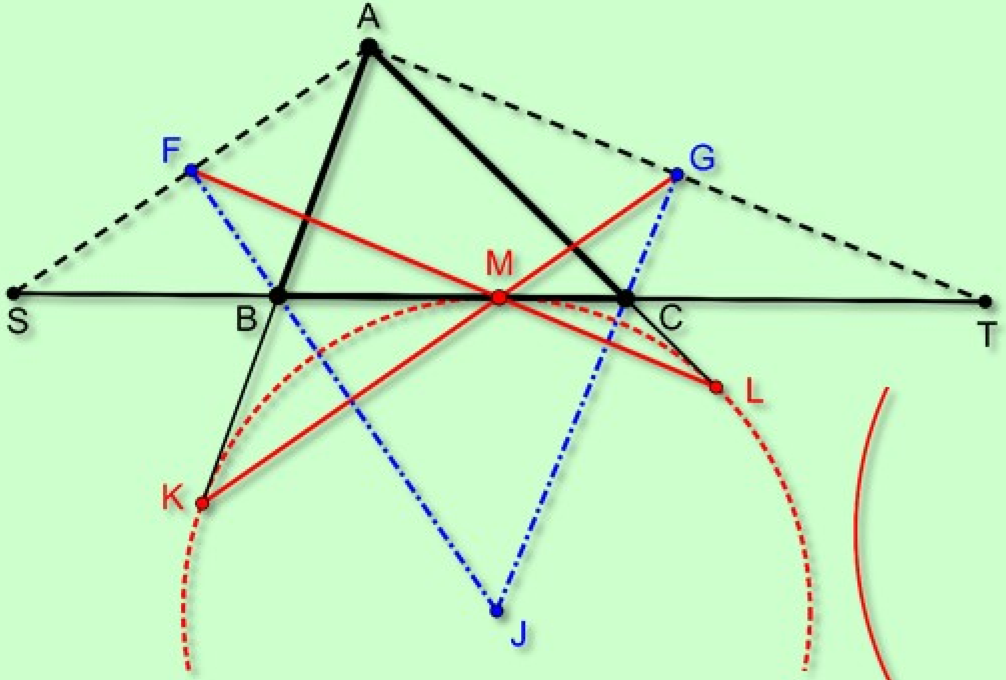
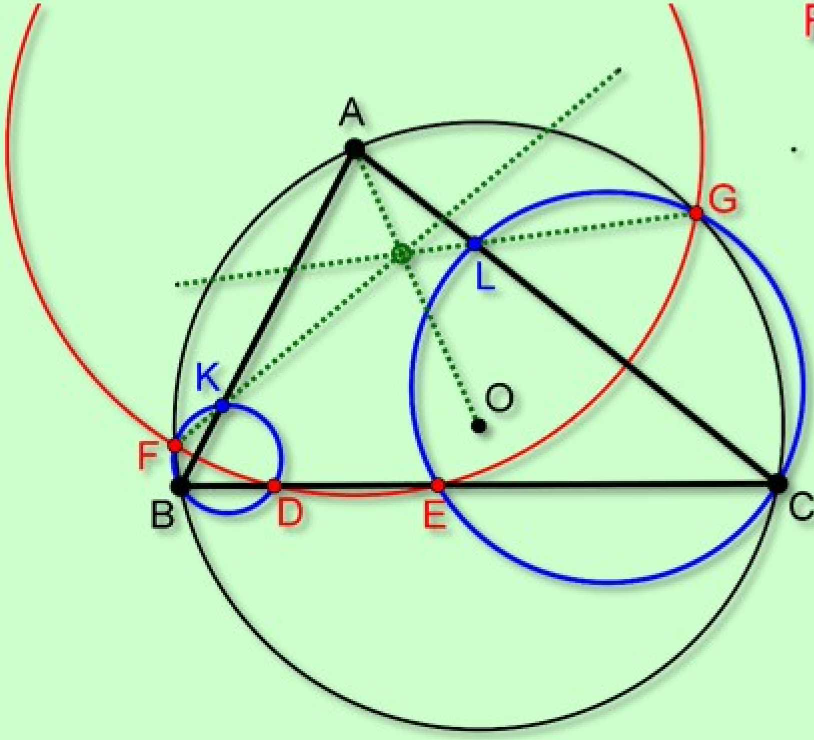
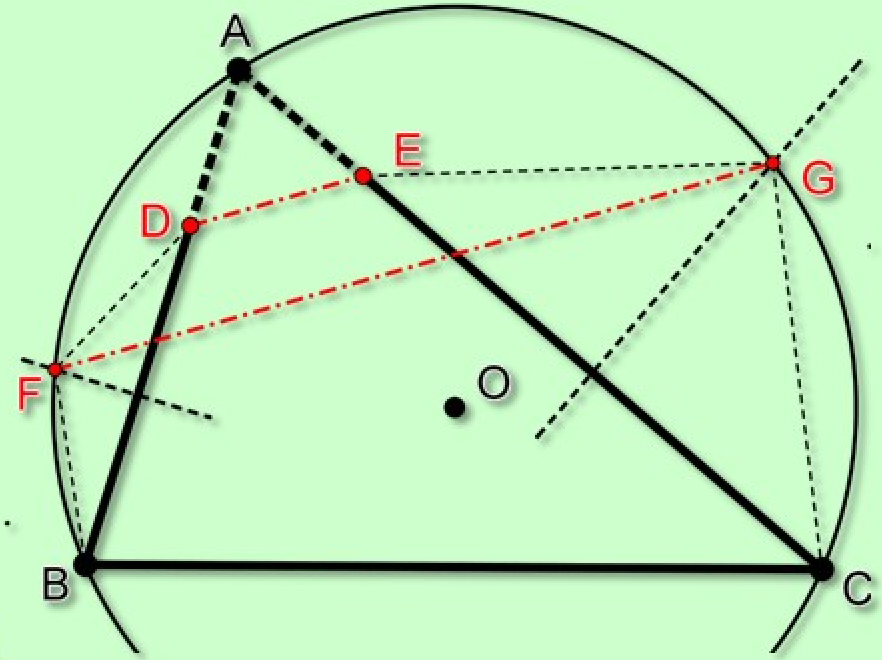
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 3

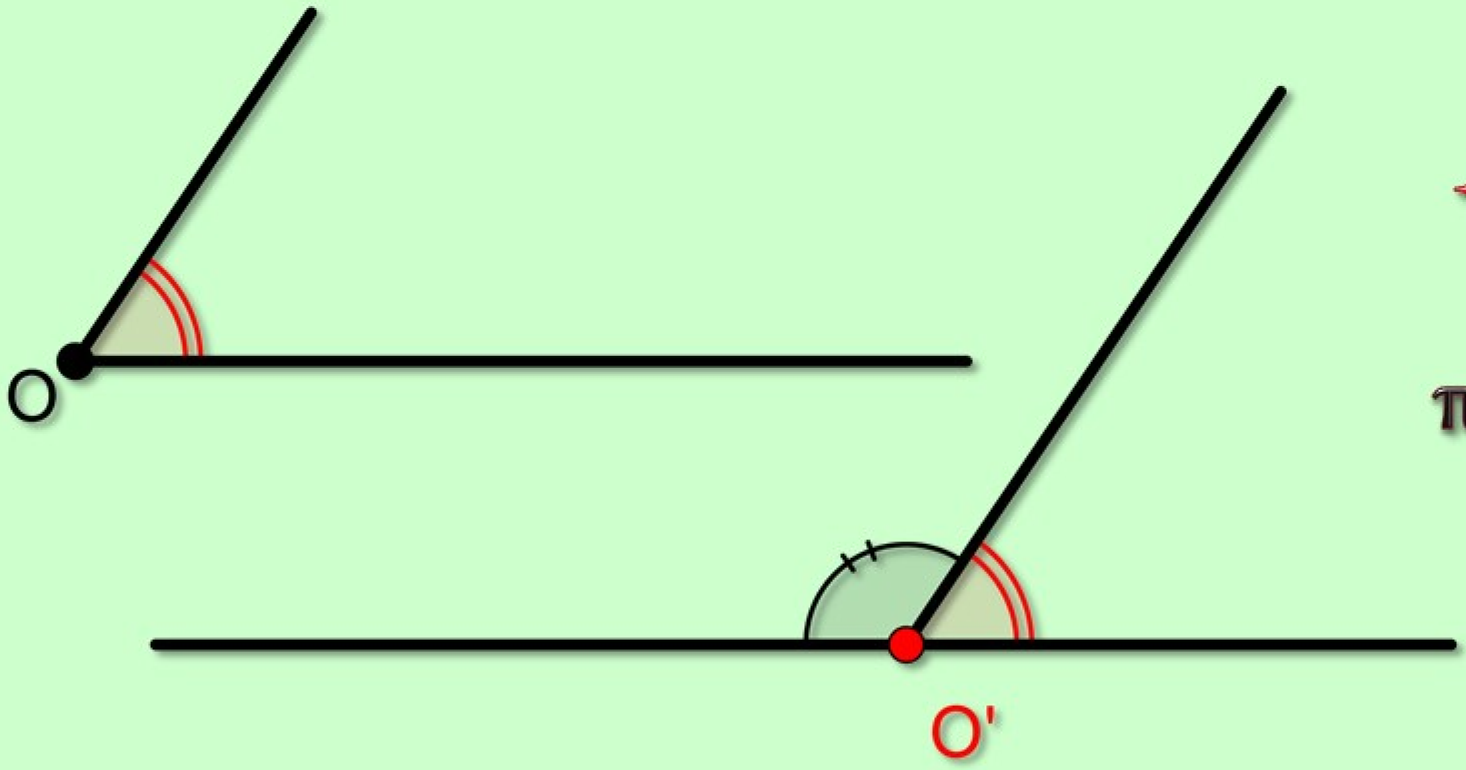






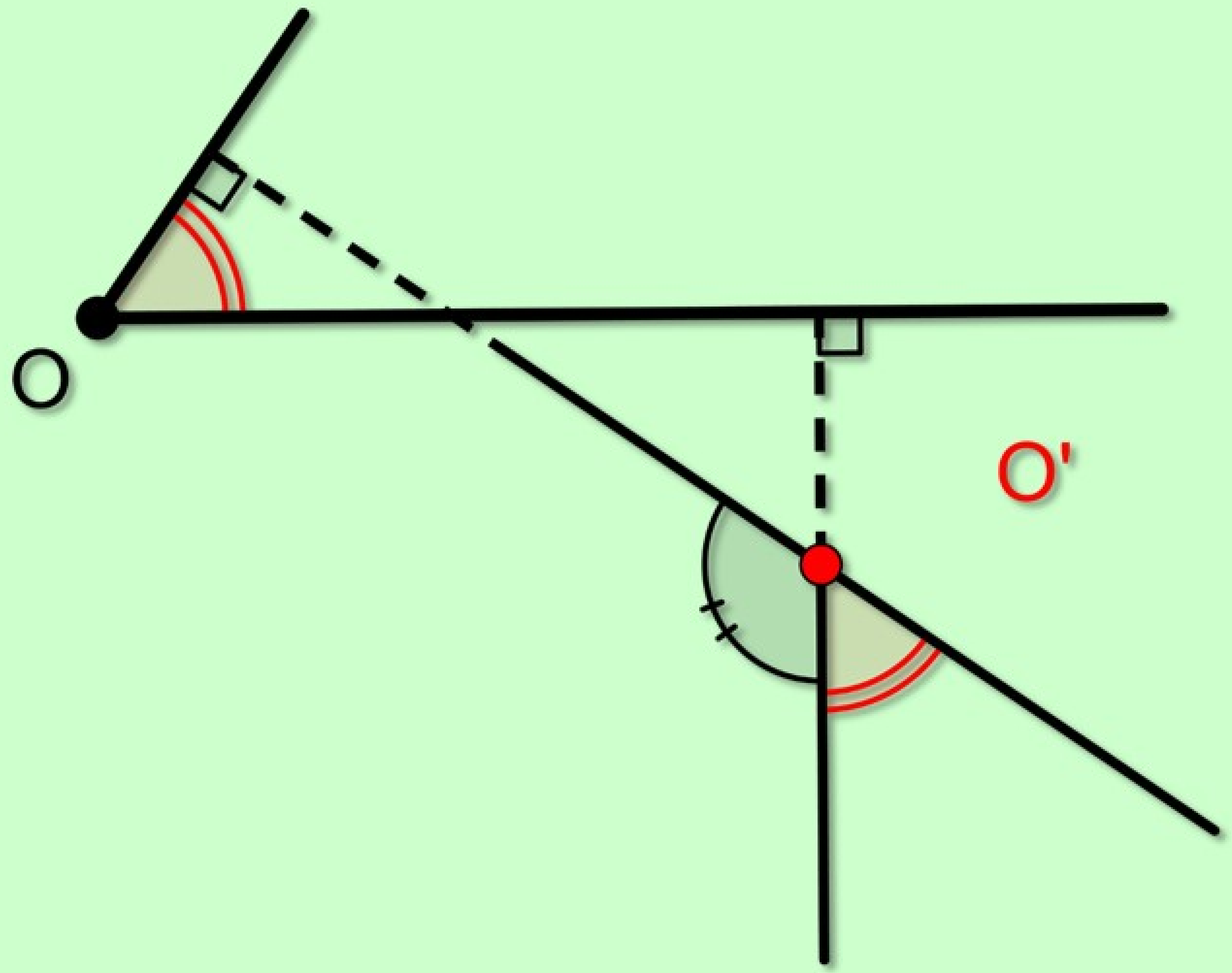
Βαγγέλης Ψύχας

Γωνίες με Πλευρές Παράλληλες



✦ Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Γωνίες με Πλευρές Κάθετες

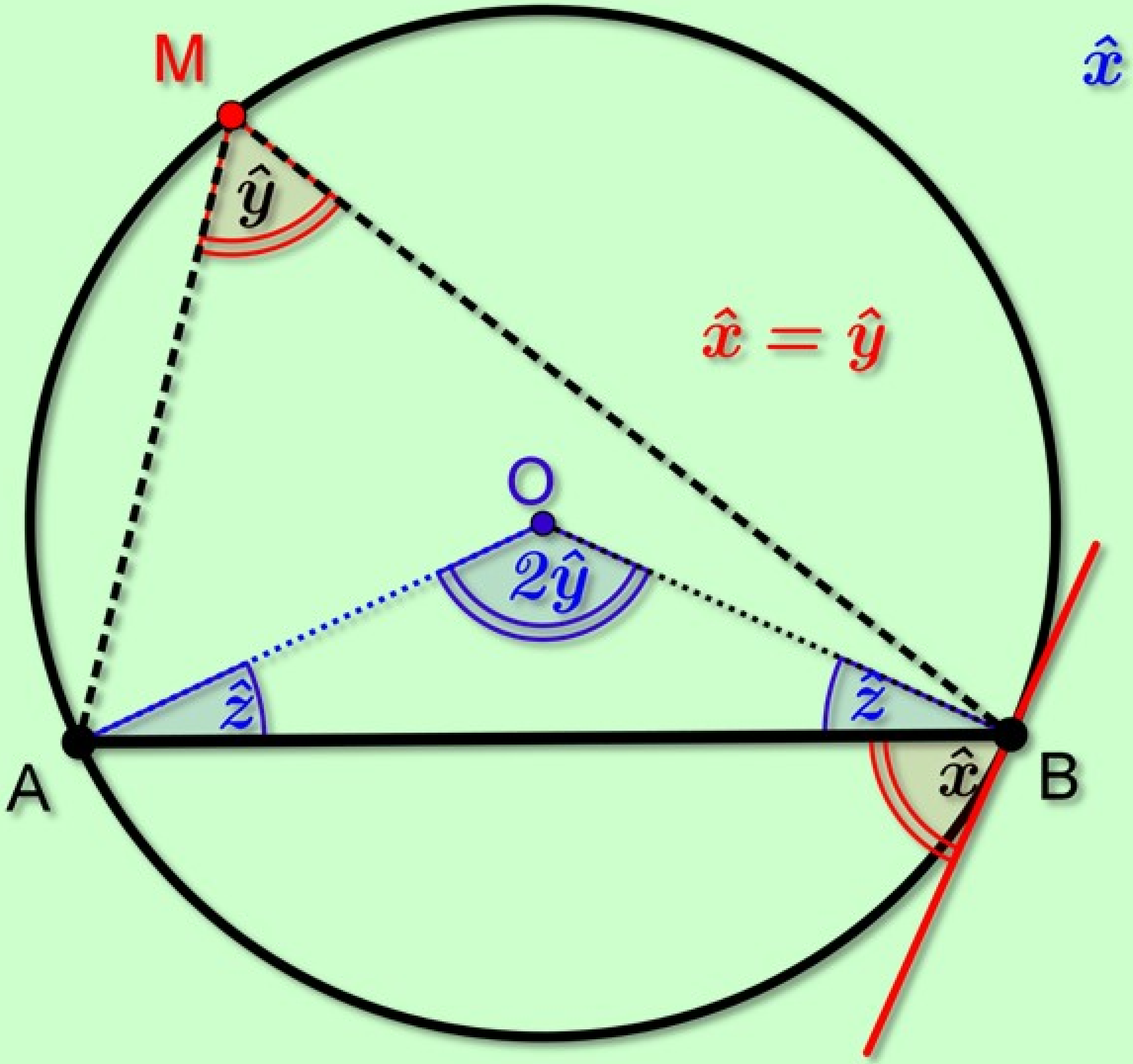


✦ Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες, θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Γωνία από Χορδή και Εφαπτομένη

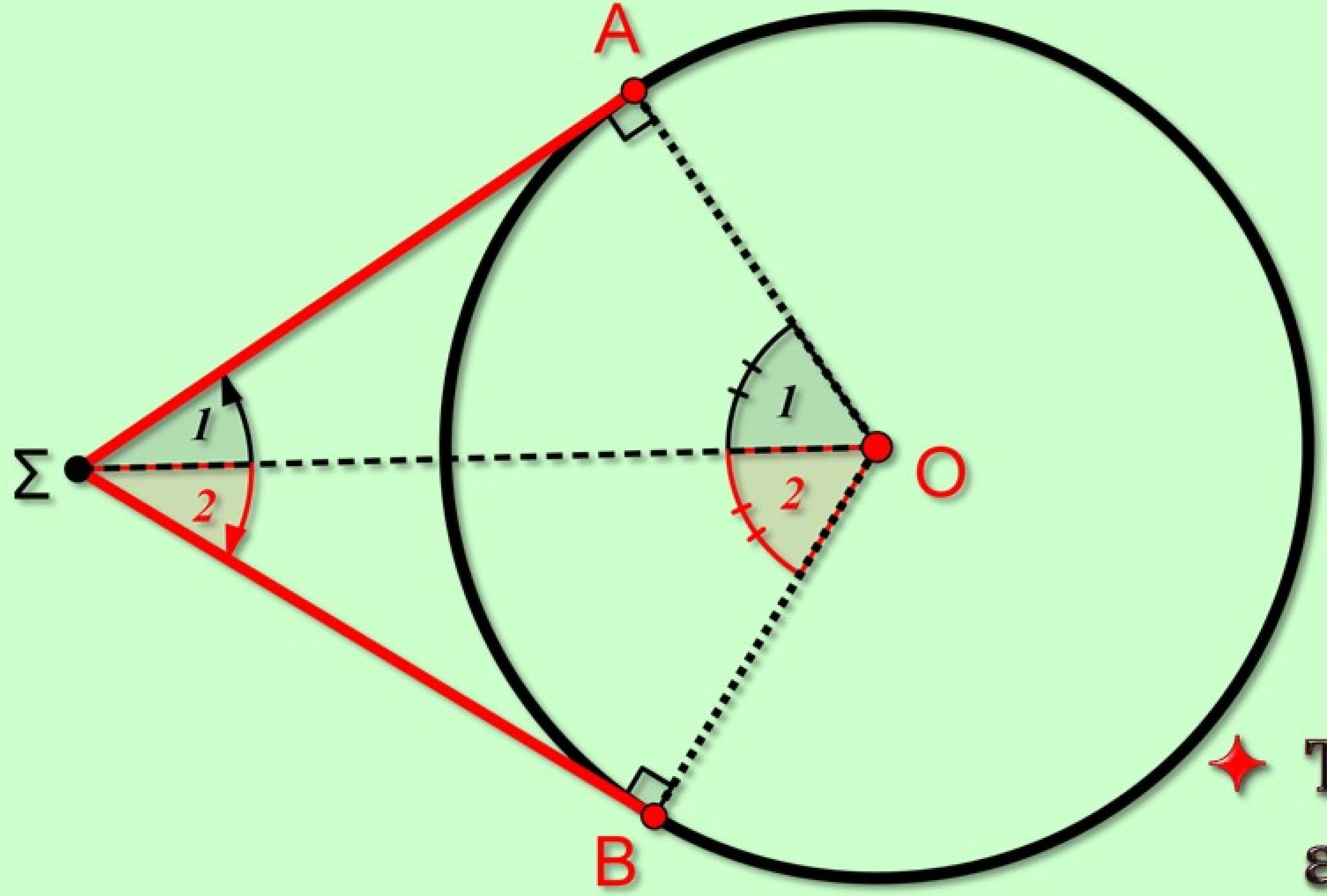
$$2\hat{y} + 2\hat{z} = 180^\circ \iff \hat{y} + \hat{z} = 90^\circ$$

$$\hat{x} + \hat{z} = 90^\circ$$



✦ Η γωνία που σχηματίζεται από την χορδή και την εφαπτομένη, ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στη χορδή.

Εφαπτόμενα Τμήματα



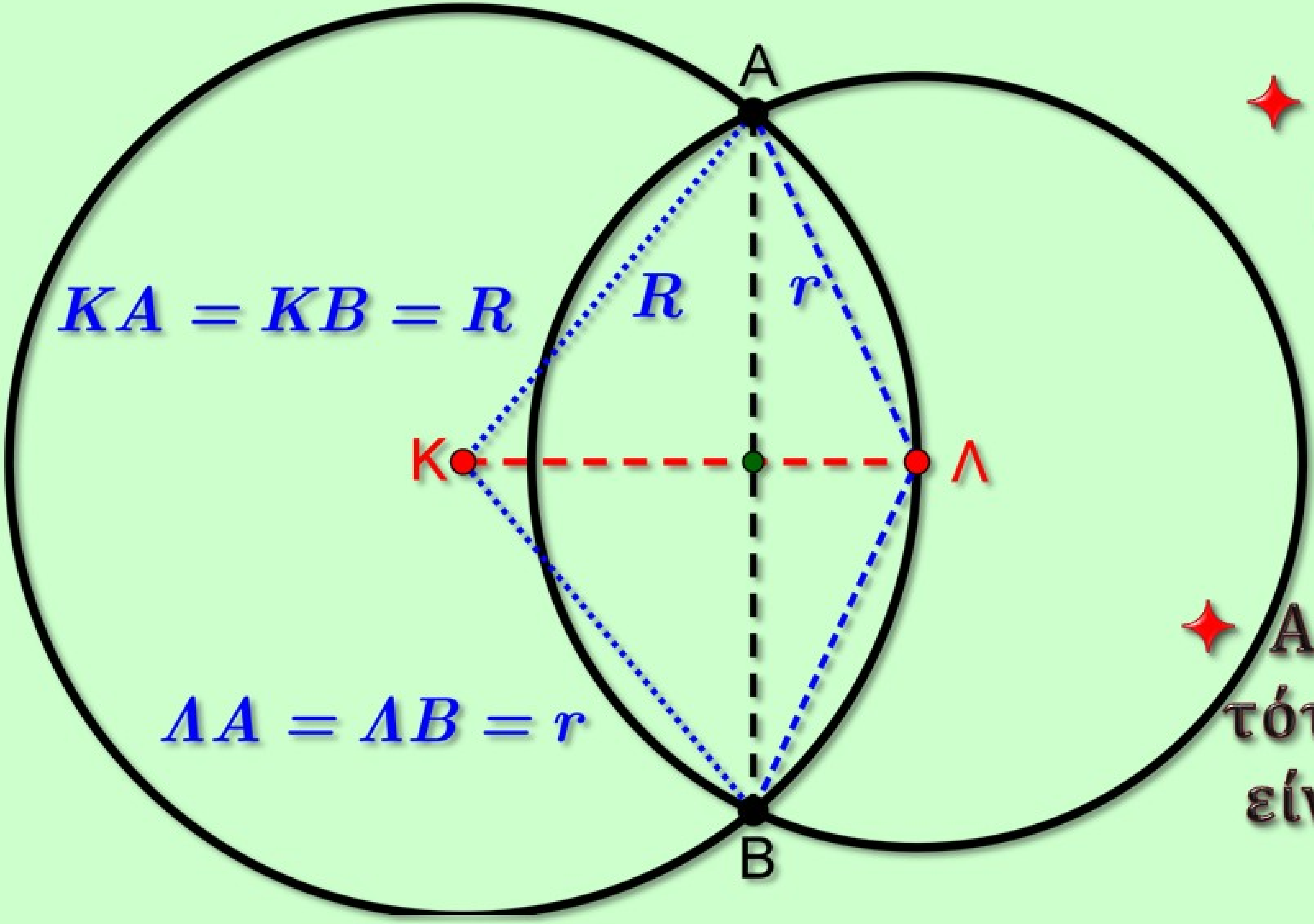
$$\Sigma A = \Sigma B$$

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_2$$

✦ Τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους.

Κοινή Χορδή



$KA = KB = R$

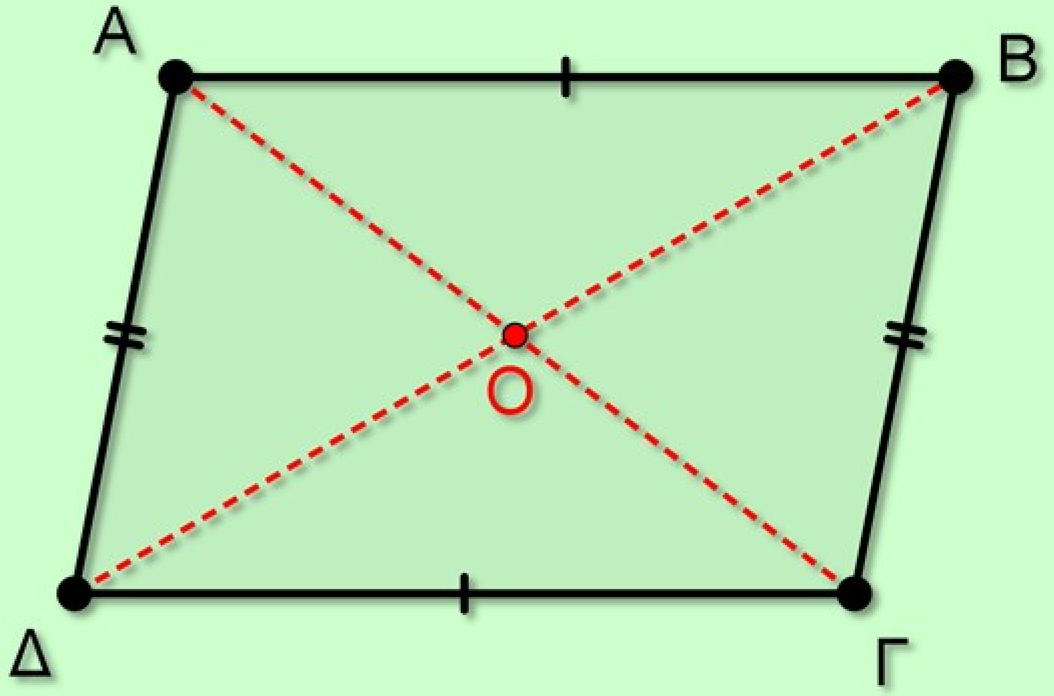
$\Lambda A = \Lambda B = r$

- Η διάκεντρος είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής.

- Αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετη της διακέντρου.

Παραλληλόγραμμο

ΑΒΓΔ παρλ/μο⇔(ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ)



Απέναντι Γωνίες ίσες.

ΑΒΓΔ παρλ/μο⇔ $(\hat{A} = \hat{\Gamma} \; \kappa\alpha\iota \; \hat{B} = \hat{\Delta})$

Απέναντι Πλευρές ίσες.

ΑΒΓΔ παρλ/μο⇔(ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ)

Δύο απέναντι Πλευρές ίσες και παράλληλες.

ΑΒΓΔ παρλ/μο⇔(ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ=ΓΔ)

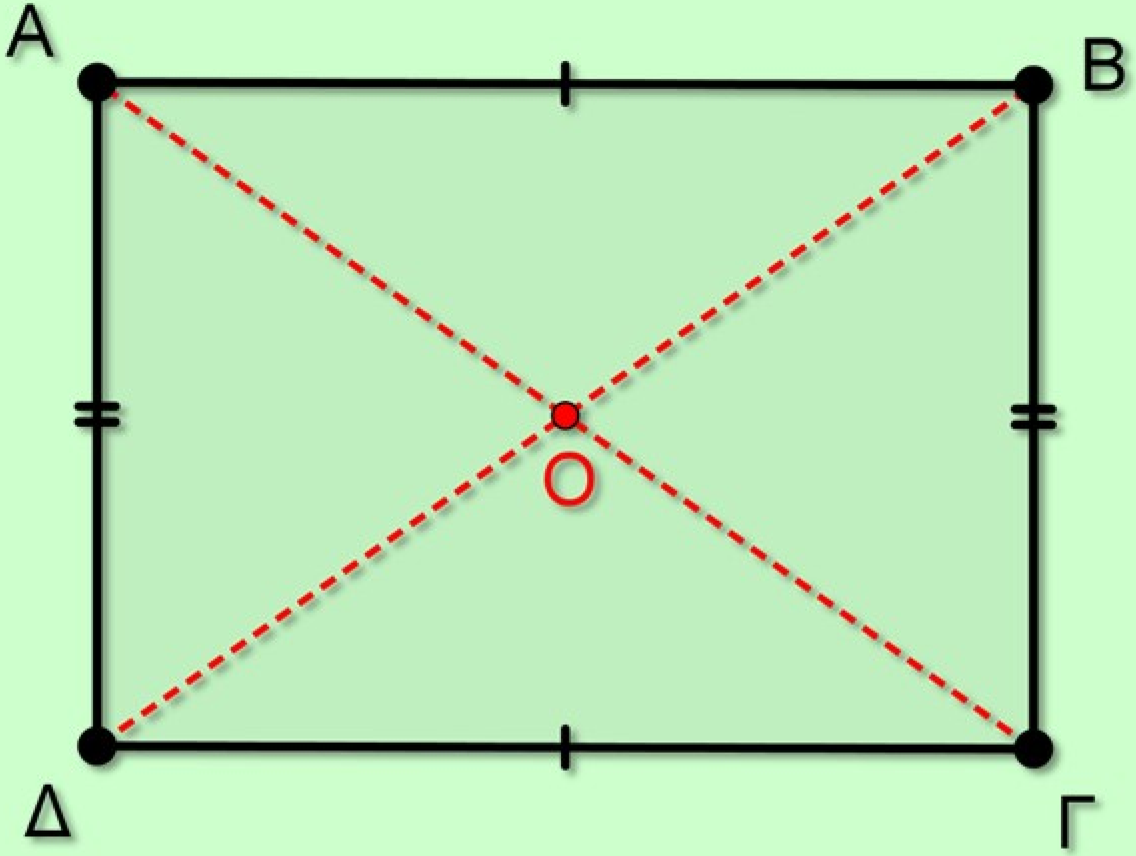
ΑΒΓΔ παρλ/μο⇔(ΑΔ//ΒΓ και ΑΔ=ΒΓ)

Οι διαγώνιες διχοτομούνται.

ΑΒΓΔ παρλ/μο⇔(ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ)

Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο

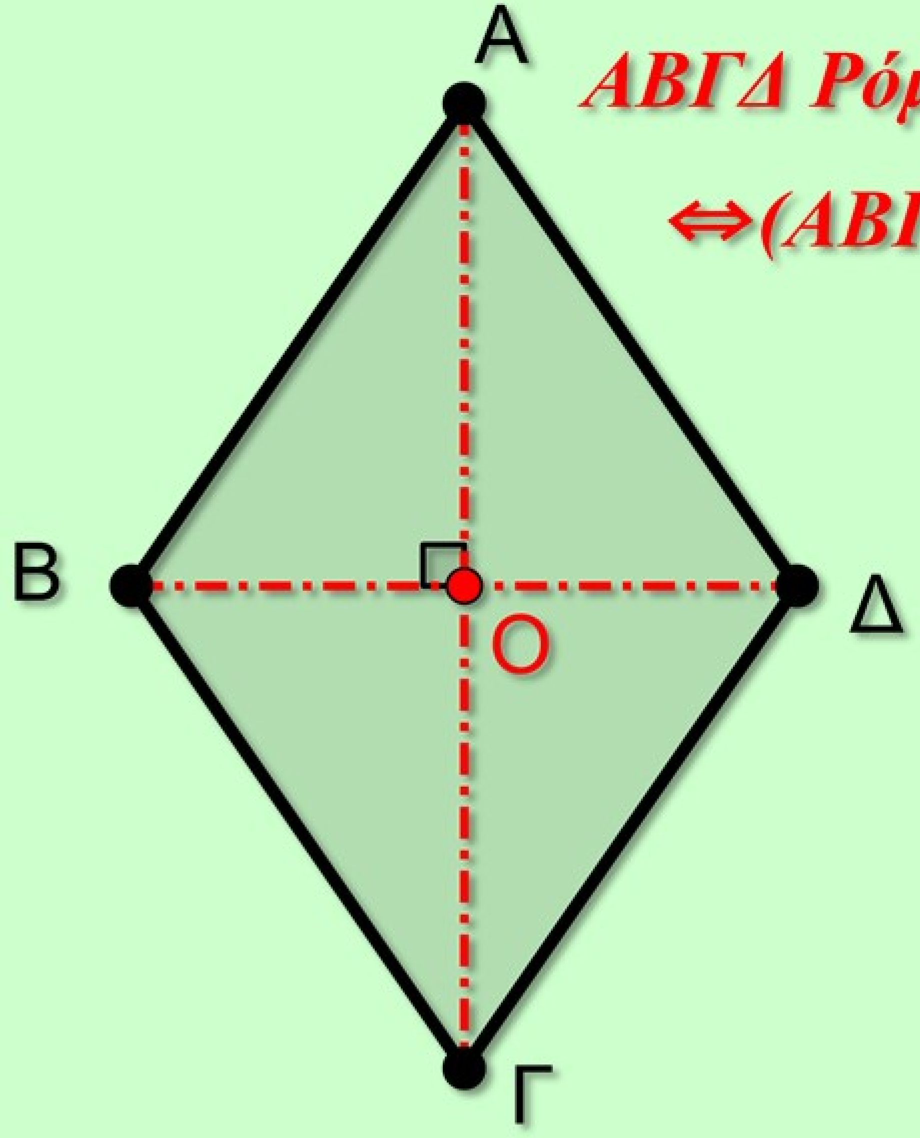
ΑΒΓΔ Ορθογώνιο Παρλ/μο ⇔ (ΑΒΓΔ παραλ/μο με μία γωνία ορθή)



Όλες οι γωνίες είναι ορθές

Οι διαγώνιες είναι ίσες

Ρόμβος



ΑΒΓΔ Ρόμβος ⇔

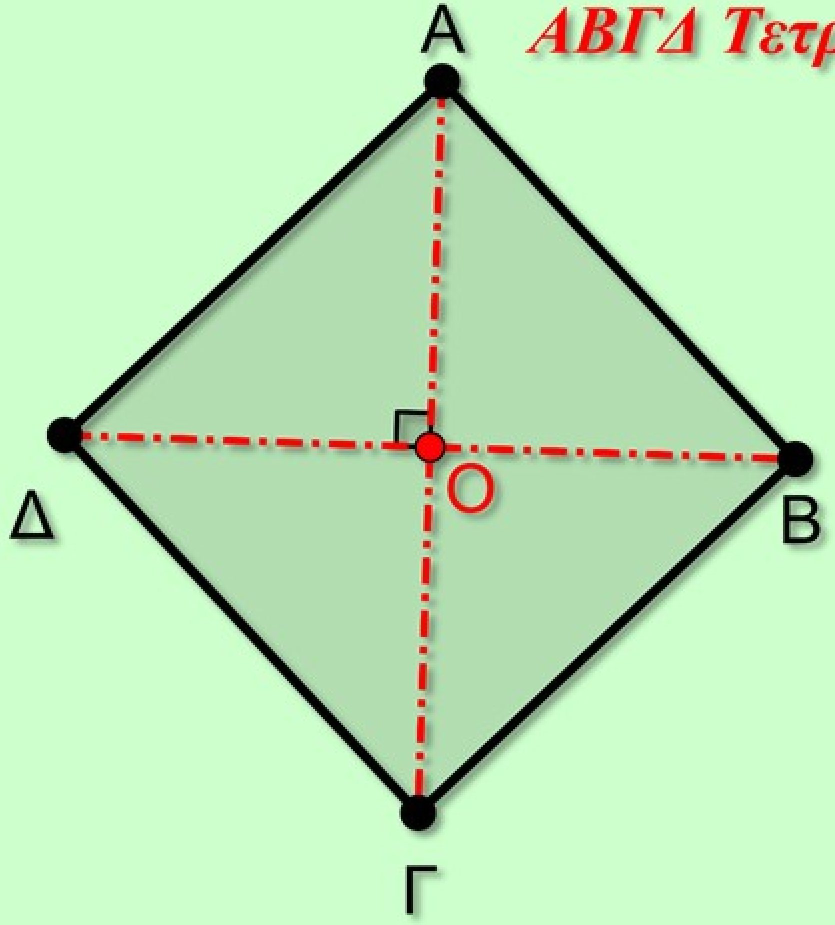
⇔(ΑΒΓΔ παρ/μο και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες)

Όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους

Οι διαγώνιες είναι κάθετες μεταξύ τους

Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.

Τετράγωνο



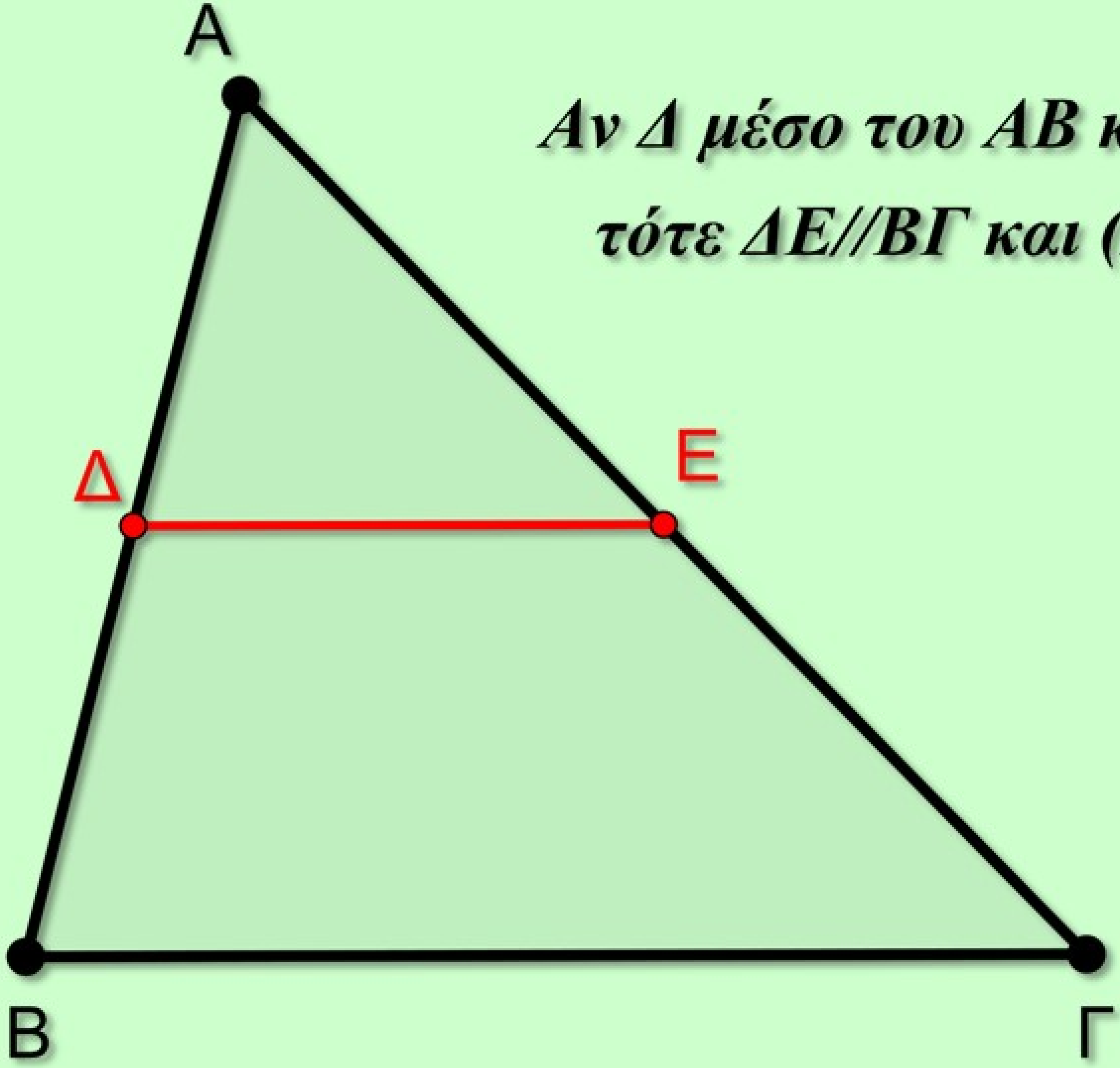
ΑΒΓΔ Τετράγωνο ⇔ (ΑΒΓΔ παρ/μο, δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και διαγώνιες ίσες)

Όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους.

Οι διαγώνιες είναι κάθετες μεταξύ τους.

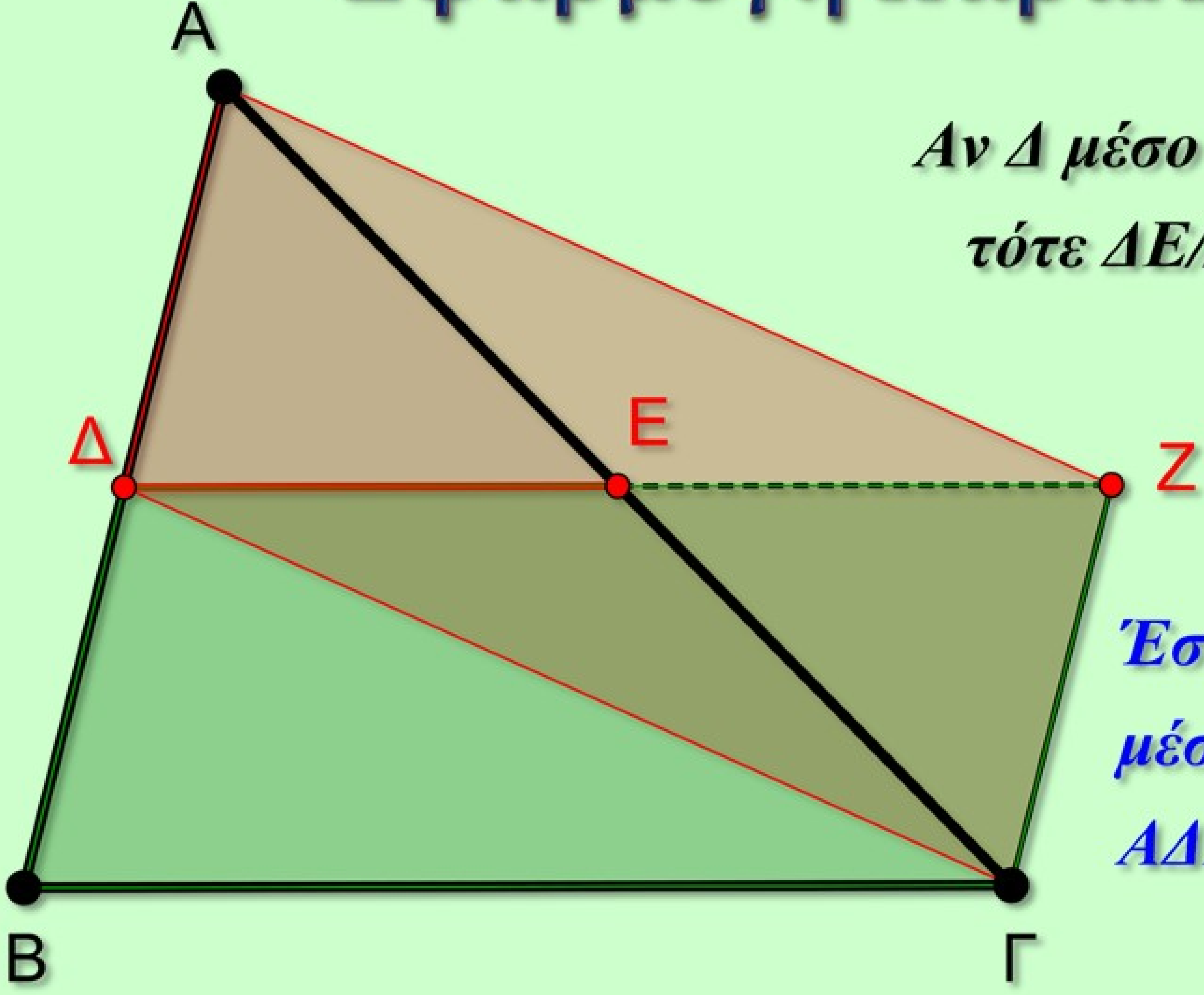
Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του τετραγώνου.

Εφαρμογή Παραλληλογράμμου I



Αν Δ μέσο του ΑΒ και Ε μέσο του ΑΓ τότε ΔΕ//ΒΓ και (ΔΕ)=(ΒΓ)/2.

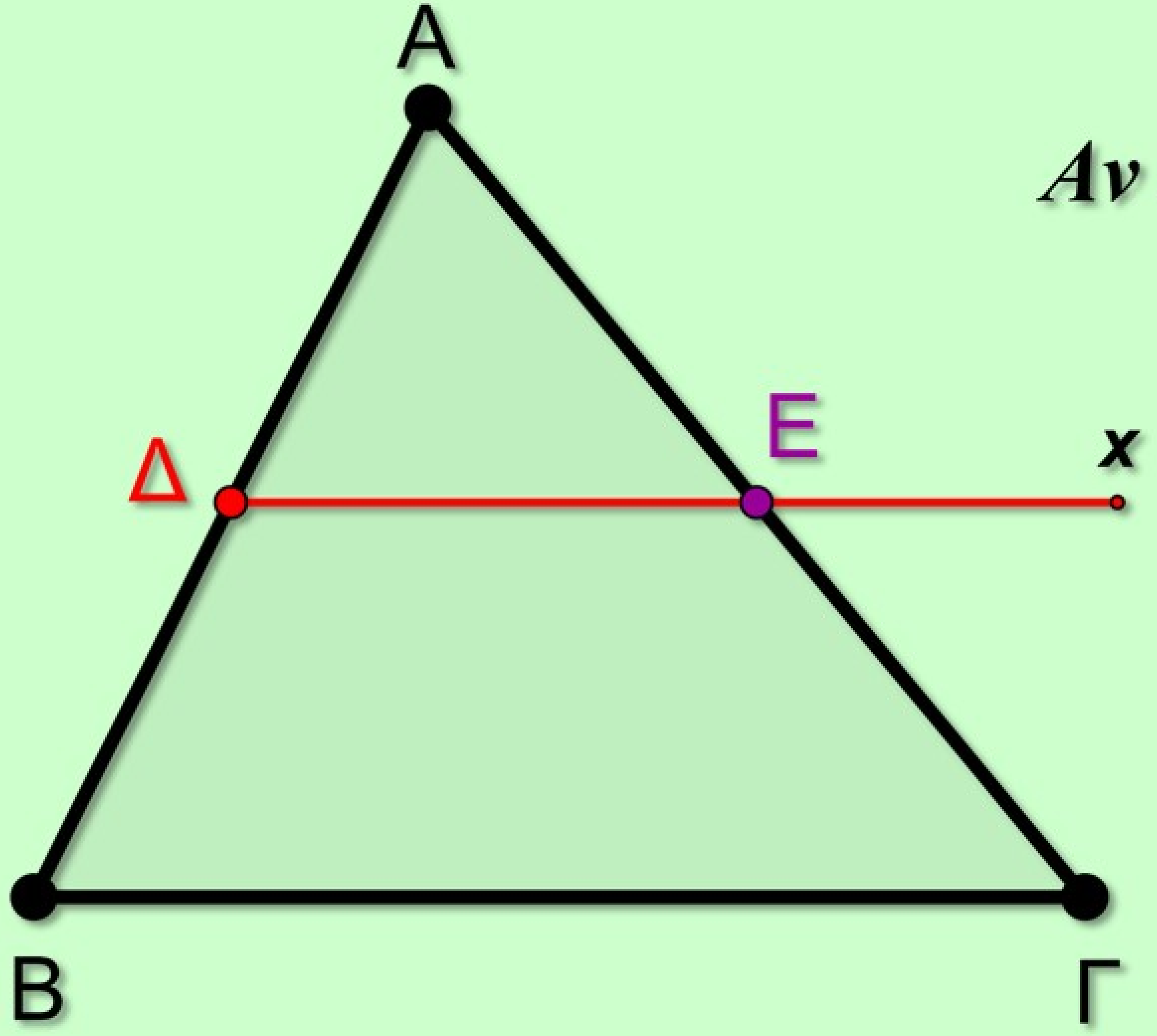
Εφαρμογή Παραλληλογράμμου Ι



Αν Δ μέσο του ΑΒ και Ε μέσο του ΑΓ
τότε ΔΕ//ΒΓ και (ΔΕ)=(ΒΓ)/2.

Έστω Ζ το συμμετρικό του Δ ως προς το μέσο Ε της ΒΓ. . . . . τότε τα τετράπλευρα ΑΔΓΖ και ΒΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμα.

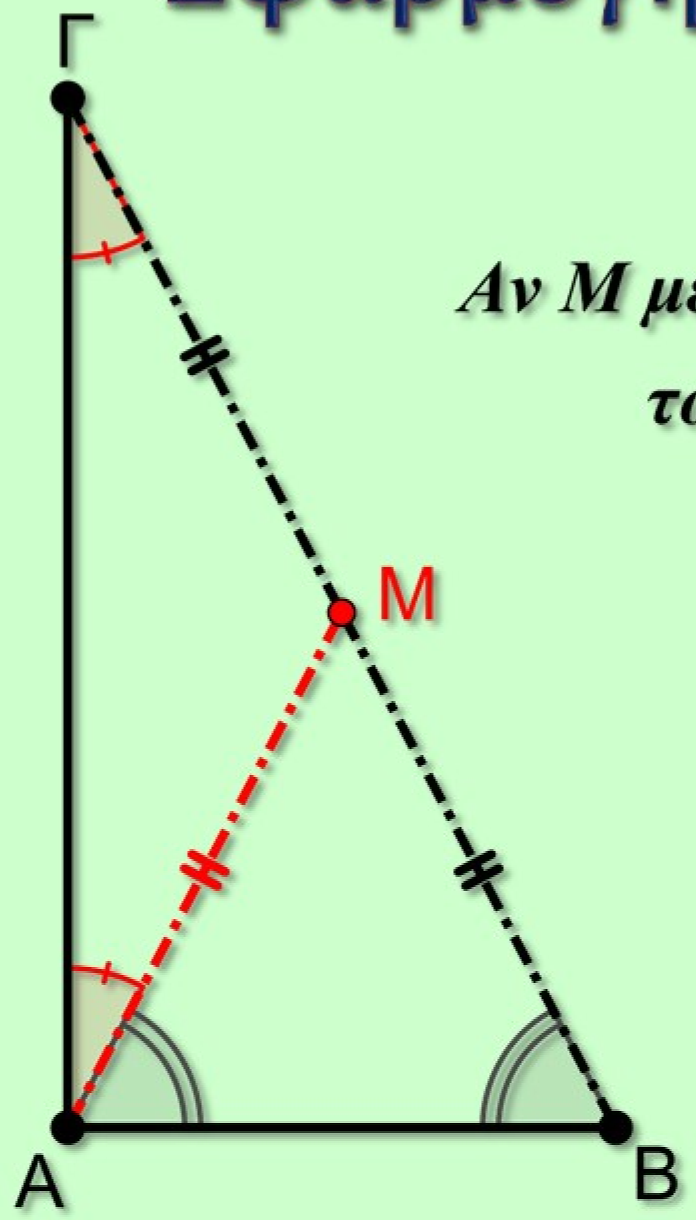
Εφαρμογή Παραλληλογράμμου ΙΙ



Αν Δ μέσο του ΑΒ και Δx//ΒΓ

τότε Ε μέσο του ΑΓ.

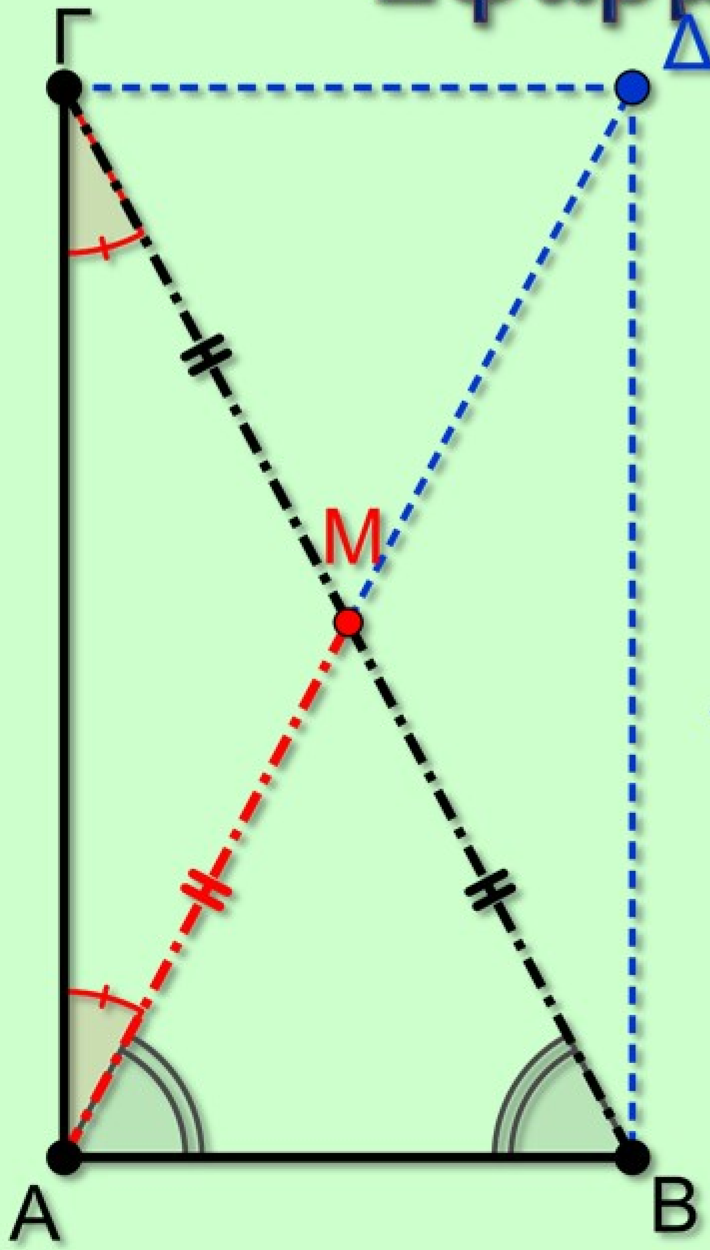
Εφαρμογή Ορθογωνίου



Αν Μ μέσο της υποτείνουσας ΒΓ,

τότε ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ.

Εφαρμογή Ορθογωνίου



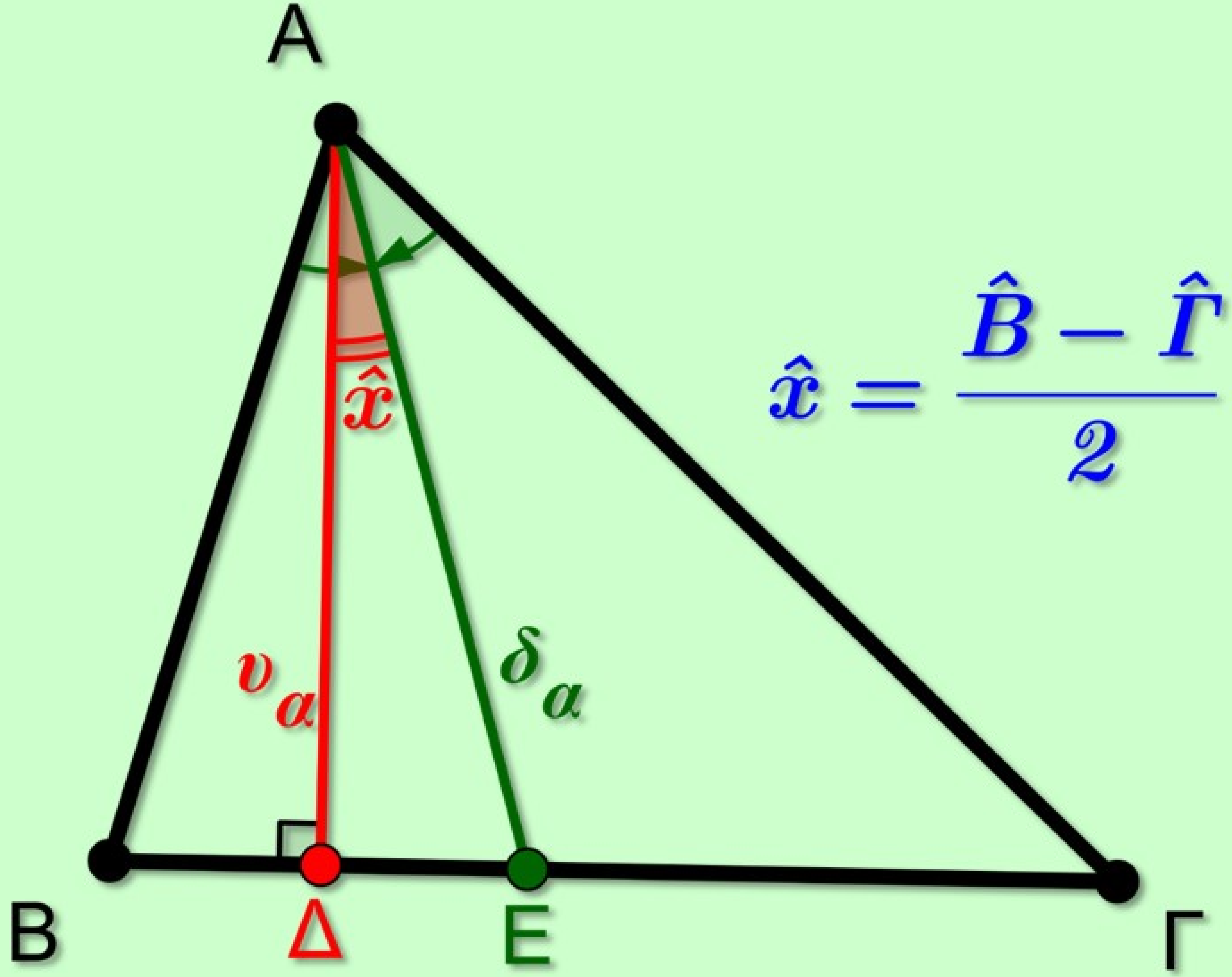
Αν Μ μέσο της υποτείνουσας ΒΓ,

τότε ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ.

Αν Δ το συμμετρκό του Α ως προς Μ,

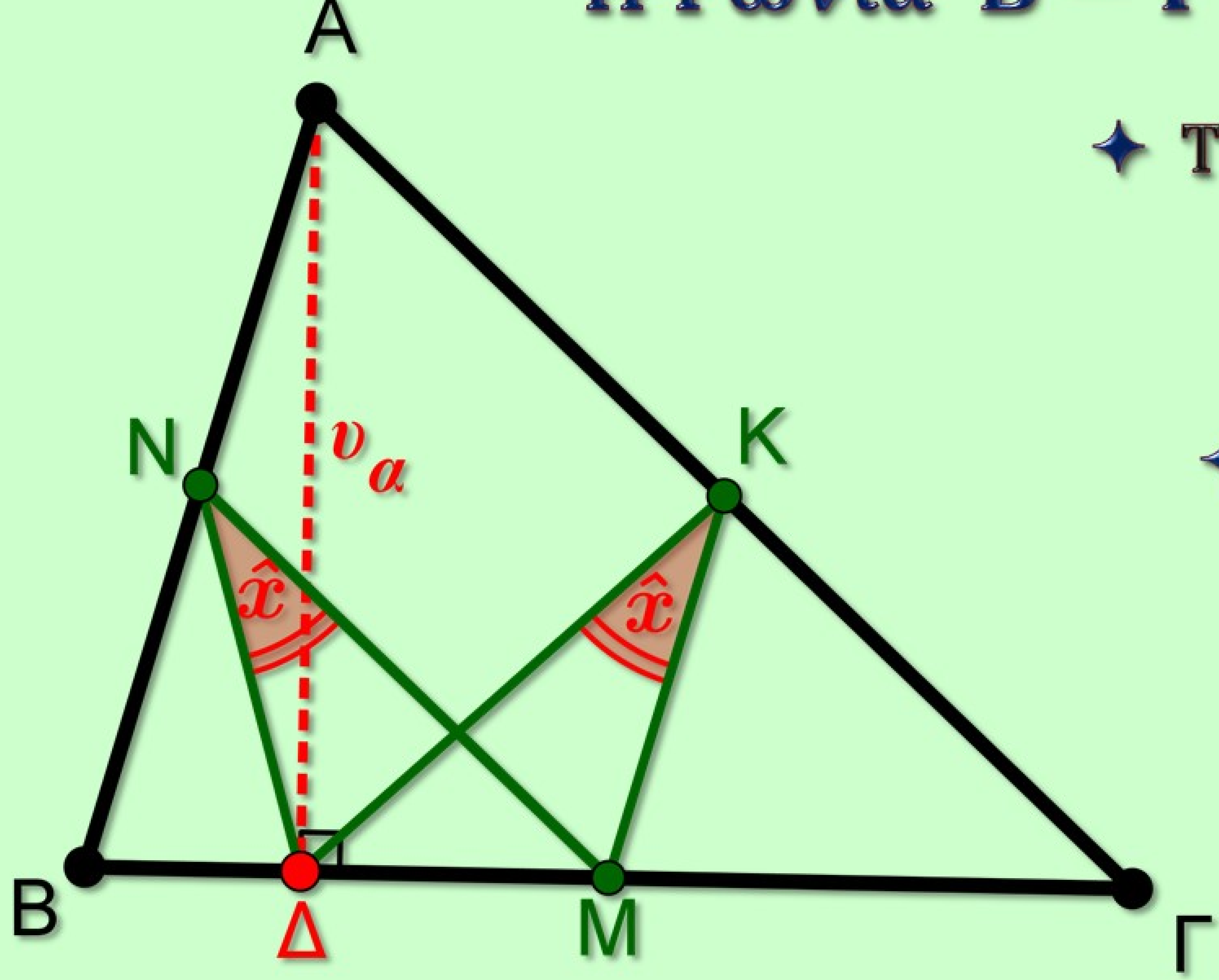
τότε το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

Η Γωνία $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$



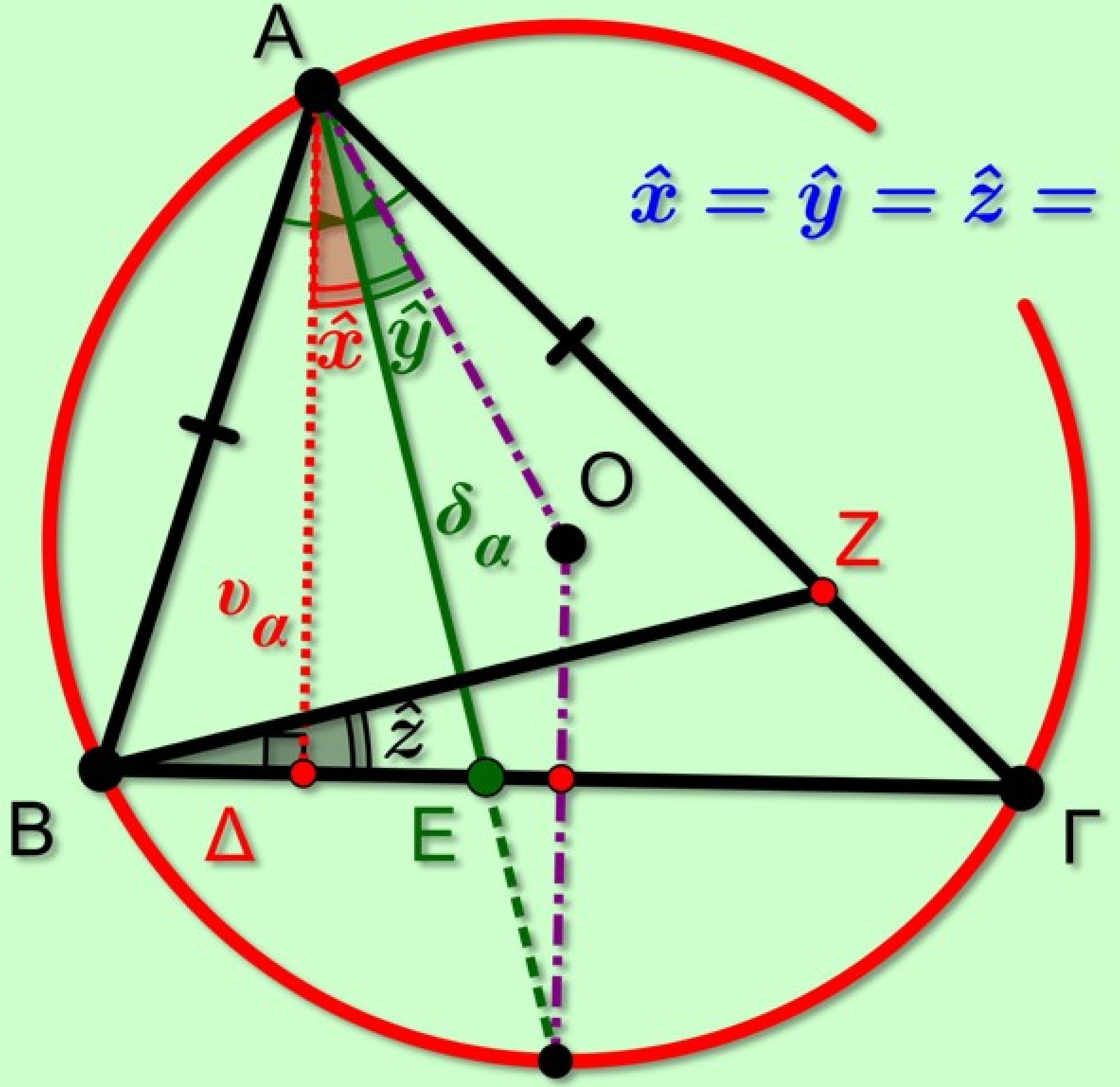
$$\hat{x}=\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$$

Η Γωνία $\widehat{B} - \widehat{\Gamma}$



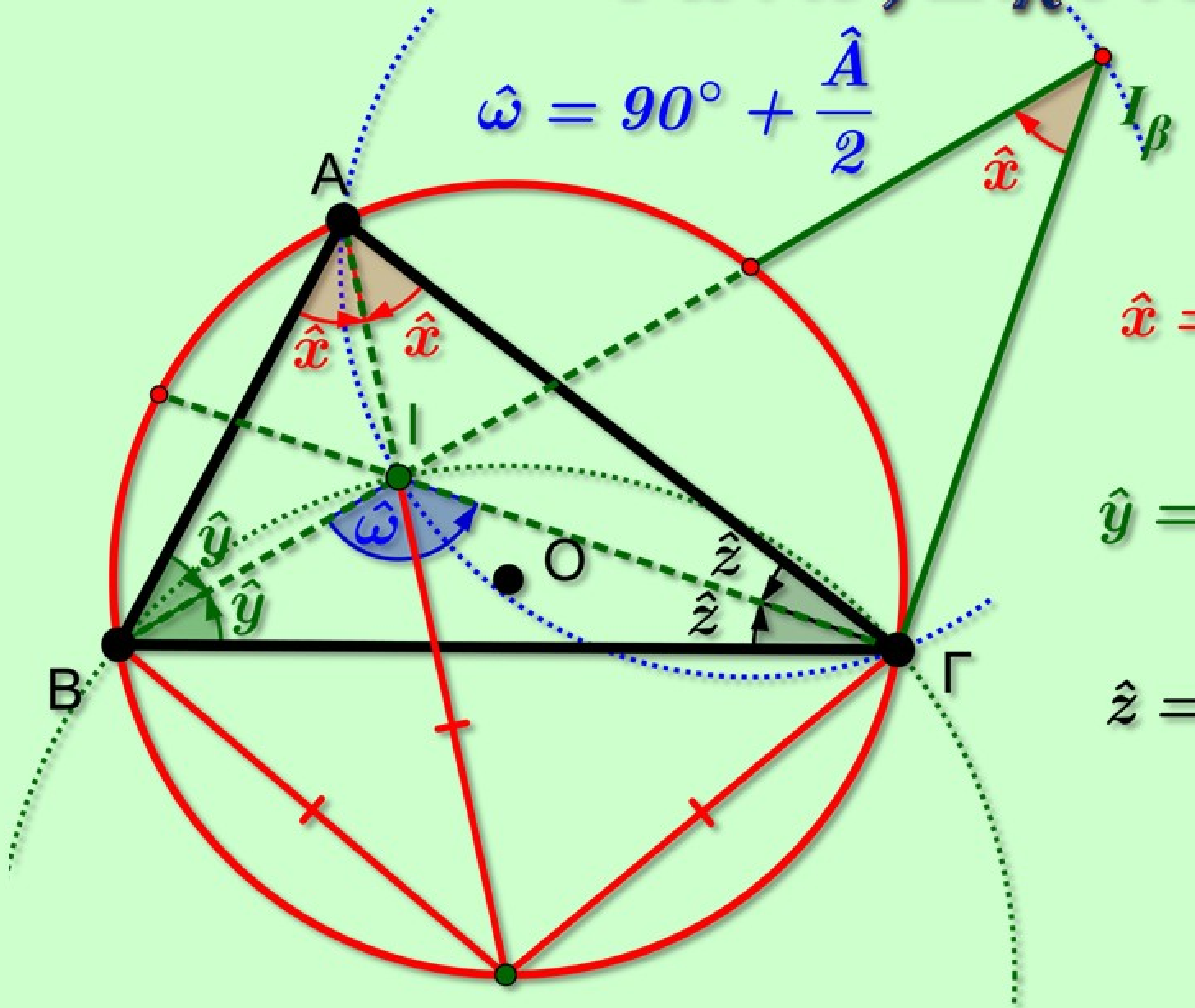
- Τα K, M, N είναι μέσα των πλευρών.
- $\hat{x} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$

Η Γωνία $\widehat{\mathrm{B}} - \widehat{\Gamma}$



$$\hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

Γωνίες Διχοτόμων

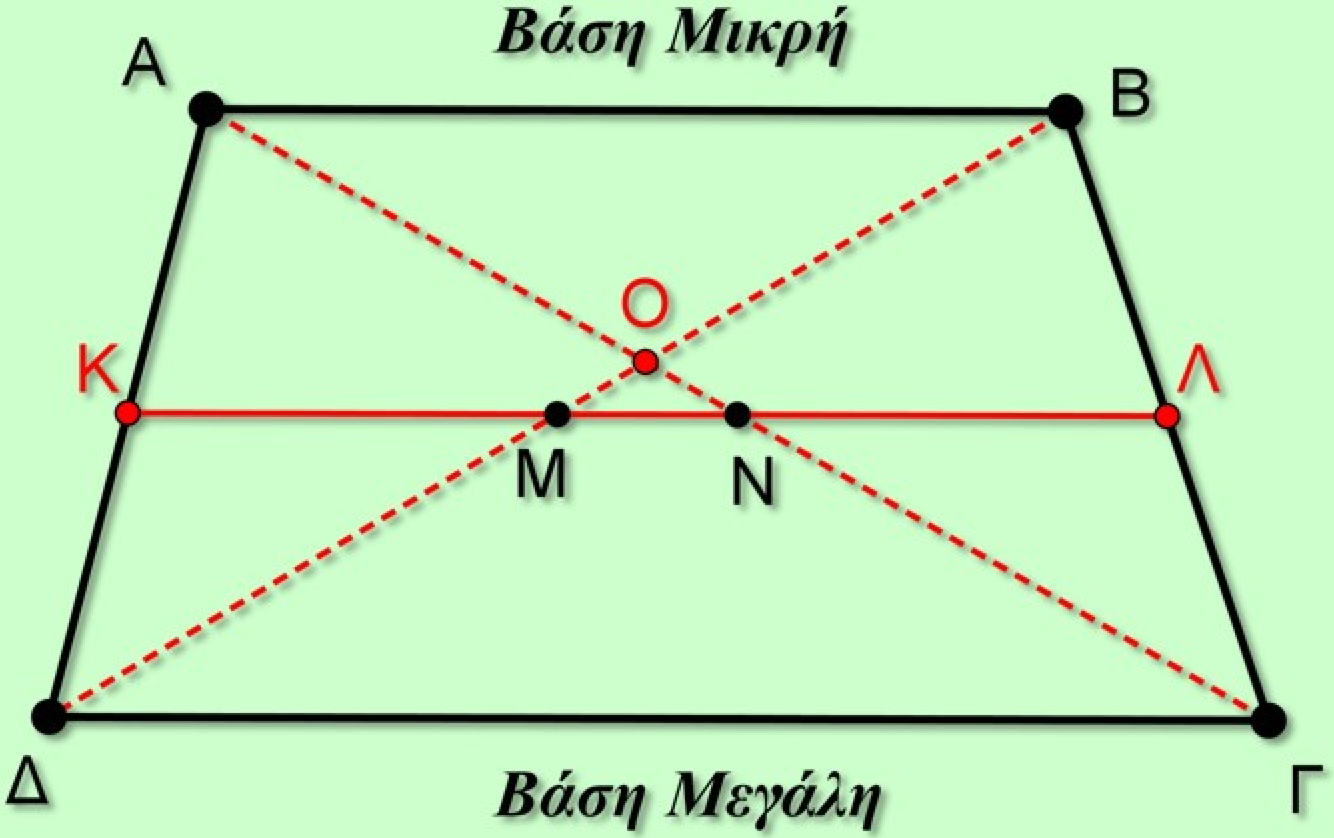


$$\hat{x} = \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{y} = \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\hat{z} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

Τραπέζιο Ι



Δύο απέναντι πλευρές (βάσεις) παράλληλες και άνισες

ΚΛ: Διάμεσος Τραπεζίου

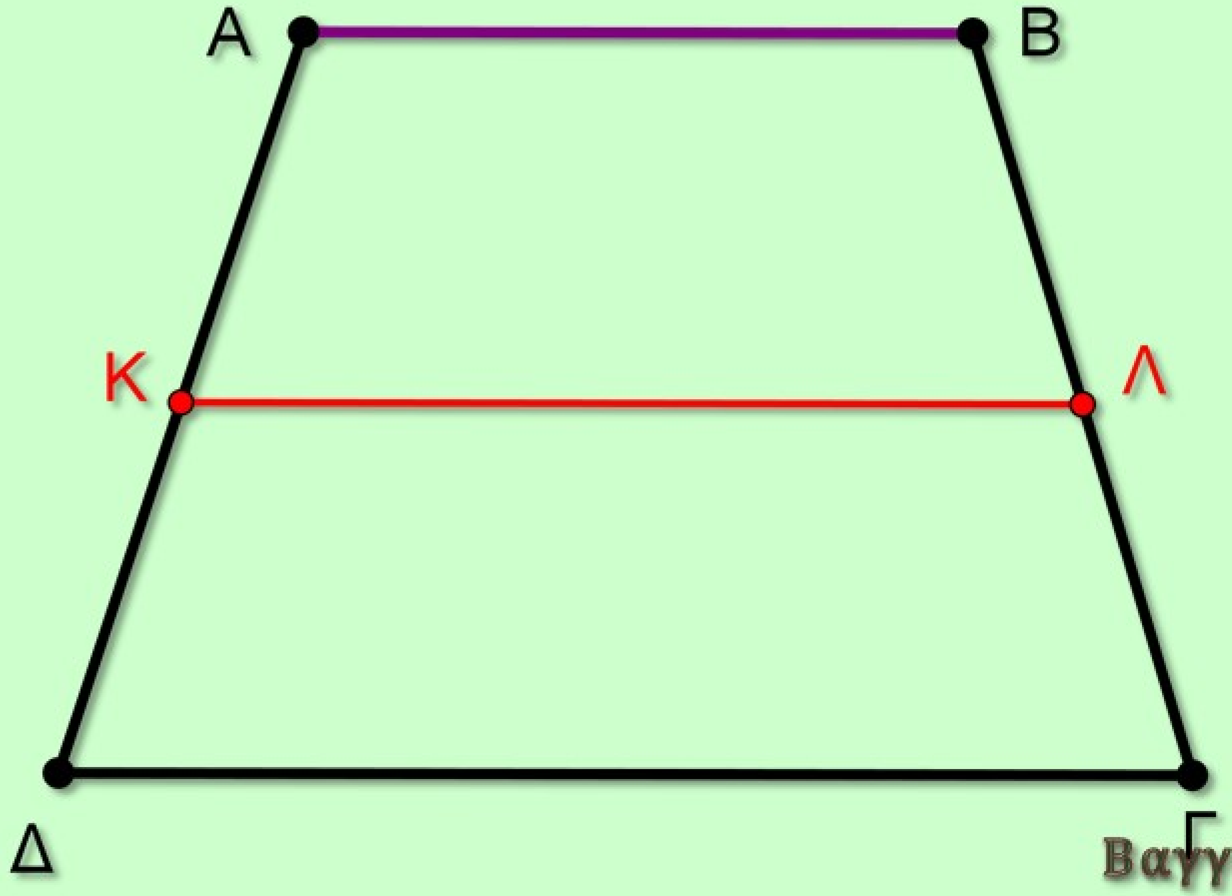
ΚΛ//ΑΒ//ΓΔ

$$ΚΛ = \frac{AB + ΔΓ}{2}$$

$$MN = \frac{ΔΓ - AB}{2}$$

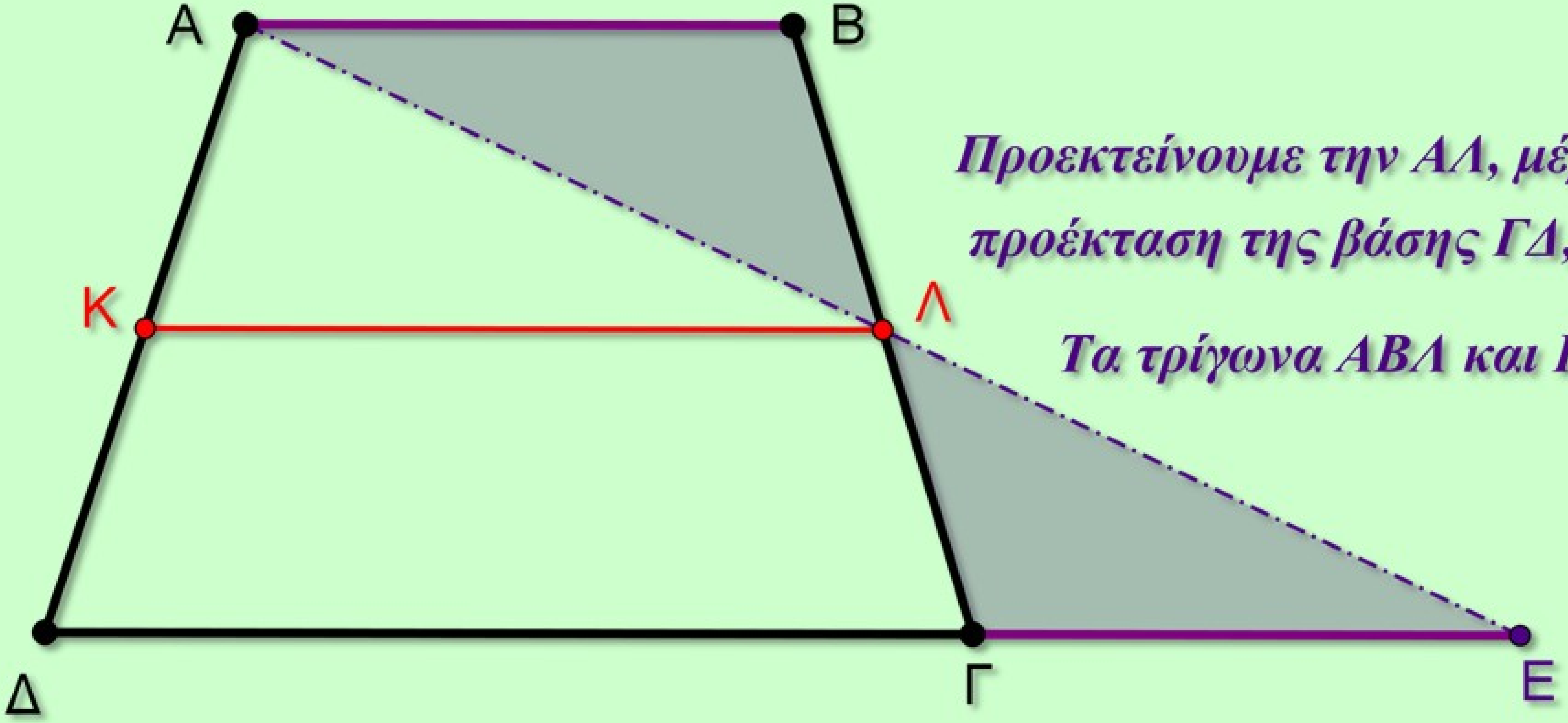
Τραπέζιο ΙΙ

Η διάμεσος είναι παράλληλη με τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.



Τραπέζιο ΙΙ

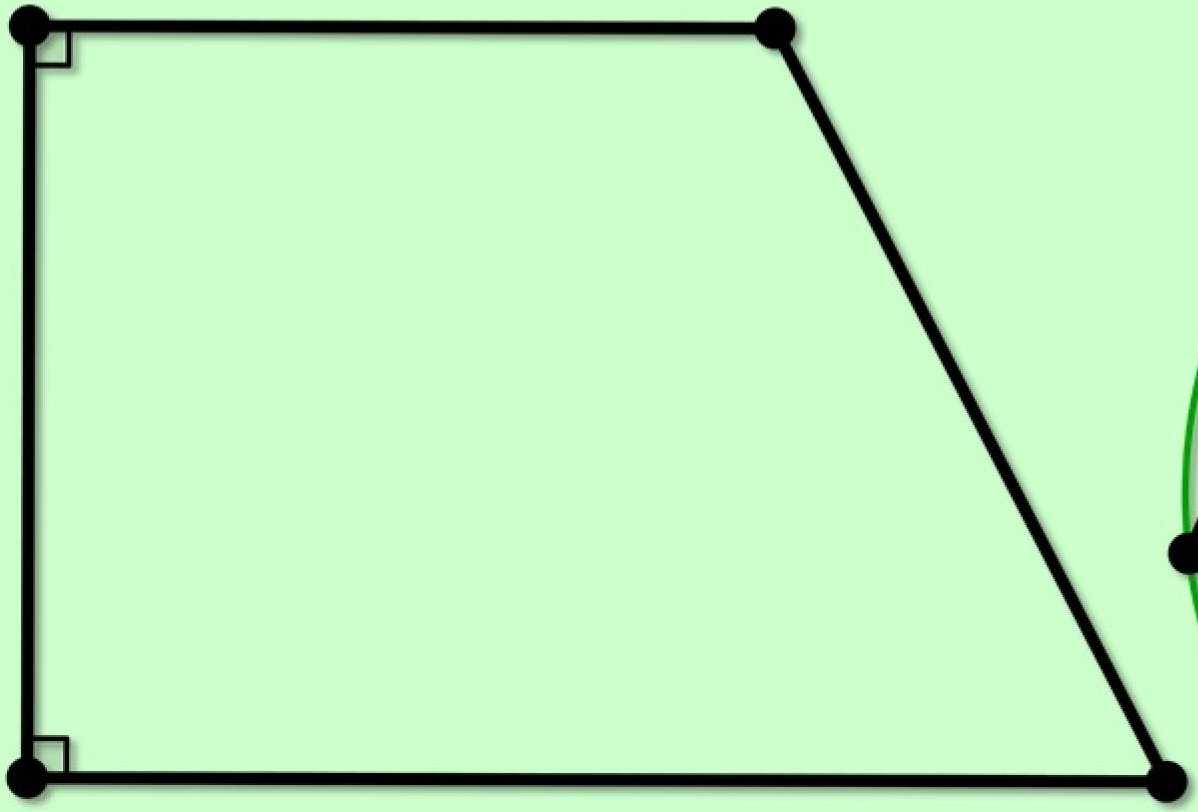
Η διάμεσος είναι παράλληλη με τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.



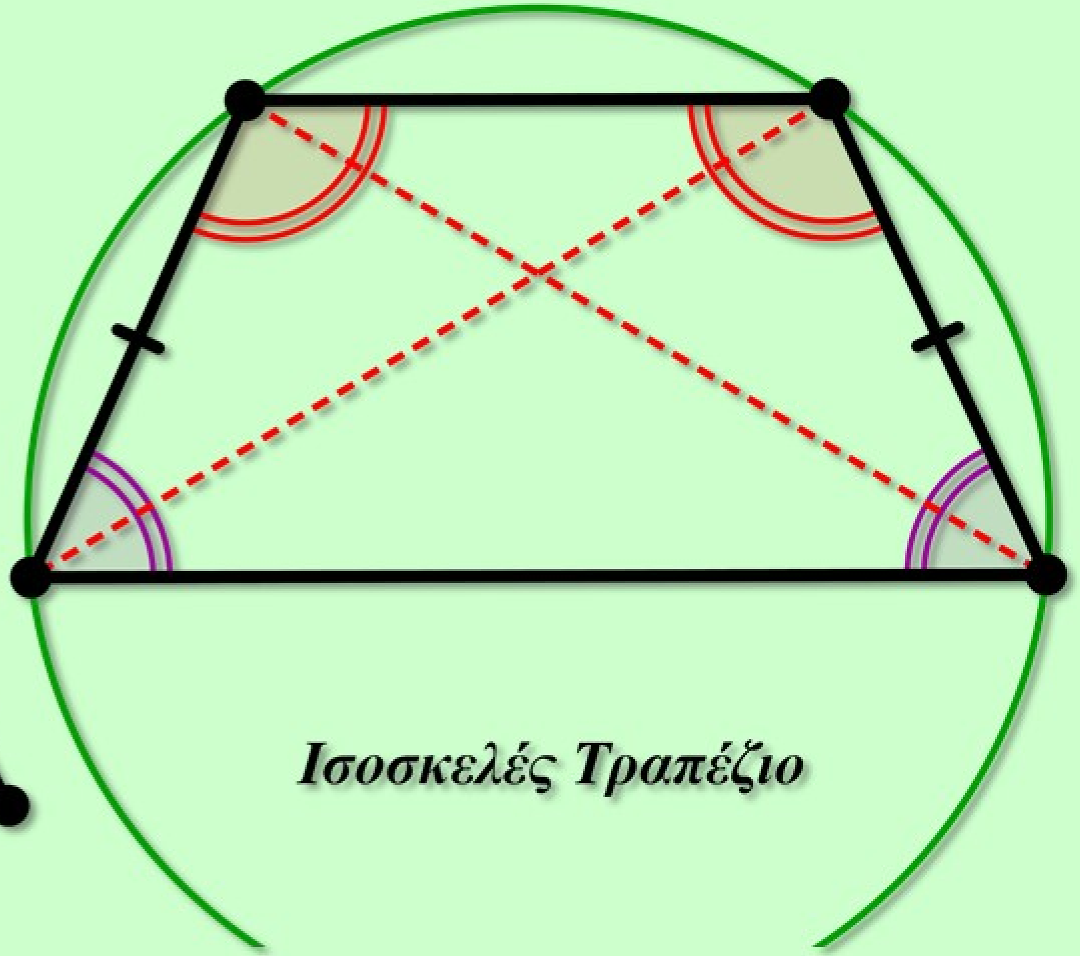
Προεκτείνουμε την ΑΛ, μέχρι να κόψει τη προέκταση της βάσης ΓΔ, στο σημείο Ε.

Τα τρίγωνα ΑΒΛ και ΓΕΛ είναι ίσα.

Τραπέζιο ΙΙΙ



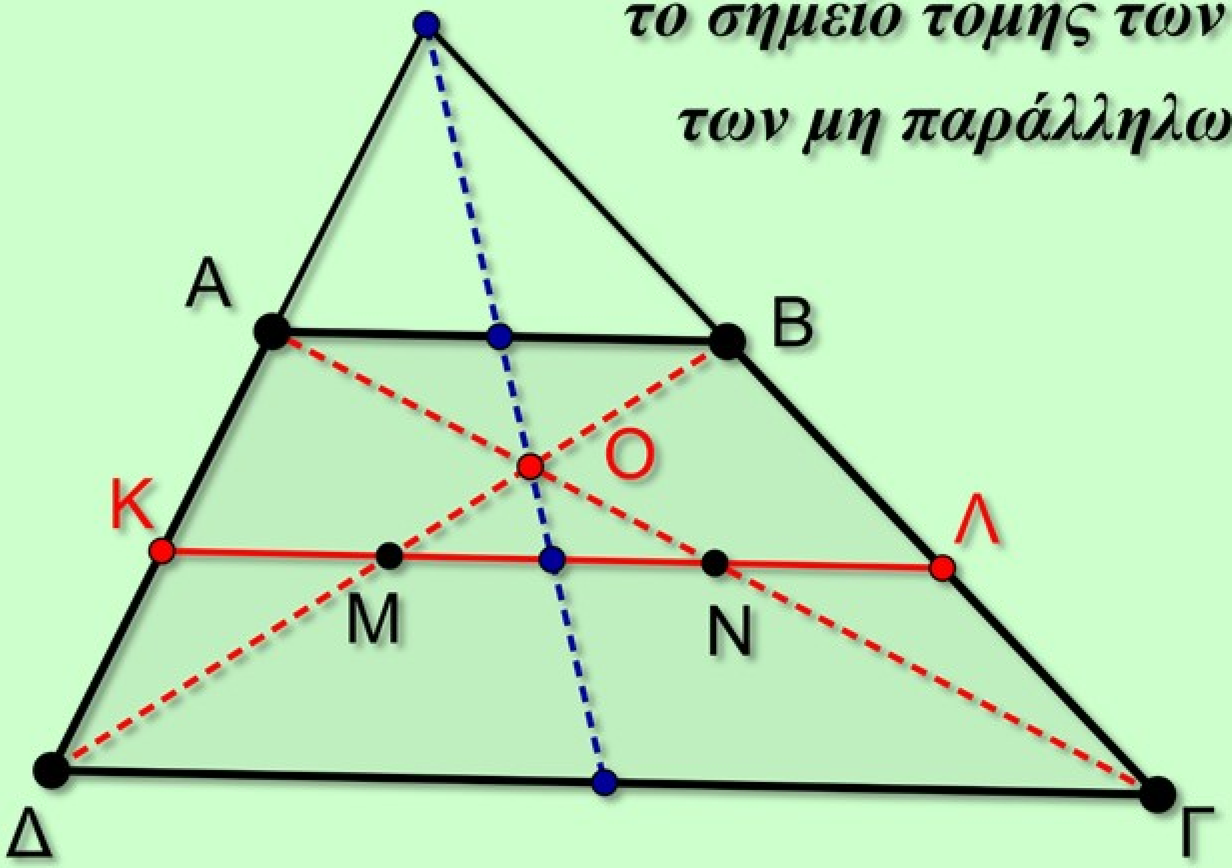
Ορθογώνιο Τραπέζιο

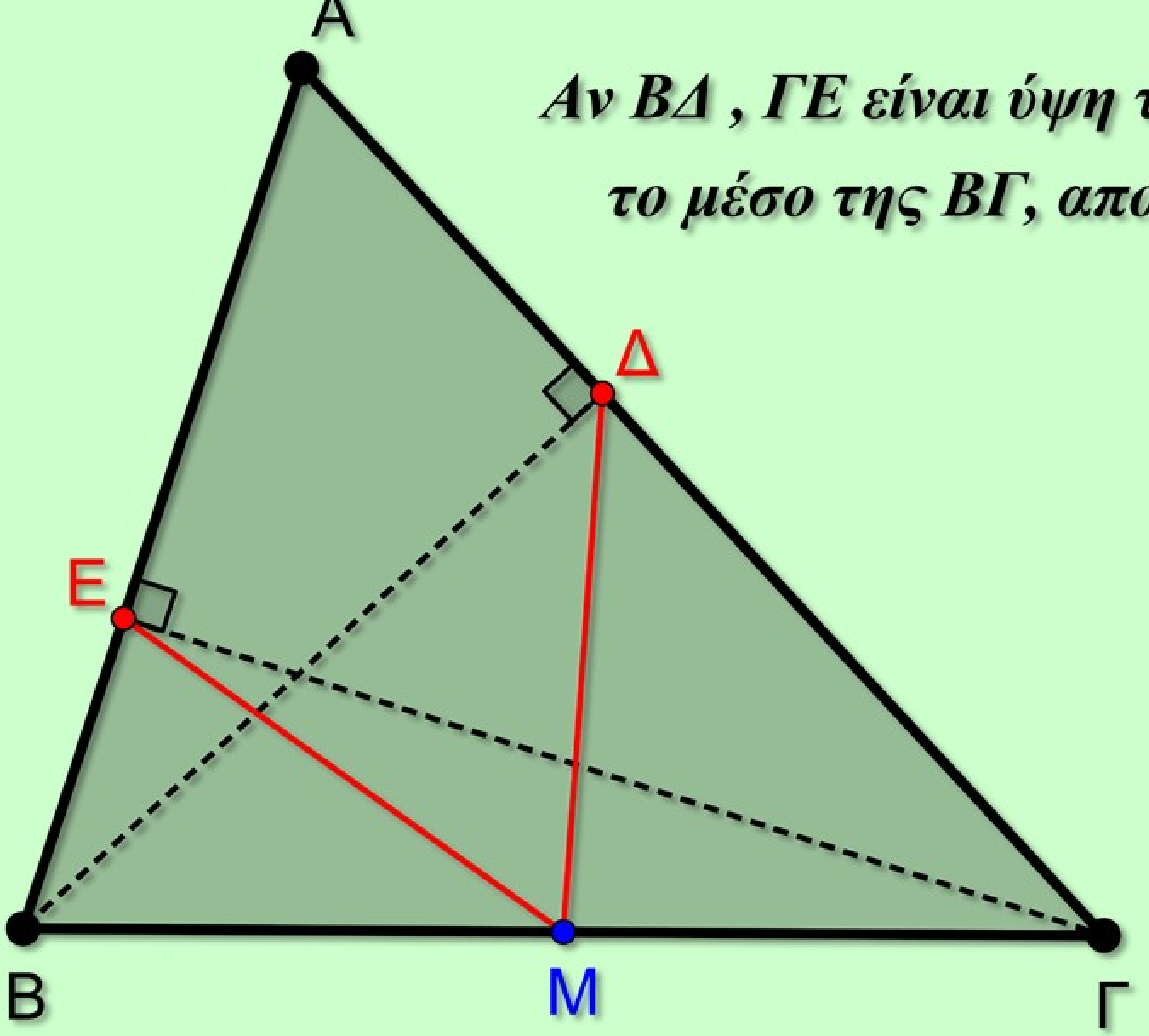


Ισοσκελές Τραπέζιο

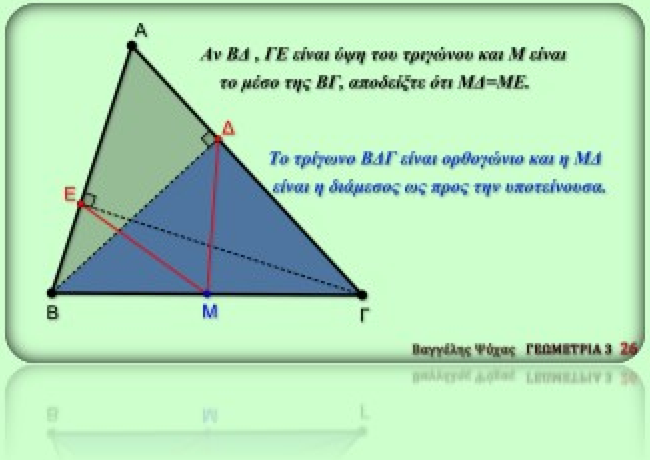
Τραπέζιο IV

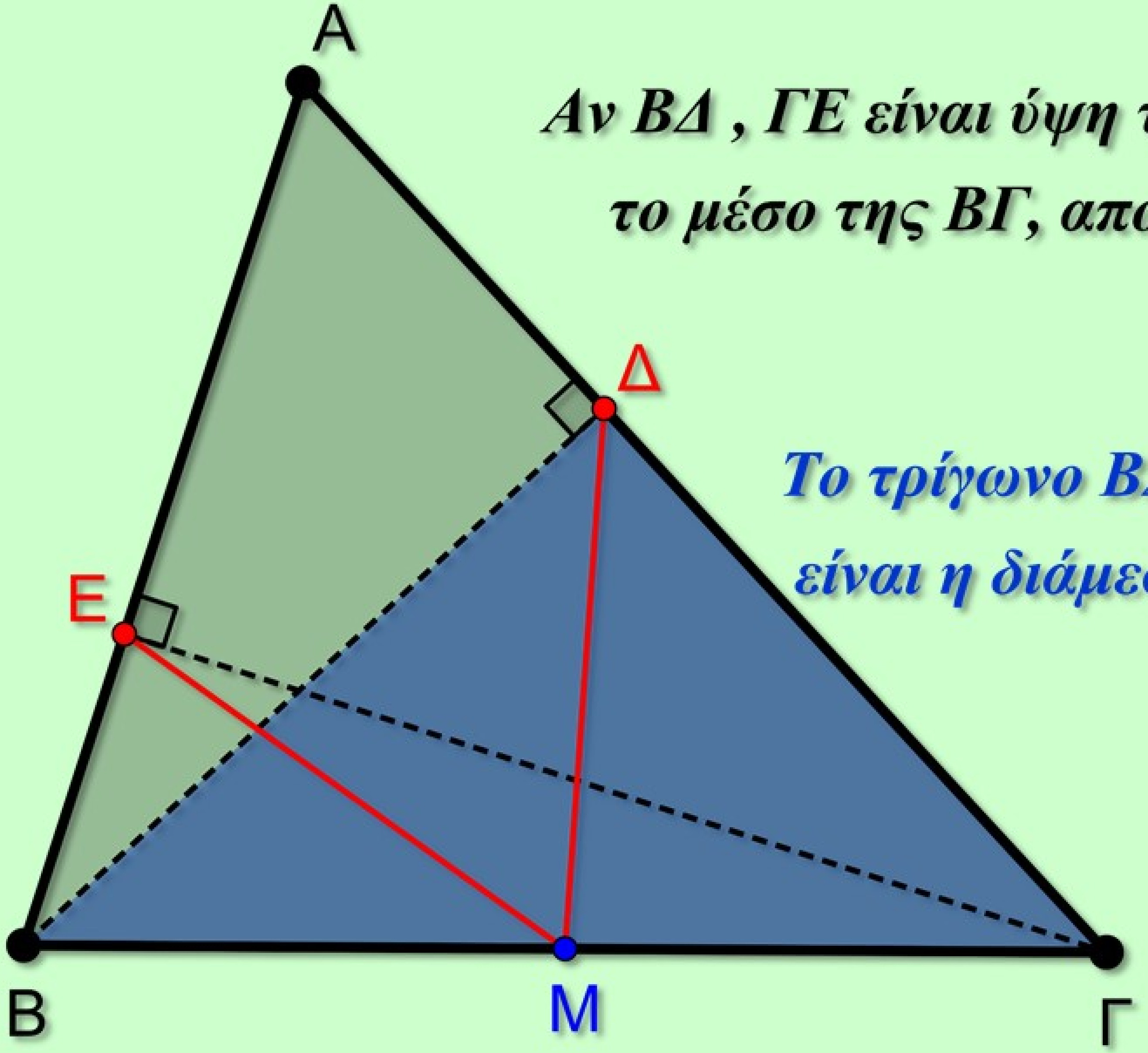
Τα μέσα των βάσεων, το μέσο της διαμέσου, το σημείο τομής των διαγωνίων και το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών, είναι συνευθειακά.





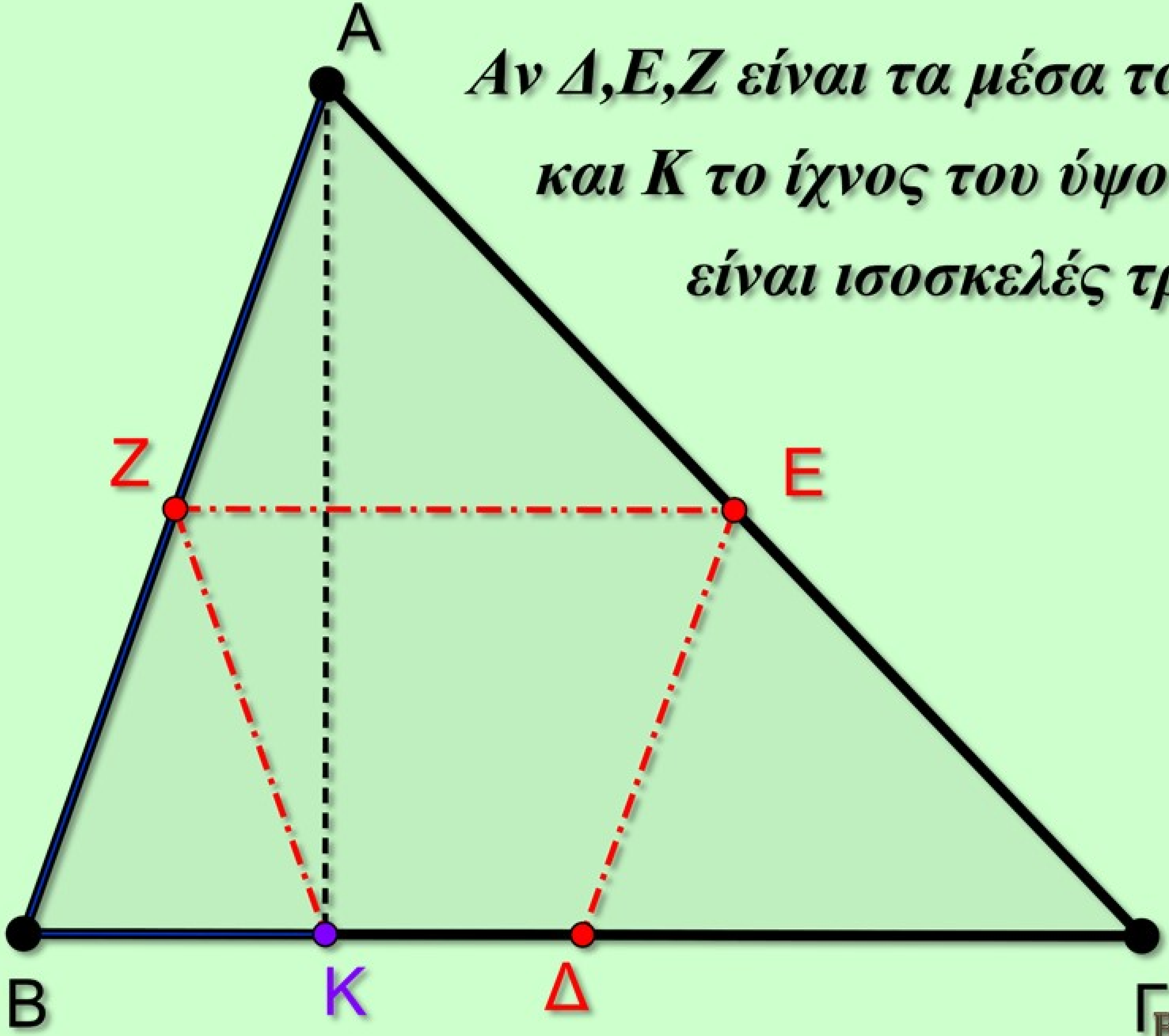
Αν ΒΔ , ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου και Μ είναι το μέσο της ΒΓ, αποδείξτε ότι ΜΔ=ΜΕ.



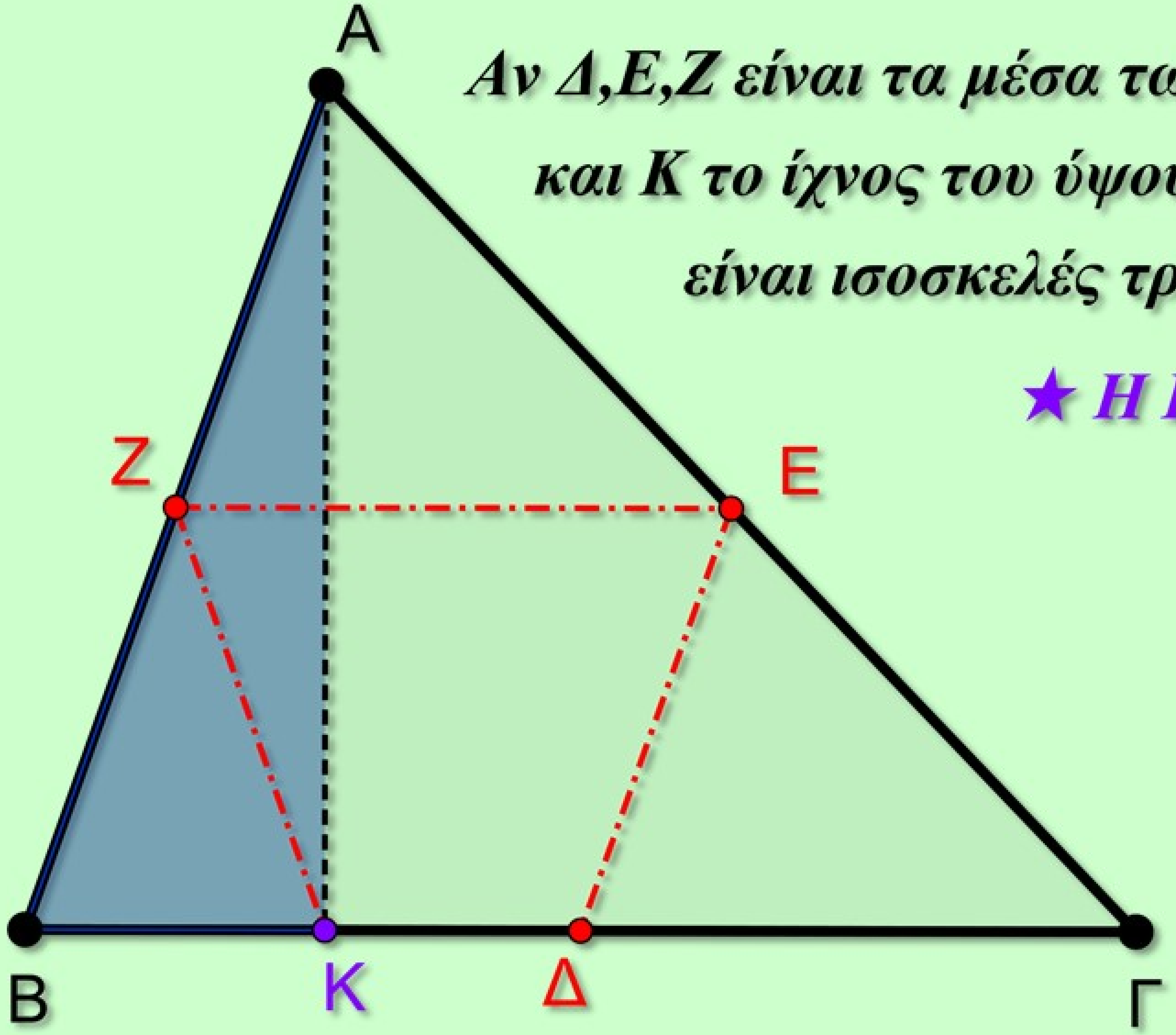


Αν ΒΔ , ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου και Μ είναι το μέσο της ΒΓ, αποδείξτε ότι ΜΔ=ΜΕ.

Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο και η ΜΔ είναι η διάμεσος ως προς την υποτείνουσα.



Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου και Κ το ίχνος του ύψους, τότε το ΔΕΖΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



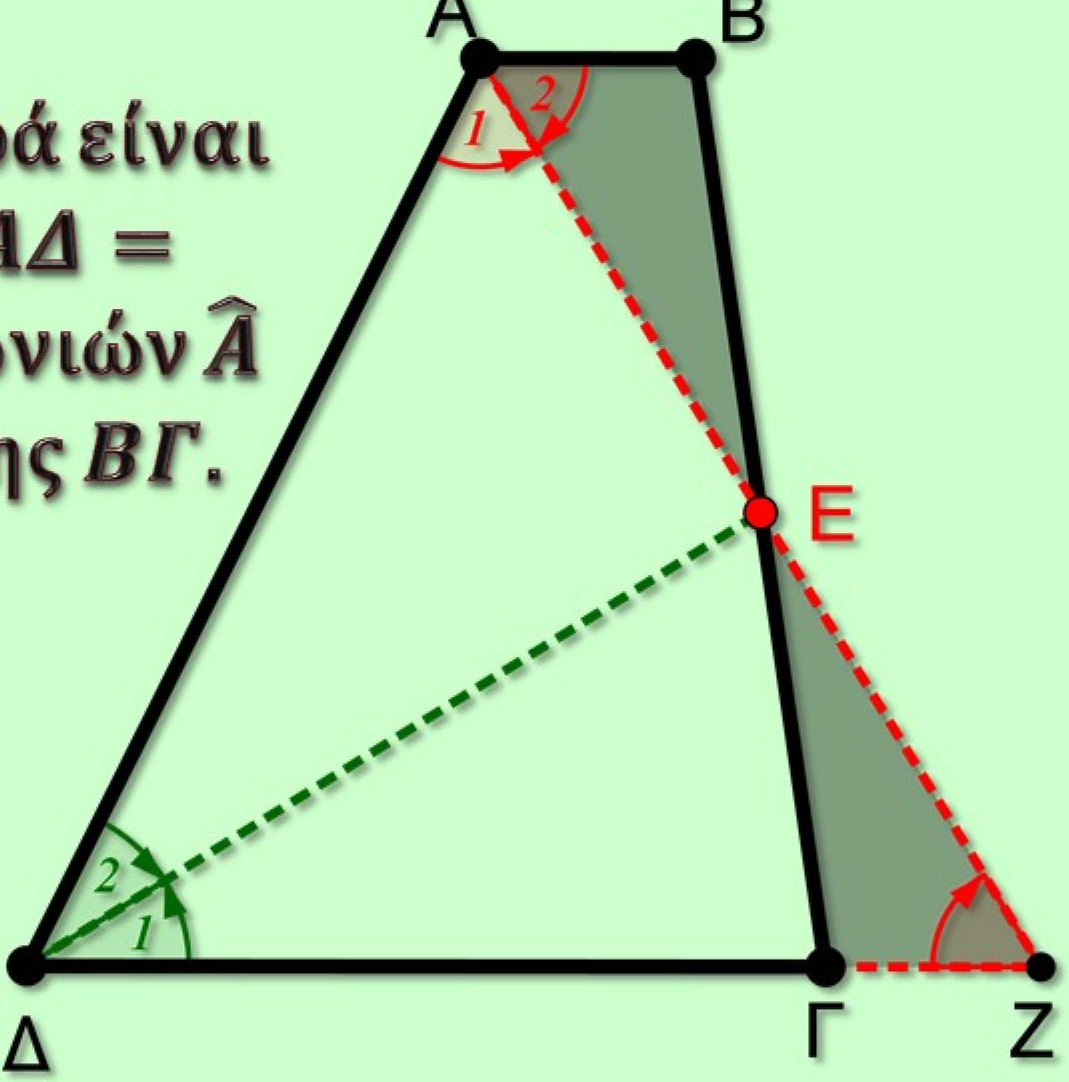
Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου και Κ το ίχνος του ύψους, τότε το ΔΕΖΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

★ ***Η ΚΖ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ.***

★ ***Ζ μέσο του ΑΒ και Ε μέσο του ΑΓ άρα ΖΕ//ΒΓ.***

★ ***Δ μέσο του ΒΓ και Ε μέσο του ΑΓ άρα ΔΕ=//ΒΖ.***

✦ Αν σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ η μία πλευρά είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων ($ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$) , τότε οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Α}$ και $\hat{Δ}$ τέμνονται κάθετα στο μέσο της $ΒΓ$.



✦ Ένα τραπέζιο $ABCD$ (με $AB \parallel CD$ και $AB > CD$) είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτεται στις πλευρές AB και AC στα σημεία M και N αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το έκκεντρο του τραπεζίου $ABCD$ ανήκει στην ευθεία MN.