# Μάθημα Θεωρίας Αριθμών
# Ε.Μ.Ε

1. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος $n$ έτσι ώστε οι αριθμοί $n+3$ και $n^2+3n+3$ να είναι ταυτόχρονα τέλειοι κύβοι.

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $n$ ο αριθμός

$$A = 5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

δεν είναι πρώτος.

3. Να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους $a, b$ ο αριθμός

$$N = (36a + b)(36b + a)$$

δεν μπορεί να είναι δύναμη του 2.

4. Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

5. Ορίζουμε τους αριθμούς

$$T_n = 2^{2^n} + 1,$$

με $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι αν $m \neq n$ τότε οι αριθμοί $T_m, T_n$ είναι σχετικά πρώτοι.

6. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων $(x, y)$ που είναι τέτοια, ώστε

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

7. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη-μηδενικών ακεραίων $(x, y)$ που είναι τέτοια, ώστε

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3.$$

8. Να προσδιορισθούν οι θετικοί ακέραιοι $n$ για τους οποίους ο αριθμός

$$n^4 + 4^n$$

είναι πρώτος.

9. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων $(x, y)$ που είναι τέτοια, ώστε

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

10. Αν οι θετικοί ακέραιοι $x, y$ ικανοποιούν την σχέση

$$2x^2 + x = 3y^2 + y,$$

τότε να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $x - y$ και $2x + 2y + 1$ είναι τέλεια τετράγωνα.

Σιλουανός Μπραζιτίκος

## Λύσεις

1. Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο αριθμοί είναι τέλειοι κύβοι, τότε τέλειος κύβος είναι και το γινόμενό τους. Το γινόμενό τους ισούται με

$$K = (n+3)(n^2+3n+3) = n^3+6n^2+12n+9.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$(n+2)^3 < K < (n+3)^3,$$

για κάθε θετικό ακέραιο $n$. Έπεται ότι ο $K$ δεν μπορεί να είναι τέλειος κύβος. $\square$

2. Θέτουμε $5^{5^n} = x$. Τότε

$$A = x^5+x+1 = x^5-x^2+x^2+x+1 = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι καθεμιά παρένθεση είναι μεγαλύτερη του 1 για $5^{5^n} = x$ επομένως ο $A$ δεν είναι πρώτος. $\square$

3. Έστω ότι

$$(36a+b)(36b+a) = 2^k, \tag{1}$$

για κάποιο ακέραιο $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε ότι $d = (a,b)$ και γράφουμε $a = dx$, $b = dy$, με $(x,y) = 1$ Τότε η (1) δίνει ότι

$$d^2(36x+y)(36y+x) = 2^k.$$

Έπεται ότι ο $d$ είναι δύναμη του 2. Επομένως μένει να λύσουμε την εξίσωση

$$(36x+y)(36y+x) = 2^s, \tag{2}$$

για κάποιο $s \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι ο $s$ δεν μπορεί να είναι μηδέν. Επιπλέον $(36x+y, 36y+x)|2^s$ άρα είναι κάποια δύναμη του δύο ή είναι ίσος με 1. Αν είναι κάποια δύναμη του 2, τότε $2|x$ και $2|y$, που είναι άτοπο. Επομένως ο $(36x+y, 36y+x) = 1$. Τότε η (2) συνεπάγεται ότι είτε ο $36x+y$ είτε ο $36y+x$ είναι ίσος με 1. Αυτό είναι άτοπο και το ζητούμενο έπεται. $\square$

4. Αν $y < x$ τότε προφανώς δεν έχουμε λύσεις. Αν $y = x$, τότε έχουμε τα ζεύγη λύσεων $(x,y) = (1,1)$ και $(x,y) = (-1,-1)$.
Υποθέτουμε τώρα ότι $y > x$. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$p|x \Leftrightarrow p|y.$$

Έπεται ότι

$$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ και } y = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση και χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της παρογοντοποίησης στο $\mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_i(x+y) = \beta_i(y-x),$$

για κάθε $i = 1, \dots, k$. Έπεται ότι $\alpha_i < \beta_i$ και επομένως $x|y$. Γράφουμε $y = sx$. Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση παίρνουμε και ύστερα από τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$x^2 = s^{s-1}.$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι είτε $s = t^2$, είτε $s-1 = 2z$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε την οικογένεια λύσεων

$$(x,y) = \left(t^{t^2-1}, t^{t^2+1}\right),\ t \in \mathbb{N}^*.$$

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε την οικογένεια λύσεων

$$(x,y) = \left((2z+1)^z, (2z+1)^{z+1}\right),\ s \in \mathbb{N}.$$

□

5. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
T_n - 2 = 2^{2^n} - 1 &= \left(2^{2^{n-1}} - 1\right)\left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\
&= \left(2^{2^{n-2}} - 1\right)\left(2^{2^{n-2}} + 1\right)\left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\
&\dots \\
&= T_{n-1}T_{n-2}\dots T_1.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι αν κάποιος αριθμός $d$ διαιρεί τον $T_m$ και τον $T_n$ τότε διαιρεί και το 2. Τότε πρέπει $d = 1$ γιατί οι $T_n$ είναι περιττοί, που είναι και το ζητούμενο. □

6. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο, γράφουμε την εξίσωση στη μόρφη

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = y^4 \Rightarrow \\
&(2x^3+3)^2 - 4y^4 = 5 \Rightarrow \\
&(2x^3+3-2y^2)(2x^3+3+2y^2) = 5.
\end{aligned}$$

Προκύπτουν έτσι τέσσερα συστήματα

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 1, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = -1, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 5, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = -5, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = -1. \end{cases}$$

Τελικά τα μοναδικά ζεύγη λύσεων είναι τα $(0,1), (0,-1)$. □

7. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη

$$2y^2 + (x^2-3x)y + 3x^2 + x = 0.$$

Η παραπάνω έχει ακέραιες λύσεις αν και μόνο αν η διακρίνουσά της είναι τέλειο τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή αν

$$\Delta = x(x+1)^2(x-8) = z^2,$$

για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο $z$. Έπεται ότι για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο $w$ ισχύει

$$x(x-8) = w^2 \Rightarrow (x-4)^2 - w^2 = 16 \Rightarrow (x-w-4)(x+w-4) = 16.$$

Διακρίνοντας τις περιπτώσεις βρίσκουμε ότι τα ζεύγη λύσεων είναι

$$(x, y) \in \{(-1, -1), (8, -10), (9, -6), (9, -21)\}.$$

$\square$

8. Αν $n = 1$, τότε ο αριθμός είναι πρώτος. Αν $n$ είναι άρτιος τότε ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2 επομένως πρέπει $n = 2k + 1$. Τότε γράφουμε

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k+1} &= n^4 + 4 \cdot 2^{4k} \\ &= n^4 + 4m^4 \\ &= n^4 + 4m^4 + (2mn)^2 - (2mn)^2 \\ &= (n^2 + 2m^2 - 2mn)(n^2 + 2m^2 + 2mn), \end{aligned}$$

όπου $m = 2^k$. Για $n > 1$ εύκολα βλέπουμε ότι κάθε παρένθεση είναι μεγαλύτερη του 1, άρα ο αριθμός δεν είναι πρώτος. Συνεπώς μοναδική λύση είναι η $n = 1$. $\square$

9. Επειδή η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς $x, y$ θέτουμε $x + y = s$ και $xy = p$. Τότε αυτή παίρνει τη μορφή

$$s^3 - 2sp = 8s^2 - 8p + 8.$$

Από την τελευταία έπεται ότι ο $s$ είναι άρτιος και γράφουμε $s = 2t$. Τότε παίρνουμε

$$2t^3 - tp = 8t^2 - 2p + 2$$

και λύνονοντας ως προς $p$ παίρνουμε

$$p = \frac{2t^3 - 8t^2 - 2}{t - 2} = 2t^2 - 4t - 8 - \frac{18}{t - 2}.$$

Επομένως αφού $p$ είναι ακέραιος, θα πρέπει $t - 2 | 18$. Εξετάζοντας τις 12 περιπτώσεις που προκύπτουν, έχουμε τελικά ότι τα μόνα ζεύγη λύσεων είναι $(x, y) \in \{(8, 2), (2, 8)\}$. $\square$

10. Γράφουμε τη δοθείσα στη μορφή

$$\begin{aligned} &2x^2 - 2y^2 + x - y = y^2 \Rightarrow \\ &(x - y)(2x + 2y + 1) = y^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Θα βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των $x - y$ και $2x + 2y + 1$. Έστω ένας πρώτος $p$ που είναι κοινός διαιρέτης των $x - y$ και $2x + 2y + 1$. Τότε η (3) δίνει ότι $p|y$. Οπότε $p|x$ αλλά τότε πρέπει $p|1$. Έπεται ότι δύο αυτοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους και έτσι πρέπει να είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα, που είναι και το ζητούμενο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι $x, y$ που ικανοποιούν την (3). Για να δοθεί όμως απάντηση στο παραπάνω ερώτημα απαιτούνται εργαλεία ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρουσίασης. $\square$