Θεωρία Αριθμών ΙΙ

Ευκλείδεια Διαίρεση

Βαγγέλης Ψύχας

Ευκλείδεια Διαίρεση

✧ Αν a και b είναι ακέραιοι αριθμοί με $b \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι αριθμοί k και υ, τέτοιοι ώστε: $a = k \cdot b + \upsilon,\ 0 \leq \upsilon < |b|$.

✧ Ο a λέγεται διαιρετέος (dividend).

✧ Ο b λέγεται διαιρέτης (divisor).

✧ Ο k λέγεται πηλίκο (quotient).

✧ Ο υ λέγεται υπόλοιπο (remainder).

Διαιρετότητα

✧ Ένας ακέραιος αριθμός $b \neq 0$, θα λέμε ότι **διαιρεί** τον ακέραιο αριθμό a, όταν υπάρχει ακέραιος αριθμός k τέτοιος ώστε: $a = k \cdot b$.

✧ Συμβολικά γράφουμε : $b|a$.

✧ Ισοδύναμα λέμε ότι :
Ο a **διαιρείται** από τον b
ή ότι ο a είναι **πολλαπλάσιο** του b.

Ιδιότητες Διαιρετότητας

- $m|0, \quad m \in \mathbb{Z}^*$
- $1|m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- $\left.\begin{matrix} m|k \\ n|l \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \cdot n|k \cdot l, \quad \begin{matrix} m, n \in \mathbb{Z}^* \\ k, l \in \mathbb{Z} \end{matrix}$
- $\left.\begin{matrix} m|k \\ k|l \end{matrix}\right\} \Rightarrow m|l, \quad \begin{matrix} m, k \in \mathbb{Z}^* \\ l \in \mathbb{Z} \end{matrix}$
- $m|1 \Leftrightarrow m = \pm 1$
- $(m|n \& n|m) \Leftrightarrow m = \pm n$
- $(m|n \& m|k) \Rightarrow m|(x \cdot n + y \cdot k)$
- $(m|n \& n \neq 0) \Rightarrow |m| \leq |n|$

✧ **Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από το 1000 και διαιρούμενοι με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 2.**

✧ **Οι ακέραιοι που ζητάμε να αριθμήσουμε είναι οι ακέραιοι:**
$\mathbf{2, 7, 12, 17, 22, \cdots, 997.}$

Οι ακέραιοι αυτοί αποτελούν τους όρους μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\boldsymbol{\alpha_1} = 2$ και διαφορά $\boldsymbol{\omega = 5}$.

Ο $\boldsymbol{\nu -}$ οστός όρος της προόδου, δίνεται από την ισότητα:
$$\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 2 + (\nu - 1)5 = 5\nu - 3.}$$

Αν $\boldsymbol{\alpha_\nu = 997}$ τότε $\boldsymbol{5\nu - 3 = 997 \Leftrightarrow \nu = 200}$.

◊ Αν $m|n$ και $k|l$ τότε $mk|nl$.

◊ $\left.\begin{matrix} m|n \\ k|l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n = x \cdot m \\ l = y \cdot k \end{matrix}\right\} \Rightarrow n \cdot l = (x \cdot y) \cdot (m \cdot k) \Rightarrow mk|nl.$

◊ Αν $11|(n+2)$ και $11|(35-k)$ τότε $11|(n+k)$.

◊ $\left.\begin{matrix} 11|(n+2) \\ 11|(35-k) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11|\big((n+2)-(35-k)\big) \Rightarrow 11|(n+k-33).$

$\left.\begin{matrix} 11|(n+k-33) \\ 11|33 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11|\big((n+k-33)+33\big) \Rightarrow 11|(n+k).$

✧ Αν m, n θετικοί ακέραιοι και $m|n$ τότε: $(2^m - 1)|(2^n - 1)$.

✧ Εφόσον $m|n$, θα υπάρχει θετικός ακέραιος k ώστε : $n = km$.

Τότε $2^n - 1 = 2^{km} - 1 = (2^m)^k - 1 =$
$= (2^m - 1)\left((2^m)^{k-1} + (2^m)^{k-2} + \cdots + 1\right)$.

Άρα $(2^m - 1)|(2^n - 1)$.

✧ Αν m, n, x θετικοί ακέραιοι με $x > 1$ και $m|n$ τότε:
$(x^m - 1)|(x^n - 1)$.

✧ Εφόσον $m|n$, θα υπάρχει θετικός ακέραιος k ώστε :
$n = km$.

Τότε $x^n - 1 = x^{km} - 1 = (x^m)^k - 1 =$
$= (x^m - 1)\left((x^m)^{k-1} + (x^m)^{k-2} + \cdots + 1\right)$.

Άρα $(x^m - 1)|(x^n - 1)$.

✧ Αν m, n ακέραιοι με $n|(2m+1)$ και $n|(3m-1)$, να βρεθούν οι πιθανές θετικές τιμές του n.

✧ Εφόσον ο n διαιρεί τους ακέραιους $2m+1$ και $3m-1$, θα διαιρεί και οποιοδήποτε γραμμικό τους συνδυασμό.

Δηλαδή $n|\big(3(2m+1)-2(3m-1)\big)$ άρα $n|5$.

Οπότε $n=1$ ή $n=5$.

♢ Από τρεις ακέραιους k, m, n, ή κάποιος από αυτούς θα διαιρείται με το τρία ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το τρία.

♢ Αν κάποιος από τους ακέραιους k, m, n διαιρείται με το τρία, τότε η πρόταση έχει αποδειχτεί.

Έστω ότι οι ακέραιοι k, m, n δεν διαιρούνται με το τρία, τότε οι ακέραιοι θα είναι της μορφής $3l+1$ ή $3l+2$.

Οι δυνατές περιπτώσεις (για τη μορφή των ακεραίων) είναι:

1) και οι τρείς είναι της μορφής $3l+1$.

Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα και των τριών ακεραίων, θα είναι της μορφής:

$$(3l_1+1)+(3l_2+1)+(3l_3+1)=3(l_1+l_2+l_3+1)$$

2) και οι τρείς είναι της μορφής $3l + 2$.
Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα και των τριών ακεραίων,
θα είναι της μορφής:
$$(3l_1 + 2) + (3l_2 + 2) + (3l_3 + 2) = 3(l_1 + l_2 + l_3 + 2).$$

3) Δύο ακέραιοι είναι της μορφής $3l + 1$ και ένας της μορφής $3l + 2$ ή δύο ακέραιοι είναι της μορφής $3l + 2$ και ένας της μορφής $3l + 1$.
Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα δύο ακεραίων,
θα είναι της μορφής:
$$(3l_1 + 1) + (3l_2 + 2) = 3(l_1 + l_2 + 1).$$

♢ Να αποδειχτεί ότι ο θετικός ακέραιος $m = 9^{n+1} - 8n - 9$ είναι πολλαπλάσιο του 64 (όπου n θετικός ακέραιος).

♢ $m = 9^{n+1} - 8n - 9 = 9^{n+1} - 8n - 8 - 1 =$

$= 9^{n+1} - 1 - (8n + 8) = 9^{n+1} - 1 - 8(n + 1) =$

$= (9 - 1)\left(9^{n} + 9^{n-1} + \cdots + 1\right) - 8(n + 1) =$

$= 8\left(9^{n} + 9^{n-1} + \cdots + 1 - n - 1\right) =$

$= 8\left((9^{n} - 1) + (9^{n-1} - 1) + \cdots + (9 - 1)\right) =$

$\left[\, 9^{n} - 1 = 8\left(9^{n-1} + 9^{n-2} + \cdots + 1\right) \,\right]$

$= 64\left(\left(9^{n-1} + \cdots + 1\right) + \left(9^{n-2} + \cdots + 1\right) + \cdots + (1)\right)$

✧ Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6.

✧ Έστω $n, n+1, n+2$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι και $m = n(n+1)(n+2)$ το γινόμενό τους.

Αν $n = 3k$ τότε $m = 3k\underbrace{(3k+1)(3k+2)}_{2l} = 6kl$.

Αν $n = 3k+1$ τότε $m = \underbrace{(3k+1)(3k+2)}_{2l}(3k+3) = 6l(k+1)$.

Αν $n = 3k+2$ τότε $m = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$.

→ Αν $n = 3k + 2$ τότε $m = (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4)$.

Αν $3k + 3$ άρτιος, τότε ο $3k + 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του 6, άρα και ο m θα είναι πολλαπλάσιο του 6.

Αν $3k + 3$ περιττός, τότε οι άλλοι δύο ακέραιοι θα είναι άρτιοι, άρα ο m θα είναι πολλαπλάσιο του 6.

$\boxed{\text{✧ Αποδείξτε ότι: } 6 | n(n+1)(2n+1), n \in \mathbb{Z}.}$

✧ $n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n-1+n+2) =$

$= n(n+1)(n-1) + n(n+1)(n+2) =$

$= \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{6m} + \underbrace{n(n+1)(n+2)}_{6k}$.

$\diamond$ Αποδείξτε ότι: $6|\left(n^3 + 3n^2 - 4n\right), n \in \mathbb{Z}$.

$\diamond$ $n^3 + 3n^2 - 4n = n\left(n^2 + 3n - 4\right) = n(n-1)(n+4) =$
$= n(n-1)(n-2+6) = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_{6m} + n(n-1) \cdot 6.$

✧ Το **τετράγωνο** οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού είναι της μορφής $3k$ ή $3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

✧ Έστω m τυχόν ακέραιος.

Τότε $m = 3n$ ή $m = 3n + 1$ ή $m = 3n + 2$

(Διότι κάθε ακέραιος αριθμός, όταν διαιρεθεί με το 3, θα αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 ή 2 .)

Αν $m = 3n$ τότε, $m^2 = (3n)^2 = 3(3n^2) = 3k$.

Αν $m = 3\text{n} + 1$ τότε, $m^2 = (3n+1)^2 =$
$= 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1 = 3k + 1$.

Αν $m = 3\text{n} + 2$ τότε, $m^2 = (3n+2)^2 =$
$= 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1 = 3k + 1$.