

# Συνδυαστική VIII

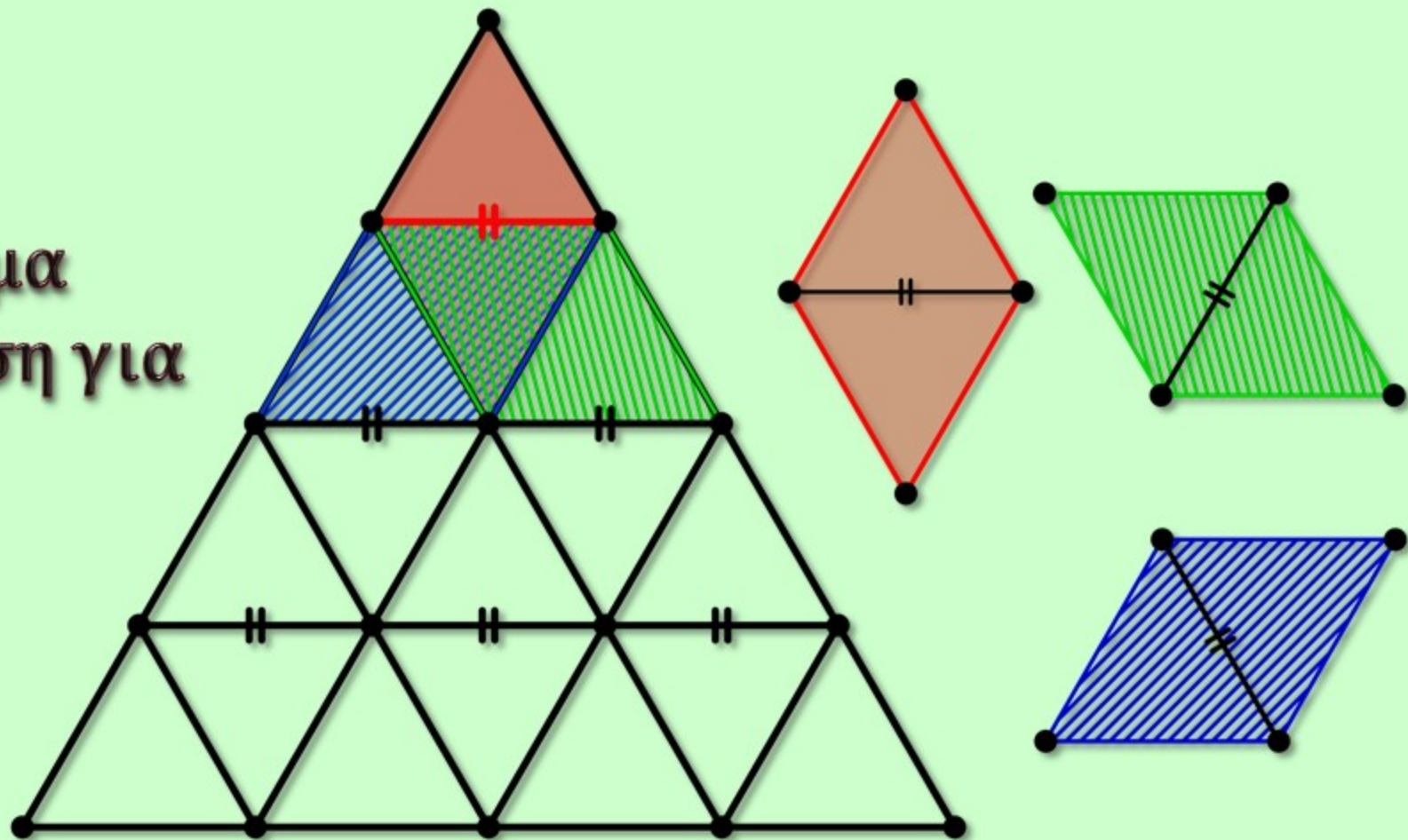
# Αρχή του Αθροίσματος (JBMO 2011)

- Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές μήκους  $n$  ( $n$  θετικός ακέραιος). Με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του, το χωρίζουμε σε (ίσα μεταξύ τους) ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές μήκους  $1$ . Να βρείτε τον πλήθος των ρόμβων που αποτελούνται από  $2$  και από  $8$  ισόπλευρα τρίγωνα (που έχουν πλευρά μήκους  $1$ ).



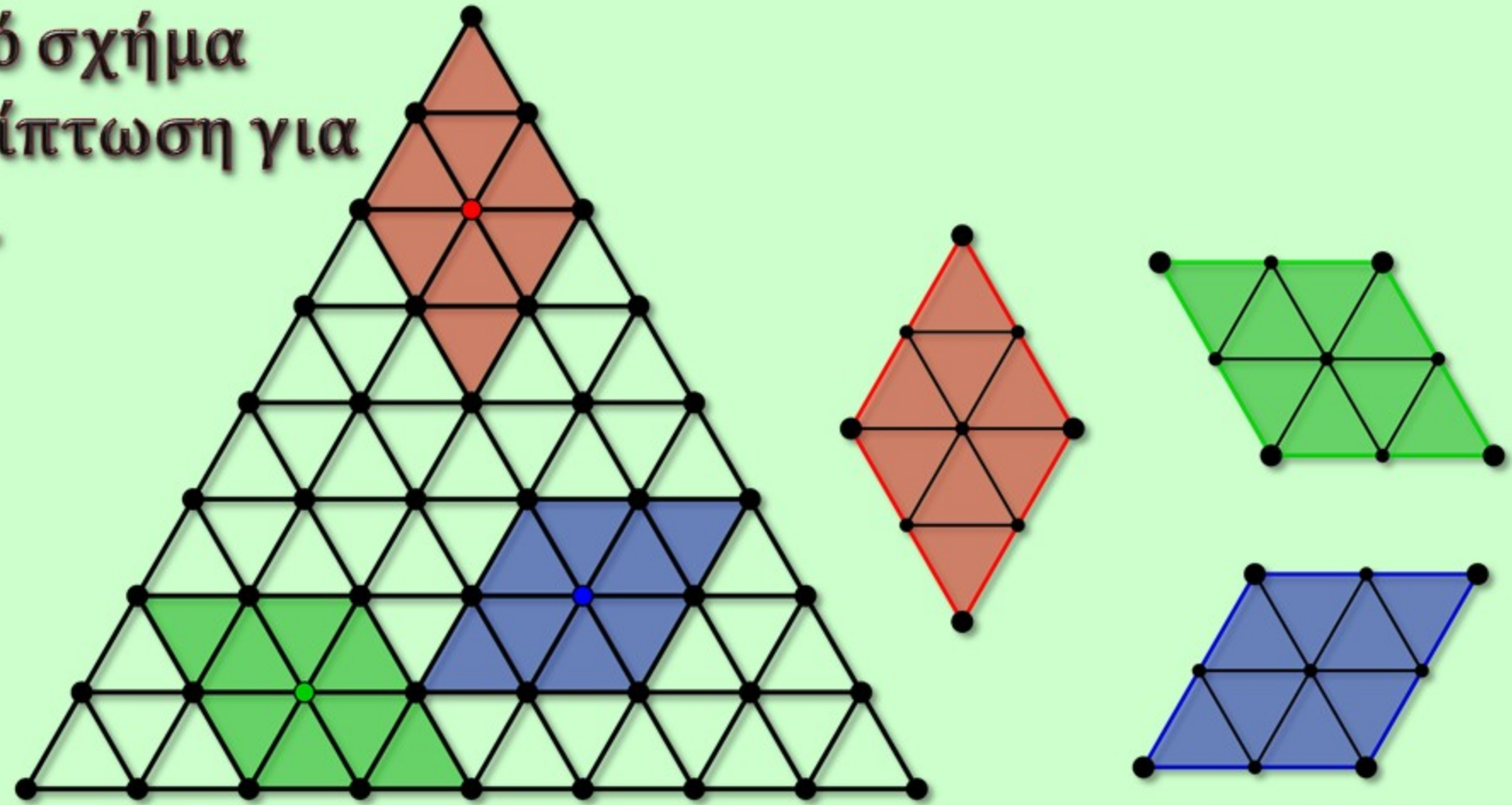
- Οι ρόμβοι που αποτελούνται από **2** ισόπλευρα τρίγωνα, είναι οι ρόμβοι με πλευρές μήκους **1**.

- Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη περίπτωση για  **$n = 4$** .



- Οι ρόμβοι που αποτελούνται από **8** ισόπλευρα τρίγωνα, είναι οι ρόμβοι με πλευρές μήκους **2**.

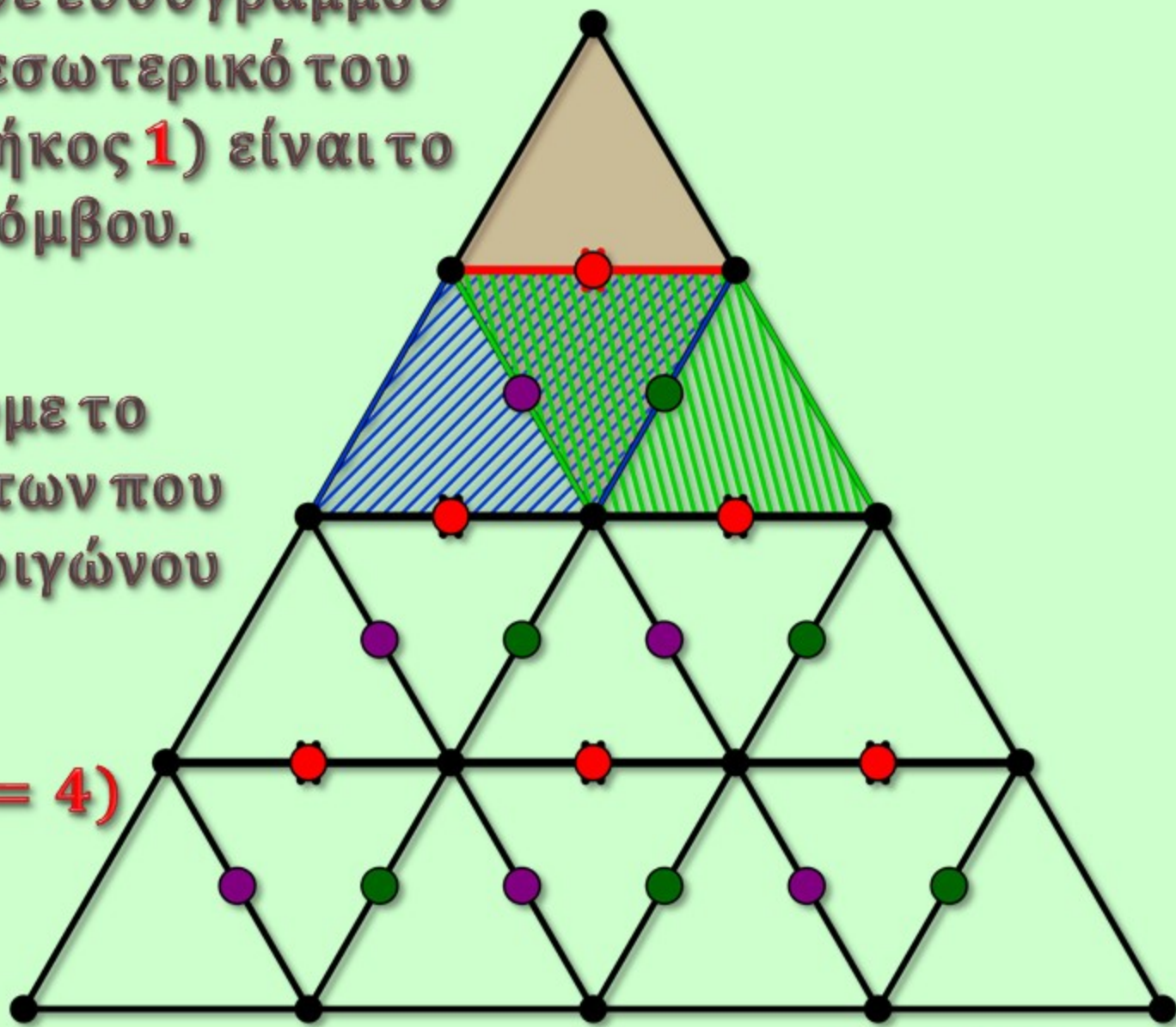
- Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη περίπτωση για  **$n = 8$** .



● Παρατηρούμε ότι το μέσο κάθε ευθυγράμμου τμήματος (που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισοπλεύρου τριγώνου και έχει μήκος **1**) είναι το κέντρο ενός και μόνο ρόμβου.

● Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου και έχουν μήκος **1**.

● Το πλήθος των ρόμβων (για  $n = 4$ ) είναι:  $3(1 + 2 + 3) = 18$ .



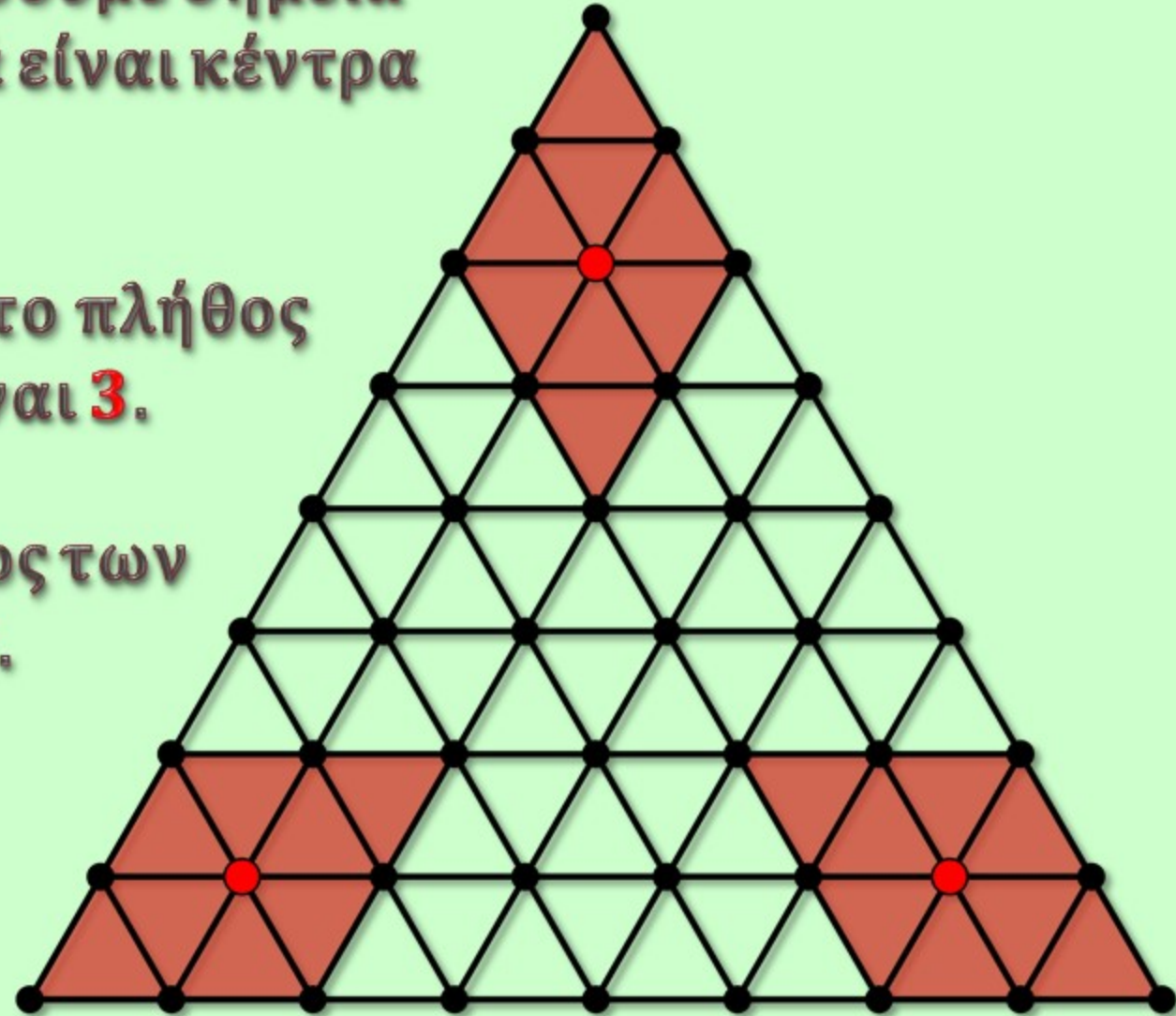
- Το πλήθος των ρόμβων (για τη γενική περίπτωση του ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά μήκους  $n$ ) είναι:

$$3(1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) = 3 \cdot \frac{n(n - 1)}{2}$$

● Τα κόκκινα σημεία, θα τα ονομάσουμε σημεία **πρώτης τάξης**, διότι τα σημεία αυτά είναι κέντρα ενός ρόμβου.

● Στην ειδική περίπτωση ( $n = 8$ ), το πλήθος των σημείων **πρώτης τάξης** είναι **3**.

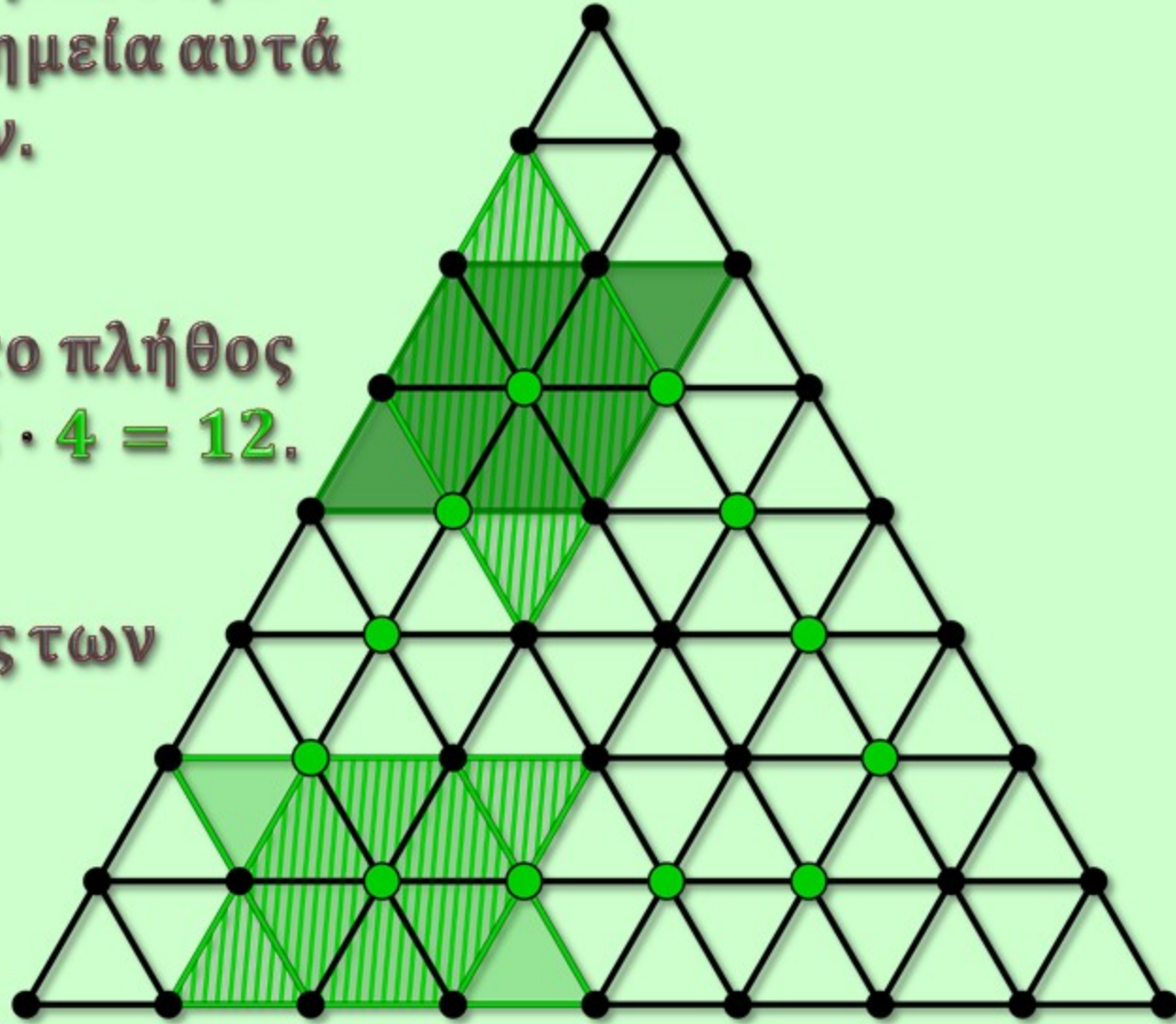
● Στην γενική περίπτωση, το πλήθος των σημείων **πρώτης τάξης** είναι **3**.



● Τα πράσινα σημεία, θα τα ονομάσουμε σημεία δεύτερης τάξης, διότι τα σημεία αυτά είναι κέντρα δύο ρόμβων.

● Στην ειδική περίπτωση ( $n = 8$ ), το πλήθος των σημείων δεύτερης τάξης είναι  $3 \cdot 4 = 12$ .

● Στην γενική περίπτωση, το πλήθος των σημείων δεύτερης τάξης είναι  $3 \cdot (n - 4)$ .



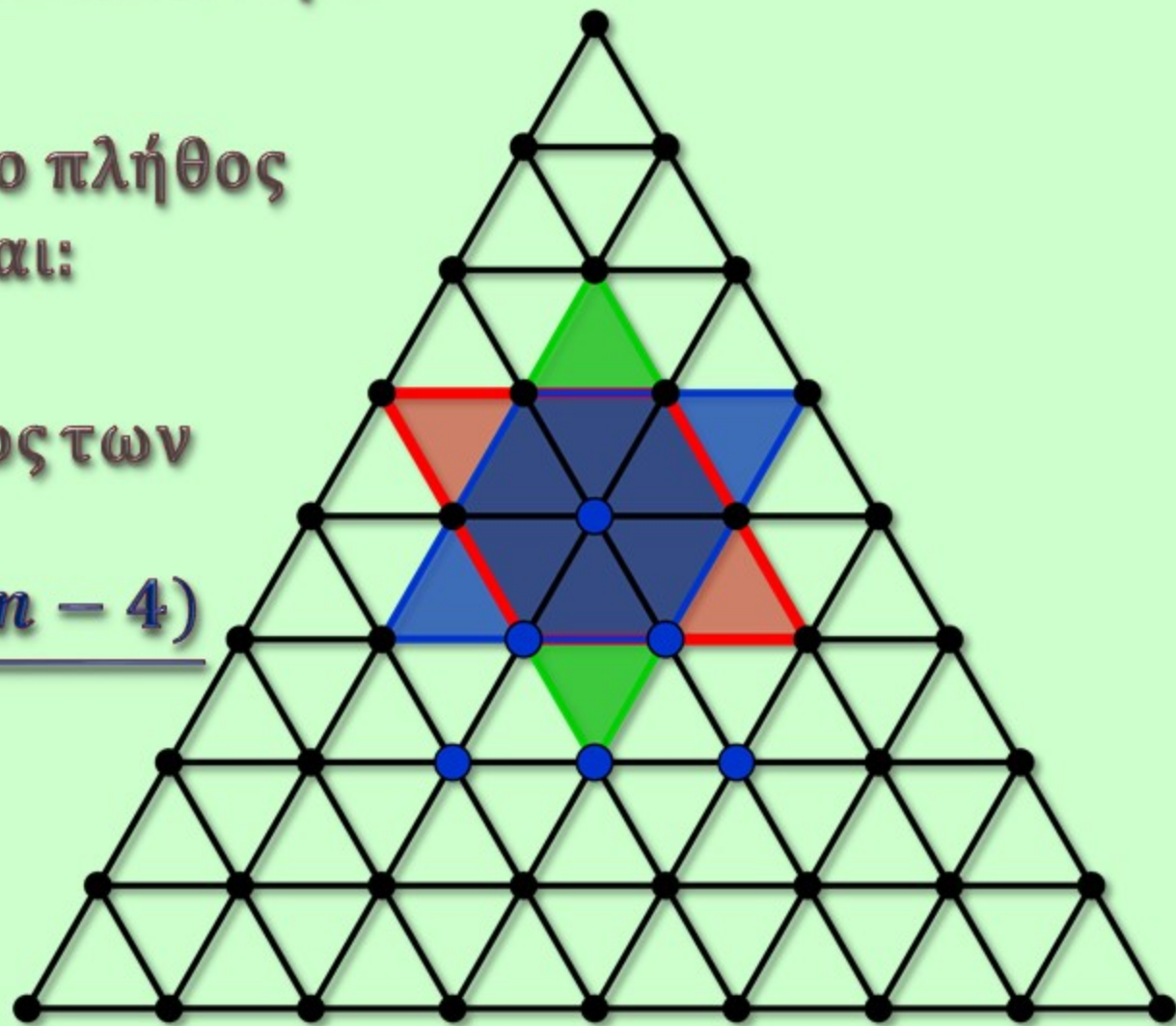


● Τα μπλε σημεία, θα τα ονομάσουμε σημεία τρίτης τάξης, διότι τα σημεία αυτά είναι κέντρα τριών ρόμβων.

● Στην ειδική περίπτωση ( $n = 8$ ), το πλήθος των σημείων τρίτης τάξης είναι:  
 $1 + 2 + 3 = 6.$

● Στην γενική περίπτωση, το πλήθος των σημείων τρίτης τάξης είναι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 5) = \frac{(n - 5)(n - 4)}{2}$$



● Άρα το πλήθος των ρόμβων θα είναι:

$$3 + 2 \cdot 3(n - 4) + 3 \cdot \frac{(n - 5)(n - 4)}{2} =$$
$$= \frac{3(n - 2)(n - 3)}{2}$$

