Συνδυαστική VII

Συνδυαστική

♦ Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την καταμέτρηση (απαρίθμηση) των στοιχείων διαφόρων συνόλων.

♦ Τα τελευταία χρόνια, η συνδυαστική, αποτελεί τμήμα ενός ευρύτερου κλάδου των μαθηματικών που ονομάζονται "Διακριτά Μαθηματικά".

♦ Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε βασικές γνώσεις από την Άλγεβρα και την Θεωρία Συνόλων.

Αρχή του Αθροίσματος

♦ Αν ένα αντικείμενο α_i μπορεί να εκλεγεί με k_i τρόπους $(i = 1, 2, 3, \cdots, \nu)$ και η εκλογή του α_i αποκλείει την ταυτόχρονη εκλογή του α_j

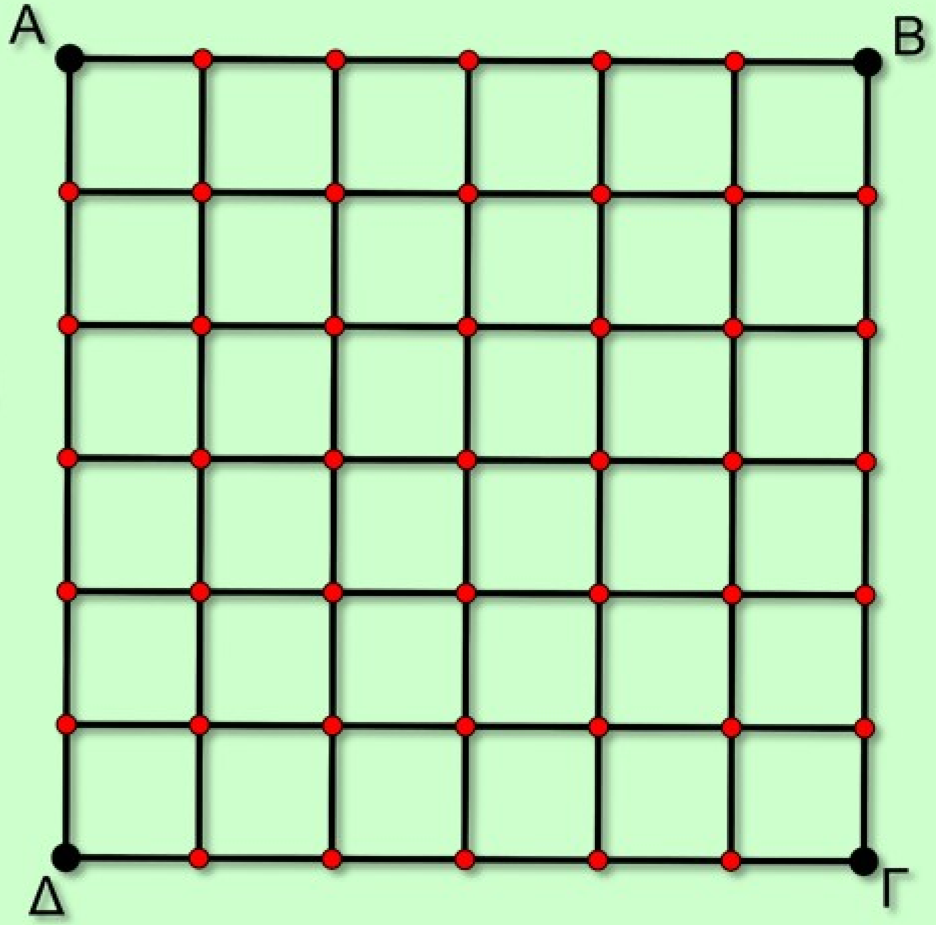
$$(i, j = 1, 2, 3, \cdots, \nu \quad i \neq j)$$

τότε οποιοδήποτε από τα α_1 ή α_2 ή α_3 ή ... ή α_ν μπορεί να εκλεγεί με $k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ τρόπους.

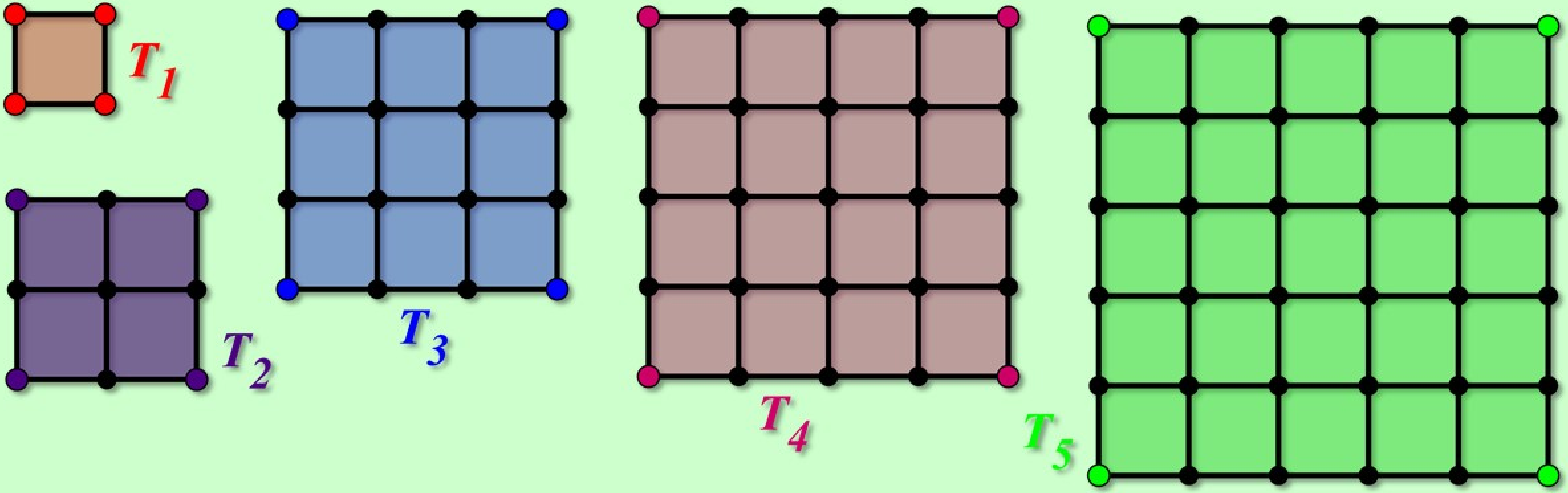
♦ Η **Αρχή του Αθροίσματος** χρησιμοποιείται για την καταμέτρηση αποτελεσμάτων σε πειράματα που η εκλογή ενός αντικειμένου **αποκλείει** την ταυτόχρονη εκλογή ενός άλλου αντικειμένου.

Αρχή του Αθροίσματος
(Παράδειγμα 1)

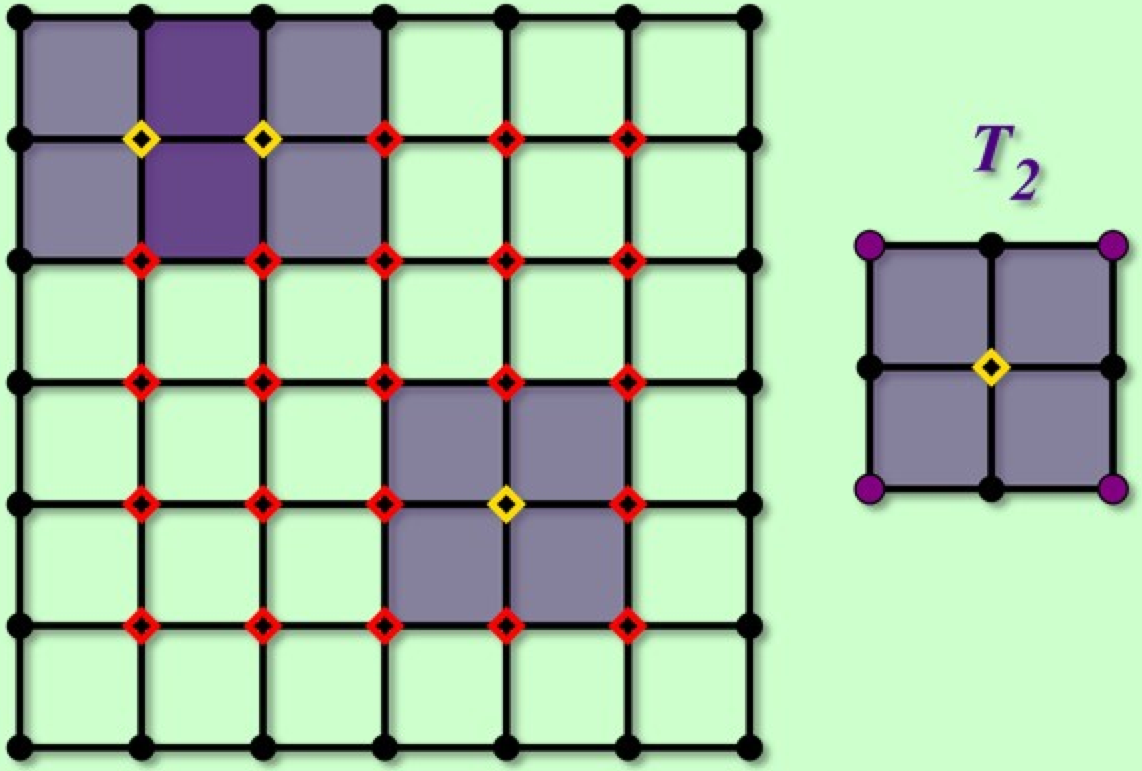
- Τετράγωνο ΑΒΓΔ το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 36 (ίσα μεταξύ τους τετράγωνα). Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα τετράγωνο που οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος και οι πλευρές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.



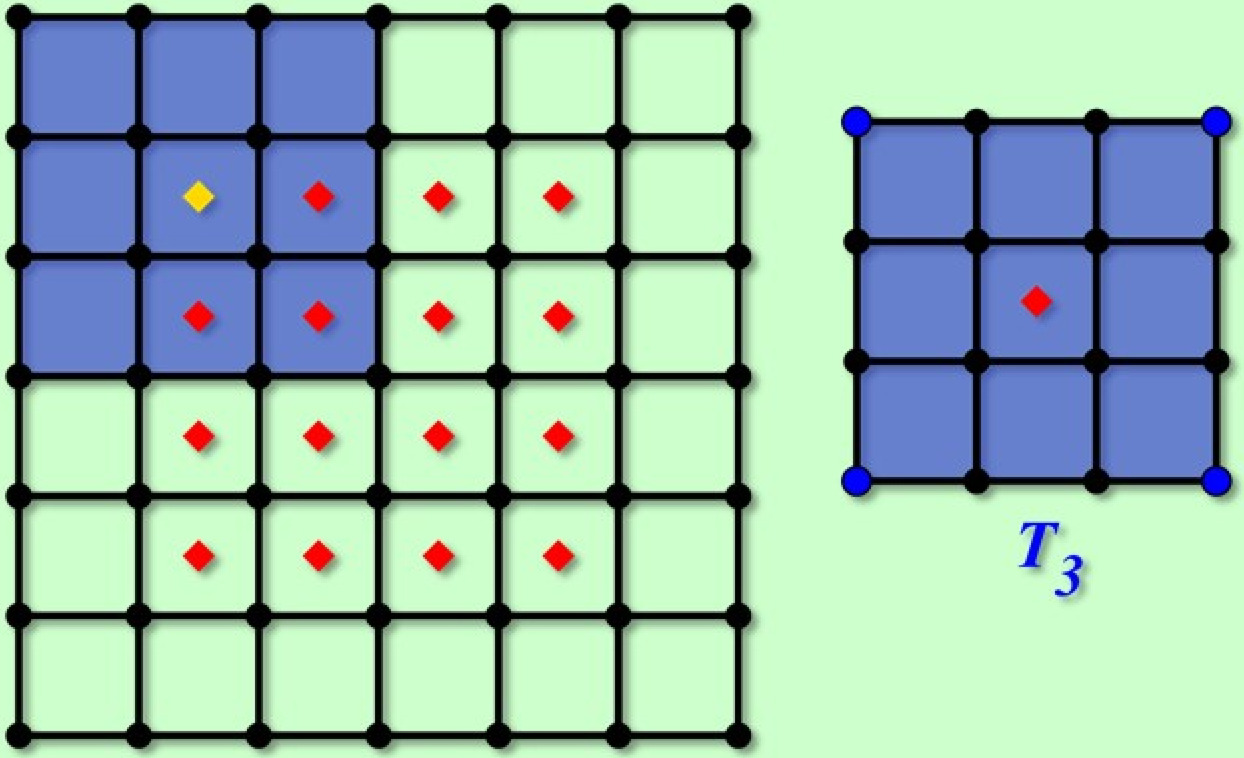
● Με τον χωρισμό προκύπτουν τετράγωνα τύπου T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 και T_6.



● Για την "ασφαλή" μέτρηση του πλήθους των τετραγώνων τύπου T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 και T_6, μετράμε τα κέντρα τους.



● Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι 5^2.



● Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι 4^2.

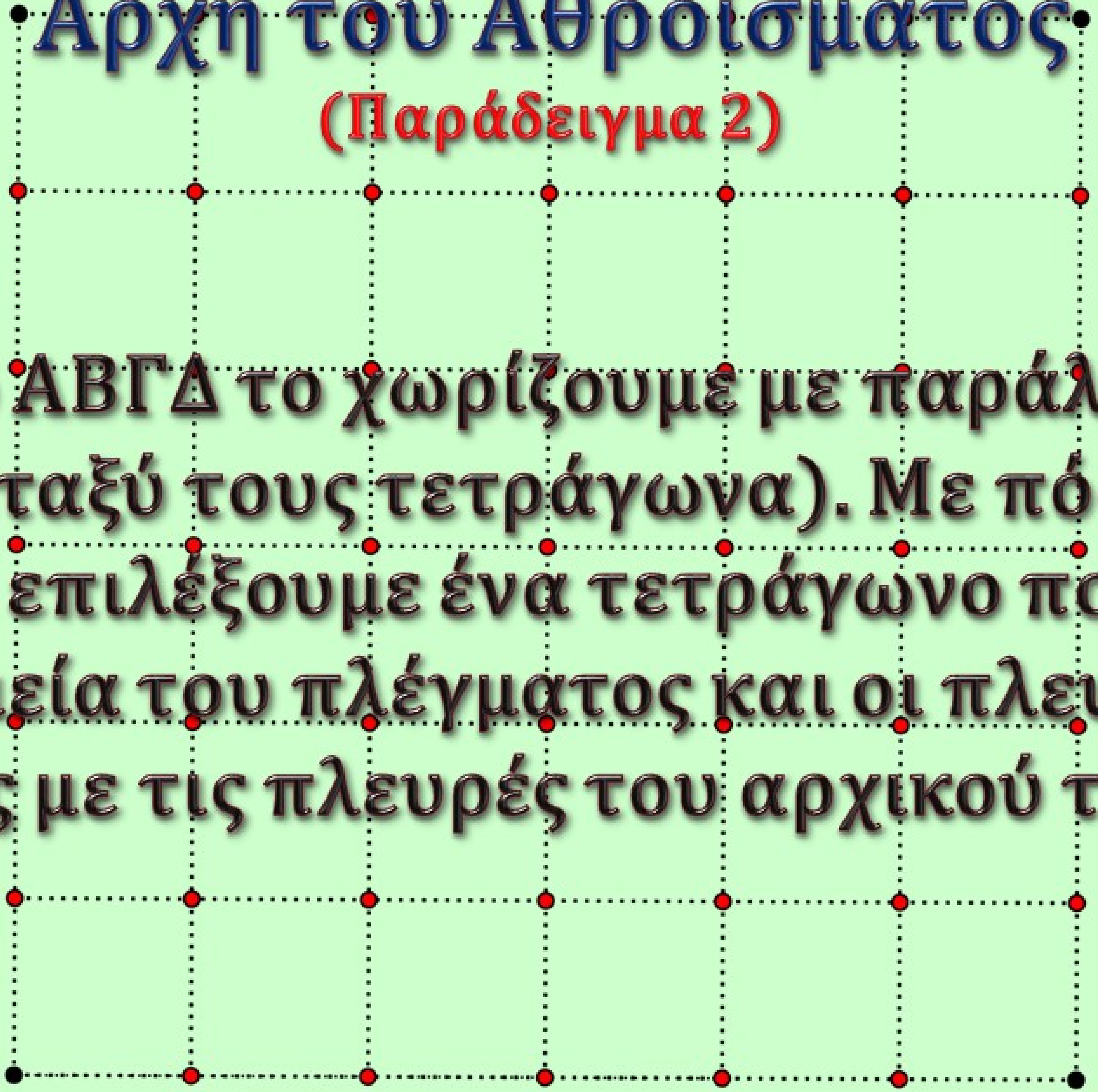
- Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι 6^2.
- Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι 5^2.
- Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι 4^2.
- Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_4 είναι 3^2.
- Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_5 είναι 2^2.
- Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_6 είναι 1^2.

- Η επιλογή τετραγώνου τύπου T_i αποκλείει την ταυτόχρονη επιλογή τετραγώνου τύπου T_j $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad i \neq j)$.

Άρα (σύμφωνα με την Αρχή του Αθροίσματος) το πλήθος των επιλογών είναι: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$

Αρχή του Αθροίσματος

(Παράδειγμα 2)



● Τετράγωνο ΑΒΓΔ το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε n^2 (ίσα μεταξύ τους τετράγωνα). Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα τετράγωνο που οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος και οι πλευρές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.

● Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι n^2.

● Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $(n-1)^2$.

....

● Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_n είναι 1^2.

● Η επιλογή τετραγώνου τύπου T_i αποκλείει την ταυτόχρονη επιλογή τετραγώνου τύπου T_j $(i, j = 1, 2, 3, \cdots, n \quad i \neq j)$.

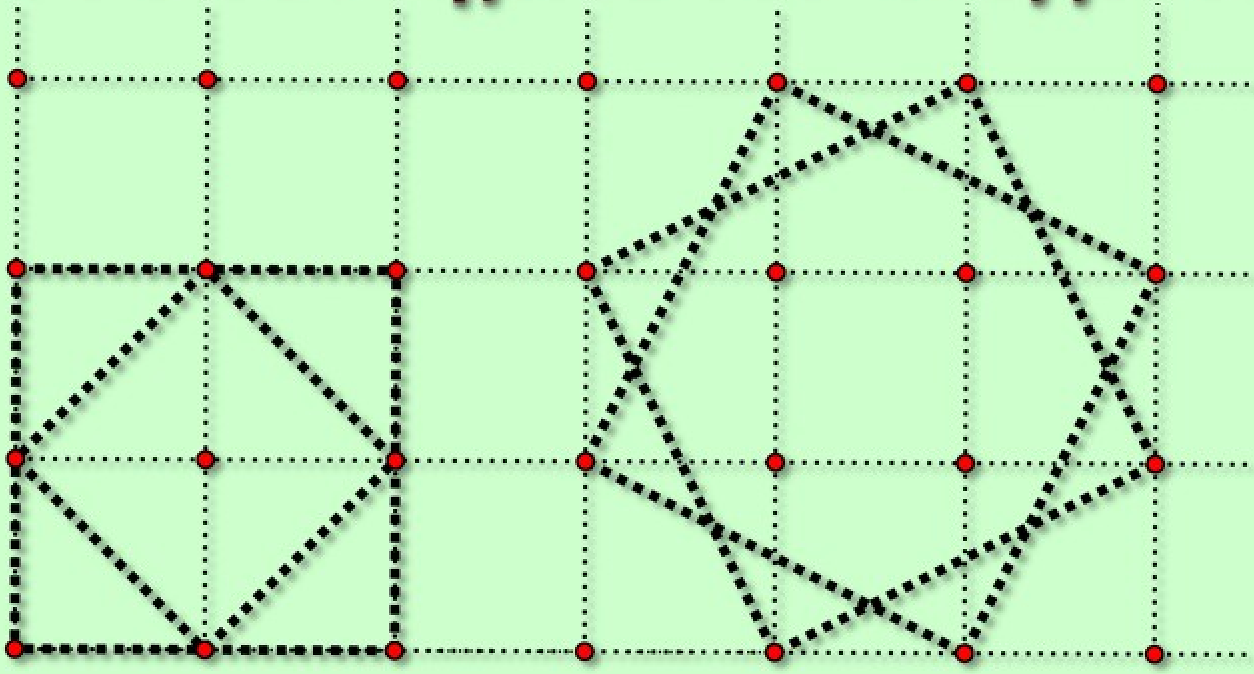
Άρα (σύμφωνα με την **Αρχή του Αθροίσματος**) το πλήθος των επιλογών είναι:

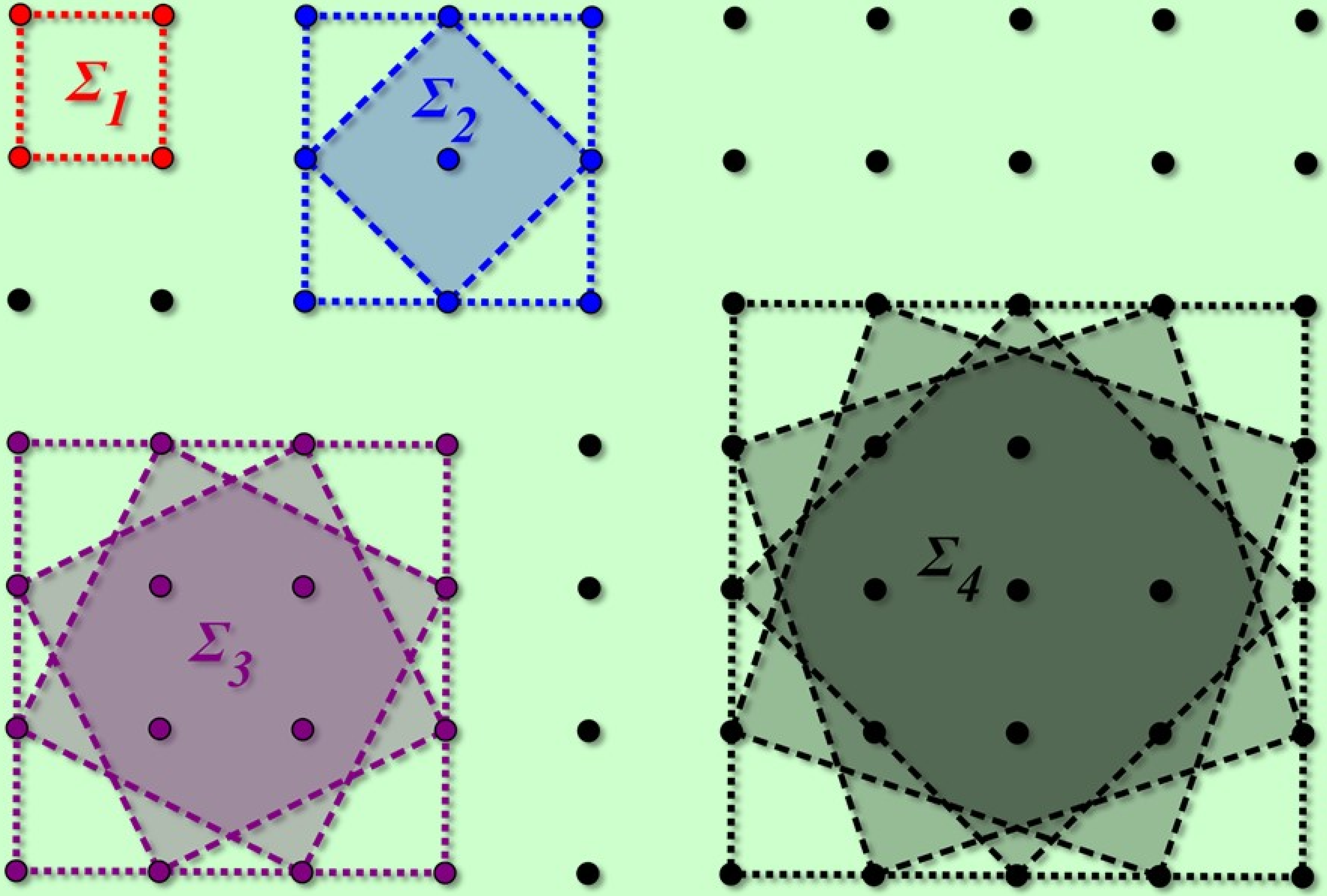
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Αρχή του Αθροίσματος

(Παράδειγμα 3)

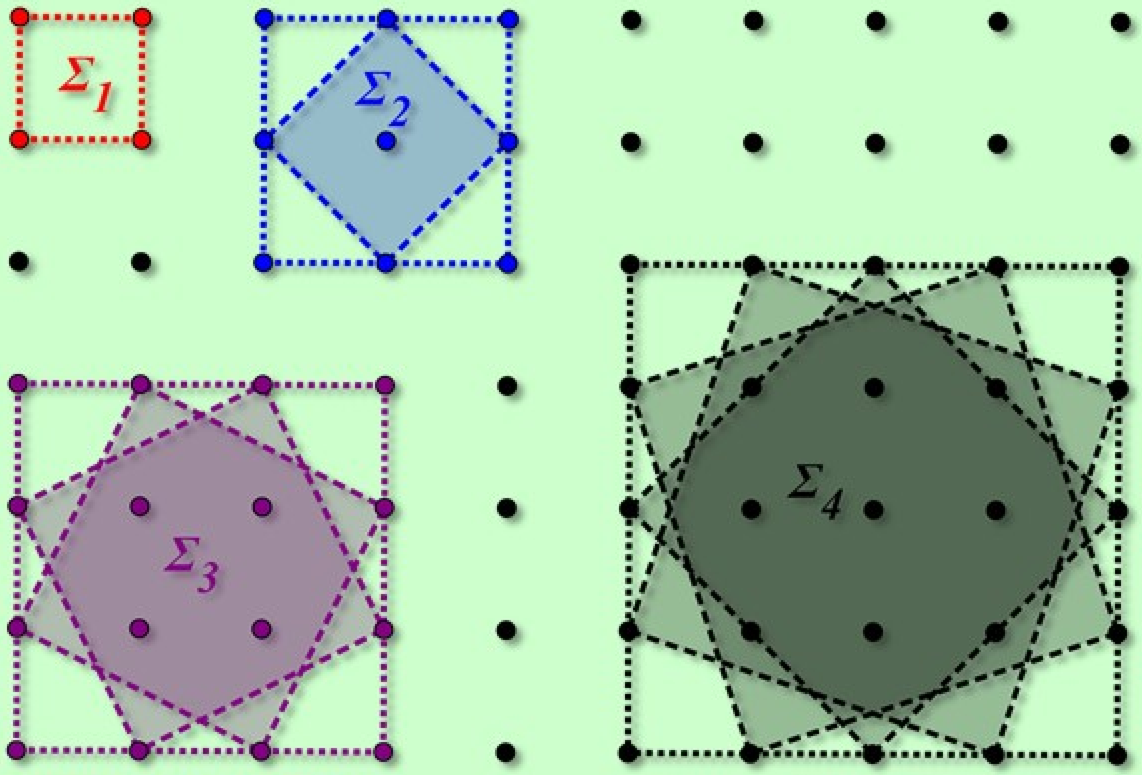
● Τετράγωνο ΑΒΓΔ το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε n^2 (ίσα μεταξύ τους τετράγωνα). Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα τετράγωνο που οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος.





Σ_1
Σ_2
Σ_3
Σ_4

● Σε κάθε σχηματισμό Σ_1 αντιστοιχεί 1 τετράγωνο.
Στο πλέγμα υπάρχουν n^2 σχηματισμοί Σ_1.



● Σε κάθε σχηματισμό Σ_2 αντιστοιχούν 2 τετράγωνα.
Στο πλέγμα υπάρχουν $(n-1)^2$ σχηματισμοί Σ_2.

● Σε κάθε σχηματισμό Σ_3 αντιστοιχούν 3 τετράγωνα.
Στο πλέγμα υπάρχουν $(n-2)^2$ σχηματισμοί Σ_3.

- Άρα το πλήθος των τετραγώνων στο πλέγμα είναι:

$$S = 1 \cdot n^2 + 2 \cdot (n-1)^2 + \cdots + (n-1)2^2 + n \cdot 1^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)^2 \, i = \sum_{i=1}^{n} \left((n+1)^2 - 2i(n+1) + i^2 \right) i =$$

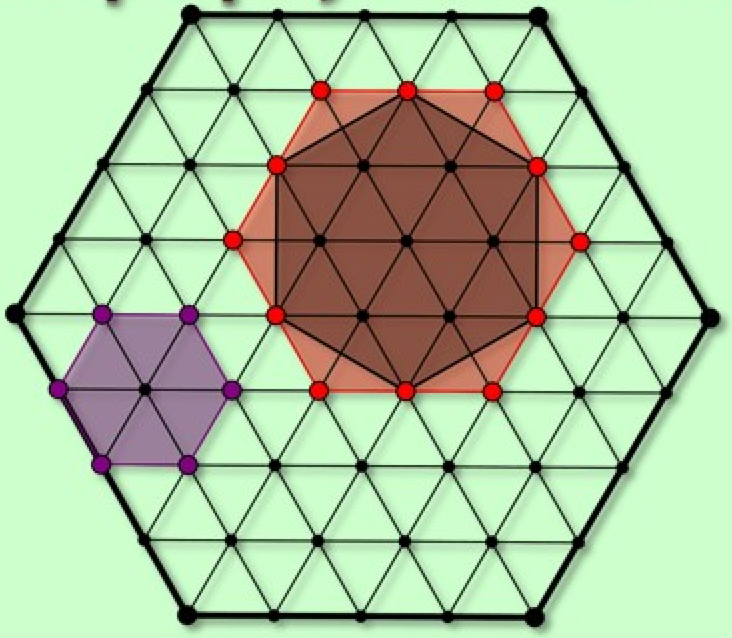
$$= (n+1)^2 \sum_{i=1}^{n} i - 2(n+1) \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i^3 =$$

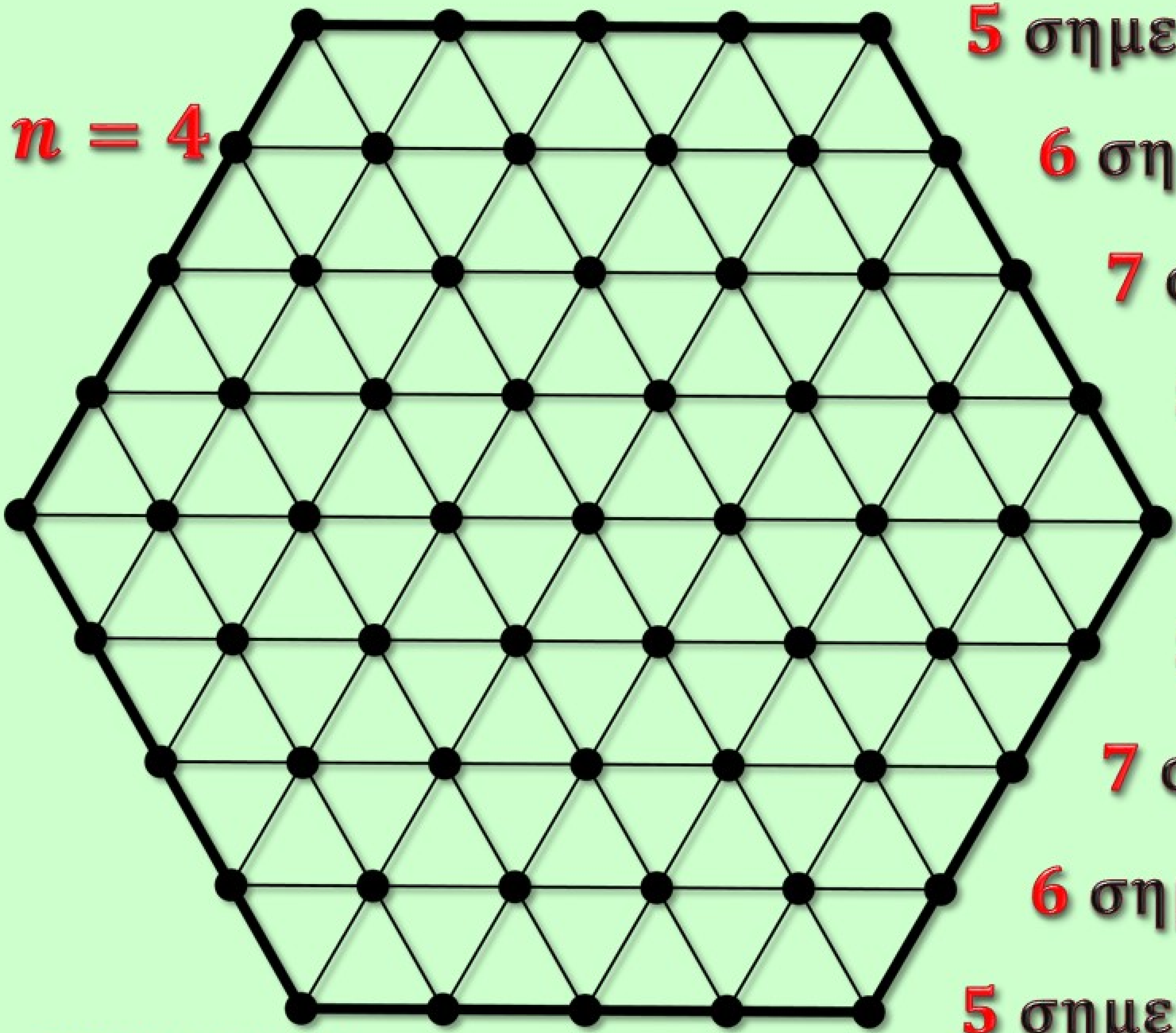
$$= (n+1)^2 \frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}$$

Αρχή του Αθροίσματος
(BMO 2014)

● Δίνεται κανονικό εξάγωνο με πλευρές μήκους n (n θετικός ακέραιος). Με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του, το χωρίζουμε σε ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές μήκους 1. Να βρείτε τον πλήθος των κανονικών εξαγώνων των οποίων όλες οι κορυφές είναι και κορυφές των ισοπλεύρων τριγώνων.





5 σημεία $\longrightarrow$ $n + 1$ σημεία

6 σημεία $\longrightarrow$ $n + 2$ σημεία

7 σημεία $\longrightarrow$ $n + 3$ σημεία

8 σημεία $\longrightarrow$ $2n$ σημεία

9 σημεία $\longrightarrow$ $2n + 1$ σημεία

8 σημεία

7 σημεία

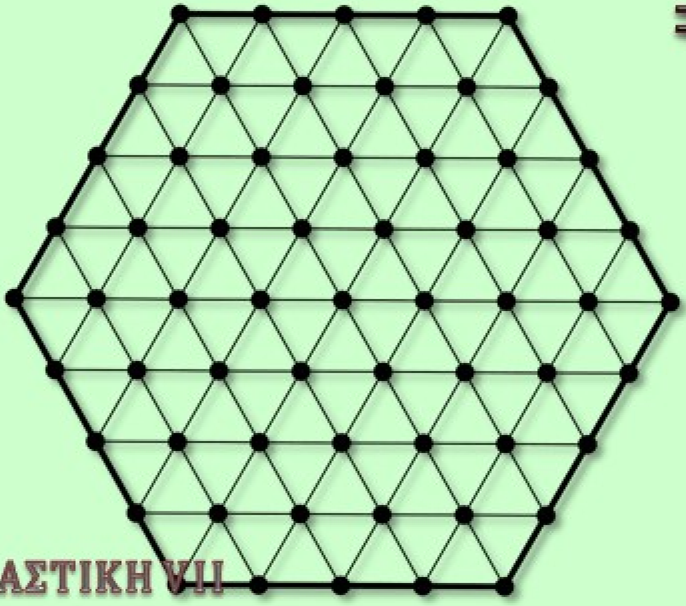
6 σημεία

5 σημεία

● … σύμφωνα με αυτά που αναπτύξαμε προηγουμένως:

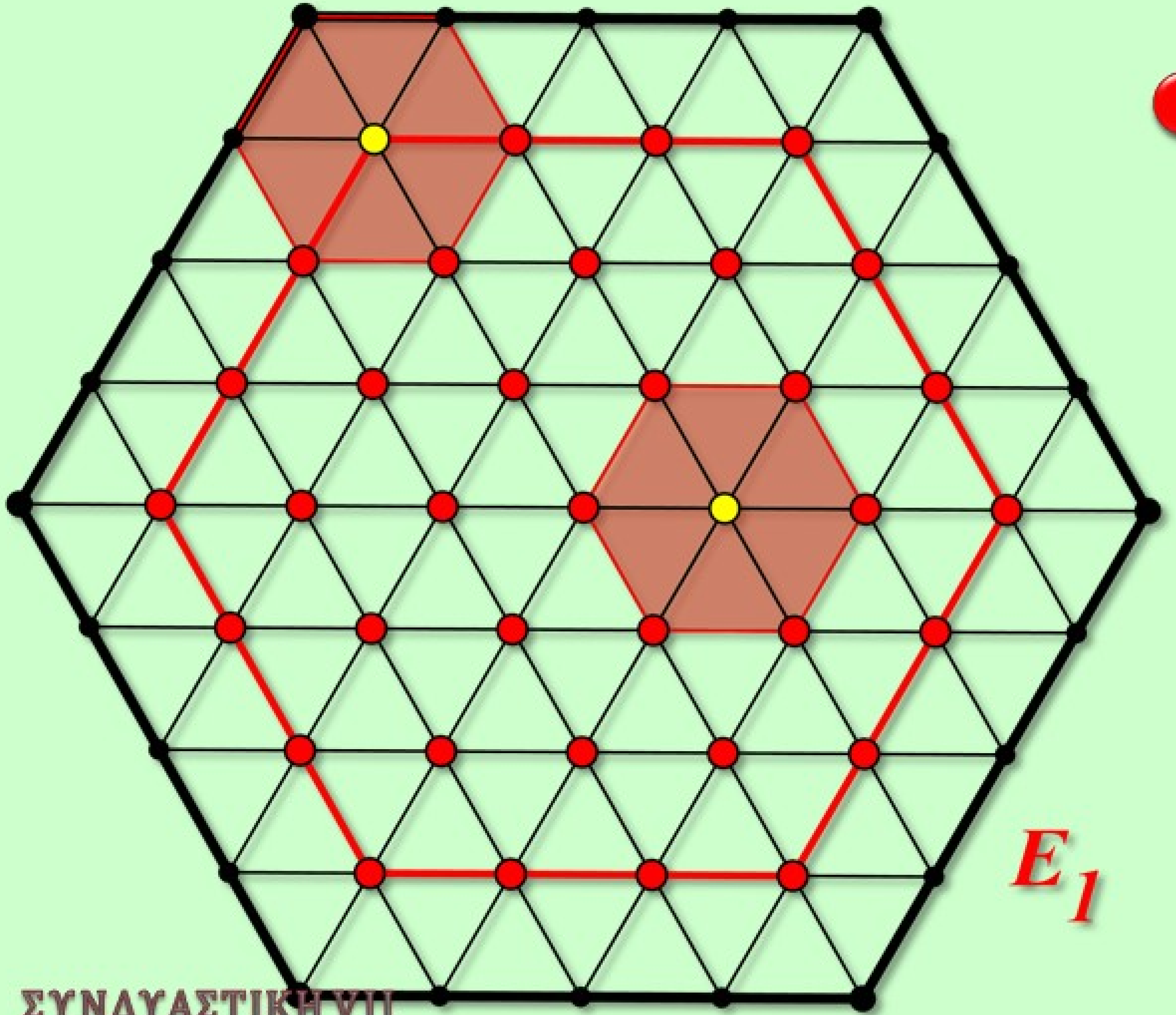
“Το πλήθος των σημείων που δημιουργούνται στις πλευρές και το εσωτερικό του κανονικού εξαγώνου με πλευρές μήκους n (συμβολικά E_n) από τις τομές των παραλλήλων ευθειών είναι:

$$K_n = 2\big((n+1)+(n+2)+\cdots+2n\big)+2n+1 =$$
$$= 3n(n+1)+1\text{”}$$



$$K_4 = 3\cdot 4(4+1)+1 = 61$$

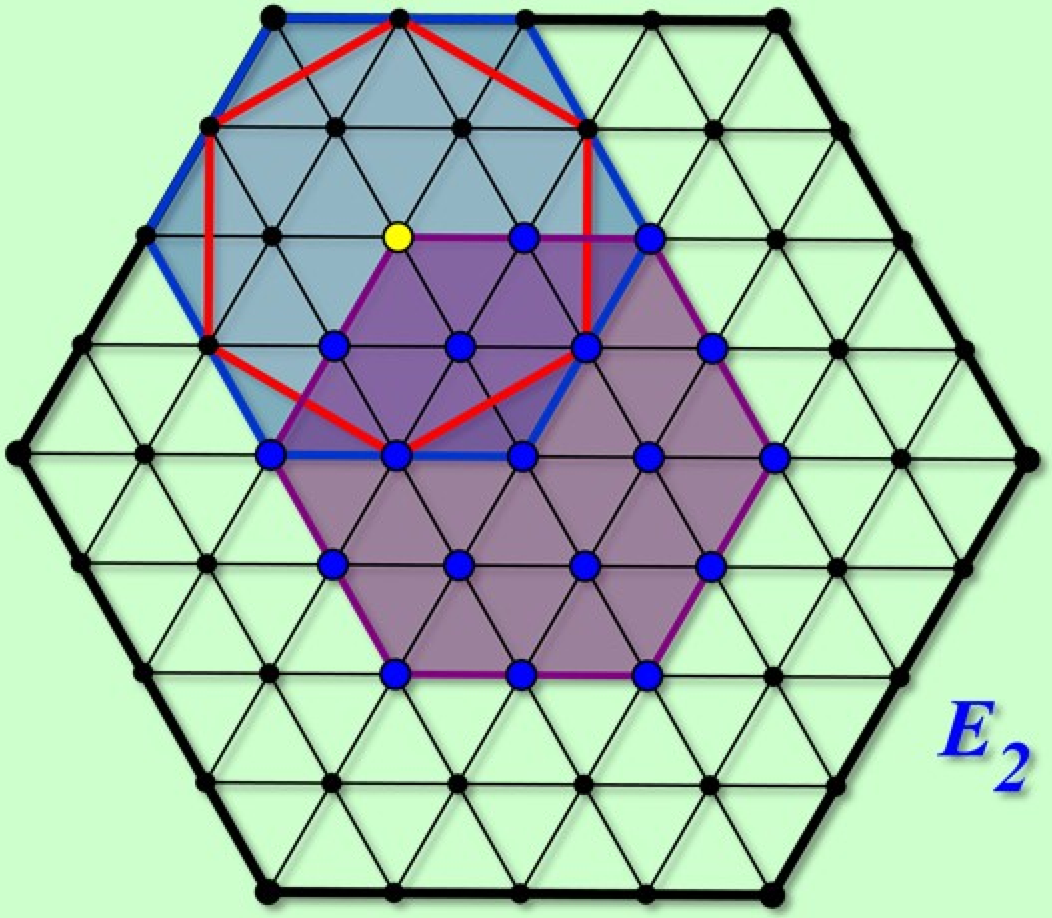
● Στο κανονικό εξάγωνο E_n δημιουργούνται κανονικά εξάγωνα E_1. Τα κέντρα των E_1 είναι τα σημεία του κανονικού E_{n-1}, που είναι ομόκεντρο του E_n.



● Άρα το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_1 είναι K_{n-1}.

● $K_{n-1} = 3n(n-1) + 1$.

● Στο κανονικό εξάγωνο E_n δημιουργούνται κανονικά εξάγωνα E_2. Τα κέντρα των E_2 είναι τα σημεία του κανονικού E_{n-2}, που είναι ομόκεντρο του E_n.

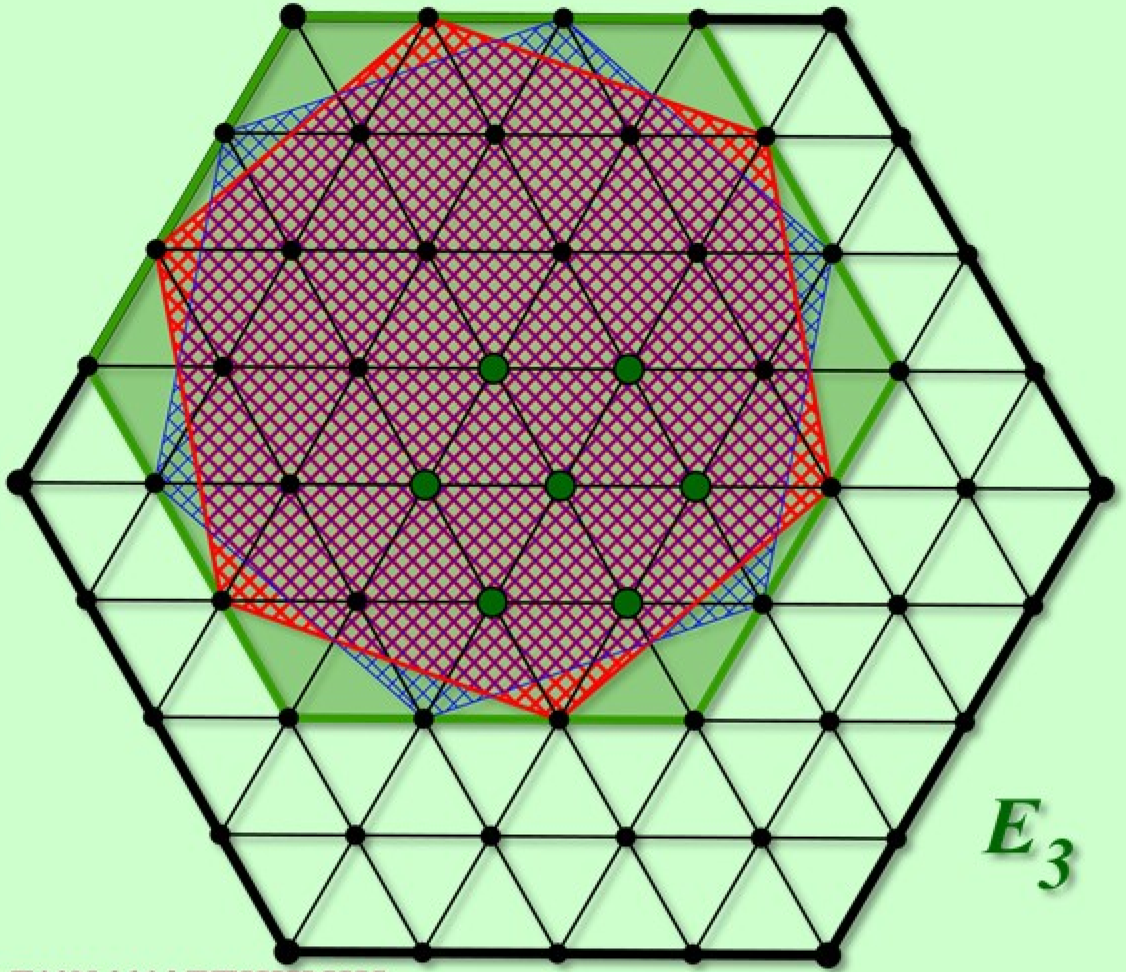


● Άρα το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_2 είναι K_{n-2}.

● $K_{n-2} = 3(n-2)(n-1)+1$.

● Σε κάθε κανονικό εξάγωνο E_2 αντιστοιχεί (εγγράφεται) 1 κανονικό εξάγωνο.

● Στο κανονικό εξάγωνο E_n δημιουργούνται κανονικά εξάγωνα E_3. Τα κέντρα των E_3 είναι τα σημεία του κανονικού E_{n-3}, που είναι ομόκεντρο του E_n.



● Άρα το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_3 είναι K_{n-3}.

● $K_{n-3} = 3(n-2)(n-3)+1$.

● Σε κάθε κανονικό εξάγωνο E_2 αντιστοιχούν (εγγράφονται) 2 κανονικά εξάγωνα.

- Το πλήθος των σημείων που δημιουργούνται στις πλευρές και το εσωτερικό του κανονικού εξαγώνου E_n είναι: $K_n = 3n(n+1)+1$.

- Το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_1 είναι $K_{n-1} = 3(n-1)n+1$.

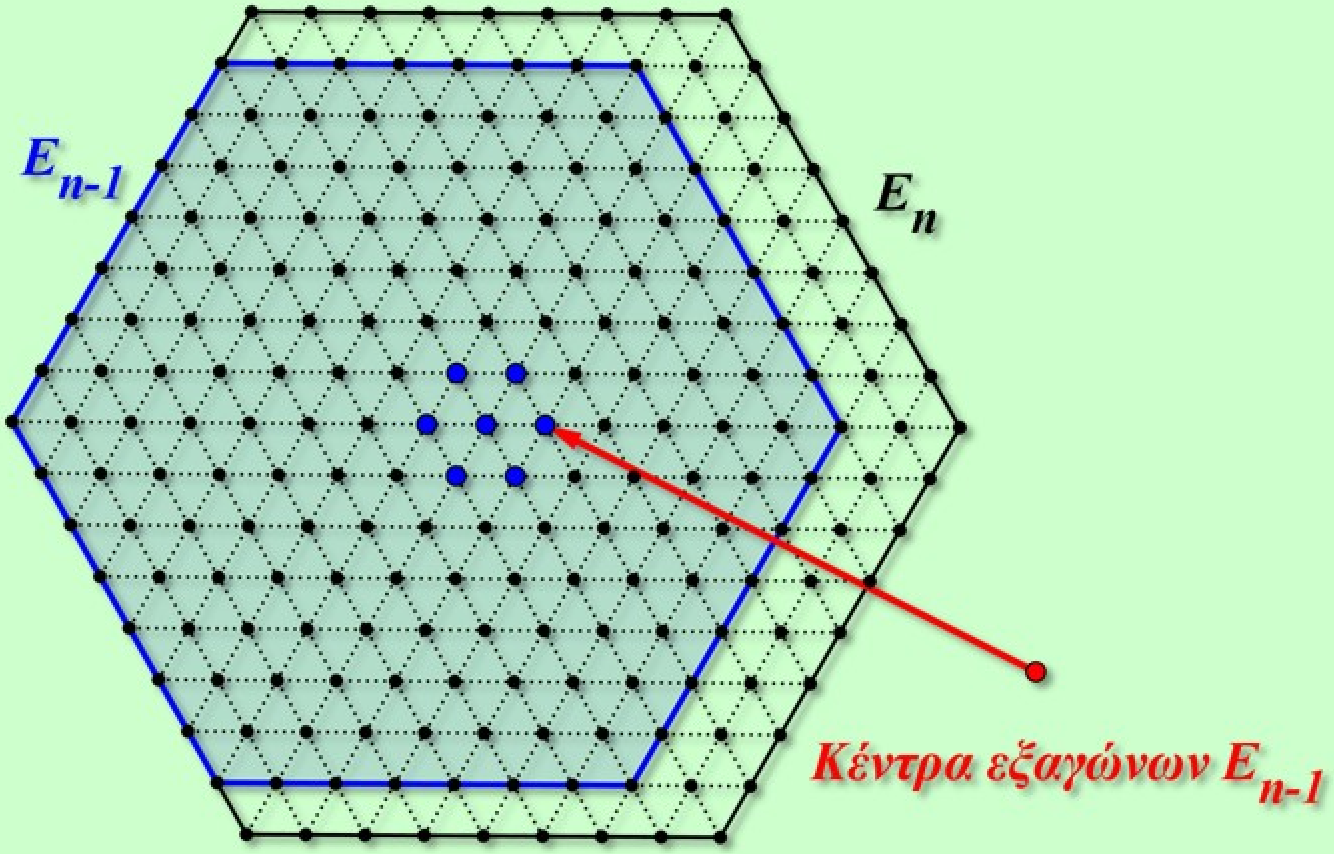
- Το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_2 είναι $K_{n-2} = 3(n-2)(n-1)+1$.

- Το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_3 είναι $K_{n-3} = 3(n-3)(n-2)+1$.

. . . .

- Το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_n είναι $K_0 = 3(n-n)(n-n+1)+1 = 1$.

● Το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_{n-1} είναι
$K_{n-1} = 3(n-n+1)(n-n+2)+1 = 7.$

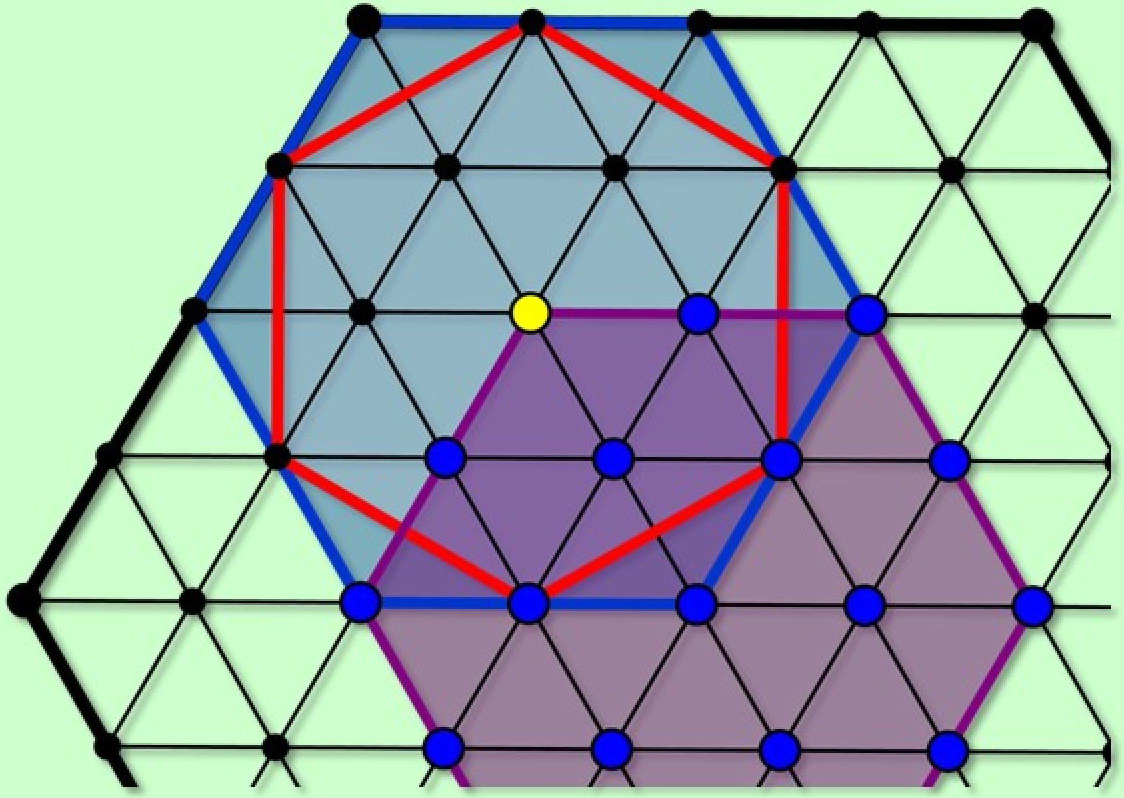


● Το πλήθος των κανονικών εξαγώνων E_n είναι
$K_0 = 3(n-n)(n-n+1)+1 = 1.$

● Στο κανονικό εξάγωνο E_1 εγγράφονται **0** κανονικά εξάγωνα.

● Στο κανονικό εξάγωνο E_2 εγγράφονται **1** κανονικά εξάγωνα.

● Στο κανονικό εξάγωνο E_3 εγγράφονται **2** κανονικά εξάγωνα.



● Στο κανονικό εξάγωνο E_n εγγράφονται $\mathbf{n-1}$ κανονικά εξάγωνα.

- Τελικά το πλήθος των κανονικών εξαγώνων είναι:

$$N = \sum_{i=1}^{n} \left(3i(n-i)(n-i+1) + i\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$