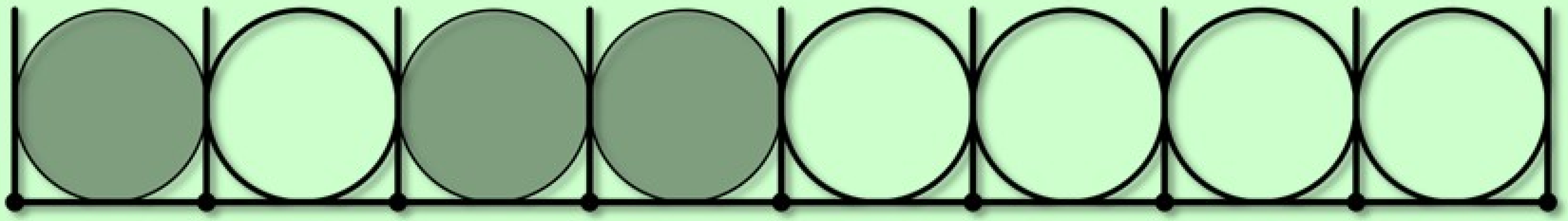
Συνδυαστική VI

♦ Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά τρεις ίδιες μαύρες και πέντε ίδιες άσπρες σφαίρες;

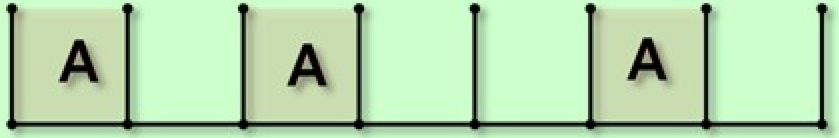


$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

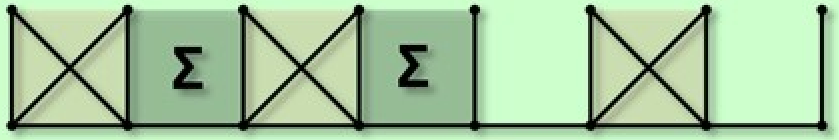
● Υποθέτουμε ότι έχουμε μία θήκη με οκτώ θέσεις. Το πλήθος των δυνατών τρόπων τοποθέτησης των τριών μαύρων σφαιρών στις οκτώ θέσεις της θήκης είναι όσοι οι συνδυασμοί των οκτώ αντικειμένων ανά τρία (δεν παίζει ρόλο η διάταξη των σφαιρών, διότι είναι ίδιες).

● Οι πέντε λευκές σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με ένα μόνο τρόπο στις υπόλοιπες πέντε θέσεις της θήκης.

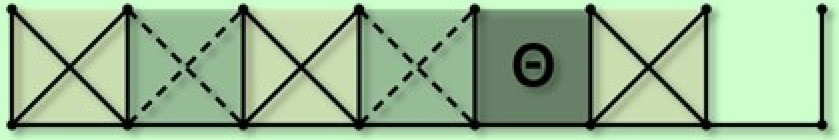
♦ Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης “ΘΑΛΑΣΣΑ”;



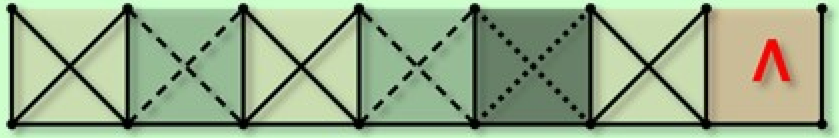
$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!}$$



$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$$



$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!}$$

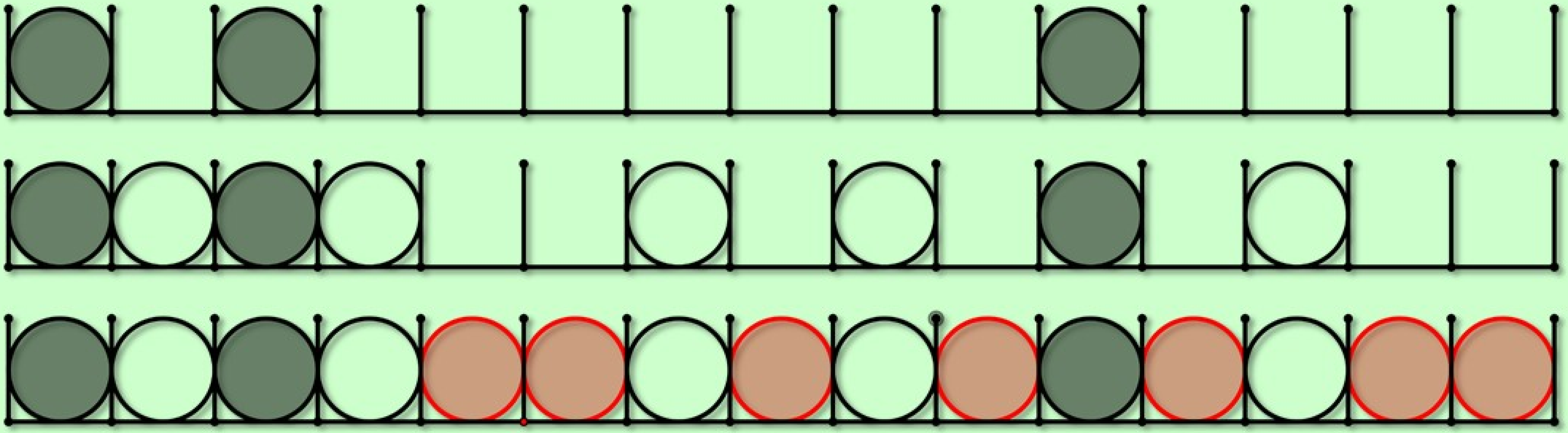


$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{0!1!}$$

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}$$

$$\frac{(3+2+1+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7!}{3! \cdot 2!}$$

♦ Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά τρεις ίδιες μαύρες, πέντε ίδιες άσπρες και επτά ίδιες κόκκινες σφαίρες;

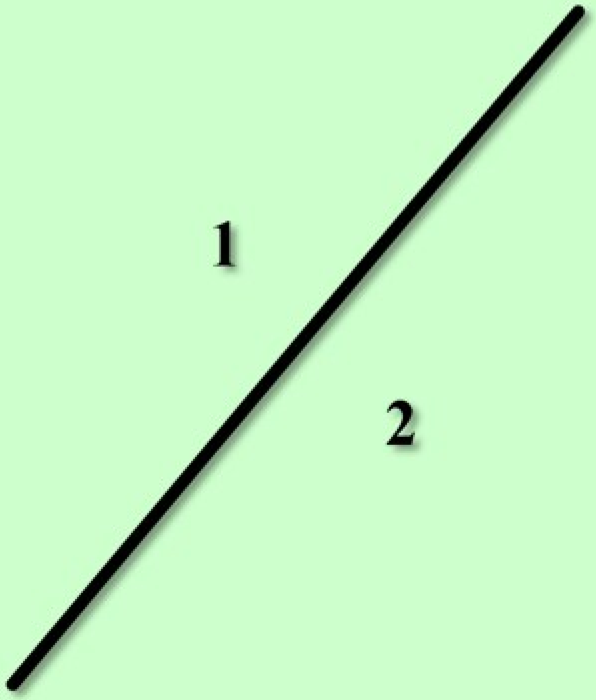


$$\binom{15}{3}$$

$$\binom{12}{5}$$

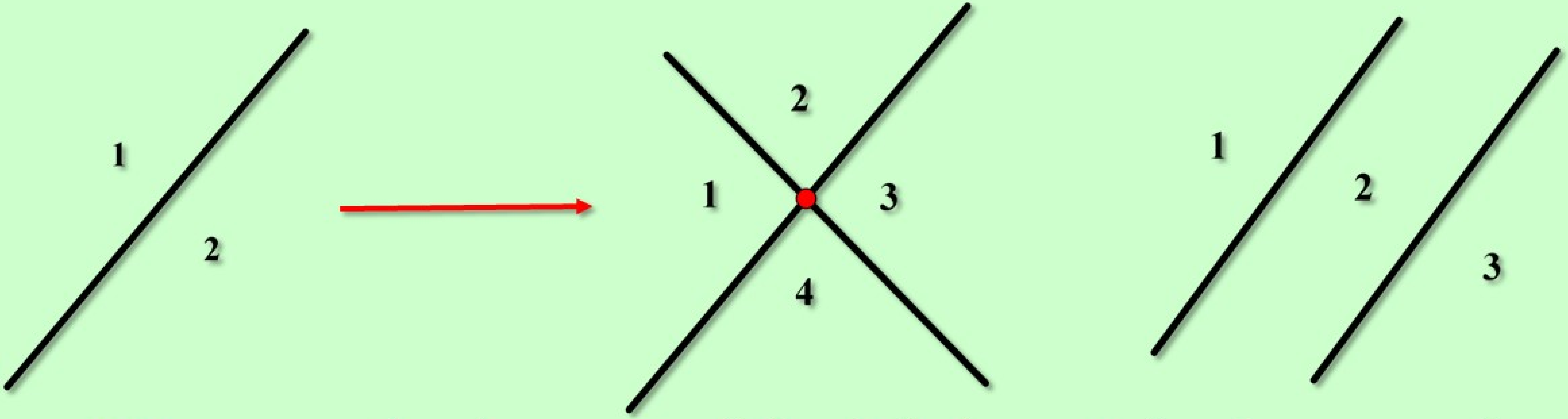
$$\frac{(7+5+3)!}{7!\cdot 5!\cdot 3!}=\frac{15!}{7!\cdot 5!\cdot 3!}$$

♦ Να βρεθεί το μέγιστο πλήθος $P(n)$ των χωρίων στα οποία χωρίζουν το επίπεδο n ευθείες (n θετικός ακέραιος).



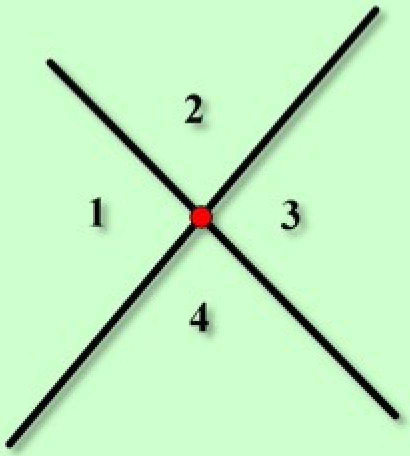
● Μία ευθεία χωρίζει (προφανώς) το επίπεδο σε **2** χωρία. Δηλαδή $P(1) = 2$.

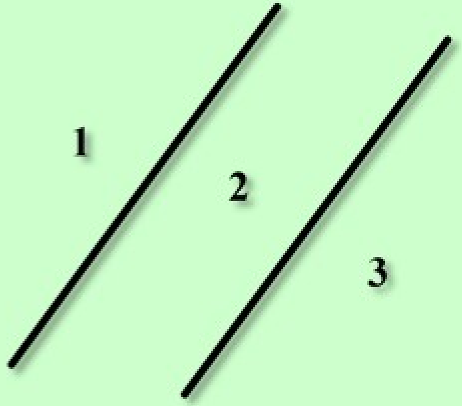
● Προσθέτουμε μία ευθεία, οπότε θα δημιουργηθούν ένα ή δύο χωρία επί πλέον.



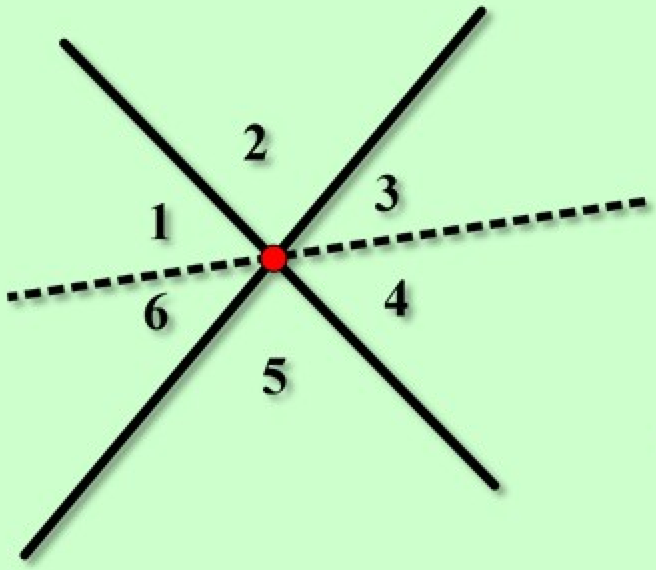
● Παρατηρούμε ότι: με την “είσοδο” μίας ευθείας δημιουργούνται τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι **τα σημεία τομής** που δημιουργούνται (με την είσοδο) $+1$.

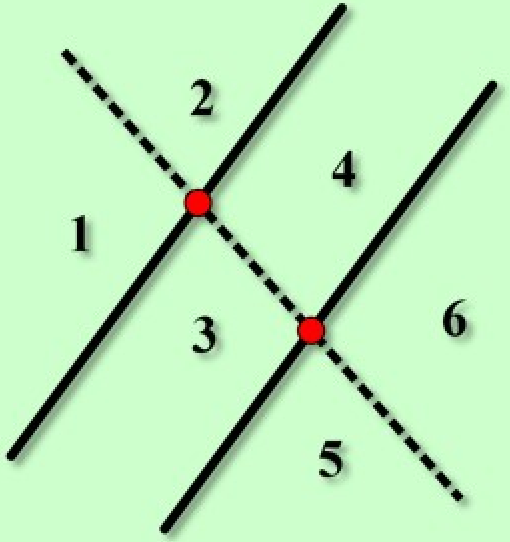
● Άρα $P(2) \leq P(1) + 1 + 1$.

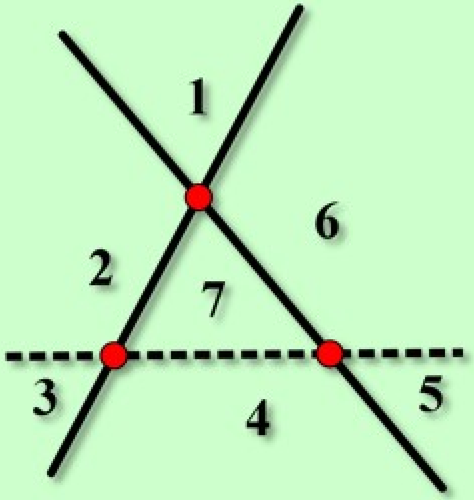




- Με την “είσοδο” μιας τρίτης ευθείας, δημιουργούνται **0**, **1** ή **2** “νέα” σημεία τομής.







- Άρα $P(3) \leq P(2) + 2 + 1$.

● Συνοψίζοντας έχουμε:

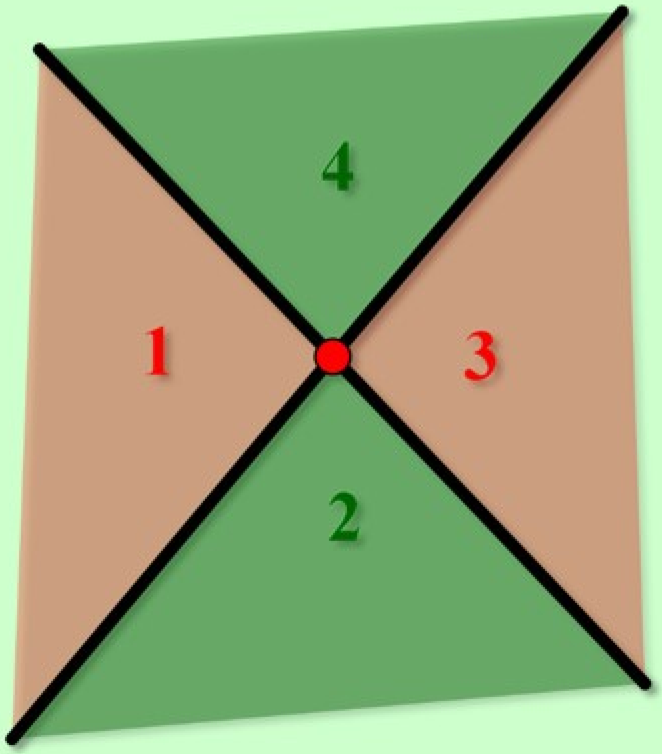
$$\left.\begin{array}{c} P(1)=2 \\ P(2)\le P(1)+2 \\ P(3)\le P(2)+3 \\ \vdots \\ P(n)\le P(n-1)+n \end{array}\right\}\Rightarrow P(n)\le 2+2+3+\cdots+n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(n)\le 1+\frac{n(n+1)}{2}=1+\binom{n+1}{2}.$$

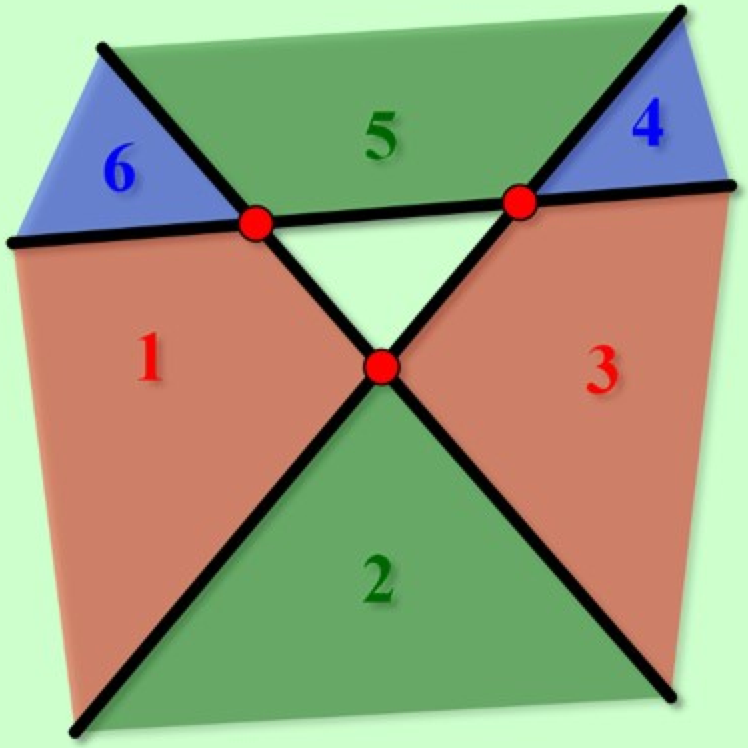
● Το μέγιστο πλήθος χωρίων δημιουργείται όταν οι ευθείες τέμνονται ανά δύο και ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο.

♦ Στο επίπεδο δίνονται n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες που τέμνονται ανά δύο και ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί το πλήθος των φραγμένων $B(n)$ και μη φραγμένων χωρίων $UB(n)$ που δημιουργούνται (n θετικός ακέραιος).

● Οποιαδήποτε δύο γειτονικά και μη φραγμένα χωρία χωρίζονται από ημιευθείες. Δηλαδή έχουν κοινό σύνορο ημιευθεία.

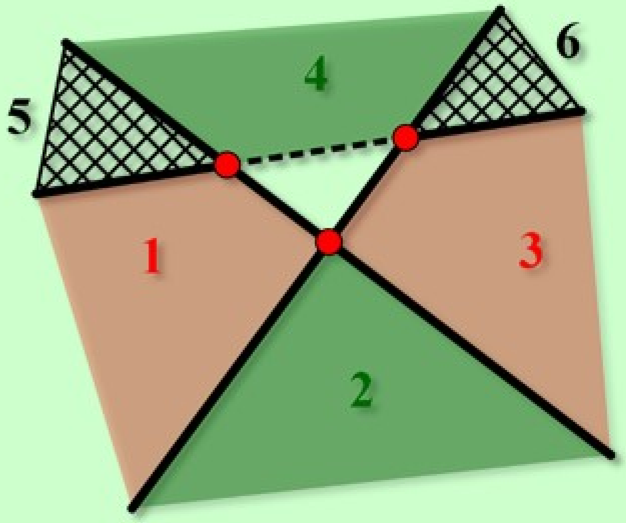


$$UB(2) = 4$$

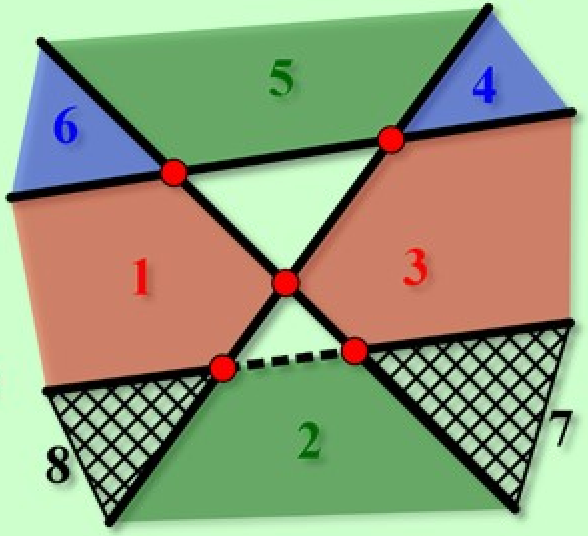


$$UB(3) = 6$$

● Αν τώρα θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ευθεία (τέμνουσα), τότε κάθε μία από τις δύο ημιευθείες (που αποτελούν μέρη της) χωρίζουν δύο ακριβώς μη φραγμένα χωρία.



$$UB(3) = UB(2) + 2 =$$
$$= 4 + 2 = 6$$

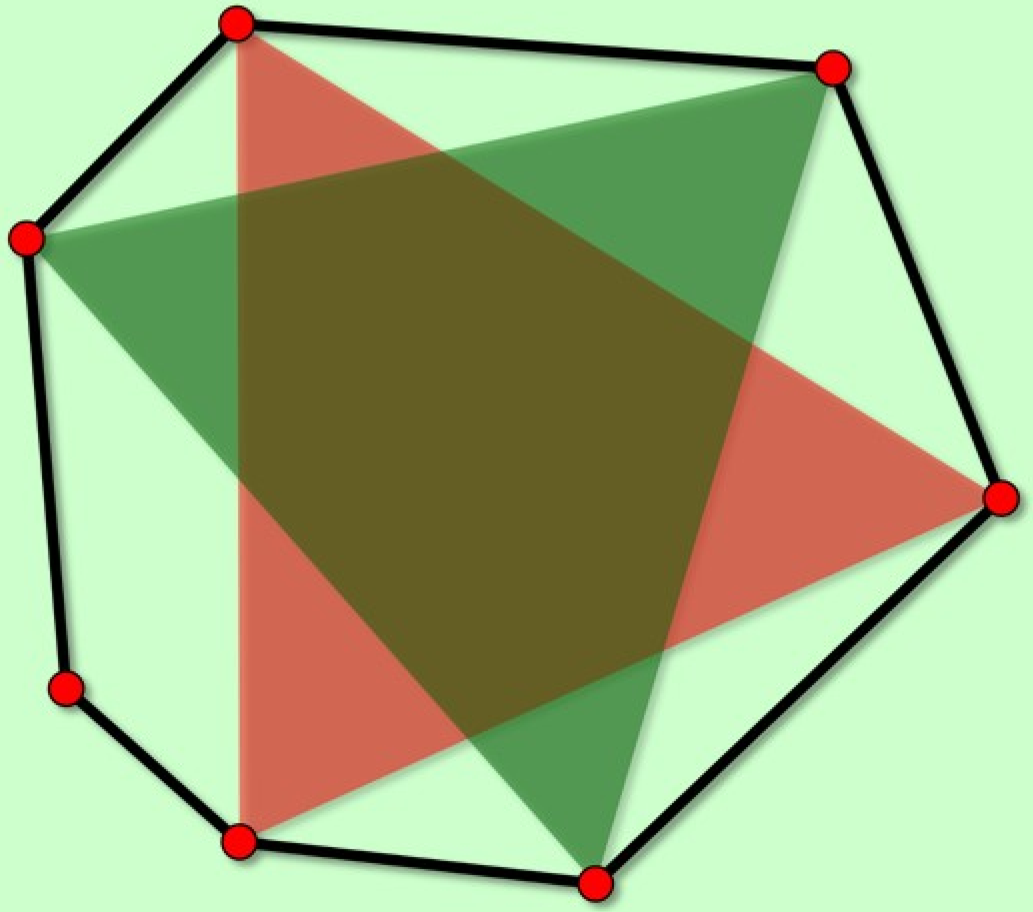


$$UB(4) = UB(3) + 2 =$$
$$= 6 + 2 = 6$$

● Άρα το πλήθος των μη φραγμένων χωρίων είναι: $UB(n) = 2n$ και των φραγμένων: $B(n) = P(n) - UB(n)$

Σε κυρτό n-γωνο οι διαγώνιές του (ανά τρεις) δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί το πλήθος των τριγώνων που οι πλευρές τους βρίσκονται στις πλευρές ή στις διαγώνιες του πολυγώνου.

- Η **πρώτη κατηγορία** τριγώνων αποτελείται από τα τρίγωνα των οποίων και οι τρείς κορυφές είναι κορυφές του πολυγώνου.

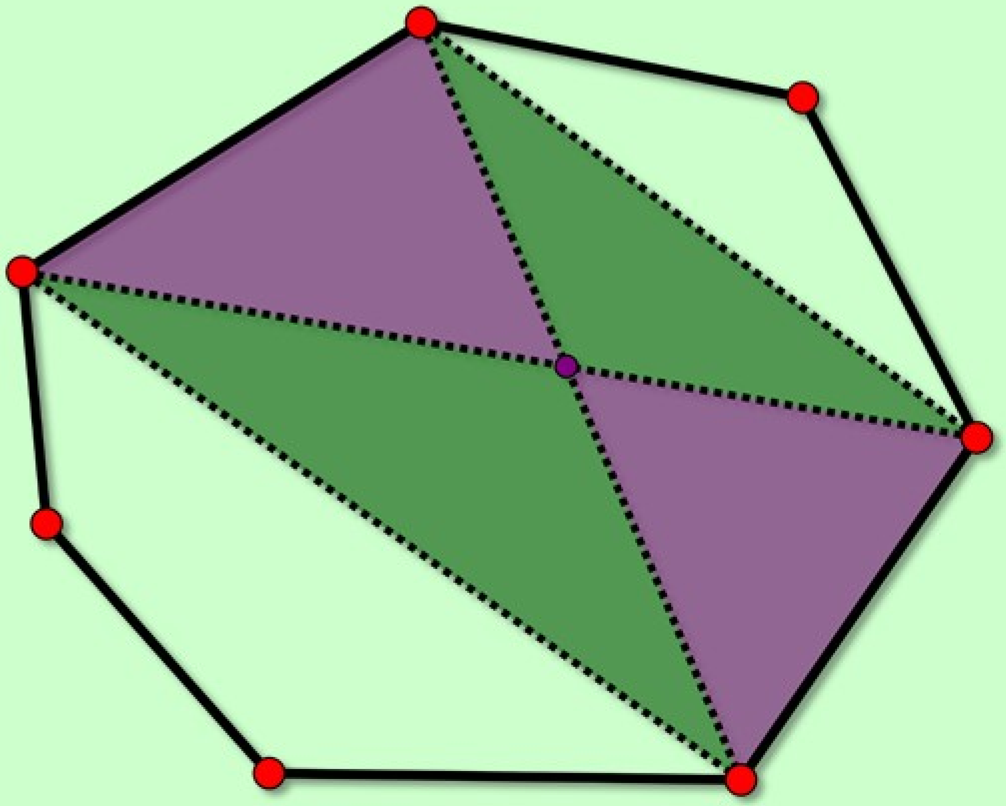


- Τρεις κορυφές του κυρτού πολυγώνου ορίζουν **ένα** τρίγωνο της **1ης** κατηγορίας.

- Άρα το πλήθος των τριγώνων αυτής της κατηγορίας είναι, όσοι οι συνδυασμοί των n κορυφών του πολυγώνου ανά 3.

$$s_1 = \binom{n}{3}$$

Η **δεύτερη κατηγορία** τριγώνων αποτελείται από τα τρίγωνα των οποίων δύο κορυφές είναι κορυφές του πολυγώνου.

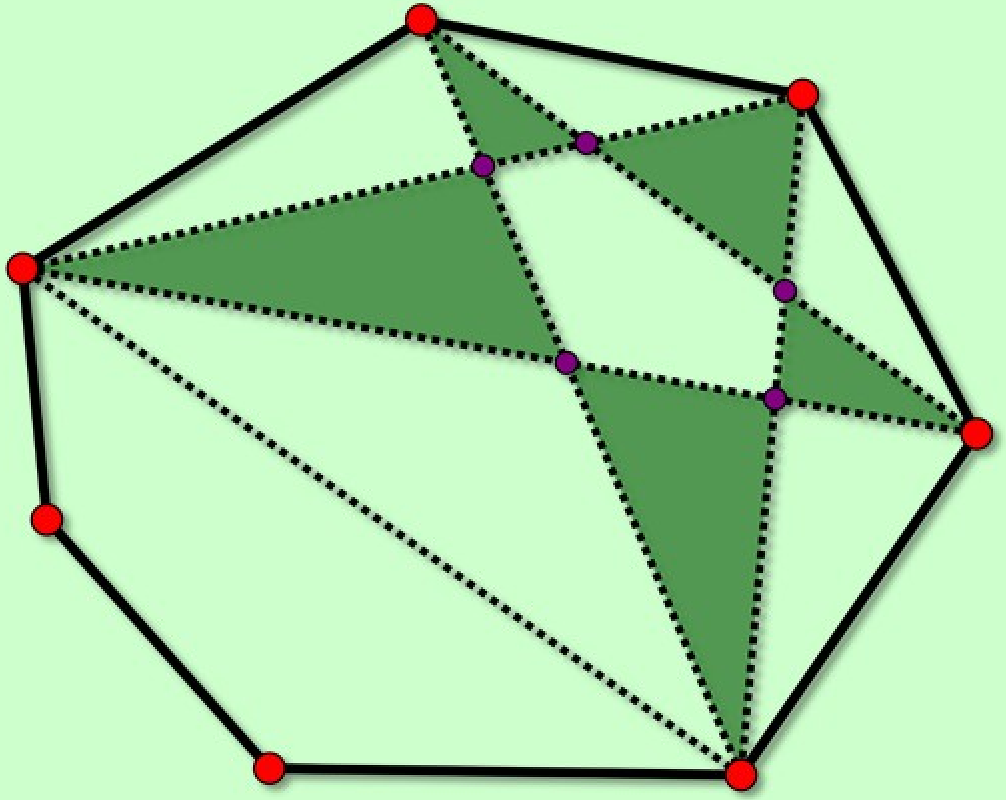


- Τέσσερεις κορυφές του κυρτού πολυγώνου ορίζουν **τέσσερα** τρίγωνα της **2ης** κατηγορίας.

- Άρα το πλήθος των τριγώνων αυτής της κατηγορίας είναι, όσοι οι συνδυασμοί των n κορυφών του πολυγώνου ανά 4 επί 4.

$$s_2 = 4\binom{n}{4}$$

- Η **τρίτη κατηγορία** τριγώνων αποτελείται από τα τρίγωνα των οποίων μία κορυφή είναι κορυφή του πολυγώνου.

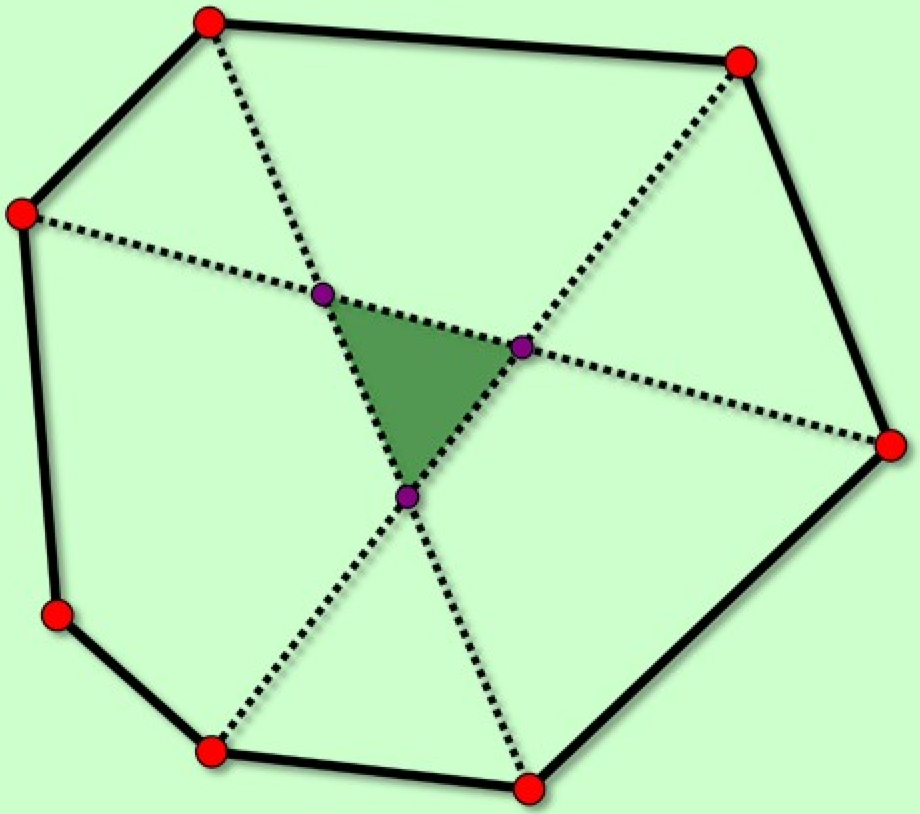


- Πέντε κορυφές του κυρτού πολυγώνου ορίζουν **πέντε** τρίγωνα της **3ης** κατηγορίας.

- Άρα το πλήθος των τριγώνων αυτής της κατηγορίας είναι, όσοι οι συνδυασμοί των n κορυφών του πολυγώνου ανά **5** επί **5**.

$$s_3 = 5\binom{n}{5}$$

- Η **τέταρτη κατηγορία** τριγώνων αποτελείται από τα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές τους δεν είναι κορυφές του πολυγώνου.



- Έξι κορυφές του κυρτού πολυγώνου ορίζουν **ένα** τρίγωνο της **4ης** κατηγορίας.

- Άρα το πλήθος των τριγώνων αυτής της κατηγορίας είναι, όσοι οι συνδυασμοί των n κορυφών του πολυγώνου ανά **6** επί **1**.

$$s_4 = 1\binom{n}{6}$$