Συνδυαστική III

● ***Μεταθέσεις*** n διακεκριμένων αντικειμένων.

● ***Διατάξεις*** n διακεκριμένων αντικειμένων ανά n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

● ***Διατάξεις*** n διακεκριμένων αντικειμένων ανά k

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

● ***Συνδυασμοί*** n αντικειμένων ανά k.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

♦ Σε μία τάξη φοιτούν **15** Αγόρια και **20** Κορίτσια. Πόσες πενταμελείς επιτροπές , μπορούμε να δημιουργήσουμε με μαθητές από την τάξη;

● Η πενταμελής επιτροπή (εφόσον δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός) θα επιλεγεί από τα **35** συνολικά άτομα που βρίσκονται στην τάξη. Άρα το πλήθος των πενταμελών επιτροπών, θα ταυτίζεται με το πλήθος των συνδυασμών των **35** "αντικειμένων" ανά **5** .

$$\binom{35}{5} = \frac{35!}{(35-5)!\,5!} = \frac{35!}{30!\,5!}.$$

♦ Σε μία τάξη φοιτούν 15 Αγόρια και 20 Κορίτσια. Πόσες πενταμελείς επιτροπές μπορούμε να δημιουργήσουμε, (ώστε κάθε μία να αποτελείται από 2 αγόρια και 3 κορίτσια);

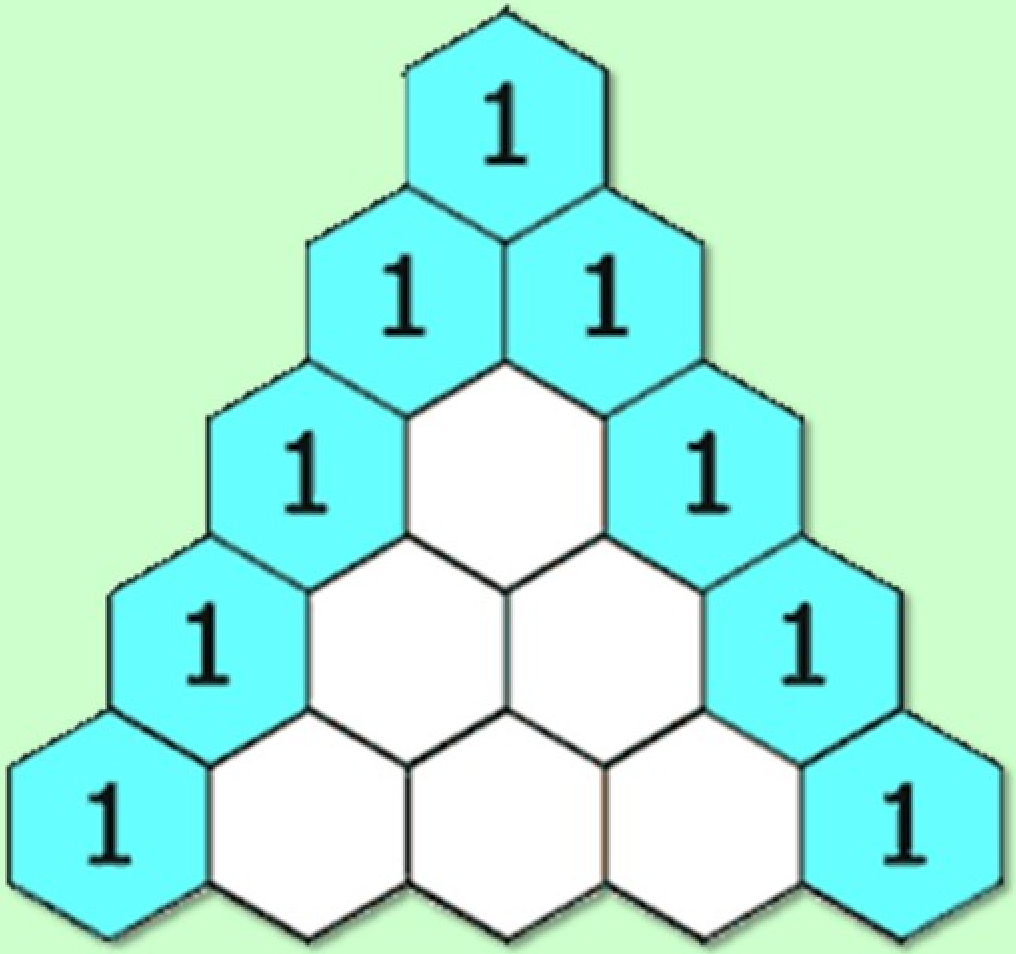
● Οι δυνατοί τρόποι επιλογής των 2 αγοριών από τα 15 συνολικά αγόρια που βρίσκονται στην τάξη, είναι όσοι οι συνδυασμοί των 15 "αντικειμένων" ανά 2.

● Οι δυνατοί τρόποι επιλογής των 3 κοριτσιών από τα 20 συνολικά κορίτσια που βρίσκονται στην τάξη, είναι όσοι οι συνδυασμοί των 20 "αντικειμένων" ανά 3.

● Άρα οι δυνατοί τρόποι επιλογής της πενταμελούς επιτροπής είναι:

$$\binom{15}{2} \cdot \binom{20}{3}.$$

Τρίγωνο Pascal



Τρίγωνο Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Τρίγωνο Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Τρίγωνο Pascal

$$\binom{1}{1} \quad \binom{1}{0}$$
$$1 \quad 1$$

$$\binom{2}{2} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{0}$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$\binom{3}{3} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{0}$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\binom{4}{4} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{0}$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$\binom{1}{1} \quad \binom{1}{0}$$
$$1 \quad 1$$

$$\binom{2}{2} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{0}$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$\binom{3}{3} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{0}$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\binom{4}{4} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{0}$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^1 =$$
$$= 1a + 1b = a + b$$

$$(a+b)^2 =$$
$$= 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 =$$
$$= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^2 =$$
$$= (a+b)(a+b) =$$
$$= aa + ab + ba + bb =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 =$$
$$= (a+b)(a+b)(a+b) =$$
$$= (aa + ab + ba + bb)(a+b) =$$
$$= aaa + aba + baa + bba + aab + abb + bab + bbb =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

♦ Τρεις φίλοι συναντιούνται και χαιρετά ο ένας τον άλλο. Πόσες χειραψίες θα ανταλλάξουν;

1^{η} χειραψία

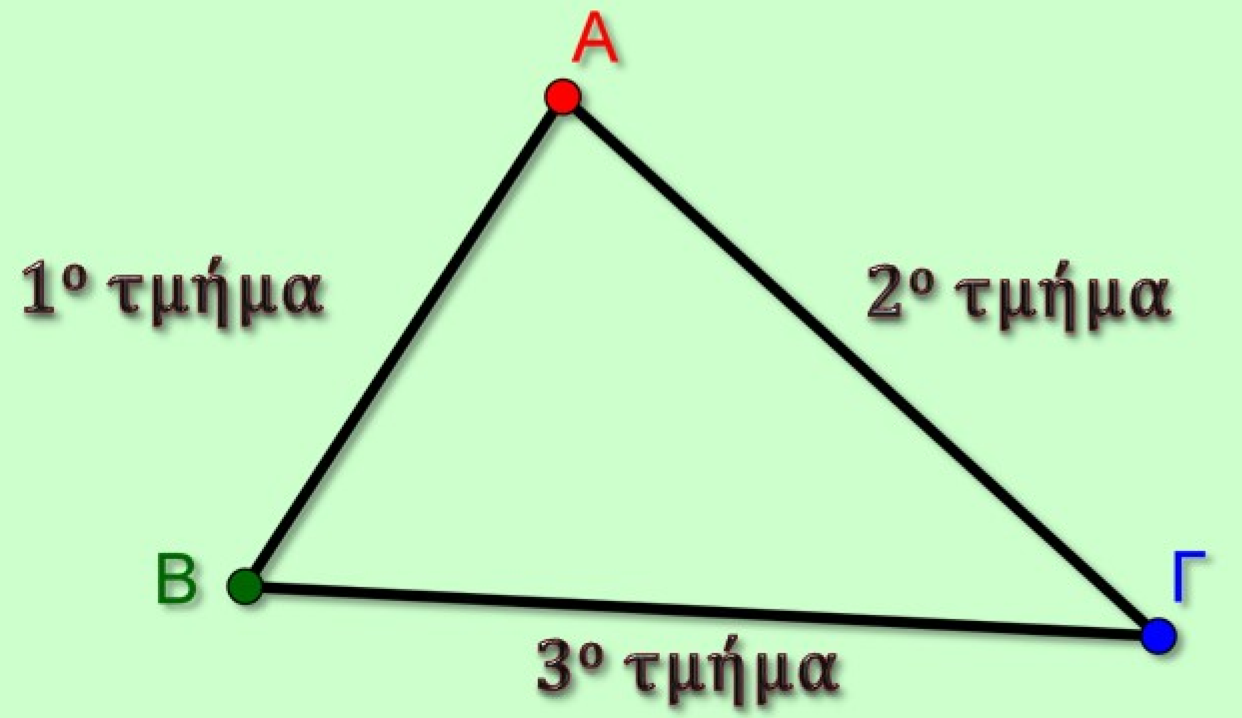
2^{η} χειραψία

3^{η} χειραψία

Το πλήθος των χειραψιών είναι όσοι οι συνδυασμοί των **τριών αντικειμένων ανά δύο**.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1)(1\cdot 2)} = 3.$$

♦ Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τρία (διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία;



Το πλήθος των τμημάτων είναι όσοι οι συνδυασμοί των **τριών αντικειμένων ανά δύο**.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1)(1\cdot 2)} = 3.$$

♦ Τέσσερεις φίλοι συναντιούνται και χαιρετά ο ένας τον άλλο. Πόσες χειραψίες θα ανταλλάξουν;

1^{η} χειραψία

2^{η} χειραψία

3^{η} χειραψία

4^{η} χειραψία

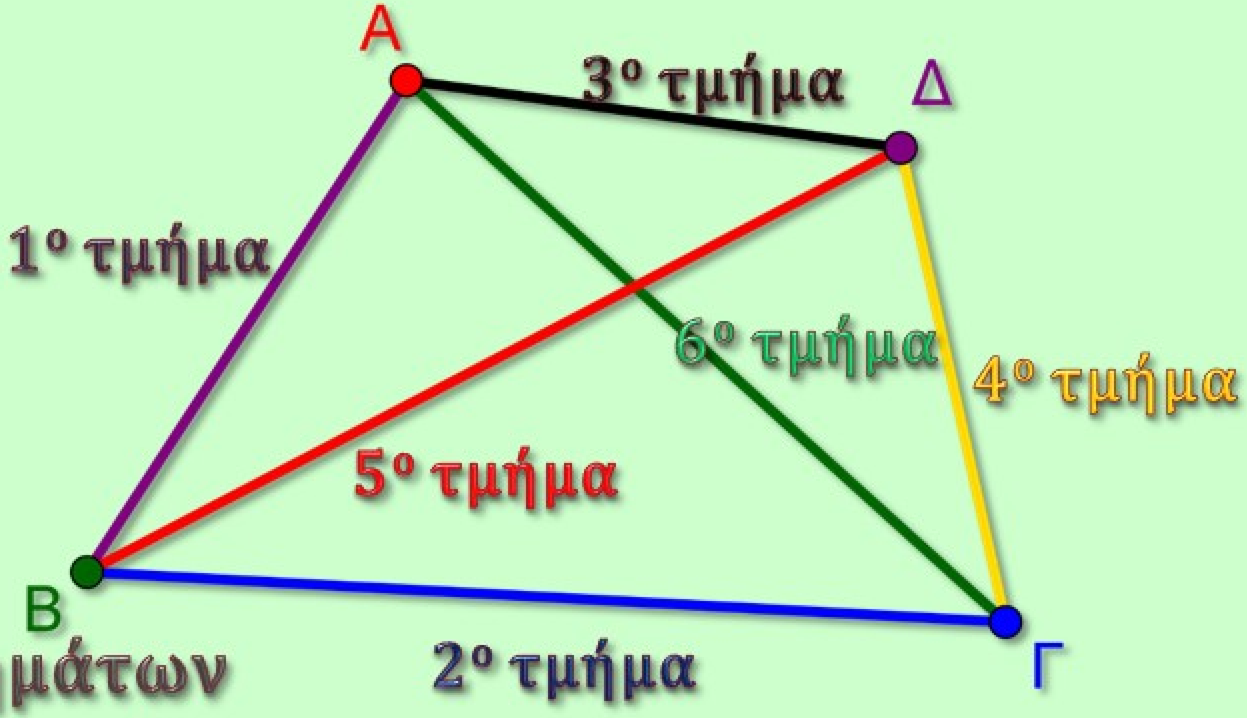
5^{η} χειραψία

6^{η} χειραψία

Το πλήθος των χειραψιών είναι όσοι οι συνδυασμοί των τεσσάρων αντικειμένων ανά δύο.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1\cdot 2)(1\cdot 2)} = 6.$$

♦ Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τέσσερα (διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία;



Το πλήθος των τμημάτων είναι όσοι οι συνδυασμοί των τεσσάρων αντικειμένων ανά δύο.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(3-2)!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1\cdot 2)(1\cdot 2)} = 6.$$

♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν πέντε θεατές στις είκοσι συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου;

Ο 1ος θεατής μπορεί να καθίσει με 20 τρόπους.
Ο 2ος θεατής μπορεί να καθίσει με 19 τρόπους.
Ο 3ος θεατής μπορεί να καθίσει με 18 τρόπους.
Ο 4ος θεατής μπορεί να καθίσει με 17 τρόπους.
Ο 5ος θεατής μπορεί να καθίσει με 16 τρόπους.

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι: $\frac{20!}{(20-5)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$

♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν πέντε θεατές στις είκοσι συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου, αν δύο από τους θεατές θέλουν να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

Οι δύο θεατές μπορούν να καθίσουν στις θέσεις
1,2 ή 2,3 ή 3,4 ή . . . ή 19,20.

Άρα οι δυνατοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν οι δύο θεατές, είναι $2! \cdot 19$.

| 1 | 2 | 3 | 4 |⋯| 17 | 18 | 19 | 20 |

1 2 3 18 19

Οι υπόλοιποι 3 θεατές μπορούν να καθίσουν στις 18 κενές θέσεις με $\mathbf{18 \cdot 17 \cdot 16}$ τρόπους.

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν οι θεατές, είναι:

$$\mathbf{(2 \cdot 19) \cdot (18 \cdot 17 \cdot 16) = 2\frac{19!}{(19-4)!}}.$$

♦ Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου, συμμετέχουν **m** ομάδες, οι οποίες παίζουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά και βαθμολογούνται ως εξής:

Αν η ομάδα νικήσει, παίρνει τρείς βαθμούς.

Αν η ομάδα έρθει ισοπαλία παίρνει δύο βαθμούς.

Αν η ομάδα ηττηθεί, παίρνει ένα βαθμό.

● Αν όλες οι ομάδες μαζί, συγκέντρωσαν 364 βαθμούς, να υπολογιστεί το πλήθος των ομάδων που συμμετείχαν.

Σε κάθε αγώνα (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα), δίνονται συνολικά **τέσσερεις βαθμοί**.

3

1

2

2

1

3

Εφόσον σε κάθε αγώνα, δίνονται συνολικά 4 βαθμοί και οι βαθμοί που δόθηκαν συνολικά ήταν 364, συμπεραίνουμε ότι έγιναν συνολικά $364/4=91$ αγώνες.

Σύμφωνα με τους κανονισμούς του τουρνουά:

- Η 1^{η} ομάδα παίζει σε $m-1$ αγώνες.
- Η 2^{η} ομάδα παίζει σε $m-2$ αγώνες.

....

- Η m^{η} ομάδα παίζει σε 1 αγώνα.

Άρα συνολικά γίνονται:

$$1+2+3+\cdots+(m-1)=\frac{(m-1)m}{2}$$

αγώνες.

Από την ισότητα:

$$\frac{(m-1)m}{2} = 91$$

καταλήγουμε $m = 14$.