Άλγεβρα V

Ακολουθίες

Βαγγέλης Ψύχας

Ακολουθίες Ι

✧ Ονομάζουμε **ακολουθία** πραγματικών αριθμών κάθε συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών (ή ένα υποσύνολό του) και τιμές στους πραγματικούς αριθμούς.

✧ Τις ακολουθίες τις συμβολίζουμε με $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ή $a, b, c, \ldots$.

✧ Την εικόνα του $\nu \in \mathbb{N}$ (μέσω της ακολουθίας $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) τη συμβολίζουμε με α_ν (αντί για το κλασικό $\alpha(\nu)$) και την ονομάζουμε **ν-οστό όρο** της ακολουθίας.

Ακολουθίες II

- Τις ακολουθίες τις συμβολίζουμε επίσης με $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}, (\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}, (\gamma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ ….

- Μία ακολουθία είναι καλά ορισμένη όταν μπορούμε να υπολογίσουμε οποιονδήποτε όρο της.

Ακολουθίες ΙΙΙ

✧ Μία ακολουθία μπορεί να οριστεί (καλά) με την έκφραση του ν-οστού όρου a_ν συναρτήσει του ν.

✧ $a_\nu = 2\nu + 1, \nu \in \mathbb{N}$

✧ $a_\nu = \dfrac{2\nu + 3}{3\nu - 1}, \nu \in \mathbb{N}$

✧ $a_\nu = \begin{cases} \dfrac{\nu + 3}{3\nu - 1} & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ 2\nu + 5 & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$

Ακολουθίες IV

✧ Μία ακολουθία μπορεί να οριστεί επίσης με τη βοήθεια μιας σχέσης που συνδέει όρους της ακολουθίας (**αναδρομική σχέση**) και ένα ικανό αριθμό αρχικών όρων (ώστε να μπορεί να υπολογιστεί οποιοσδήποτε όρος της ακολουθίας).

- $a_{\nu+1} = 2a_\nu + 1$ με $a_1 = 1$

- Αναδρομικές ακολουθίες 1ης τάξης.
- Σημαντικός ο ρόλος του πρώτου όρου.

- $a_{\nu+1} = 2a_\nu + 1$ με $a_1 = 2$

Ακολουθίες V

✧ Αναδρομικές ακολουθίες $2^{ης}$ τάξης.

✧ $a_{\nu+2} = 2a_{\nu+1} + a_{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $a_1 = a_2 = 1$

✧ Για τον (καλό) ορισμό μιας ακολουθίας δεύτερης τάξης απαιτείται ο καθορισμός δύο πρώτων όρων της ακολουθίας.

Ακολουθία Fibonacci I

- Κάθε μήνα το θηλυκό (από ένα ζευγάρι ενήλικων κουνελιών) γεννά ένα ζευγάρι κουνελιών (αρσενικό και θηλυκό). Μετά από δύο μήνες το θηλυκό (από το νέο ζευγάρι) ενηλικιώνεται και γεννά ένα ζεύγος κουνελιών. Βρείτε το πλήθος των κουνελιών στο τέλος του χρόνου, αν στην αρχή του χρόνου υπάρχει ένα ζευγάρι ενήλικων κουνελιών.

Αν συμβολίσουμε με F_ν το πλήθος των ζευγαριών που υπάρχουν στο τέλος του ν-οστού μήνα. Τότε:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 2, F_2 = 3, F_3 = 5,\ F_4 = 8, \dots$$

$$F_2 = F_1 + F_0,\quad F_3 = F_2 + F_1,\ \dots$$

Ακολουθία Fibonacci II

Κάθε μήνα το θηλυκό (από ένα ζευγάρι ενήλικων κουνελιών) γεννά ένα ζευγάρι κουνελιών (αρσενικό και θηλυκό). Μετά από δύο μήνες το θηλυκό (από το νέο ζευγάρι) ενηλικιώνεται και γεννά ένα ζεύγος κουνελιών. Βρείτε το πλήθος των κουνελιών στο τέλος του χρόνου, αν στην αρχή του χρόνου υπάρχει ένα ζευγάρι **μη ενήλικων** κουνελιών.

Αν συμβολίσουμε με F_ν το πλήθος των ζευγαριών που υπάρχουν στο τέλος του ν-οστού μήνα. Τότε:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5, F_5 = 8 \dots$$

$$F_2 = F_1 + F_0,\quad F_3 = F_2 + F_1,\ \dots$$

Ακολουθία Fibonacci III

- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_0 = a_1 = 1$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης είναι:

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

που έχει ρίζες: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$