Άλγεβρα ΙΙΙ

Ταυτότητες

Βαγγέλης Ψύχας

Ταυτότητες Ι

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

- $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$

Ταυτότητες ΙΙ

- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta^3$

- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta^3$

- $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$
- $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha\beta(\alpha\pm\beta)\pm\beta^3$

Ταυτότητες ΙΙΙ

- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2 \mp 2\alpha\beta$

- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$
- $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)^3 \mp 3\alpha\beta(\alpha \pm \beta)$

Ταυτότητες IV

- $$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + \frac{4}{1}\alpha^3\beta + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\alpha^2\beta^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha\beta^3 + \beta^4$$

- $$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + \frac{4}{1}\alpha^3\beta + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\alpha^2\beta^2 + \frac{4}{1}\alpha\beta^3 + \beta^4$$

- $$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + \frac{5}{1}\alpha^4\beta + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\alpha^3\beta^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^2\beta^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha\beta^4 + \beta^5$$

- $$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + \frac{5}{1}\alpha^4\beta + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\alpha^3\beta^2 + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\alpha^2\beta^3 + \frac{5}{1}\alpha\beta^4 + \beta^5$$

Τρίγωνο Pascal

$$1$$

$$(x+y)^1 = 1x \qquad 1y$$

$$(x+y)^2 = 1x^2 \qquad 2xy \qquad 1y^2$$

$$(x+y)^3 = 1x^3 \qquad 3x^2y \qquad 3xy^2 \qquad 1y^3$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 \qquad 4x^3y \qquad 6x^2y^2 \qquad 4xy^3 \qquad 1y^4$$

$$(x+y)^5 = 1x^5 \qquad 5x^4y \qquad 10x^3y^2 \qquad 10x^2y^3 \qquad 5xy^4 \qquad 1y^5$$

$$1x^6 \qquad 6x^5y \qquad 15x^4y^2 \qquad 20x^3y^3 \qquad 15x^2y^4 \qquad 6xy^5 \qquad 1y^6$$

Τρίγωνο Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Ταυτότητες V

- Το πλήθος των συνδυασμών των ν αντικειμένων **ανά** κ, συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και δίνεται από την ισότητα:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}.$$

- όπου $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \nu$
και $0! = 1$

- ισχύει: $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$

Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^{\nu} = \binom{\nu}{0}\alpha^{\nu} + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \cdots + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\beta^{\nu}$

- Το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^{\nu}$ αποτελείται από προσθετέους της μορφής $\binom{m+k}{k}a^{m}\cdot\beta^{k}$ με $m+k=\nu$.

- Από την προφανή ισότητα: $\binom{m+k}{k}=\binom{m+k}{m}$, συμπεραίνουμε ότι οι συμμετρικοί παράγοντες $a^{m}\cdot\beta^{k}$ και $a^{k}\cdot\beta^{m}$ έχουν ίσους συντελεστές.

Ταυτότητες

(Παραγοντοποίησης)

♢ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$

♢ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

♢ $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)$

♢ $$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2)^2 - (\beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) =$$
$$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$$

♢ $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

Ταυτότητες
(Παραγοντοποίησης)

- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot \left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right)$

- $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta) \cdot \left(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \beta^4\right)$

- $\alpha^{2\nu+1} + \beta^{2\nu+1} = (\alpha + \beta) \cdot \left(\alpha^{2\nu} - \alpha^{2\nu-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{2\nu-1} + \beta^{2\nu}\right)$

Ταυτότητα Euler

- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma =$
$= (\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma\right) =$
$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right)$

- Χρήσιμη για παραγοντοποίηση και λύση εξισώσεων, είναι η παρακάτω ισοδυναμία
(που προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα του Euler):

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma=0 \text{ ή } \alpha=\beta=\gamma)$$

Ταυτότητα Lagrange

- Για τις δυάδες των αριθμών $\begin{matrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{matrix}$ ισχύει:

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(\alpha x+\beta y)^2=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2.$$

Ταυτότητα Lagrange

- Για τις τριάδες των αριθμών $\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z\end{matrix}$ ισχύει:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=$$
$$=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ x & y\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & \gamma \\ x & z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & \gamma \\ y & z\end{vmatrix}^2.$$

Ταυτότητες

- $(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2$
- $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$
- $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$
- $|x-y|=\sqrt{(x+y)^2-4xy}$

Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

- $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$

- $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\alpha+\gamma)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$

- $(\alpha+\beta+\gamma)^3=$

$$=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\left(\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\alpha+\gamma)+\gamma^2(\alpha+\beta)\right)+6\alpha\beta\gamma$$

Ταυτότητες

◊ $\alpha^4+\beta^4=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-\left(\alpha\beta\sqrt{2}\right)^2=$
$=\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{2}\right)$

Ταυτότητα De Moivre

◊ $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\left(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2\right)=$
$=-(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).$