Άλγεβρα ΙΙ

Απόλυτα - Συστήματα

Βαγγέλης Ψύχας

Ανισότητες Ι

- Ο αριθμός α, θα λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από τον αριθμό β (συμβολικά $\alpha > \beta$), όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

- Οι αριθμοί α, β θα λέμε ότι είναι **ομόσημοι,** αν και μόνο αν,

$$\alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0.$$

Ανισότητες ΙΙ

✧ Οι αριθμοί α, β θα λέμε ότι είναι **ετερόσημοι,** αν και μόνο αν,

$$\alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0.$$

✧ Ο αριθμός α, θα λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** ή **ίσος** από τον αριθμό β (συμβολικά $\alpha \geq \beta$), αν και μόνο αν ($\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$).

✧ Στον συμβολισμό $\alpha \geq \beta$, ισχύει:
<u>ή μόνο</u> $\alpha > \beta$ <u>ή μόνο</u> $\alpha = \beta$.

Ανισότητες ΙΙΙ

- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

- $\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \beta > \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$

- $\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

Ανισότητες IV

- $\left.\begin{matrix} \alpha > \beta > 0 \\ \gamma > \delta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

- $\alpha > \beta \overset{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

- $\alpha > \beta \overset{\gamma < 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

Απόλυτη Τιμή Ι

- $$|\alpha| = \begin{cases} \alpha \ \alpha\nu \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha \ \alpha\nu \ \alpha < 0 \end{cases}$$

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$

- $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Απόλυτη Τιμή ΙΙ

- $|x| = \theta \Leftrightarrow (x = \theta$ ή $x = -\theta), \ \theta \geq 0$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow (x = a$ ή $x = -a)$

- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta, \ \theta \geq 0$
- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow x \in [-\theta, \theta], \ \theta \geq 0$

- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta), \theta \geq 0$
- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\theta] \cup [\theta, +\infty), \theta \geq 0$

Απόλυτη Τιμή ΙΙΙ

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

- $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Ρίζες

✧ **Τετραγωνική ρίζα** μη αρνητικού αριθμού α (συμβολικά $\sqrt{\alpha}$), είναι ο μη αρνητικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $x^2 = \alpha$.

Δηλαδή: $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$.

✧ $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

✧ $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

✧ $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

(ν-οστές) Ρίζες

- **ν-οστή ρίζα** μη αρνητικού αριθμού α (συμβολικά $\sqrt[\nu]{\alpha}$), είναι ο μη αρνητικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $x^{\nu} = \alpha$.

Δηλαδή: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$.

- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$
- $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$
- $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$
- $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha}$
- $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

Ορίζουσα 2ης τάξης

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$$

◊ Ορίζουσα 3ης τάξης

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \gamma_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Συστήματα Ι

- **Γραμμικό σύστημα 2×2:**

$$(\Sigma): \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

- $$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1$$

- $$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \cdot \beta_2 - \gamma_2 \cdot \beta_1$$

- $$D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \gamma_2 - \alpha_2 \cdot \gamma_1$$

Συστήματα ΙΙ

- Γραμμικό σύστημα 2×2:

$$(\Sigma): \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

- Αν $D \neq 0$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση:

$$x_0 = \frac{D_x}{D}, \qquad y_0 = \frac{D_y}{D}.$$

- Αν $D = 0$ και $|D_x| + |D_y| \neq 0$ τότε το (Σ) είναι **αδύνατο**.

- Αν $D = D_x = D_y = 0$, τότε το (Σ) είναι **αδύνατο** ή **αόριστο**.

Συστήματα ΙΙΙ

- **Γραμμικό σύστημα 3×3:**

$$(\Sigma): \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

- $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

- $D_x = \begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$
- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$
- $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$

Συστήματα IV

♢ **Γραμμικό σύστημα 3×3:**

$$(\Sigma): \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

♢ Αν $D \neq 0$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση:

$$x_0 = \frac{D_x}{D}, y_0 = \frac{D_y}{D}, z_0 = \frac{D_z}{D}.$$

♢ Αν $D = 0$ και $|D_x| + |D_y| + |D_z| \neq 0$ τότε το (Σ) είναι αδύνατο.

♢ Αν $D = D_x = D_y = D_z = 0$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο ή αόριστο.