Άλγεβρα για Διαγωνισμούς

ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

Ανισότητες IV

Ασκήσεις

Βαγγέλης Ψύχας

✧ Έστω $a_2, a_3, \cdots a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο 1. Να αποδείξετε ότι:

$$(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_3)^3\cdots(1+\alpha_n)^n > n^n$$

(n ακέραιος μεγαλύτερος του 2).

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$
$$x, y \geq 0$$

$$1+\alpha_2 \geq 2\sqrt{1\cdot\alpha_2} \Leftrightarrow (1+\alpha_2)^2 \geq 2^2\alpha_2$$

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$
$$x, y, z \geq 0$$

$$1+\alpha_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\alpha_3 \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\alpha_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\alpha_3)^3 \geq 3^3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\alpha_3.$$

$$1+a_m=\underbrace{\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-1}+\cdots+\frac{1}{m-1}}_{(m-1)\ \text{φορές}}+a_m\geq$$

$$\geq m\cdot\sqrt[m]{\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\dots\cdot\frac{1}{m-1}\cdot a_m}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+a_m)^m\geq m^m\cdot\frac{1}{(m-1)^{m-1}}\cdot a_m.$$

Η ισότητα ισχύει όταν: $a_m=\dfrac{1}{m-1}$.

♢ Αν $a, b, c > 0$ και $a + b + c = 3$, να αποδείξετε ότι:

J.B.M.O 2015

$$\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}\geq 3.$$

$$\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}=\frac{2}{a}-a^2+\frac{2}{b}-b^2+\frac{2}{c}-c^2=$$

$$=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\left((a+b+c)^2-2ab-2ac-2bc\right)=$$

$$=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\left(3^2-2ab-2ac-2bc\right).$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+ab+bc+ac\geq 6.$$

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}$$
$$x,y\geq 0$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+ab+bc+ac\geq 6.$$

Ισχύει:

$$\underbrace{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}_{x}+\underbrace{ab+bc+ac}_{y}\geq 2\cdot\sqrt{\left(\underbrace{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}_{x}\right)\cdot\left(\underbrace{ab+bc+ac}_{y}\right)}$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(ab+bc+ac)\geq 9.$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$
$$x, y \geq 0$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(ab+bc+ac) \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ac)^2 \geq 9abc \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (ab+bc+ac)^2 \geq 3(a+b+c)abc \ldots$$

που ισχύει.