Ανισότητες Ι

Βασικές Ανισότητες

Βαγγέλης Ψύχας

Διάταξη Ι

✧ Ο αριθμός α, θα λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από τον αριθμό β (συμβολικά $\alpha > \beta$), όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

✧ Οι αριθμοί α, β θα λέμε ότι είναι **ομόσημοι,** αν και μόνο αν,

$$\alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0.$$

Διάταξη ΙΙ

✧ Οι αριθμοί α, β θα λέμε ότι είναι **ετερόσημοι,** αν και μόνο αν,

$$\alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0.$$

✧ Ο αριθμός α, θα λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** ή **ίσος** από τον αριθμό β (συμβολικά $\alpha \geq \beta$), αν και μόνο αν ($\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$).

✧ Στον συμβολισμό $\alpha \geq \beta$, ισχύει:
<u>ή μόνο</u> $\alpha > \beta$ <u>ή μόνο</u> $\alpha = \beta$.

Διάταξη ΙΙΙ

- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

- $\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \beta > \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$

- $\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

Διάταξη IV

- $\left.\begin{aligned} \alpha > \beta > 0 \\ \gamma > \delta > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

- $\alpha > \beta \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

- $\alpha > \beta \overset{\gamma<0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

Βασικές Ανισότητες

◊ $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta$

Βασικές Ανισότητες

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &\geq 2\alpha\beta \\ \alpha^2 + \gamma^2 &\geq 2\alpha\gamma \\ \beta^2 + \gamma^2 &\geq 2\beta\gamma \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta = \gamma$

Βασικές Ανισότητες

♢ $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$

♢ $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ $x, y \geq 0$

♢ $\alpha^2+\beta^2 \geq \alpha\beta$

♢ $x+y \geq \sqrt{xy}$ $x, y \geq 0$

♢ $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$

♢ $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

♢ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

♢ $x+y+z \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$ $x, y, z \geq 0$

✧ Αν $x, y, z > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

✧ $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$x, y \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} ✧\ x+y \geq 2\sqrt{xy} \\ ✧\ y+z \geq 2\sqrt{yz} \\ ✧\ z+x \geq 2\sqrt{zx} \end{array}\right\} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

◊ Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

◊ $x^2 + y^2 + z^2 \geq$
$\geq xy + yz + zx$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab)$$

$$(ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) = abc(a + b + c)$$

✧ Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a + b + c \geq abc$, να αποδείξετε ότι: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

✧ $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ (I) ✧ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (II)

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2b^2 =$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + a^2(b^2 + c^2) + b^2(c^2 + a^2) + c^2(a^2 + b^2) \geq$$

$$\geq abc(a + b + c) + 2a^2(bc) + 2b^2(ca) + 2c^2(ab) =$$

$$= abc(a + b + c) + 2abc(a + b + c) =$$

$$= 3abc(a + b + c) \geq 3(abc)^2$$

Βασικές Ανισότητες

- $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2, \qquad \alpha > 0$

- $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2, \qquad \alpha < 0$

- $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2, \qquad \alpha\beta > 0$

- $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \leq -2, \qquad \alpha\beta < 0$

Ανισότητα Nesbitt

♢ Αν $a, b, c > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \diamond\ \dfrac{a+b}{b+c} + \dfrac{b+c}{a+b} \geq 2 \\ \diamond\ \dfrac{a+c}{c+b} + \dfrac{c+b}{a+c} \geq 2 \\ \diamond\ \dfrac{b+a}{a+c} + \dfrac{a+c}{b+a} \geq 2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{b+a} \geq 6$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2a}{c+b} + 1 + \frac{2b}{a+c} + 1 + \frac{2c}{a+b} \geq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Βασικές Ανισότητες

- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
- $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz)$
- $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \geq 3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
- $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$
- $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta), \qquad \alpha,\beta>0$