

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{kx^2 + 2x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

η οποία είναι περιττή

I) Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$  και  $f(-1)$

II) Να αποδείξετε ότι  $k=0$

III) Για  $k=0$  να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ολικό μέγιστο στο  $x=1$

Απάντηση

$$\text{I) } f(1) = \frac{k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1}{1^2 + 1} = \frac{k+2}{2}$$

$$f(-1) = \frac{k(-1)^2 + 2(-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{k-2}{2}$$

II) Η  $f$  είναι περιττή  $\Rightarrow f(-1) = -f(1)$

$$\Leftrightarrow \frac{k-2}{2} = -\frac{k+2}{2} \Leftrightarrow k-2 = -(k+2)$$

$$\Leftrightarrow k-2 = -k-2 \Leftrightarrow k = -k \Leftrightarrow 2k=0 \Leftrightarrow k=0$$

III) Για  $k=0$ , η  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$$f(1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$\bullet f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq x^2+1 \quad \bullet (x^2+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα το  $f(1)$  είναι το ολικό μέγιστο της  $f$