1. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

ii. Να υπολογίσετε τον αριθμό α ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 1 \\ a, x = 1 \end{cases}$$

ώστε να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

iii. Να εξετάσετε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

Απάντηση

i. Η παράσταση $f(x)$ ορίζεται όταν:

$$x \geq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 \neq 1^2 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της f είναι:

$A = [0,1) \cup (1,+\infty)$

Τότε για κάθε $x \in A$ έχω (χρησιμοποιώ την συζυγή παράσταση)

$$f(x) = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

ii. Ο τύπος γράφεται:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \alpha\nu \ \ x \in \ [0,1) \cup (1,+\infty) \\ a & \alpha\nu \ x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right) = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2$$

$g(1) = a$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_o = 1$ όταν:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \Leftrightarrow 2 = a$$

iii. Για $h \neq 0$ σχηματίζω το λόγο μεταβολής:

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}+1-2}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} =$$

(Με συζυγή παράσταση)

$$\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{\sqrt{1+h}^2-1^2}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

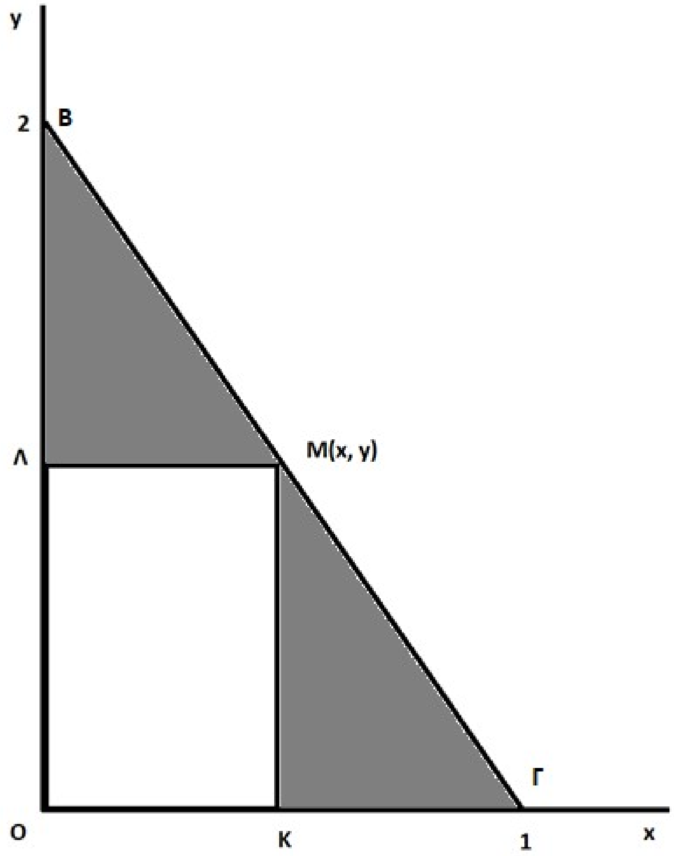
$$=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

Το

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ και $g'(1)=\frac{1}{2}$

2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (ΑΦΟΡΜΗ ΑΠΟ ΑΣΚΗΣΗ 4 , ΣΕΛΙΔΑ 48)



Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο $ΛΜΚΟ$. Το σημείο $M(x, y)$ βρίσκεται πάνω στο τμήμα που συνδέει τα σημεία $B(0, 2)$ και $Γ(1, 0)$ και τα σημεία Κ, Λ είναι οι προβολές του πάνω στους άξονες των x, y αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $y = -2x + 2 , 0 < x < 1$.

ii. Να βρείτε το εμβαδό του σκιασμένου μέρους ως συνάρτηση $E(x)$.

iii. Εάν

$$E(x) = 2x^2 - 2x + 1, 0 < x < 1$$

να βρείτε για ποια τιμή του x το παραπάνω εμβαδό γίνεται ελάχιστο. Ποιο είναι το ελάχιστο εμβαδό;

Απάντηση

i. Το σημείο $M(x, y)$ επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας $BΓ$.

Με τον περιορισμό λόγω του σχήματος ότι αφού το σημείο K είναι μεταξύ του O και του $Γ$ πρέπει να ισχύει:

$$0 < x < 1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΜΕΓΑΛΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ!!!

ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΓΝΩΣΤΟ ΚΑΙ ΤΟ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η εξίσωση της ευθείας $ΒΓ$ είναι:

$$y = \lambda x + \kappa$$

- Από τις συντεταγμένες του $B(0,2)$ με αντικατάσταση έχω:

$2 = \lambda \cdot 0 + \kappa \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa = 2}$

- Από τις συντεταγμένες του $\Gamma(1,0)$ με αντικατάσταση έχω:

$0 = \lambda \cdot 1 + \kappa \Leftrightarrow 0 = \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = -2$

Άρα η εξίσωση της ευθείας $ΒΓ$ είναι:

$$y = -2x + 2$$

Και επομένως ισχύει για τις συντεταγμένες του M

$y = -2x + 2 \quad \mu\varepsilon \quad 0 < x < 1$

ii. Το εμβαδό του σκιασμένου μέρους είναι:

$E(x) = (OB\Gamma) - (OKM\Lambda)$

$$(OB\Gamma) = \frac{OB \cdot O\Gamma}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$(OKM\Lambda) = MK \cdot M\Lambda = y \cdot x = (-2x + 2) \cdot x = -2x^2 + 2x$$

Άρα

$$E(x) = 1 - (-2x^2 + 2x) = 1 + 2x^2 - 2x = \boldsymbol{2x^2 - 2x + 1, 0} < x < 1$$

iii.

- $E'(x) = 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 4x - 2$

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Δηλαδή το εμβαδό γίνεται ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$. Η ελάχιστη τιμή του εμβαδού είναι

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$