ΘΕΜΑ Α

Α1. Οι πιο σημαντικοί ορισμοί

1. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f μίας συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$;

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

3. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x στο σημείο x_0, όταν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0;

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

5. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

6. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ΄ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι:

α. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο *Δ;*

β. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο *Δ;*

7. Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

8. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

9. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; (αντιστοίχως στο $-\infty$);

10. Πότε λέμε ότι ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Α.2. Διατυπώσεις -Γεωμετρικές Ερμηνείες Θεωρημάτων και Προτάσεων

1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

4. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital.

Α.3. Θεωρήματα και Προτάσεις για απόδειξη

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

2. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}\text{-}\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}.$$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

7. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}.$$

9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=\mathbb{R}-\left\{x / \sigma\upsilon\nu x=0\right\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

10. Η συνάρτηση $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=\alpha x^{a-1},\ \text{δηλαδή}\ \left(x^a\right)'=\alpha x^{a-1}.$$

11. Η συνάρτηση $f(x)=a^x$, $a>0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x)=a^x\ln a,\ \text{δηλαδή}\ \left(a^x\right)'=\alpha^x\ln a.$$

12. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}.$$

13. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

14. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c\,.$$

15. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η
  f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

16. Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

17. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ένα διάστημα $(\alpha,\ \beta)$ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ. Αν $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha,\ \beta)$.

Α.4. Ερωτήσεις Αντικειμενικού τύπου

Σχολικού Βιβλίου

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

Ι.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ και $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(0,\ 1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$. Α Ψ

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[a,\ \beta]$ με $f(\beta)<f(a)$, τότε υπάρχει $x_0\in(a,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$. Α Ψ

3. Αν οι $f,\ g$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a,\ \beta]$, με: Α Ψ

$$f(a)=g(a) \text{ και } f(\beta)=g(\beta),$$

τότε υπάρχει $x_0\in(a,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

4. Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α. το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Α Ψ

β. το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. Α Ψ

5. α. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

β. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

6. Η συνάρτηση: Α Ψ

$$f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \text{ με } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

7. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = fog$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. Α Ψ

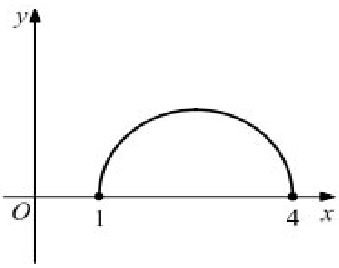
8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. Α Ψ

9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

α. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ Α Ψ

β. $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$ Α Ψ

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα,



τότε:

α. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,\ 4)$. Α Ψ

β. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,\ 4]$. Α Ψ

γ. $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,\ 4)$. Α Ψ

δ. υπάρχει $x_0 \in (1,\ 4)$: $f'(x) = 0$. Α Ψ

11. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει:

α. μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,\ 1)$. Α Ψ

β. μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,\ 0)$. Α Ψ

γ. τρεις πραγματικές ρίζες. Α Ψ

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις ισχύουν: Α Ψ

$f(0)=4,\ f'(0)=3,\ f'(5)=6,\ g(0)=5,\ g'(0)=1,\ g'(4)=2$,

τότε:

$$(fog)'(0)=(gof)'(0).$$

ΙΙ.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **Β.** $\dfrac{4}{3}$ **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** 0 **Ε.** $\dfrac{3}{4}$

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α. $\dfrac{1}{x^2}$ **Β.** $-\dfrac{2}{x^2}$ **Γ.** $-\dfrac{1}{x^2}$ **Δ.** $-\dfrac{2}{x}$ **Ε.** 0

3. Αν $f(x)=5^{3x}$, τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α. $3x5^{3x-1}$ **Β.** $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ **Γ.** $3\cdot 5^{2x}$ **Δ.** $3\cdot 5^{3x}$ **Ε.** $5^{3x}\cdot\ln 125$

4. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$, τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α. $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ **Β.** $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Γ. $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ **Δ.** $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

5. Αν $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$, τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** 0 **Δ.** 27 **Ε.** Δεν υπάρχει

6. Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α. 0 **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** 2

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

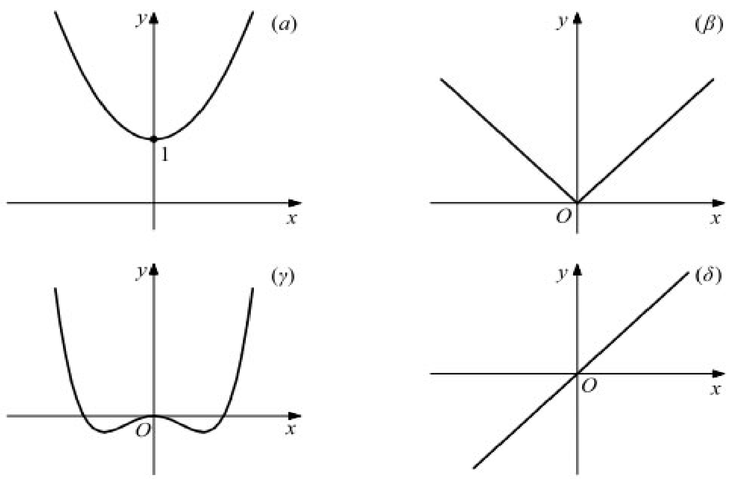
Α. $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ **Β.** $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ **Γ.** $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$ **Δ.** $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ **Ε.** $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$

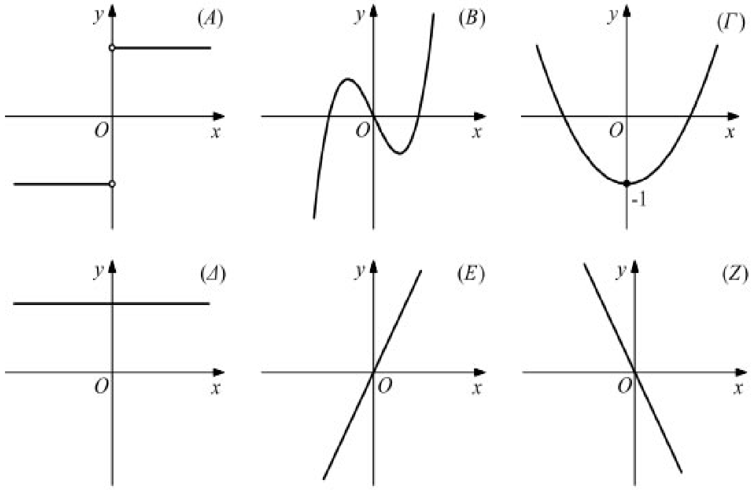
8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,\ 1]$ και $f(0)=0$, τότε:

Α. $f(1)=-1$ **Β.** $f(-1)>0$ **Γ.** $f(1)>0$ **Δ.** $f(-1)=0$

III.

1. *Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.*





2. *Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο* $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$	**Α.** $y=2$
2. $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}$	**Β.** $y=x-1$
3. $f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$	**Γ.** $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
	Ε. $y=-x$

Ψηφιακό Βοήθημα - study for exams

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι «1-1» στο Δ.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0\in\Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f.

4. Αν $f(x)=a^x$, $a>0$, τότε $f'(x)=a^x$.

5. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

6. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

7. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[\alpha,\beta]$.

8. Αν το $\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.

9. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

10. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$ στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε κατ' ανάγκη έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

11. Ανάμεσα σε δυο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

12. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι «1-1» στο Δ.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f'(x) = x \cdot \left(x-1\right)^2 \cdot \left(x-2\right),$$

τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 0$ τοπικό μέγιστο.

14. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f'(x) = x \cdot \left(x-1\right)^2 \cdot \left(x-2\right),$$

τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο.

15. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f'(x) = x \cdot \left(x-1\right)^2 \cdot \left(x-2\right),$$

τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό ελάχιστο.

16. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

17. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

18. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο σημείο x_0, αλλά δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

19. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0 \in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

20. Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

21. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

22. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

23. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε $f''(x_0) = 0$.

24. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, δεν έχουν ασύμπτωτες.

25. Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

26. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (a, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β, το $f(\beta)$.

27. Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ με } P(x), Q(x) \text{ πολυώνυμα βαθμού } \nu \geq 1$$

και $Q(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου ο βαθμός του αριθμητή ισούται με το βαθμό του παρονομαστή. Τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. *Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.*

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\eta\mu 2x$	α) $\eta\mu(2x)$
2) $\eta\mu^2(x)$	β) $2\sigma\upsilon\nu(2x)$
3) $\eta\mu(x^2)$	γ) $\sigma\upsilon\nu(x^2)$
4) $\eta\mu^3(x)$	δ) $2x\sigma\upsilon\nu(x^2)$
	ε) $3\eta\mu^2(x)$
	στ) $3\eta\mu^2(x)\sigma\upsilon\nu(x)$

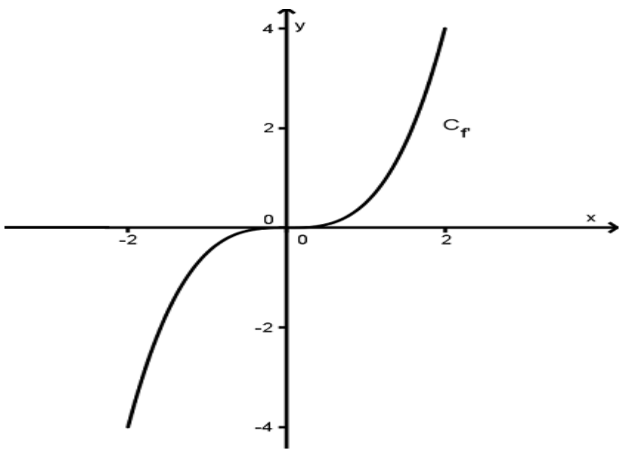
2. *Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την ασύμπτωτή της στο* $+\infty$ *από τη στήλη Β.*

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{\ln x}$	α) $y = 2x + 1$
2) $g(x) = x - 5 + \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$	β) $y = x - 5$
3) $h(x) = 2x + 1 + \dfrac{x + 2}{x + 1}$	γ) $y = 2x + 2$
	δ) $y = x - 4$
	ε) $y = 2x + 3$

3. *Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.*

Στήλη Α f	**Στήλη Β** f'
1) e^{3x}	α) $3e^{x}$
2) e^{x^3}	β) e^{3x}
3) $3e^{x}$	γ) $3x^2e^{x^3}$
4) e^{x+3}	δ) $3e^{3x}$
	ε) e^{x+3}
	στ) e^{3x^2}
	ζ) $e^{x}+e^{3}$

4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2,2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:



Το σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f. **2.** θέση τοπικού ελάχιστου της f.

3. σημείο καμπής της C_f.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = -3$. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$, τότε η f έχει:

α. καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$.
β. μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.
γ. δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.
δ. περισσότερες από δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

2. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε το $f(0)$ είναι:

α. τοπικό μέγιστο της f
β. τοπικό ελάχιστο της f
γ. δεν είναι ακρότατο της f.

3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι κατ ανάγκη σωστή;

α. Η $y = 5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β. $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

γ. $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 4] = 1$.

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Αν $x+1\le f\left(x\right)\le x^2+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

α. $f\left(0\right)=1$

β. $1\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge x+1,\ x<0$

γ. $1\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le x+1,\ x>0$

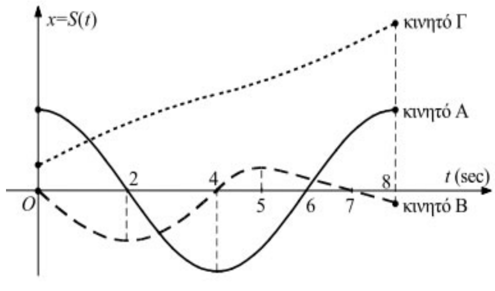
δ. $f'\left(0\right)=1$

2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε:

α. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(x_0-h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=-f'\left(x_0\right)$

β. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}=2f'\left(x_0\right)$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε :



Α. Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

Β. Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

Γ. Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t=2$ sec, ποιο τη χρονική στιγμή $t=4$ sec και ποιο τη χρονική στιγμή $t=6$ sec;

Δ. Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;

Ε. Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

ΣΤ. Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\ \frac{1}{\xi}\right)$. Αν Α, Β είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

Α. Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

α. $f(x)=x^{\ln x}$ **β.** $f(x)=2^{5x-3}$

γ. $f(x)=(\ln x)^x,\ x>1$ **δ.** $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

6. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε:

$$f(0)=4,\ f'(-1)=2,\ f''(2)=4,\ f^{(3)}(1)=6$$

7. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=a$, να αποδείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(x)-af(a)}{x-a}=f(a)+af'(a)$

β. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x f(x)-e^a f(a)}{x-a}=e^a\left(f(a)+f'(a)\right)$

8. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ **β.** $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,\ 0)$ σε καθεμιά περίπτωση χωριστά.

9. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα

$g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε οτι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0,\ g(0))$.

10. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \quad \text{για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Α. Να βρείτε την $f'(0)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

11. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.

12. **Α.** Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\eta\mu \frac{x}{2} = x,$$

αληθεύει μόνο για $x = 0$.

13. **Α.** Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Β. Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

να αποδείξετε ότι για όλα τα $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

14. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,\ 4\right]$ και ισχύει:

$$2 \le f'(x) \le 5 \text{ για κάθε } x \in \left(0,\ 4\right).$$

Αν $f\left(0\right) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \le f\left(4\right) \le 21$.

15. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\left[-1,\ 1\right]$ και ισχύει $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in \left(-1,\ 1\right)$. Αν $f\left(-1\right) = -1$ και $f\left(1\right) = 1$, να αποδείξετε ότι $f\left(0\right) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-1,\ 0\right]$ και $\left[0,\ 1\right]$.

16. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f\left(x\right) = 2^x \text{ και } g\left(x\right) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία, τα $A\left(0,\ 1\right)$, $B\left(1,\ 2\right)$.

17. Να αποδείξετε ότι :

Α. Η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$$

είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Β. Η εξίσωση:

$$x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$$

είναι ισοδύναμη με την:

$$f\left(x\right) = a$$

και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

18. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x,$$

είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Β. $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

είναι γνησίως αύξουσα.

Β. $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x - x + 3,\ x \in [0,\ \pi]$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,\ \pi)$.

21. **Α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3.$$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = x\ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

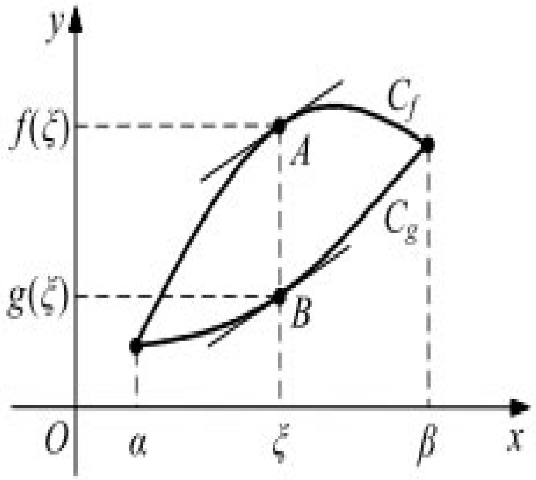
i. **α)** $e^x > 1+x$ **β)** $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$

ii. **α)** $\sigma\upsilon\nu x > 1-\frac{1}{2}x^2$ **β)** $\eta\mu x > x-\frac{1}{6}x^3$

iii. **α)** $(1+x)^\nu \geq 1+\nu x,\ \nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq 2$

β) $(1+x)^\nu \geq 1+\nu x+\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2,\ \nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq 3$

23. Στο επόμενο σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα $[\alpha,\ \beta]$. Το σημείο $\xi\in[\alpha,\ \beta]$ είναι το σημείο στο οποίο η καρακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή .



Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi,\ f(\xi))$ και $B(\xi,\ g(\xi))$ είναι παράλληλες.

24. Δίνεται η συνάρτηση:

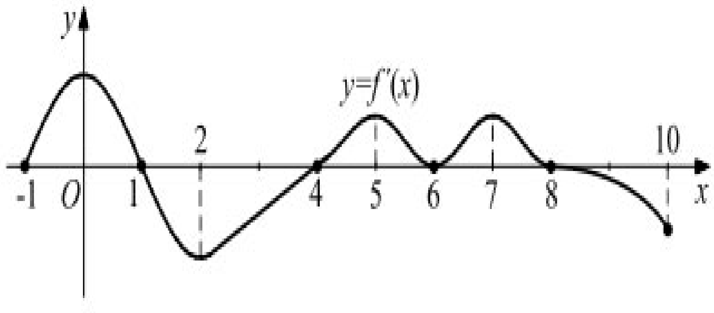
$$f(x)=\sqrt{x}$$

και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$.

Α. Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

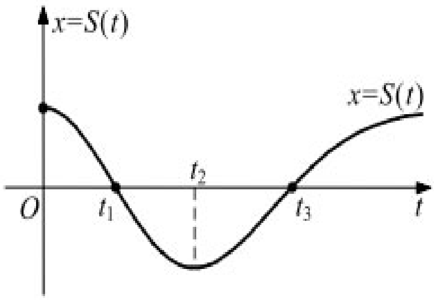
Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

26. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.



Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:

Α. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά;

Β. Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

27. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$$A(x_1, f(x_1)),\ B(x_2, f(x_2)),\ \Gamma(x_3, f(x_3))$$

είναι συνευθειακά.

28. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,\ 2]$, για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, ενώ

Β. Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)\ln x, & x \in (0,\ 1] \end{cases}$$

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \text{ και } \lim_{x \to 0} x \ln x.$$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $0(0,\ 0)$.

31. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α. $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ **β.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ **γ.** $f(x)=x^4-2x^2$

32. Ομοίως τις συναρτήσεις :

α. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ **β.** $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

33. Αν $f,\ g$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=g(0)$ και $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x)<g(x)$ στο $(-\infty,\ 0)$ και $f(x)>g(x)$ στο $(0,\ +\infty)$.

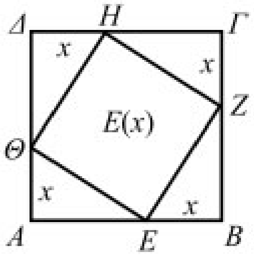
34. **Α.** Αν $a,\ \beta>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, να αποδείξετε ότι $a\cdot\beta=1$.

Β. Αν $a>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $a^x\geq x+1$, να αποδείξετε ότι $a=e$.

35. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10\text{cm}^2/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r=85$ cm.

36. Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0),\ A(x,0),\ B(0,\ln x),\ x>1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν $x=5$.

37. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,



Α. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Β. Να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν E(x) του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.

38. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

39. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=2e^{x-a}-x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y=-x^2+2$.

41. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων:

α. $f(x)=e^{-x^2}$ **β.** $g(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **γ.** $h(x)=x|x|$

δ. $\varphi(x)=\sqrt{|x|}$ **στ.** $\psi(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$

Β.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^{x-2}+x-3.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=4x^3+2(\lambda-1)x-\lambda.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(0,\ 1)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\left(x^2\right).$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

Β. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{4}{x},\ x\neq 0$$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ με $x_0\neq 0$.

Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

Γ. Αν A και B τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος AB.

5. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x, & x\geq 0 \\ 5\eta\mu x, & x<0 \end{cases}.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-3x+1.$$

Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

Α. Να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

Β. Να σχηματίζει γωνία 135^0 με τον άξονα $x'x$.

Γ. Να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ. Να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

7. Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

α. $x^{\eta\mu x},\ x>0$ **β.** $2^{x\cdot\ln x},\ x>0$ **γ.** $\sqrt{5x^8+1}$

8. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\leq f(x)\leq x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \textbf{(1),}$$

τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}$ **β.** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

10. Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $0(0,\ 0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες $Ox,\ Oy$ και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\dfrac{1}{4}x+2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του $\alpha,\ \beta$, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

11. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

12. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=e^x\cdot \eta\mu x.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x)+2f'(x)=2f''(x).$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$2\ln\left(x-1\right)\le x-3+\ln 4 \text{ για κάθε } x>1.$$

14. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A\left(1,\ 1\right)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^4+24x^2+4x-40=0$$

έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-4x+3.$$

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία:

$$\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7.$$

Β. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $0\left(0,\ 0\right)$.

Γ. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A\left(2,\ 0\right)$;

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \kappa \cdot x - 1,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

Α. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(0,\ f(0)\big)$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του κ .

Β. Αν $\kappa = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

18. Α. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 24x^2 + 5x - 7,\ a \in \mathbb{R}\,.$$

Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του a , ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β. Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A\big(1,\ f(1)\big)$;

19. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **β.** $e^{x^2} \geq 1 - x$, για κάθε $x \geq 0$.

Β.3. Προτεινόμενα

1. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{Z}$ είναι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη; Δύο φορές παραγωγίσιμη;

2. Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \ldots + a_n \sin(nx)\right| \leq |\sin x|$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\left|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right| \leq 1$$

3. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$3^x + 4^x = 5^x$$

έχει μοναδική λύση.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$a^x + b^x = c^x \text{ με } 0 < a < b < c$$

έχει μοναδική λύση.

4. **Α.** Αν $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Β. Αν $f:[0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = f\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,a)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln x,\ x > 0\ .$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μοναδική ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

Β. Για τη ρίζα x_0 της εξίσωσης $f(x) = 0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = f'(x_0)$$

6. Να υπολογίσετε το όρια:

Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} - e^x}{\sqrt{x+2} + e^x}$ **Β.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x + \ln x}{e^x + x + 3\ln x}$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

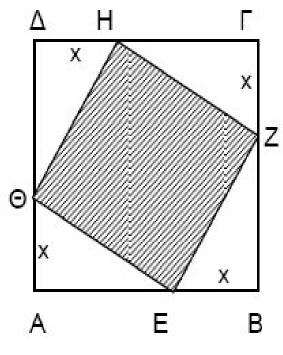
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \beta,\ x \le 0 \\ x + 5,\ x > 0 \end{cases}$$

Α. Να αποδείξετε ότι $\beta = 5$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

8. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του επόμενου σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Α. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

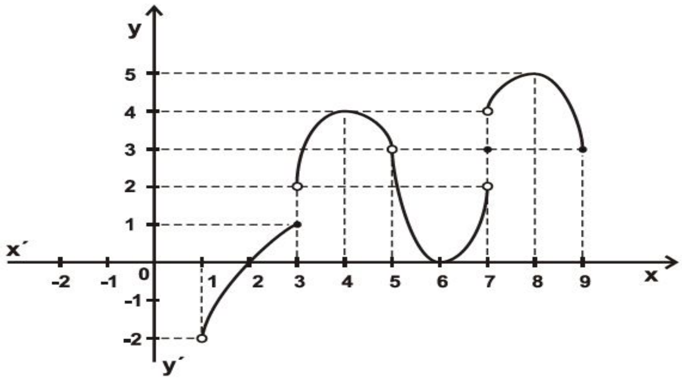
Β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ \ 0 \le x \le 2$$

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1\ cm^2$

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \; x \in \mathbb{R} \; .$$

Α. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Γ. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασηs της f.

Δ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

Α. Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Β. Αν $a = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Γ. Για την παραπάνω τιμή του a, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \le 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Α. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

Β. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[-1, \; 1]$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \; \frac{5}{4}\right)$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x,\ x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{1-x},\ x \neq 1.$$

Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog

Β. Αν :

$$h(x) = \left(fog\right)(x) = \ln\frac{x}{1-x},\ x \in \left(0,1\right),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ. Αν:

$$\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1},\ x \in \mathbb{R},$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

14. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0.

Είναι παραγωγίσιμη στο 0 για την τιμή του α που βρήκατε;

15. Α. Έστω $f:\left[0,1\right] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0,1\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$f\left(\xi\right) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right).$$

Β. ‘Εστω $f:\left[0,1\right] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $f(0) = f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0,1\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$f'\left(\xi\right) = f(\xi)$$

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{|x|},\ x\in[-1,\beta]-\{0\},\ \beta\geq 1$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Β. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, αν και μόνο αν, $\beta\geq 1+\sqrt{2}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Β. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

Γ. Αν $g(x)=\sqrt[3]{x},\ x\geq 0$ να βρείτε την fog.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Σχολικού Βιβλίου

1. **Α.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}.$$

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$a^{a+1}>\left(a+1\right)^{a} \text{ για κάθε } a>e\ .$$

Γ. Να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύει:

$$2^{x}=x^{2}\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(2\right)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^{x}=x^{2}$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$, $x_2=4$.

2. **Α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=e^{x}$$

είναι κυρτή, ενώ η συνάρτηση:

$$g\left(x\right)=\ln x$$

είναι κοίλη.

Β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0,\ 1\right)$ και της C_g στο $B\left(1,\ 0\right)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α. $e^{x}\geq x+1$, $x\in\mathbb{R}$. **β.** $\ln x\leq x-1$, $x\in\left(0,\ +\infty\right)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

Δ. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

3. Α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

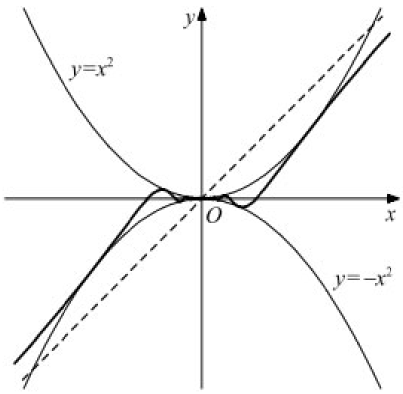
$$f(x) = e^x - \lambda x,\ \lambda > 0 .$$

Β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $e^x \ge \lambda x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Να αποδείξετε ότι:

Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y = 0$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,\ 0)$.

Β. Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f.

Γ. Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

5. Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0 \text{ και } \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \ (1).$$

Να αποδείξετε ότι :

Α. Η συνάρτηση:

$$\psi(x) = \left[\varphi'(x)\right]^2 + \left[\varphi(x)\right]^2$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

Β. $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \text{ και } f''(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$g(0) = 1,\ g'(0) = 0 \text{ και } g''(x) + g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

α. Οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = f(x) - \eta\mu x \text{ και } \psi(x) = g(x) - \sigma\upsilon\nu x$$

ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος Α.

β. $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει:

$$f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3 \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R} \ ,$$

να αποδείξετε ότι :

α. $f(1) = 2$ **β.** $f'(1)=3$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x < 0 \\ \eta\mu x + 1, & x \geq 0 \end{cases} ,$$

να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα των $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

8. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

στο $x_0 = 0$.

9. Αν ισχύει:

$$x+1 \le f(x) \le x^2 + x + 1 \quad \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

, να αποδείξετε ότι:

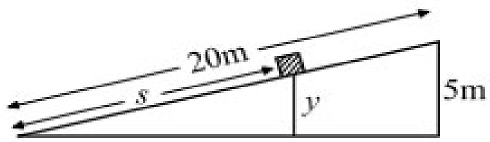
α. $f(0)=1$

β. $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1$ για κάθε $x<0$ και

$1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1$ για κάθε $x>0$

γ. $f'(0)=1$

10. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y.



11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$$

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,\ 1)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-1)\eta\mu x$$

Να αποδείξετε ότι :

Α. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Β. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 1 - x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

13. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το R ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x,y \in \mathbf{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

14. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot (x-\beta)^2 \cdot (x-\gamma)^2 \quad , \text{με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

15. Με ένα σύρμα μήκους 4m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

Α. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

Β. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

Γ.2. Ψηφιακό Βοήθημα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{2x} + 5x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5.$$

2. Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)\cdot e^{y} + f(y)\cdot e^{x}, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Α. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με:

$$f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}.$$

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $a,\ \beta$ ισχύει:

$$\alpha^{x} + \beta^{x} \geq 5e^{x} - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να δείξετε ότι $a\cdot\beta = e^{5}$.

4. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,\ 1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,\ 1)$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,\ 1)$.

Α. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση:

$$h(x) = f^{2}(x)\cdot e^{g(x)}$$

στο διάστημα $[0,\ 1]$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

5. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε:

Α. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \lambda x\right).$$

Β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1.$$

6. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2011.$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}.$$

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$.

8. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,\ 3]$.

Να δείξετε ότι:

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$

9. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,\ 0)$, $B(x,\ \ln x)$, $\Gamma(x,\ 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x = 2\ cm$. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0{,}5 cm/\sec$.

10. Α. Να αποδείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.

Β. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 - 3x - 1,$$

να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

11. Έστω $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,\ 2)$.

12. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,\ 3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,\ 3) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

13. Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$f\left(e^x\cdot \eta\mu x\right)=2\cdot e^x \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,\ f(0))$ είναι η $y=2x+2$.

Γ. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $x=2\ cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

14. **Α.** Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

β. Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

Β. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

15. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\ \dfrac{1}{\pi}\right]$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x,$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\ \dfrac{1}{\pi}\right)$.

16. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{α.}\ \lim_{x\to 0^+} x^x \quad , \quad \textbf{β.}\ \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

17. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και } x\cdot f'(x)=-3f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$.

Β. Να βρείτε τον τύπο της f.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

18. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2x^3-15x^2+24x.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

19. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } P'(1)=2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\ \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

21. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{α.}\ \lim_{x \to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad , \quad \textbf{β.}\ \lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,\ 6] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,\ 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\ 6)$ με $f(1)=f(6)$.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\ 6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2 \in (1,\ 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - \eta\mu x.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

24. Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(2)=5,\ f(1)=3 \text{ και } f(x)\le 2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi)=0.$$

Γ.3. Προτεινόμενα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x\neq 0,\ x\neq 1 \ \textit{και}\ x\neq -1\\ \kappa, & \text{αν } x=1\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

και $$g(x)=f(x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x>0\ .$$

Α. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ καθώς και την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Β. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία της.

β. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1}\leq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)},\ \text{αν}\ \ x>1\ \ \text{και}\ \ e^{-x^2+1}\geq\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2(x-1)},\ \text{αν}\ \ 0<x<1$$

Γ. α. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα κοίλα της στο διάστημα $(0,\ +\infty)$ και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στα σημεία $A\big(2,\ g(2)\big)$ και $B\big(1,\ g(1)\big)$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x)\leq e^{-x^2}(x-1),\ \text{για κάθε}\ x\in\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)\quad \text{και}$$

$$e^{-x^2}\geq e^{-1},\ \text{για κάθε}\ x\in\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=e^{x}+x^{2}+x$$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $a\in\left(-1,\ 0\right)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$e^{a}+2a+1=0\,.$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$f\left(x\right)\geq a^{2}-a-1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου a ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Γ. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f\left(x\right)=\frac{2017}{2016}\,.$$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^{2}+1\right)+f\left(x^{2}+2\right)<f\left(x^{2}\right)+f\left(x^{2}+3\right)\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x>0$$

Ε. Έστω ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x\left(t_0\right)\in\left(-1,\ 0\right)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς το χρόνο, να μηδενίζεται.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\left(x^{2}+1\right)\cdot\ln x,\ x>0\,.$$

Α. Να δείξετε ότι:

$$2x\cdot\ln x+\frac{1}{x}>0\ \text{για κάθε}\ x>0\ .$$

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x\right)=0\ .$$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

Δ. α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

4. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο $f'(0) \neq 0$, για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} - e \cdot f(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρεθεί το $f(0)$.

Γ2. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0, \text{ για κάθε } x \neq 0,$$

να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2\right) - f(1 + 2\ln x) \geq 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

5. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Γ3. Αν για τους αριθμούς $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2,$$

να υπολογίσετε τους $a,\ \beta$.

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{\ln x+1}{x},\ x>0 \quad \text{και} \quad f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x+g(a),\ x\in\mathbb{R} \text{ όπου } a>0.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Για τις διάφορες τιμές του a, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ. Για $a=1$

α. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $M(0,\ -2)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης C_f της f.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $N(x(t),\ y(t))$ της C_f, με $x(t)\in(0,\ 1)$, όπου κατά τη χρονική στιγμή t_0, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι διπλάσιος από αυτόν της τετμημένης του, αν υποθέσουμε ότι αυτοί οι ρυθμοί μεταβολής τη χρονική στιγμή t_0 είναι μη μηδενικοί.

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x+1)-g(x)\right].$$

7. Έστω μία συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1)=0,\ f'(1)=1 \text{ και}$$

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=2\ln x+3, \text{ για κάθε } x>0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x(2\ln x+1),\ x>0$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0,\ +\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln x,\ x>0.$$

Γ. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Αν ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος σε sec και $x(t) > 1$, κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης C_{fof} της fof με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με 1 $cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία $x(t_0) = 2\ cm$.

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right| < \sqrt{f(a)\cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } a,\ \beta \in \left(0,\ \frac{1}{e}\right] \text{ με } a < \beta\ .$$

8. Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,\ 2]$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\left[f\left(x\right)\right]^2 - xf\left(x\right) + x^2 - 3 = 0 \text{, για κάθε } x \in [-2,\ 2]$$

Α. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x = a$ ($0 < \alpha < 2$), να αποδείξετε ότι $f\left(a\right) = 2a$ και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το a.

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f δεν έχει σημεία καμπής.

Γ. Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε:

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

είναι αδύνατη.

β. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g$ με g παραγωγίσμιμη στο $(1,\ +\infty)$, για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f(x)-1\geq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } g'(x)\ln x=\frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x>1$$

Α. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

Β. Αν $g(e)=-1$, να δείξετε ότι:

$$g(x)=-\ln^2 x,$$

για κάθε $x\in(1,\ +\infty)$.

Γ. $g(x)=-(\ln x)^2$ σε όλο το διάστημα $(0,\ +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή $x_0\in(0,\ 1)$, για την οποία η διαφορά $f(x)-g(x)$ γίνεται ελάχιστη.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων Μ, Ν με $M(\xi,\ f(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f και $N(\xi,\ g(\xi))$ σημείο της γραφικής παράστασης C_g της g με $\xi\in(0,\ +\infty)$, στα οποία οι C_f και C_g δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα.

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1)+\frac{g(x)}{f(x)}}\right]$$

10. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,\ 4]$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

Α. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi)=-f'(\xi).$$

Γ. Η εξίσωση:

$$f'(x)=\left(e^x+x^2\right)f(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

11. Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\frac{2}{\pi} x \le \sin x \le x$$

Β. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f(0) = 0,\ f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β. Αν επιπλέον ισχύει $f'(0) \ge 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x^2)}{f(x)} = +\infty.$$

12. Α. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε:

$$|f'(x)| \le \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x + \sqrt{x}) - f(x) \right) = 0$$

Β. Έστω $p(x)$ πολυώνυμο n βαθμού. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = p(x)$ έχει το πολύ $n+1$ λύσεις.

13. Α. Να δείξετε ότι για κάθε $a > 1$ και $0 < x < y$ ισχύει ότι:

$$a x^{a-1}(y - x) < y^a - x^a < a y^{a-1}(y - x)$$

Β. α. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(a) + f(\beta) \ge 2 \cdot f\left(\frac{a + \beta}{2}\right), \text{ για κάθε } \alpha,\ \beta \in \Delta.$$

Αντίστοιχα, αν f κοίλη σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(a)+f(\beta)\le 2\cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\text{, για κάθε } \alpha,\ \beta\in\Delta .$$

(Ανισότητες jensen)

β. Να δείξετε ότι για κάθε $x, y>0$ ισχύει ότι:

$$(x+y)^{x+y}\le 2^{x+y}\cdot x^x\cdot y^y$$

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ \ f''(0)=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x=e^{\frac{a^2}{2}}$$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x-1},\ x\ge 1 \text{ και } g(x)=\frac{3-5x}{x-2},\ x\ne 2 .$$

Α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog .

Β. Αν είναι:

$$\varphi(x)=(fog)(x)=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}},\ x\in\left[\frac{5}{6},\ 2\right)$$

να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

16. Α. Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(x)=|x-1|\cdot g(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή $g(1)$.

Β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f(2+x)-f(2-x)=2x,\ x\in\mathbb{R},$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

17. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha \in (-1,\ 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$e^{\alpha} + 2\alpha + 1 = 0\,.$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1\,,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

Γ. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \frac{2017}{2016}\,.$$

Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(x^2+1\right) + f\left(x^2+2\right) < f\left(x^2\right) + f\left(x^2+3\right)\text{, για κάθε } x > 0$$

Ε. Έστω ένα σημείο $M\left(x(t),\ y(t)\right)$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0, με $x(t_0) \in (-1,\ 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M, ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

18. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, το $\mathrm{A}(-1,\ -1)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει:

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \leq |x-y| \leq \left|f(x) - f(y)\right|\text{, για κάθε } x,\ y \in \mathbb{R}\,.$$

β. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$$

19. Α. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Β. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Γ. Αν:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Δ. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(|\eta\mu x| + 3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) = f(x+3) - f(x), \text{ όταν } x \in [0,\ +\infty).$$

20. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) \cdot f'(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

Α. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\ .$$

Β. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο;

$$\lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - \lambda x\right).$$

Γ. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1,\ +\infty)$.

Δ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

στο $\mathbb{R}$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Γ. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

22. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x.$$

Δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)}{e^{f(x)}}.$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» και να βρείτε την f^{-1}.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(2^{x^2-9}+3-x\right)=f\left(2^{x-3}+9-x^2\right)$$

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\left(x_0-2\right)e^{x_0}+x_0=0$$

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=\frac{e^{2x-2}-1}{e^{x-1}}$$

Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>2x$$

για κάθε $x>0$.

24. Δίνονται οι επόμενες συναρτήσεις:

$$f(x)=(1-x)e^x, x>0 \text{ και } g(x)=(1+x)e^{-x}, x>0$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Οι f και g είναι φθίνουσες.

Β. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$$

25. Να αποδείξετε ότι:

Α. $\eta\mu x>x-\frac{1}{6}x^3,\ x>0$

Β. $(x+2)+(x-2)e^x>0,\ x>0$

Γ. $\varepsilon\varphi x>x+\frac{x^3}{3},\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

Δ. $(x+2)\ln(x+1)>2x,\ x>0$

26. Να αποδείξεε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^a\cdot e^{-x}\right)=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

27. Να βρείτε τις σταθερές a και β ώστε το όριο:

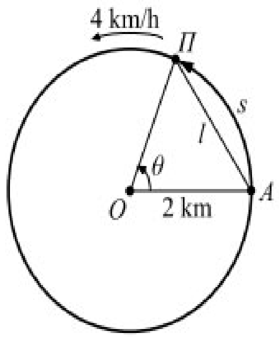
$$\lim_{x\to0}\frac{x(1+a\sigma\upsilon\nu x)-\beta\eta\mu x}{x^3}$$

να ισούται με 1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Σχολικού Βιβλίου

1. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας ρ = 2km με ταχύτητα υ = 4km/h. Αν S είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και ℓ το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιμή t:



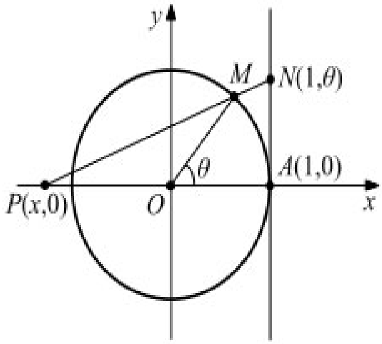
Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $\theta = \dfrac{S}{2}$ και $l = 4\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$, **β.** $S = 4t,\ \theta = 2t$ και $l = 4\eta\mu t$.

Β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ, όταν:

α. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, **β.** $\theta = \pi$ και **γ.** $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$;

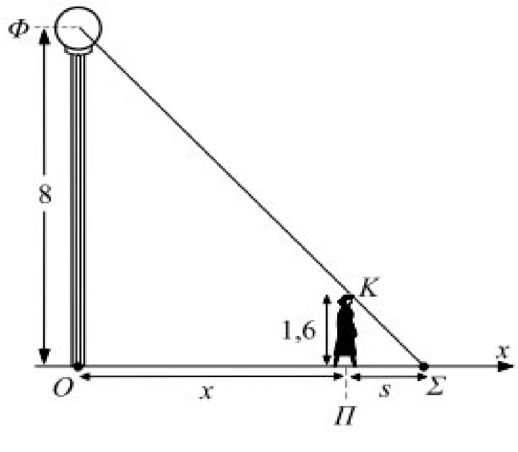
2. Στο επόμενο σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο Α. Το τόξο ΑΜ είναι θ rad και το ευθ. τμήμα ΑΝ είναι θ cm. Η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(x,\ 0)$.



Να δείξετε ότι :

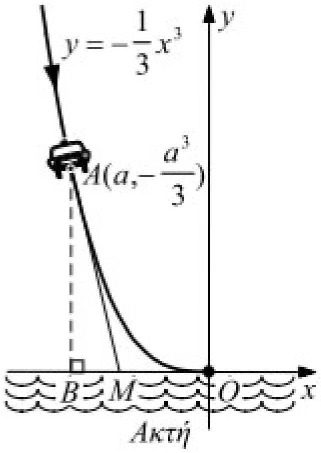
Α. $x=\dfrac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\theta-\eta\mu\theta}=x(\theta)$ **Β.** $\lim\limits_{x\to 0}x(\theta)=-2$

3. Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;

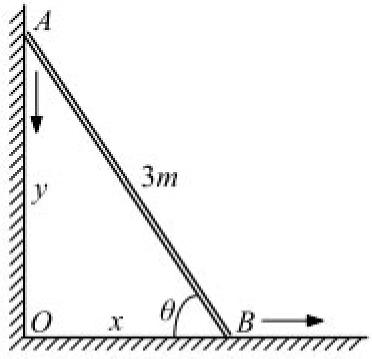


4. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\dfrac{1}{3}x^3,\ x\le 0$,

πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη − 3.



5. Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec.



Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

Α. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

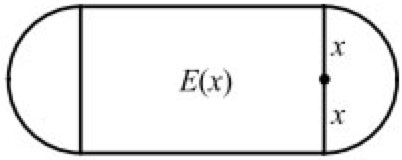
Β. Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.

6. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [α,β] και στη συνέχεια ότι:

$$e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$$

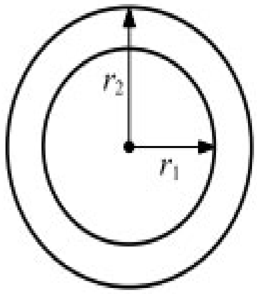
Για τη συνάρτηση $g(x)=\ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0<a<\beta$.

7. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



8. Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος.

Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή t =0 είναι r_1 = 3cm και r_2 = 5cm και ότι για t > 0 η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s.

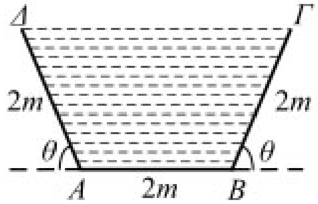


Να βρείτε:

Α. Πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

Β. Πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

9. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

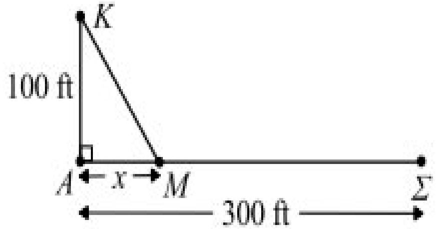


Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με:

$$\mathrm{E} = 4\eta\mu\theta\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)$$

Β. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

10. Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft [1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.

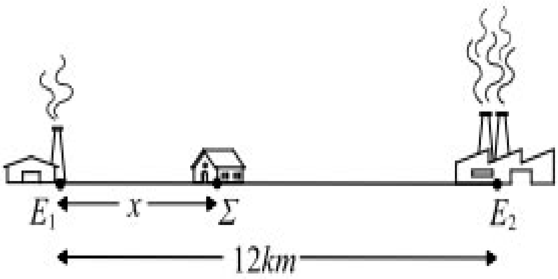


Α. Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο:

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

Β. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

11. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και 8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).



(1ft = 30,48 cm)

Δ.2. Ψηφιακό βοήθημα- study for exams

1. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) < x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση:

$$g(x) = 3f(x) - x^3$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

Β. $f(2) - f(1) < 3$,

Γ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) < 3.$$

2. **Α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$g(x) = x - \ln x.$$

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x.$$

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. **Α.** Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$.

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$f(x)=e^{x}\cdot\ln x,$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και
- $f'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x=f(x)\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^{\lambda x}}{x+1},\ x>-1 \ \text{ και } \ \lambda>0 .$$

Α. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

Β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

6. **Α.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^{x}+2^{x}=5^{x}.$$

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=-2f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=e^{2x}\cdot f(x),$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=1$.

γ. Αν $h,\ \varphi$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με:

$$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } h(0)=\varphi(0),$$

τότε να δείξετε ότι $h=\varphi$.

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \cdot e^x$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.

Ε. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2 + 4x + 3\right) \cdot e^x \geq 7x + 3, \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

8. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln\left(x+1\right) - 1.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Ε. Αν για τους αριθμούς $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{\alpha+2\beta-1} - \ln\left(2\alpha + \beta\right) + e^{2\alpha+\beta-2} - \ln\left(\alpha + 2\beta - 1\right) \leq 2,$$

να υπολογίσετε τους $a,\ \beta$.

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2x}},\ x > 0$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x,\ x > 0 .$$

Α. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 ,$$

για κάθε $x > 0$.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 .$$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο

$A(x_0,\ f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1).$$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} .$$

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \text{, για κάθε } x > 0 .$$

13. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},\ 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$

με: $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(\xi,\ f(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

Β. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\left(\gamma,\ f(\gamma)\right)$ να διέρχεται από το $O\left(0,\ 0\right)$.

14. Α. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(a)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right),\ \text{για κάθε } \alpha,\ \beta\in\Delta.$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β. Αν $a>\frac{1}{e},\ \beta>\frac{1}{e}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2 a}{\ln a+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{a\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{a\cdot\beta}\right)+1}$$

Δ.3. Προτεινόμενα

1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R},\ \mathrm{A}=(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$, τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$.

Γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία, $A\left(x,\ f^{-1}(x)\right)$ και $B\left(f^{-1}(x),\ x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων $A,\ B$ γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1,\ +\infty)$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+x\ln x}{x\ln x}\ ,$$

για κάθε $x>1$ με $f(e)=e^e$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=e^x\cdot\ln x,\ x>1$$

καθώς και ότι οι συναρτήσεις;

$$g(x)=e^x,\ h(x)=\ln x,$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1,\ +\infty)$.

Β.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών

της.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x)=\frac{\lambda}{x}\quad \text{με}\quad \lambda\in\mathbb{R},\ x>1.$$

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e,\ f(e))$.

Δ. Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{f(x)}{e^{e-1}}\geq(1+e)x-e^2$ για κάθε $x>1$ και

β. $\int_2^3 f(x)dx\geq e^{e-1}\cdot\dfrac{5+5e-2e^2}{2}$

Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\quad,\ \text{για κάθε}\ x_1,\ x_2\in(1,\ +\infty)\ \text{με}\ x_1<x_2$$

3. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)+f(1-x)=0,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\ \text{και}\ f'(x)\neq 0\ ,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

Α. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=2f(1).$$

Γ. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 20e^x + 4x^5 - 5x^4 - 20x^2 + 20x, \ x \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , τότε:

α. Να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\ln\left(x^2 + x + 1\right)\right) = f\left(x^2 + x\right)$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(x \cdot e^x\right) > f\left(e^x - 1\right).$$

Γ. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = x + c - 2\sqrt{c \cdot x} \ , \text{ με } x, \ c > 0 \text{ και } c \text{ σταθερά.}$$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $c > 0$ ισχύει:

$$f(c^3 + 4c^2 + 5c + 2) > f(8c\sqrt{2c}).$$

5. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Α. Να δείξετε ότι:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$$

Β. Να δείξετε ότι:

$$f^{(n)}(0) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Γ. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2}$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

Γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να χαράξετε τη γραφική παράστασή της.

Ε. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^3 + (1-\lambda)x^2 + 3x - 1 = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} = (a \cdot x)^{\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x > 0 \text{, όπου } a > 0$$

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Β. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτομένες στο $A(x_0, f(x_0))$ καθώς το $a > 0$ μεταβάλλεται διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Γ. Αν $a = 1$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \ln(x \cdot f(x)), \ x > 1$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώςσημείο.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f\left(x+y\right)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι:

Α. $f'(x)\cdot f(y)=f(x)\cdot f'(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Β. Υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο , ώστε:

$$f'(x)=cf(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ. $f(x)=e^{cx}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Αν f συνεχής για $x\geq 0$ με $f(0)=0$ και παραγωγίσιμη για $x>0$ με την f' γνησίως αύξουσα , να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύουν:

Δ1. $f(x)=xf'(\theta x),\ 0<\theta<1$

Δ2. $f(x)<xf'(x)$

Δ3. Η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

10. Α. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $\left[a,\beta\right]$ με $f'(\alpha)\neq f'(\beta)$ και κ ένας αριθμός μεταξύ των $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in\left(a,\beta\right)$, τέτοιο ώστε $f'(c)=\kappa$.

(Θεώρημα Darboux)

Β. Έστω $f:\left[0,2\right]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\left[0,2\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0,2\right)$ με:

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=1$$

Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $c_1\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(c_1)=1$.

β. υπάρχει $c_2\in\left(1,2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(c_2)=0$.

γ. υπάρχει $c\in\left(0,2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(c)=\dfrac{1}{3}$.

11. Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0]\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

είναι συνεχής.

12. Α. Αν η $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ και $0\le x\le 1$, να αποδείξετε ότι:

$$a^x\cdot\beta^{1-x}\le ax+(1-x)\beta$$

Β. α. Αν η δύο φορές παραγωγίσμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι κοίλη,

να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_\nu}{\nu}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+...f(x_\nu)}{\nu}$$

με $x_1,\ x_2,...,\ x_\nu\in(\alpha,\beta)$

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[\nu]{\eta\mu x_1\cdot\eta\mu x_2...\eta\mu x_\nu}\le\eta\mu\frac{x_1+x_2+...+x_\nu}{\nu}$$

αν $x_1,\ x_2,...,\ x_\nu\in(0,\pi)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\frac{2}{2-x^2},\ |x|<\sqrt{2}$$

Α. Να εξετάσετε αν υπάρχει η αντίστροφη της f στο διάστημα $(0,\sqrt{2})$.

Β. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} και να υπολογίσετε

το $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$.

Γ. Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$ χωρίς να ορίσετε τον τύπο της αντίστροφης.

14. Έστω μια συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και C_g η γραφική της

παράσταση. Επίσης έστω h η συνάρτηση:

$$h(x)=e^{g(x)}+e^{-g(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

και C_h η γραφική της παράσταση.

Α. Να υπολογίσετε την $h''(x)$.

Β. Αν η g για $x>0$ είναι γνησίως αύξουσα με:

$$g'(x)\neq 0 \text{ και } g(0)=1,$$

να εξετάσετε αν η h για $x>0$ είναι αντιστρέψιμη.

Γ. Αν η C_g έχει στη θέση x_1 σημείο καμπής με εφαπτομένη παράλληλη στην πρώτη διχοτόμο, να εξετάσετε αν η C_h έχει στη θέση x_1 σημείο καμπής.

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x)=\frac{2}{1+e^{f(x)}},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad f'(0)=1$$

Α. α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Β. α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

β. Να βρείτε την εφαπρομένη της C_f στο σημείο $M\left(0, f(0)\right)$.

γ. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\le x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ. α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)+e^{f(x)}=2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)<2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

γ. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Δ. α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\ge \ln(x+1)$$

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Α. Ψηφιακού Βοηθήματος

1ο

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν η συνάρτηση f δεν είναι στο συνεχής x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0, τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της $f+g$ στο x_0.

δ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right), \text{τ}$$

τότε υπάρχει καιτο όριο της g στο x_0.

ε. Αν $f(x)=x^x$, $x>0$, τότε:

$$f'(x)=x\cdot x^{x-1}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση:

$$f\left(f(x)\right)=2g(x)-x$$

Β1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της:

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

Μονάδες 5

Β3. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=x_0$

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f\left(x+x_0-2\right)\right)+x+x_0=2f\left(x+x_0-2\right)+2$$

Μονάδες 5

γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(\ln x+x_0+1\right)\right)+\ln x+1<x_0$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}, & -1\le x<0\\[2ex] a^2\ln(x+e)+2a+(\beta^2+\dfrac{1}{2})e^x, & x\ge 0\end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $a=-1$ και $\beta=0$,

α. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1}.$$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα *Οx* σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετετο όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,\ 1)$.

Δ1. **α.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-1}{x}$$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x} = 4f'(0)$$

Μονάδες 4

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει:

$$f^2(x)-4f(x) = x^2-3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν:

$$f(x) = 2-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτμένων της C_f, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Έστω σημείο M της C_f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων Ο με ταχύτητα $2cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ.

Μονάδες 6

Β. Προτεινόμενα

1ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

Α2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος του Rolle.

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(a) = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[a, \beta]$.

β. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

γ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ. Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ε. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0 \in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Μονάδες 13

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0 \quad .$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=x\cdot\ln x+2x-3,\ x\geq 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $x\geq 1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$(e-1)f'(\xi)+2=3e .$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3+\lambda x^2-3x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να βρείτε την τιμή του λ.

Μονάδες 4

Για $\lambda = 0$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) - \sqrt{x} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

2ο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

β. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Αν $f'(x)=x(x-1)^2\cdot(x-2)$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=0$ τοπικό μέγιστο.

δ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f\cdot g$ στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν

και τα όρια των συναρτήσεων f και g στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$.

ε. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ με $\alpha<\beta$, τότε ορίζεται η $\dfrac{1}{f'(x)}$ στο $[a,\beta]$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\sqrt{e^{x-1}-1}$$

Β1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

Β2. Να ορίσετε την συνάρτηση fog.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη ενώ η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

Μονάδες 8

Β4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g\left(\sqrt{x^3+x}\right)=g\left(\sqrt{4x^2}\right)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0$$

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Γ4. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\left(x\right) = a^x - \ln\left(x+1\right),\ x > -1$$

, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

Δ1. Αν ισχύει $f\left(x\right) \geq 1$ για κάθε $x \geq -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

Μονάδες 6

Δ2. Για $a = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,0\right)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta,\gamma \in \left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f\left(\beta\right)-1}{x-1} + \frac{f\left(\gamma\right)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα

Μονάδες 8