ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\sqrt{1-x}-1}$ και $\mathbf{g(x)=x^2}$.

Β1. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $\mathbf{g\circ f}$ και $\mathbf{f\circ g}$. *Μονάδες 6*

Β2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της. *Μονάδες 6*

Β3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x)=\frac{1}{4}-g(x)}$ έχει μία, τουλάχιστον, πραγματική ρίζα. *Μονάδες 8*

Β4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\mathbf{f}$. *Μονάδες 5*

Β1. Είναι $D_f=(-\infty,1]$ και $D_g=\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι: $D_{g\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\}=\{x\le 1\,/\,\sqrt{1-x}-1\in\mathbb{R}\}=(-\infty,1]$.

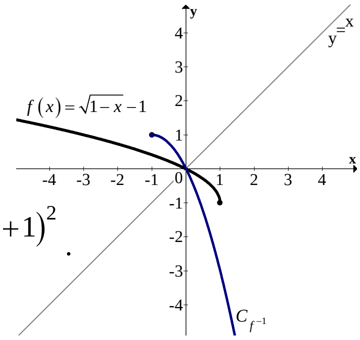
Για κάθε $x\in(-\infty,1]$ είναι: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(\sqrt{1-x}-1\right)^2=1-x-2\sqrt{1-x}+1=\mathbf{2-x-2\sqrt{1-x}}$.

Το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι: $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2\le 1\}=[-1,1]$.

Για κάθε $x\in[-1,1]$ είναι: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\mathbf{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Β2. Για κάθε $x_1,\ x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2\ \Rightarrow\ -x_1>-x_2\ \Rightarrow\ 1-x_1>1-x_2\ \Rightarrow\ \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \sqrt{1-x_1}-1>\sqrt{1-x_2}-1\ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)$. Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, άρα και $1-1$ και επομένως η f είναι αντιστρέψιμη.



Είναι: $y=f(x)\ \Leftrightarrow\ y=\sqrt{1-x}-1\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x}=y+1\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}1-x=(y+1)^2\\ y+1\ge 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ 1-(y+1)^2\le 1\\ y\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ -(y+1)^2\le 0\\ y\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ y\in\mathbb{R}\\ y\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-(y+1)^2\\ y\ge -1\end{cases}.$$

Άρα η αντίστροφη f^{-1} της f είναι: $f^{-1}(x)=1-(x+1)^2=1-\left(x^2+2x+1\right)=\mathbf{-x^2-2x}$, $x\ge -1$.

Β3. Είναι $f(x)=\frac{1}{4}-g(x)\ \Leftrightarrow\ f(x)-\frac{1}{4}+g(x)=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x}-1-\frac{1}{4}+x^2=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x}-\frac{5}{4}+x^2=0$,

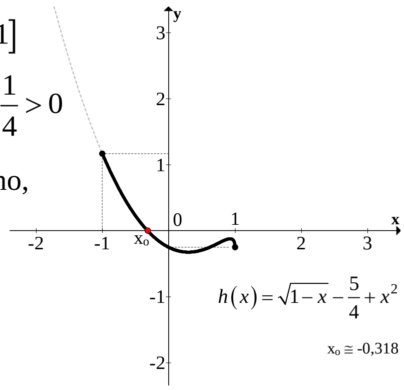
με $x\in D_f\cap D_g=(-\infty,1]$. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{1-x}-\frac{5}{4}+x^2$, με $x\in[-1,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών στο $[-1,1]$ συναρτήσεων και ισχύει: $h(-1)=\sqrt{1-(-1)}-\frac{5}{4}+(-1)^2=\sqrt{2}-\frac{5}{4}+1=\sqrt{2}-\frac{1}{4}>0$

και $h(1)=\sqrt{1-1}-\frac{5}{4}+1^2=-\frac{5}{4}+1=-\frac{1}{4}<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε

$h(x_0)=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1-x_0}-\frac{5}{4}+x_0^2=0$, οπότε η εξίσωση $\sqrt{1-x}-\frac{5}{4}+x^2=0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)\subseteq\mathbb{R}$.



Β4. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, οπότε $f(D_f)=[-1,+\infty)$.

2ος τρόπος: Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ το σύνολο τιμών της είναι το: $f(D_f)=\left[f(1),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με: $\mathbf{f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}, & \alpha\nu\ x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-x, & \alpha\nu\ x\geq 0\end{cases}}$.

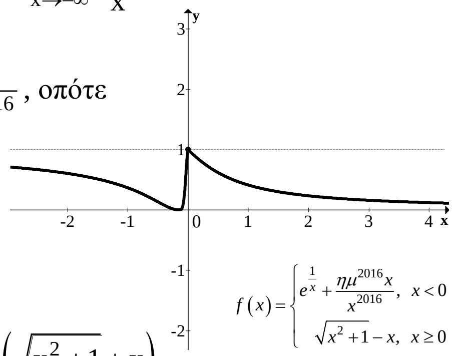
Γ1. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *Μονάδες 6*

Γ2. Να εξεταστεί η συνέχεια της $\mathbf{f}$ στο πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 8*

Γ3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\mathbf{f(x)=x}$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. *Μονάδες 6*

Γ4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(1,\,5)$ τέτοιο, ώστε: $\mathbf{9f(\xi)=2f(2)+3f(3)+4f(4)}$. *Μονάδες 5*

Γ1. Η f έχει $D_f=\mathbb{R}$ και είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=1+0=\mathbf{1}$, διότι:



$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u=e^0=1$ και $\left|\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right|=\dfrac{\left|\eta\mu^{2016}x\right|}{\left|x^{2016}\right|}=\dfrac{\left|\eta\mu^{2016}x\right|}{x^{2016}}\leq\dfrac{1}{x^{2016}}$, οπότε

$-\dfrac{1}{x^{2016}}\leq\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\leq\dfrac{1}{x^{2016}}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^{2016}}\right)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{2016}}$,

από το θεώρημα παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=0$.

Επίσης ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,\,0)$ και $(0,\,+\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών στο $(-\infty,\,0)$ και $(0,\,+\infty)$, αντίστοιχα, συναρτήσεων. Θα εξεταστεί η συνέχεια της f στο $x_0=0$.

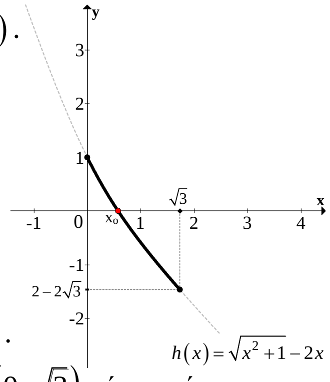
Ισχύει: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}\right)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=0+1=1$, διότι: $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=\varphi}{=}\lim\limits_{\varphi\to-\infty} e^{\varphi}=0$

και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^{2016}=\left(\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^{2016}=1^{2016}=1$. Επίσης ισχύει:

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\sqrt{0^2+1}-0=1$. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$, οπότε είναι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$ και επειδή $f(0)=1$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού ισχύει $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in\left[0,\,\sqrt{3}\right]$. Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\,\sqrt{3}\right]$, ως διαφορά συνεχών στο $\left[0,\,\sqrt{3}\right]$ συναρτήσεων και ισχύουν:



$h(0)=f(0)-0=\sqrt{0^2+1}-0-0=1>0$ και

$h\left(\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1}-\sqrt{3}-\sqrt{3}=2-2\sqrt{3}<0$, οπότε $h(0)\cdot h\left(\sqrt{3}\right)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano, προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\,\sqrt{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\ \Leftrightarrow\ f(x_0)-x_0=0\ \Leftrightarrow\ f(x_0)=x_0$. Επομένως η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\,\sqrt{3}\right)\subset\mathbb{R}$.

Γ4. Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Ισχύει: $0 \leq \underline{x_1 < x_2} \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων $x_1 < x_2$ και $\sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$ προκύπτει: $\sqrt{x_1^2+1}+x_1 < \sqrt{x_2^2+1}+x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1} > \dfrac{1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2} \Rightarrow \underline{f(x_1) > f(x_2)}$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα: $1<2<3<4<5 \Leftrightarrow f(1)>f(2)>f(3)>f(4)>f(5)$, οπότε είναι:

$f(1)>f(2)>f(5) \Leftrightarrow 2f(5)<2f(2)<2f(1)$ *(1)*,

$f(1)>f(3)>f(5) \Leftrightarrow 3f(5)<3f(3)<3f(1)$ *(2)*,

$f(1)>f(4)>f(5) \Leftrightarrow 4f(5)<4f(4)<4f(1)$ *(3)*.

Από την πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων *(1)*, *(2)* και *(3)* προκύπτει:

$$9f(5)<2f(2)+3f(3)+4f(4)<9f(1) \Leftrightarrow f(5)<\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}<f(1).$$

Επομένως, αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$, ως συνεχής στο $\mathbb{R}$, από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών προκύτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi)=2f(2)+3f(3)+4f(4).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)}$ με: $\mathbf{f(x+y)=f(x)\cdot f(y)}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in\mathbb{R}}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0=0}$ και $\mathbf{f(1)=e}$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι: *i)* $\mathbf{f(0)=1}$, *ii)* $\mathbf{f(-1)=\frac{1}{e}}$. *Μονάδες 6*

Δ2. Να αποδειχθεί ότι: *i)* η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, *ii)* η $\mathbf{f^{-1}}$ είναι γνησίως αύξουσα. *Μονάδες 6*

Δ3. *i)* Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}$, $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)}$.

ii) Να βρεθεί το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1-x)}{f(x)}}$. *Μονάδες 8*

Δ4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $\mathbf{f(x)=\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right)}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\mathbf{(0,1)}$. *Μονάδες 5*

Δ1. ***i)*** Για $x=y=0$ είναι: $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)\Leftrightarrow f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=1$.

Η τιμή $f(0)=0$ απορρίπτεται διότι $f(\mathbb{R})\subseteq(0,\ +\infty)$, άρα είναι $f(0)=1$.

ii) Για $x=1,\ y=-1$ είναι: $f(1-1)=f(1)\cdot f(-1)\Leftrightarrow f(0)=e\cdot f(-1)\Leftrightarrow 1=e\cdot f(-1)\Leftrightarrow f(-1)=\frac{1}{e}$.

Δ2. ***i)*** Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα ισχύει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$ *(1)*. Θα δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Θέτω $x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h$, οπότε $x\to x_0\Leftrightarrow h\to0$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to0}\big(f(x_0)\cdot f(h)\big)=\Big(\lim\limits_{h\to0}f(x_0)\Big)\cdot\Big(\lim\limits_{h\to0}f(h)\Big)=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to0}f(h)\overset{(1)}{=}$

$=f(x_0)\cdot1=f(x_0)$.

ii) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(0)=1$ και $f(-1)=\frac{1}{e}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι $1-1$ και άρα αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R})$ και ισχύει $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in f(\mathbb{R})$.

Έστω $y_1,y_2\in D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})$, με $y_1<y_2\Rightarrow f\big(f^{-1}(y_1)\big)<f\big(f^{-1}(y_2)\big)\overset{\text{f: γν.αύξ.}}{\Rightarrow}f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\mathbb{R})$.

Δ3. ***i)*** Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θέτω $x-x_0=h\Leftrightarrow x=x_0+h$, οπότε $x\to+\infty\Leftrightarrow h\to+\infty$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{h\to+\infty}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to+\infty}\big(f(x_0)\cdot f(h)\big)=\Big(\lim\limits_{h\to+\infty}f(x_0)\Big)\cdot\Big(\lim\limits_{h\to+\infty}f(h)\Big)=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to+\infty}f(h)=$

$=f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\big[1-f(x_0)\big]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ή $1-f(x_0)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ή $f(x_0)=1$.

Η σχέση $f(x_0)=1$ ισχύει μόνο όταν $x_0=0$, αφού $f(0)=1$ και η f είναι συνάρτηση $1-1$.

Επομένως είναι: $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

(*) : *Οι ισοδυναμίες βασίζονται στην μοναδικότητα του ορίου.*

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θέτω $x - x_0 = t \Leftrightarrow x = x_0 + t$, οπότε $x \to -\infty \Leftrightarrow t \to -\infty$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(x_0+t) = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(f(x_0)\cdot f(t)\right) = \left(\lim\limits_{t\to-\infty} f(x_0)\right)\cdot\left(\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)\right) = f(x_0)\cdot \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) =$

$= f(x_0)\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - f(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\left[1 - f(x_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ή $1 - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ή $f(x_0) = 1$.

Η σχέση $f(x_0) = 1$ ισχύει μόνο όταν $x_0 = 0$, αφού $f(0) = 1$ και η f είναι συνάρτηση $1-1$.

Επομένως είναι: $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Δ3. ***ii)*** Από τη δοθείσα σχέση για $y = -x$ προκύπτει: $f\left(x + (-x)\right) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *(2).*

Είναι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)\cdot f(-x)}{f(x)} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}{f(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)}{f^2(x)} = \dfrac{f(1)}{f^2(0)} = \dfrac{e}{1^2} = \mathbf{e}$.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ 1]$, αφού είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $0 < \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$, ισχύουν: $f(0) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1)$ *(1)*, $f(0) < f\left(\dfrac{1}{3}\right) < f(1)$ *(2)* και $f(0) < f\left(\dfrac{1}{4}\right) < f(1)$ *(3).*

Από την πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων *(1)*, *(2)* και *(3)* προκύπτει:

$$3f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) < 3f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} < f(1).$$

Επομένως, από το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{3} \Leftrightarrow f(x_0) = \dfrac{1}{3}\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$.