

ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 7)

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών.

(Μονάδες 8)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

β) Αν f συνεχής σε ένα οποιοδήποτε σύνολο A και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο A .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

δ) Αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$, τότε $(g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) ένα πολυώνυμο, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \text{ και } g(x) = x^2$$

B1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις gof και fog .

(Μονάδες 6)

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της.

(Μονάδες 6)

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4} - g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, πραγματική ρίζα.

(Μονάδες 8)

B4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu^{2016}x}{x^{2016}}, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} - x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να εξετάσετε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε:

$$9f(\xi) = 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ με:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $f(1) = e$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$(i) f(0) = 1 \qquad (ii) f(-1) = \frac{1}{e}$$

(Μονάδες 3+3=6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$(i) \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \qquad (ii) \text{ η } f^{-1} \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

(Μονάδες 3+3=6)

Δ3. (i) Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, να βρεθούν.

(ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x)}{f(x)}$

(Μονάδες 4+4=8)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \right)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

(Μονάδες 5)

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Καλή επιτυχία

