ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

1Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(Μονάδες 3)

Α2.

i) Έστω A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

ii) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(Μονάδες 2)

iii) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

(Μονάδες 2)

iv) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη* ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 2)

v) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0* ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

(Μονάδες 2)

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ),** αν είναι σωστή ή με **Λάθος (Λ),** αν είναι λανθασμένη :

α) Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0$.

ε) Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ΄ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=4$, $f(4)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Β₁. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

Β₂. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ f$ στο $\mathbb{R}$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $[-4,4]$.

(Μονάδες 5)

Β₃. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{1}{f(x)}$.

(Μονάδες 5)

Β₄. Αν $g(x)=f(x+1)-f(x)+1$, τότε:

i) Αποδείξτε ότι $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=0$.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in[0,3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=2\eta\mu x-3x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

(Μονάδες 2)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<0$.

(Μονάδες 5)

Γ₃. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_o = 0$.

(Μονάδες 3)

Γ₄. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(Μονάδες 5)

Γ₅. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής σε $x_0\neq 0$ αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

(Μονάδες 5)

Γ6. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+1$

Δ1. Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 4)

Δ2. Ισχύει $-1<f^{-1}(0)<0$.

(Μονάδες 2)

Δ3. Για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι ισχύει: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \le \frac{1}{2}|x-x_0|$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

(Μονάδες 3)

Δ5. Γνωρίζοντας ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)+x^3+1=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

Δ6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f^{-1}(x)-x$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$: $-\frac{3}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} \le -\frac{1}{2}$

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μία λύση.

(Μονάδες 3)

iii) Αν ξ είναι η μοναδική λύση στο ερώτημα (Δ5), να επιλυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(-1+\xi-g(2x+1-\eta\mu x)\right)<-\xi^3-1$.

(Μονάδες 3)

Καλή επιτυχία

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το Θέμα Β΄ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Το Θέμα Γ΄ επιμελήθηκε ο **Χήτος Γεώργιος**, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.

Το Θέμα Δ΄ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.