Διαγωνίσματα ψηφιακού βοηθήματος σχολικού έτους 2017-2018

Με τις λύσεις τους

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

1Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(Μονάδες 3)

Α2.

i) Έστω A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

ii) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(Μονάδες 2)

iii) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

(Μονάδες 2)

iv) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη* ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 2)

v) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0* ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

(Μονάδες 2)

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ),** αν είναι σωστή ή με **Λάθος (Λ),** αν είναι λανθασμένη :

α) Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

ε) Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ΄ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=4$, $f(4)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Β₁. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

Β₂. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ f$ στο $\mathbb{R}$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $[-4,4]$.

(Μονάδες 5)

Β₃. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{f(x)}$.

(Μονάδες 5)

Β₄. Αν $g(x) = f(x+1) - f(x) + 1$, τότε:

i) Αποδείξτε ότι $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=0$.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in[0,3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1) = f(\mu) - 1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 2f(x) = 2\eta\mu x - 3x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

(Μονάδες 2)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<0$.

(Μονάδες 5)

Γ₃. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_o = 0$.

(Μονάδες 3)

Γ₄. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(Μονάδες 5)

Γ₅. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής σε $x_0\neq 0$ αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

(Μονάδες 5)

Γ6. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+1$

Δ1. Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 4)

Δ2. Ισχύει $-1<f^{-1}(0)<0$.

(Μονάδες 2)

Δ3. Για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι ισχύει: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right| \le \frac{1}{2}|x-x_0|$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

(Μονάδες 3)

Δ5. Γνωρίζοντας ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)+x^3+1=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

Δ6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f^{-1}(x)-x$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$: $-\frac{3}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} \le -\frac{1}{2}$

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μία λύση.

(Μονάδες 3)

iii) Αν ξ είναι η μοναδική λύση στο ερώτημα (Δ5), να επιλυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(-1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right)\right)<-\xi^3-1$.

(Μονάδες 3)

Καλή επιτυχία

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το Θέμα Β΄ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Το Θέμα Γ΄ επιμελήθηκε ο **Χήτος Γεώργιος**, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.

Το Θέμα Δ΄ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 49.

Α2.

i) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

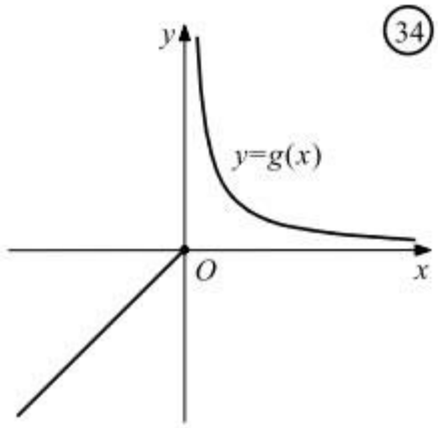
ii) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 51.

iii) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 32.

iv) α) Ψ.

β) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 35. Ως παράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση

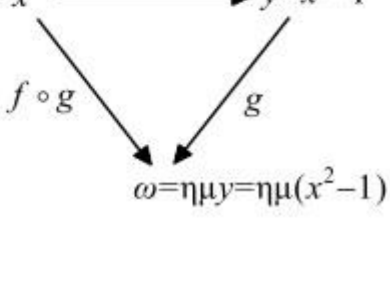
$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$, η οποία είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



v) α) Α.

β) Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 72.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση φ(x) = ημ(x^2 −1) είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f(x) = x^2 −1 και g(x) = ημx.



Α3. **1)** (σελ.74-75) Σ, **2)** (σελ.74) Λ, **3)** (σελ.18) Σ, **4)** (σελ.60) Σ, **5)** (σελ.43) Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- Έχουμε $0<4$ και $f(0)>f(4)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\left[0,+\infty\right)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.
- Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right]$ με $x_1<x_2\le 0$, έχουμε :

  $$x_1<x_2\le 0 \Leftrightarrow -x_1>-x_2\ge 0 \overset{f\downarrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1)<f(-x_2) \overset{f:\text{άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2).$$

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,0\right]$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(-\infty,0\right]$. Τότε το

  $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(0)\right]=\left(-\infty,4\right]$, αφού

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{u=-x}{=} \lim_{u\to+\infty} f(-u) \overset{f:\text{άρτια}}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u) \overset{\text{υπόθεση}}{=} -\infty \text{ και } f(0)=4.$$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[0,+\infty\right)$. Τότε το

  $f(A_2)==\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(0)\right]=\left(-\infty,4\right]$,
- Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

  $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,4\right]$.

Β2.

Είναι $D_f=A=\mathbb{R}$, οπότε $D_{f\circ f}=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\right\}$.

Προφανώς $f(x)\in\mathbb{R}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $D_{f\circ f}=\mathbb{R}$.

- Έχουμε: $-4\le x_1<x_2\le 0 \overset{f\gamma\nu.\text{αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(-4)\le f(x_1)<f(x_2)\le f(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le f(x_1)<f(x_2)\le 4 \overset{f\gamma\nu.\varphi\theta\text{ίνουσα}[0,4]}{\Leftrightarrow} f(f(x_1))>f(f(x_2))\Leftrightarrow \left(f\circ f\right)(x_1)>\left(f\circ f\right)(x_2)$. Άρα η $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-4,0\right]$.

- Όμοια αποδεικνύεται ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,4\right]$.

Β3.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο 4, οπότε θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)=0$. Όμως αν $x<4 \overset{f\gamma\nu.\varphi\theta\text{ίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(4)=0$. Δηλαδή έχουμε: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x<4$. Τότε $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Β4.

i) Έχουμε:

$$g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=\cancel{f(1)}-f(0)+1+\cancel{f(2)}-\cancel{f(1)}+1+\cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}+1+f(4)-\cancel{f(3)}+1=$$
$$=-4+4+0=0\ .$$

ii) Είναι $f(\mu+1)=f(\mu)-1\Leftrightarrow f(\mu+1)-f(\mu)+1=0\Leftrightarrow g(\mu)=0$.

Επειδή $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=0$, (1) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $g(0), g(1), g(2), g(3)$ δεν μπορεί να είναι ομόσημοι και οι τέσσερις (αφού τότε το άθροισμά τους θα είναι είτε θετικό, είτε αρνητικό, άτοπο).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(0)$ ή $g(1)$ ή $g(2)$ ή $g(3)=0$, τότε είναι προφανές το ζητούμενο.
- Αν $g(0)\cdot g(1)\cdot g(2)\cdot g(3)\neq 0$, δηλαδή κανένας από τους όρους του γινομένου δεν είναι μηδέν, προκύπτει ότι δύο τουλάχιστον όροι του αθροίσματος της (1) είναι ετερόσημοι.

Έτσι αν $g(0)>0$,τότε κάποιος/οι από τους $g(1), g(2), g(3)$ είναι αρνητικός/οί. Αν $g(0)\cdot g(1)<0$ εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)\subseteq[0,3]$ ώστε $g(x_0)=0$.

Ομοίως αν $g(0)\cdot g(2)<0$ ή $g(0)\cdot g(3)<0$ ή $g(1)\cdot g(2)<0$ ή $g(1)\cdot g(3)<0$ ή $g(2)\cdot g(3)<0$.

Άρα υπάρχει $\mu\in[0,3]$ ώστε $g(\mu)=0\Leftrightarrow f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

Θέμα Γ

Γ1. Για x=0 η αρχική σχέση γίνεται :

$f^3(0)+2f(0) = 2ημ0 - 0 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0)+2]=0\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f^2(x) = -2$ (αδύνατο), άρα $f(0)=0$.

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η αρχική σχέση γίνεται :

$$f(x)\left[f^2(x)+2\right]=2\eta\mu x-3x\Leftrightarrow\left\{f^2(x)+2>0,\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$f(x)=\frac{2\eta\mu x-3x}{f^2(x)+2},\qquad \text{ομόσημη του αριθμητή.}$$

$$\text{Όμως για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ ισχύει ότι}: |\eta\mu x|\leq|x| \text{ και αν } x>0 \text{ τότε } |\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$$-2x<2\eta\mu x<2x\overset{-3x}{\Leftrightarrow}$$

$$-5x<2\eta\mu x-3x<-x$$

$$\text{όπου } -x<0 \text{ άρα και } f(x)<0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Γ3.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2\eta\mu x-3x}{f^2(x)+2}\Leftrightarrow|f(x)|=\left|\frac{2\eta\mu x-3x}{f^2(x)+2}\right|\Leftrightarrow\qquad\left\{f^2(x)+2>1\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)+2}<1\right\}$$

$$\Leftrightarrow|f(x)|<|2\eta\mu x-3x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-|2\eta\mu x-3x|<f(x)<|2\eta\mu x-3x|$$

$$\text{Αλλά}\lim_{x\to 0}\left(-|2\eta\mu x-3x|\right)=0=\lim_{x\to 0}|2\eta\mu x-3x|$$

$$\text{Άρα από κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι}\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0), \text{ οπότε } f \text{ συνεχής στο } x_0=0.$$

Γ4. Στη σχέση $f^3(x)+2f(x)=2\eta\mu x-3x$ (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε θέτουμε όπου $x\to -x$ και βρίσκουμε $f^3(-x)+2f(-x)=-2\eta\mu x+3x$ (2).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x)+2f(x)+f^3(-x)+2f(-x)=0\Leftrightarrow f^3(x)+f^3(-x)+2\left[f(x)+f(-x)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)+f(-x)\right]\left[f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)\right]+2\left[f(x)+f(-x)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left[f(x)+f(-x)\right]\left[\underbrace{f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+2}_{>0}\right]=0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\ (*)$$

$f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+2>0$, (τριώνυμο ως προς $f(x)$) ομόσημο του α=1 αφού

$\Delta=f^2(-x)-4\left[f^2(-x)+2\right]=-3f^2(-x)-8<0$

Άρα $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ5. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to -x_0}f(x)=f(-x_0)$.

$$\lim_{x\to -x_0}f(x)\overset{(\Gamma_4)}{=}\lim_{x\to -x_0}\left[-f(-x)\right]=-\lim_{-x\to x_0}f(-x)\overset{-x=u}{=}-\lim_{u\to x_0}f(u)\overset{f\,\sigma\upsilon\nu\epsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\,\sigma\tau o\,x_0}{=}-f(x_0)\overset{(\Gamma_4)}{=}f(-x_0).$$

Γ6. Η εξίσωση γίνεται :

$$f(x)=x-1\Leftrightarrow f(x)-x+1=0$$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=f(x)-x+1$, $x\in\mathbb{R}$ συνεχής στο [0,1], ως πράξεις συνεχών, με

g(0) = f(0) -0+ 1 = 1 > 0

g(1) = f(1) < 0 αφού για κάθε x>0 είναι f(x) < 0 (Γ_2. Ερώτημα)

ή αλλιώς

$$f(1)=\frac{2\eta\mu 1-3}{f^3(1)+2}<2\eta\mu 1-3<0\qquad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{f^3(x)+2}<1\ \text{και στο}\ (0,1)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\text{ισχύει}\ \eta\mu x<x\Rightarrow\\ \eta\mu 1<1\Rightarrow 2\eta\mu 1<2\Rightarrow\\ 2\eta\mu 1-3<-1<0\end{array}\right\}$$

Από θεώρημα Bolzano για την g έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(0,1) ώστε g(ξ) = 0. Επομένως η αρχική εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (0,1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\2x_1+1<2x_2+1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1^3+2x_1+1<x_2^3+2x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και "$1-1$" , άρα αντιστρέψιμη.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{(*)}{=}(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

$(*)$ Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το R που είναι σύνολο΄τιμών της f .

Δ2.

Θα αποδείξουμε ότι: $-1<f^{-1}(0)<0 \underset{(f(\mathbb{R})=\mathbb{R})}{\overset{(f\uparrow)}{\Leftrightarrow}} f(-1)<f\left(f^{-1}(0)\right)<f(0)\Leftrightarrow -2<0<1$

(ισχύει).

Δ3.

Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\le\frac{1}{2}|x-x_0| \qquad (1)$

- Αν $x=x_0$ τότε προφανώς η (1) ισχύει σαν ισότητα.

- Αν $x\ne x_0$ θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου x_0 τό $f(x_0)$ και η σχέση (1) γράφεται.

$$\left|f^{-1}\left(f(x)\right)-f^{-1}\left(f(x_0)\right)\right|\le\frac{1}{2}\left|f(x)-f(x_0)\right|\Leftrightarrow|x-x_0|\le\frac{1}{2}\left|f(x)-f(x_0)\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|x-x_0|\le\frac{1}{2}\left|x^3+2x+1-x_0^3-2x_0-1\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x-x_0|\le\left|(x-x_0)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)+2(x-x_0)\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x-x_0|\le|x-x_0|\left|\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)+2\right|\overset{(x\ne x_0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\le\left|\underbrace{x^2+xx_0+x_0^2}_{(A)}+2\right| \qquad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $A=x^2+xx_0+x_0^2>0$ (τριώνυμο ως προς x) για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ με $x\ne x_0$

Είναι

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=x_0^2-4x_0^2=-3x_0^2\le 0$

Οπότε το τριώνυμο A είναι ομόσημο του α=1>0. Άρα A>0

Επομένως η σχέση (2) ισχύει.

Δ4.

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

Από το ($Δ_3$) ερώτημα έχουμε:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\le\frac{1}{2}|x-x_0|\Leftrightarrow-\frac{1}{2}|x-x_0|\le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\le\frac{1}{2}|x-x_0|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{2}|x-x_0|\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{2}|x-x_0|\right)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0).$$

Δ5.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f^{-1}(x)+x^3+1$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\ \Rightarrow\begin{cases}f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)\\ x_1^3+1<x_2^3+1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} f^{-1}(x_1)+x_1^3+1<f^{-1}(x_2)+x_2^3+1\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών με

- $h(0)=f^{-1}(0)+1>0$, από το $Δ_2$.
- $h(-1)=f^{-1}(-1)<f^{-1}(0)<0$, από το $Δ_2$.

Οπότε $h(-1)\cdot h(0)<0$,άρα από Θ.Bolzano υπάρχει $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$ το οποίο είναι και μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ6.

i) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ από το ερώτημα ($Δ_3$) ισχύει:

$$\left|f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)\right|\le\frac{1}{2}|x_1-x_2|\Leftrightarrow|g(x_1)+x_1-g(x_2)-x_2|\le\frac{1}{2}|x_1-x_2|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|g(x_1)-g(x_2)+(x_1-x_2)|\le\frac{1}{2}|x_1-x_2|\Leftrightarrow\frac{|g(x_1)-g(x_2)+(x_1-x_2)|}{|x_1-x_2|}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+1\right|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+1\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\le-\frac{1}{2}\ .$$

ii) Αφού $-\frac{3}{2} \le \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} \le -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, για κάθε $x_1 \neq x_2$.

Αν $x_1 < x_2$, τότε $g(x_1)-g(x_2) > 0 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνεχής συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R άρα και 1-1, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ θα έχει το πολύ μία λύση.

iii) Έχουμε από το (Δ5) ότι $f^{-1}(\xi)+\xi^3+1=0$,οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$f^{-1}\left(-1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right)\right) < -\xi^3-1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(-1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right)\right) < f^{-1}(\xi) \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -1+\xi-g\left(2x+1-\eta\mu x\right) < \xi \Leftrightarrow g\left(2x+1-\eta\mu x\right) > -1 \underset{(*)}{\overset{g(1)=-1}{\Leftrightarrow}} g\left(2x+1-\eta\mu x\right) > g(1) \overset{g:\gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1-\eta\mu x < 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Γιατί:

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -|x| < \eta\mu x < |x| \qquad (1)$

Αν $x>0$ τότε η (1) γράφεται $-x < \eta\mu x < x < 2x$, άρα $\eta\mu x - 2x < 0$.

Αν $x<0$ τότε η (1) γράφεται $x < \eta\mu x < -x$ και αφού $2x < x$, θα είναι $2x < x < \eta\mu x < -x$, άρα $\eta\mu x - 2x > 0$.

(*) Για $x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$ και $g(1)=f^{-1}(1)-1=-1$.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Το Θέμα Β΄ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.
Το Θέμα Γ΄ επιμελήθηκε ο **Χήτος Γεώργιος**, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.
Το Θέμα Δ΄ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2. **1.**Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.
2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδες 70-71.

Α3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Παίρνουμε τη διαφορά

$$g(x_2)-g(x_1)=\frac{f(x_2)}{1+f^2(x_2)}-\frac{f(x_1)}{1+f^2(x_1)}=\frac{f(x_2)\left(1+f^2(x_1)\right)-f(x_1)\left(1+f^2(x_2)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}=$$

$$\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)-f(x_2)f(x_1)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}=\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)-\left(1-f(x_2)f(x_1)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}$$

- αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x_2 > x_1$ θα έχουμε:
  $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 0$, επίσης έχουμε
  $0 < f(x_1) < 1,\ 0 < f(x_2) < 1 \Rightarrow 0 < f(x_1)f(x_2) < 1$, οπότε η διαφορά
  $$g(x_2)-g(x_1)=\frac{\left(\overbrace{f(x_2)-f(x_1)}^{+}\right)\left(\overbrace{1-f(x_2)f(x_1)}^{+}\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}>0 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1).$$

  Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Ομοίως αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
  Άρα έχουν οι f, g το ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$.

2.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

  $$x_2 > x_1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x_2) > g(x_1) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

  Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

  $$x_2 > x_1 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x_2) < g(x_1) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

  Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και ¨1-1¨.

3. Η εξίσωση $f(g(x^3+1)) = f(g(4x^2+2x))$ γίνεται

$$(f\circ g)(x^3+1) = (f\circ g)(4x^2+2x) \overset{f\circ g:'1-1'}{\Leftrightarrow} x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3-4x^2-2x+1=0$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική.
  Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[-1, 0]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [-1,0] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0)=1>0,\ h(-1)=-2<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_1 \in (-1,0) : h(x_1) = 0$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0)=1>0,\ h(1)=-4<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_2 \in (0,1) : h(x_2) = 0$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο $[1, 5]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [1,5] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(1)=-4<0,\ h(5)=16>0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_3 \in (1,5) : h(x_3) = 0$

  και επειδή η εξίσωση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ είναι πολυωνυμική 3ου θα έχει το πολύ τρεις ρίζες, άρα έχει ακριβώς τρεις τις x_1, x_2, x_3.

Επίσης έχουμε $-1<x_1<0<x_2<1<x_3<5$, δηλαδή έχουμε δύο θετικές και μια αρνητική.

Σχόλιο: ένας τρόπος για τη επιλογή των κατάλληλων διαστημάτων είναι με δοκιμές.

4. Από το ερώτημα (2) η συνάρτηση $f o g$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$(f o g)\left(x^3+4\right)>(f o g)\left(3x^2\right)\overset{f\circ g:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^3+4>3x^2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)>0 \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} x>-1$$

Άρα $x\in(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Πρέπει: $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

2. $f(x)=\ln(e^x-1)-x=\ln(e^x-1)-x\ln e=\ln(e^x-1)-\ln e^x=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x} \Rightarrow f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$.

Όμως $1-\dfrac{1}{e^x}<1 \Leftrightarrow \ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)<\ln 1 \Leftrightarrow f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

3. Από τα προηγούμενα έχουμε: $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$.Τότε:

$$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^{x_1}}<-\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}}<1-\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_1}}\right)<\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_2}}\right) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

4. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα είναι ΄1-1΄, που σημαίνει ότι είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}:f(A)\to A$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $1-\dfrac{1}{e^x}$ στο $A_f=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της (πεδίο ορισμού της f^{-1}) είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,0)$ γιατί:

- Θέτουμε $u=1-\dfrac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} u=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1-1=0$.

  Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

- Θέτουμε $u=1-\dfrac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1$.

  Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$.

  Με $y\in(-\infty,0)$ η εξίσωση

  $$y=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\Leftrightarrow e^y=1-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow \frac{1}{e^x}=1-e^y\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow$$

  $$x=\ln\left(1-e^y\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-\ln\left(1-e^y\right).$$

  Άρα $f^{-1}(x)=-\ln\left(1-e^x\right),\ x<0$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x)=f(x)-h(x)=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)-\ln\frac{1}{x}=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)+\ln x,\ x>0.$$

Η συνάρτηση t είναι συνεχής, ως άθροισμα των συνεχών $f(x)$, $\ln x$ και γνησίως αύξουσα στο $B=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι

$t(B)=\left(\lim\limits_{x\to 0} t(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} t(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\ln x\right)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\ln x\right)=0+(+\infty)=+\infty$

Επειδή το $0\in(-\infty,+\infty)=t(B)$ υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=h(x_0)$.

6. Από το 2ο ερώτημα έχουμε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Τότε

$\dfrac{f(1)}{f(2)}>0$, αφού $f(1)<0$ και $f(2)<0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3}{f(2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(1)}{f(2)}x\right)=\frac{f(1)}{f(2)}(+\infty)=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$, **(1)** και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, **(2)**, προσθέτουμε τις **(1)** και **(2)**, έτσι έχουμε $f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2)$, οπότε $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha = f(x)$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \alpha\right)\left(\underbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 2}_{>0}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x) - \alpha^3 + 2f(x) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x + 1 = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x = \alpha^3 + 2\alpha - 1$$

δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε όπου $f(x) = y \Rightarrow y^3 + 2y = x + 1 \Rightarrow x = y^3 + 2y - 1$.

Άρα $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

3. 1ος τρόπος: Στην $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, για $x = 0$ έχουμε

$f^{-1}(0) = 0^3 + 0 - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

2ος τρόπος: Αφού η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι 1-1 θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$. Θέτουμε στην $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$ όπου $x = x_0$ και έχουμε: $f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 + 1 \Rightarrow 0^3 + 2\cdot 0 = x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$, οπότε $f(-1) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$.

4. 1ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και έστω $f(x_1) \geq f(x_2)$. Τότε:

$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) \geq 2f(x_2)$ **(1)** και $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ **(2)**

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:

$f^3(x_1) + 2f(x_1) \geq f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$. Άτοπο γιατί $x_1 < x_2$.

Άρα για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^3, $2x - 1$.

Οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, άρα έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. $f^3(x)+2f(x)=x+1 \Rightarrow f(x)\left(\underbrace{f^2(x)+2}_{\neq 0}\right)=x+1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{f^2(x)+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|=\dfrac{|x+1|}{|f^2(x)+2|}\leq |x+1|$,

έτσι έχουμε $|f(x)|\leq|x+1| \Leftrightarrow -|x+1|\leq f(x)\leq|x+1|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to -1}(-|x+1|)=\lim\limits_{x\to -1}|x+1|=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής

έχουμε: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0=f(-1)$, άρα συνεχής στο $x_0=-1$.

6. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Έχουμε $f^3(x)+2f(x)=x+1$, **(1)** και $f^3(x_0)+f(x_0)=x_0+1$, **(2)**, αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις **(1)** και **(2)**. Έτσι έχουμε $f^3(x)-f^3(x_0)+2\big(f(x)-f(x_0)\big)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-f(x_0)\big)\big(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\big)+2\big(f(x)-f(x_0)\big)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-f(x_0)\big)\left(\underbrace{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)}_{+}+2\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2|}\leq|x-x_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq|x-x_0|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2. 1.Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.
2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδες 70-71.

Α3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Παίρνουμε τη διαφορά

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{f(x_2)}{1+f^2(x_2)} - \frac{f(x_1)}{1+f^2(x_1)} = \frac{f(x_2)\left(1+f^2(x_1)\right) - f(x_1)\left(1+f^2(x_2)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)} =$$

$$\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right) - f(x_2)f(x_1)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)} = \frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right) - \left(1-f(x_2)f(x_1)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}$$

- αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x_2 > x_1$ θα έχουμε:
  $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$, επίσης έχουμε
  $0 < f(x_1) < 1,\ 0 < f(x_2) < 1 \Rightarrow 0 < f(x_1)f(x_2) < 1$, οπότε η διαφορά

  $$g(x_2) - g(x_1) = \frac{\left(\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{+}\right)\left(\overbrace{1 - f(x_2)f(x_1)}^{+}\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)} > 0 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1).$$

  Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Ομοίως αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
  Άρα έχουν οι f, g το ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$.

2.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

  $$x_2 > x_1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x_2) > g(x_1) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

  Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

  $$x_2 > x_1 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x_2) < g(x_1) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

  Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και ¨1-1¨.

3. Η εξίσωση $f(g(x^3+1)) = f(g(4x^2+2x))$ γίνεται

$$(f\circ g)(x^3+1) = (f\circ g)(4x^2+2x) \overset{f\circ g:'1-1'}{\Leftrightarrow} x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3-4x^2-2x+1=0$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική.

  Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[-1,0]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [-1,0] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0)=1>0,\ h(-1)=-2<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_1 \in (-1,0): h(x_1) = 0$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[0,1]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0)=1>0,\ h(1)=-4<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_2 \in (0,1): h(x_2) = 0$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο $[1,5]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [1,5] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(1)=-4<0,\ h(5)=16>0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_3 \in (1,5): h(x_3) = 0$

  και επειδή η εξίσωση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ είναι πολυωνυμική 3ου θα έχει το πολύ τρεις ρίζες, άρα έχει ακριβώς τρεις τις x_1, x_2, x_3.

Επίσης έχουμε $-1<x_1<0<x_2<1<x_3<5$, δηλαδή έχουμε δύο θετικές και μια αρνητική.

Σχόλιο: ένας τρόπος για τη επιλογή των κατάλληλων διαστημάτων είναι με δοκιμές.

4. Από το ερώτημα (2) η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$(fog)\left(x^3+4\right)>(fog)\left(3x^2\right)\overset{f\circ g:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^3+4>3x^2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)>0 \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} x>-1$$

Άρα $x\in(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Πρέπει: $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

2. $f(x)=\ln(e^x-1)-x=\ln(e^x-1)-x\ln e=\ln(e^x-1)-\ln e^x=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x} \Rightarrow f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$.

Όμως $1-\dfrac{1}{e^x}<1 \Leftrightarrow \ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)<\ln 1 \Leftrightarrow f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

3. Από τα προηγούμενα έχουμε: $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$.Τότε:

$$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^{x_1}}<-\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}}<1-\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_1}}\right)<\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_2}}\right) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

4. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα είναι ΄1-1΄, που σημαίνει ότι είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}:f(A)\to A$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $1-\dfrac{1}{e^x}$ στο $A_f=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της (πεδίο ορισμού της f^{-1}) είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,0)$ γιατί:

- Θέτουμε $u=1-\dfrac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} u=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1-1=0$.

  Τότε $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$.

- Θέτουμε $u=1-\dfrac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1$.

  Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

Με $y\in(-\infty,0)$ η εξίσωση

$$y=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\Leftrightarrow e^y=1-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow \frac{1}{e^x}=1-e^y\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow$$

$$x=\ln\left(1-e^y\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-\ln\left(1-e^y\right).$$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln\left(1-e^x\right),\ x<0$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x)=f(x)-h(x)=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)-\ln\frac{1}{x}=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)+\ln x,\ x>0.$$

Η συνάρτηση t είναι συνεχής, ως άθροισμα των συνεχών $f(x)$, $\ln x$ και γνησίως αύξουσα στο $B=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι

$t(B)=\left(\lim\limits_{x\to0} t(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} t(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ γιατί:

- $\lim\limits_{x\to0} t(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+\ln x\right)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\ln x\right)=0+(+\infty)=+\infty$

Επειδή το $0\in(-\infty,+\infty)=t(B)$ υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=h(x_0)$.

6. Από το 2ο ερώτημα έχουμε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Τότε

$\dfrac{f(1)}{f(2)}>0$, αφού $f(1)<0$ και $f(2)<0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3}{f(2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(1)}{f(2)}x\right)=\frac{f(1)}{f(2)}(+\infty)=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$, **(1)** και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, **(2)**, προσθέτουμε τις **(1)** και **(2)**, έτσι έχουμε $f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2)$, οπότε $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha = f(x)$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \alpha\right)\left(\underbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 2}_{>0}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x) - \alpha^3 + 2f(x) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x + 1 = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x = \alpha^3 + 2\alpha - 1$$

δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε όπου $f(x) = y \Rightarrow y^3 + 2y = x + 1 \Rightarrow x = y^3 + 2y - 1$.

Άρα $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. 1ος τρόπος: Στην $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, για $x = 0$ έχουμε
$f^{-1}(0) = 0^3 + 0 - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

2ος τρόπος: Αφού η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι 1-1 θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$. Θέτουμε στην $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$ όπου $x = x_0$ και έχουμε: $f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 + 1 \Rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0 = x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$, οπότε $f(-1) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$.

4. 1ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και έστω $f(x_1) \geq f(x_2)$. Τότε:
$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) \geq 2f(x_2)$ **(1)** και $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ **(2)**
Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:
$f^3(x_1) + 2f(x_1) \geq f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$. Άτοπο γιατί $x_1 < x_2$.
Άρα για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^3, $2x - 1$.
Οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, άρα έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. $f^3(x)+2f(x)=x+1 \Rightarrow f(x)\left(\underbrace{f^2(x)+2}_{\neq 0}\right)=x+1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{f^2(x)+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|=\dfrac{|x+1|}{|f^2(x)+2|} \leq |x+1|$,

έτσι έχουμε $|f(x)| \leq |x+1| \Leftrightarrow -|x+1| \leq f(x) \leq |x+1|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to -1}(-|x+1|)=\lim\limits_{x\to -1}|x+1|=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής

έχουμε: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0=f(-1)$, άρα συνεχής στο $x_0=-1$.

6. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Έχουμε $f^3(x)+2f(x)=x+1$, **(1)** και $f^3(x_0)+f(x_0)=x_0+1$, **(2)**, αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις **(1)** και **(2)**. Έτσι έχουμε $f^3(x)-f^3(x_0)+2\big(f(x)-f(x_0)\big)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-f(x_0)\big)\big(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\big)+2\big(f(x)-f(x_0)\big)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-f(x_0)\big)\left(\underbrace{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)}_{+}+2\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2|} \leq |x-x_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \leq f(x)-f(x_0) \leq |x-x_0|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ

[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$, με $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

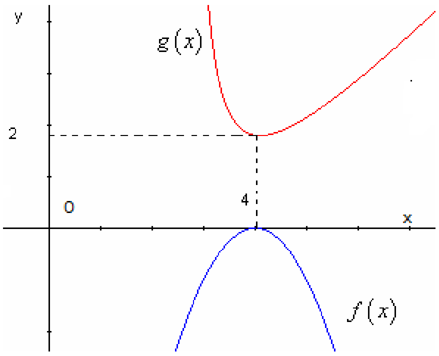
2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**:

α) Δίνεται το παρακάτω σχήμα τότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 2



β) Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

γ) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Μονάδες 2

δ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A=[1,4]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$ και $f(3)=-2$. Τότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$.

Μονάδες 2

ε) Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^{-1}(-2015)=4,\ f^{-1}(1949)=-1$. Τότε δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x = x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2+\ln^2 x, & 0<x\le e \\ \alpha x+\ln(x-e+1), & e<x \end{cases}$

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β) Αν $\alpha=\dfrac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x)=6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2e)$.

Μονάδες 5

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f\left(e^{f(x)}\right)=4\ln x+3$, για κάθε $x>0$ και $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln\left(\ln x^4+3\right)^2+1$ για κάθε $x>e^{-3/4}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x,\ x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right) = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$.

Μονάδες 5

5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1.Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 49.

2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.

3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1.

<u>1ος τρόπος</u>

- Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .
- Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$, οπότε έχουμε
  $g(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=f(x_0)+\eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=-\eta\mu x_0,(1)$
- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για $x=x_0$ γίνεται
  $f^2(x_0)+2f(x_0)\eta\mu x_0=x_0^2+\sigma\upsilon\nu^2 x_0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (-\eta\mu x_0)^2-2\eta\mu^2 x_0=x_0^2+\sigma\upsilon\nu^2 x_0$
  $\Leftrightarrow 0=x_0^2+\eta\mu^2 x_0+\sigma\upsilon\nu^2 x_0 \Leftrightarrow 0=x_0^2+1$ αδύνατο, επομένως $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο .

<u>2ος τρόπος</u>

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται
  $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1 \Leftrightarrow$
  $(f(x)+\eta\mu x)^2=x^2+1 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1>0$ άρα $g(x)\neq 0$ και αφού είναι συνεχής

θα διατηρεί πρόσημο. Όμως $g(0)=f(0)+\eta\mu 0=1+0=1>0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.

1ος τρόπος

- Η σχέση $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται
  $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1\Leftrightarrow$
  $(f(x)+\eta\mu x)^2=x^2+1\Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1$

- Επειδή η g διατηρεί σταθερό πρόσημο θα έχουμε $g(x)>0$ ή $g(x)<0$, οπότε
  $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow g(x)=f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1}$ ή
  $g(x)=f(x)+\eta\mu x=-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=-\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}$
  και επειδή $f(0)=1$ έχουμε $f(x)=-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}$

2ος τρόπος

- Αφού $g(x)>0$ τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε
  $g^2(x)=x^2+1\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}$, όμως $g(x)=f(x)+\eta\mu x$,

  οπότε $f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$.

3. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}-2+\sigma\upsilon\nu x}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\eta\mu x}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=-1+0+0=-1$$

β)

<u>1ος τρόπος</u>

$0 \le -1+\sqrt{x^2+1} \le -\eta\mu x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{1}{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}} \le \dfrac{1}{-1+\sqrt{x^2+1}}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{-1+\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ με

$0 \le -\eta\mu x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$

<u>2οςτρόπος</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left[-\frac{\eta\mu x}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=(+\infty)(0+1)=+\infty$$

Γιατί $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$ όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$, θα είναι συνεχής και στο e οπότε θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=f(e) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to e^-}\left(2+\ln^2 x\right)=\lim\limits_{x\to e^+}\left(\alpha x+\ln(x-e+1)\right)=f(e)$

$\Leftrightarrow 3=\alpha e=3 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{3}{e}$.

β) Επειδή $f(1)=2+\ln^2 1=2<6$,

$f(2e)=\dfrac{3}{e}2e+\ln(2e-e+1)=6+\ln(e+1)>6$, γιατί

$e+1>e \Leftrightarrow \ln(e+1)>\ln e \Leftrightarrow 6+\ln(e+1)>6+1=7 \Leftrightarrow f(2e)>7$

δηλαδή $f(1)<6<f(2e)$ και η f είναι συνεχής στο $[1,2e]$ τότε, σύμφωνα με το Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2e):f(x_0)=6$.

2. α) Έστω $x_1,x_2>0$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\Rightarrow f\left(e^{f(x_1)}\right)=f\left(e^{f(x_2)}\right)\Rightarrow$$

$4\ln x_1+3=4\ln x_2+3\Rightarrow \ln x_1=\ln x_2\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι $1-1$.

β) $(f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=\ln\left(\ln x^4+3\right)^2+1\Rightarrow (f\circ f)\left(e^{f(x)}\right)=2\ln\left(\ln x^4+3\right)+1\Rightarrow$

$$f(f(e^{f(x)}))=2\ln\left(4\ln x+3\right)+1\Rightarrow f(4\ln x+3)=2\ln\left(4\ln x+3\right)+1$$

Θέτουμε $4\ln x+3=y>0$, οπότε $f(y)=2\ln y+1$, άρα $f(x)=2\ln x+1,\ x>0$.

γ) Το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ είναι :

$$\{x\in A_f\ \text{και}\ f(x)\in A_f\}=\{x>0\ \text{και}\ 2\ln x+1>0\}=\left\{x>0\ \text{και}\ x>\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}=\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$$

$$(f\circ f)(x)=f\left(e^{x-2014}+\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow f(f(x))=f\left(e^{x-2014}+\frac{3}{2}\right)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=e^{x-2014}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\ln x+1=e^{x-2014}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x+1-e^{x-2014}-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow 2\ln x-e^{x-2014}-\frac{1}{2}=0\ \textbf{(2)}$$

Θέτουμε $t(x)=2\ln x-e^{x-2014}-\frac{1}{2}$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,e]\subseteq\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και

$$t(1)=2\ln 1-e^{1-2014}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{2013}}<0$$

$t(e)=2\ln e-e^{e-2014}-\frac{1}{2}=2-e^{e-2014}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{e^{2014-e}}>0$, επομένως ισχύει $t(e)t(1)<0$, οπότε από το Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0$ και λόγω της **(2)** έχουμε ισοδύναμα ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=f\left(e^{x-2014}+\frac{3}{2}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,e)$.

ΘΕΜΑ Δ

1.

1ος τρόπος

Θα δείξουμε ότι $\sqrt{x^2+1} > -x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν ο x είναι θετικός τότε το 1ο μέλος της (1) είναι θετικό και το δεύτερο αρνητικό οπότε η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x. Αν $x \le 0$ τότε και τα δύο μέλη της (1) είναι μη αρνητικά συνεπώς υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε ισοδύναμα $x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς x. Άρα τελικά η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ισχύει $x^2+1 > x^2$ και επειδή η $\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, άρα παίρνουμε $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$. Όμως από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ισχύει $|x| \ge -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο ανισότητες παίρνουμε $\sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

3ος τρόπος

Αν υπάρχει αριθμός x_0 ώστε $f(x_0) = 0$, τότε παίρνουμε ισοδύναμα $\sqrt{x_0^2+1} = -x_0$ και υψώνοντας στο τετράγωνο για εκείνα τα x_0 που επιτρέπεται (προφανώς για $x_0 \le 0$), παίρνουμε $x_0^2+1 = x_0^2 \Leftrightarrow 1 = 0$, άτοπο. Άρα η συνάρτηση δε μηδενίζεται και από την άλλη είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού επιπλέον $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1). Αφού η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα $x_1^2 < x_2{}^2 \Leftrightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \overset{\sqrt{x}\uparrow}{\Leftrightarrow} \sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\sqrt{x_1^2+1} + x_1 < \sqrt{x_2^2+1} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ όπως το θέλαμε.

3.

1ος τρόπος

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{f(x)} \quad (3)$$

2ος τρόπος

Η $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (3) γίνεται ισοδύναμα:

$f(-x)f(x)=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)-x^2=1 \Leftrightarrow 1=1$ που ισχύει.

Για τη μονοτονία έχουμε αποδείξει ήδη ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Θα βρούμε τη μονοτονία στο $(-\infty,0]$. Έστω λοιπόν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε, $-x_1>-x_2\geq 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (από το ερώτημα Δ2), άρα παίρνουμε $f(-x_1)>f(-x_2)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

- Αν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1<0<x_2$ τότε $f(x_1)<f(0)<f(x_2)$, άρα και πάλι $f(x_1)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

4.

1ος τρόπος

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}+\beta}\Leftrightarrow f(\alpha)=\frac{1}{f(\beta)}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(\alpha)=f(-\beta)\overset{f\uparrow \text{ άρα } f\ 1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=-\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$$

2ος τρόπος

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}+\beta}=\frac{\sqrt{\beta^2+1}-\beta}{\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}-\beta\right)}=\sqrt{\beta^2+1}-\beta$$

Άρα $\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha=\sqrt{\beta^2+1}-\beta$

Εντελώς όμοια παίρνουμε $\sqrt{\beta^2+1}+\beta=\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha$

Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha+\beta=-\alpha-\beta \Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$$

<u>Σχόλιο:</u> Παρατηρήστε ότι ο 2ος τρόπος δεν απαιτεί τίποτε παραπάνω από γνώσεις Άλγεβρας Α Λυκείου.

5.

<u>1ος τρόπος</u>

Θέτουμε $y=f(x)$, με $y>0$ και έτσι

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+x=y\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=y-x\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=(y-x)^2\\ y>0\\ y-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\\ y-\dfrac{y^2-1}{2y}\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\\ y^2+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-1}{2y}\\ y>0\end{cases}$$

οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},\ x>0$.

<u>Σχόλιο:</u> Από τον παραπάνω τρόπο βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η εξίσωση $y=f(x)$ έχει για κάθε $y\in(0,+\infty)$ μία και μόνο λύση στο $\mathbb{R}$, την $x=\dfrac{y^2-1}{2y}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι 1-1 (χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε χρήση της μονοτονίας της) και κατά συνέπεια αντιστρέψιμη με $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και τύπο $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$.

2ος τρόπος

Δείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 συνεπώς είναι αντιστρέψιμη. Θέτουμε $y=f(x)$, με $y>0$ (λόγω του Δ1) και έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1}+x \overset{\sqrt{x^2+1}-x\neq 0}{\Leftrightarrow} y=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\Leftrightarrow \frac{1}{y}=\sqrt{x^2+1}-x$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις $y=\sqrt{x^2+1}+x$ και $\dfrac{1}{y}=\sqrt{x^2+1}-x$ παίρνουμε

$$2x=y-\frac{1}{y}\Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y}\quad (4)$$

Λόγω του ότι για να φτάσουμε στη σχέση (4), χάθηκε η ισοδυναμία (διότι αφαιρέσαμε κατά μέλη), έχουμε αποδείξει μόνο τη συνεπαγωγή $f(x)=y\Rightarrow x=g(y)$, με $g(y)=\dfrac{y^2-1}{2y}$, $y>0$. Θα πρέπει τώρα να δείξουμε και το αντίστροφο δηλαδή ότι αν $x=\dfrac{y^2-1}{2y}$, $y>0$ τότε ισχύει $f(x)=y$. Πράγματι

$$f(x)=f\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)=\sqrt{\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2+1}+\frac{y^2-1}{2y}=\sqrt{\frac{y^4-2y^2+1+4y^2}{4y^2}}+\frac{y^2-1}{2y}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{y^2+1}{2y}\right)^2}+\frac{y^2-1}{2y}\overset{y>0}{=}\frac{y^2+1}{2y}+\frac{y^2-1}{2y}=y$$

Άρα τελικά, $f^{-1}(x)=g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$, $x>0$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.**

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

4Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Έστω η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=εφx,\ x\in\mathbb{R}_1}$, όπου $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{\mathrm{x/συνx=0}\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(\mathrm{εφx})'=\dfrac{1}{\mathrm{συν^2x}},\ \mathrm{x}\in\mathbb{R}_1$.

Μονάδες 3

2. α) Διατυπώστε το Θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού και ερμηνεύστε το γεωμετρικά.

Μονάδες 2

β) Διατυπώστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ) και ερμηνεύστε το γεωμετρικά.

Μονάδες 2

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποιά σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 2

δ) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «*Δίνεται η συνάρτηση* $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ *η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *τότε και η συνάρτηση* $g(x)=(fof)(x)$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$»

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Μονάδες 2

ε) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Α μια συνάρτηση* f *ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, αντιστρέφεται και η* f^{-1} *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(\Delta)$ *με* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\Delta$ *τότε ισχύει* $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)},\ x\in f(\Delta)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Μονάδες 2

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ),** αν είναι σωστή ή με **Λάθος (Λ),** αν είναι λανθασμένη :

α) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ και η f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη ως προς x τότε αν το y μειώνεται ως προς x με ρυθμό α εννοούμε $f'(x) = -\alpha$ με $\alpha > 0$.

β) Αν $x = S(t)$ η συνάρτηση θέσης ενός κινητού και $u(t_0) = S'(t_0)$ η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S'(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε $u(t_0) \geq 0$, όταν το κινητό κινείται προς τα δεξιά.

γ) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

δ) Έστω η συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

ε) Αν $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\alpha^x - x}, \alpha > 1$ τέτοιο ώστε $\alpha^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Β1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f και αποδείξτε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 6

Για $\alpha = e$, τότε:

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f με $x \leq 0$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης C_f της f με $x_1 < x_2$, στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Β4. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$, όπου x_1, x_2 οι τετμημένες των σημείων Α και Β του Β3 ερωτήματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,+\infty\right) \to \mathbb{R}^*$ με $f(0)=\dfrac{\alpha}{1+\beta}$, $\alpha, \beta>0$ για την οποία ισχύει $f'(t)-\gamma f(t)=-\dfrac{\gamma}{\alpha}f^2(t)$, $\gamma>0$ για κάθε $t \geq 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(t)=\dfrac{\alpha}{1+\beta e^{-\gamma t}}$, $t \geq 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 9

Γ3. Αν η συνάρτηση f περιγράφει τον τρόπο διάδοσης μιας είδησης σ΄ έναν πληθυσμό α και $f(t)$ είναι το πλήθος των ατόμων στα οποία έχει φτάσει η είδηση τη χρονική στιγμή t τότε:

α) Θα φτάσει ποτέ η είδηση σε όλα τα άτομα του πληθυσμού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

β) Αν $\beta>1$ ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει ο ρυθμός διάδοσης της είδησης να μειώνεται;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$, (1)

$f(xy)=f(x)\dfrac{1}{y}+f(y)\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$ και $y>0$, (2)

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 3

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 2

Δ3. Αν $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ τότε:

α). Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

Μονάδες 5

β). Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f , το σύνολο τιμών της f και αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3=e^x$, $x>0$ έχει ακριβώς 2 θετικές ρίζες.

Μονάδες 5

γ). Να αποδείξετε ότι $\alpha^\beta>\beta^\alpha$ για κάθε α,β με $e\le\alpha<\beta$ και στη συνέχεια ότι ισχύει $(\ln x)^{x-1}>(x-1)^{\ln x}$ για κάθε $x\ge e^e$.

Μονάδες 3

δ). Να αποδείξετε ότι $2f(4x)+f(x)>3f(3x)$ για κάθε $x\ge e\sqrt{e}$.

Μονάδες 3

ε). Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=\alpha^x$ και της ευθείας $y=x$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha>0$.

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το Θέμα Β επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας** Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Το Θέμα Γ επιμελήθηκε ο **Κωνσταντόπουλος Λεωνίδας** Μαθηματικός-MSc του 10ου & 19ου Γυμνασίου Πάτρας.

Το Θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας** Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**