

ΓΙΑΝΝΗΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

- ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
- ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*3<sup>η</sup> Έκδοση*

*Οδηγός για τις πανελλαδικές εξετάσεις*

**ΘΕΜΑ: Α, Β, Γ και Δ**

Σχολικού Βιβλίου

Ψηφιακού Βοηθήματος του Υπουργείου

Προτεινόμενα

Πανελλαδικών Εξετάσεων

Προτεινόμενα Προσομοιωμένα Διαγωνίσματα

Οδηγίες διδασκαλίας

Οδηγίες για τις εξετάσεις

**Μέρος Α: Θέματα**

*Με την υποστήριξη του*

**Μαθηματικού περιηγητή**

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γιάννης Καραγιάννης

Τηλ. 2241068945

e-mail: [iokaragi@sch.gr](mailto:iokaragi@sch.gr)

ΡΟΔΟΣ

---

Σελίδες: 308

Σχήμα: 18,2x25,7

ISBN: 978-960-93-8657-9

Εκδότης: Γιάννης Καραγιάννης (ID:12897)

© Copyright: Γιάννης Καραγιάννης

Νοέμβριος 2016

Φιλολογική Επιμέλεια: Τσομαρέλη Τριανταφυλλιά

Επιμέλεια εξωφύλλου: Γιάννης Καραγιάννης

Έκδοση: 3<sup>η</sup>

Εκτύπωση: Lichnos Print House

---

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

---

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή μερική ή ολική έστω και μιας σελίδας του βιβλίου αυτού με οποιαδήποτε μέθοδο (μηχανική, ηλεκτρονική, φωτοτυπική κ.α. (Ν. 2121/93 και 2557/97). Οι παραβάτες διώκονται ποινικά.

*Στους μαθητές που καθημερινά μοχθούν για να πετύχουν τους στόχους τους.*

*Στους συναδέλφους που καθημερινά αγωνιούν για την διδασκαλία των μαθητών τους.*

*Αγαπητή μαθήτριά, αγαπητέ μαθητή,*

*Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου* γράφτηκε αποκλειστικά για σένα, για να σε βοηθήσει στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, ώστε μετά από τη συστηματική μελέτη του να είσαι έτοιμος να γράψεις άριστα. Για να γίνει αυτό απαιτείται η βαθιά κατανόηση των εννοιών και των θεωρημάτων-προτάσεων του σχολικού σου βιβλίου.

*Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου* έχει την φιλοσοφία ότι το βασικό υλικό που πρέπει να μελετήσεις είναι αυτό του σχολικού σου βιβλίου, του ψηφιακού εκπαιδευτικού βοηθήματος του Υπουργείου καθώς και τα θέματα που μέχρι σήμερα έχουν ζητηθεί στις Πανελλαδικές Εξετάσεις.

*Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου* θέλοντας να σε οδηγήσει στην απόλυτη επιτυχία, σου προτείνει και επιπλέον θέματα για εξάσκηση και βαθύτερη σκέψη, καθώς και συνδυαστικά θέματα.

*Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου*, θέλοντας να σου δείξει το δρόμο για την επιτυχία, σου προτείνει προσομοιωμένα διαγωνίσματα στο επίπεδο των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

*Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου*, θέλοντας να σε διευκολύνει στην επίτευξη του στόχου σου, δεν σου δίνει σε αυτό το βιβλίο τις απαντήσεις-υποδείξεις και λύσεις των θεμάτων αφήνοντας σε σένα την πρώτη προσπάθεια. Τις απαντήσεις, τις υποδείξεις και τις πλήρεις αναλυτικές λύσεις (όπως ακριβώς θα πρέπει να γράφονται στο γραπτό σου) θα τις βρεις στο **ΜΕΡΟΣ Β** που κυκλοφορεί.

*Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου* θέλοντας να σου δώσει ακόμα μια πρόταση περιέχει επαναληπτικά θέματα που προτείνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία .

*Αγαπητέ μου συνάδελφε,*

Η καθημερινή σου αγωνία είναι πως θα διδάξεις τους μαθητές σου οργανωμένα και μεθοδικά, με σωστή διαχείριση του πολύτιμου χρόνου σου, ώστε να καταφέρουν το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Ακριβώς αυτό

προσδοκά να καλύψει το παρόν σύγγραμμα. Για να μην σπαταλάς ατελείωτες ώρες να βρεις υλικό κατάλληλο, έγκυρο και αξιόπιστο που να ανταποκρίνεται στο επίπεδο των θεμάτων των Πανελλαδικών Εξετάσεων αλλά και στο διαφοροποιημένο επίπεδο των μαθητών σου.

Διδάσκοντας το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου αυτού να είσαι σίγουρος ότι τα παραπάνω έχουν συντελεστεί.

Καλή συνέχεια

Γιάννης Καραγιάννης

## Πριν ξεκινήσεις νε μελετάς...ΟΔΗΓΙΕΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Το βιβλίο αυτό μπορείς να το μελετήσεις **γραμμαμικά** (δηλαδή με τη σειρά των κεφαλαίων και των παραγράφων του) αλλά και **μη-γραμμαμικά** (δηλαδή επιλέγοντας εσύ τη σειρά των κεφαλαίων ή/και των παραγράφων σύμφωνα με τις ανάγκες σου).

### Γραμμικά:

Με το τέλος της μελέτης κάθε κεφαλαίου από το σχολικό βοήθημα μπορείς:

- Να εστιάσεις στις ασκήσεις που προτείνονται, ανά θέμα, από το σχολικό σου βιβλίο στο συγκεκριμένο κεφάλαιο της ύλης (1<sup>ο</sup>, 2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup>).
- Να προσπαθήσεις τις ασκήσεις, ανά θέμα, που προτείνονται από το Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου στο συγκεκριμένο κεφάλαιο της ύλης (1<sup>ο</sup>, 2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup>).
- Να προσπαθήσεις, ανά θέμα, τις ασκήσεις που προτείνονται στα «Προτεινόμενα θέματα» (1<sup>ο</sup>, 2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup>).
- Τέλος, να προσπαθήσεις, ανά θέμα, τα διαγωνίσματα που προτείνονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

Όταν όλα αυτά γίνουν, θα καταλάβεις πόσο καλά μπορείς να διαπραγματευτείς θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων παλαιότερων ετών και μπορείς να αρχίσεις από την κατηγορία θέμα Α, Β, Γ και Δ.

**Είσαι έτοιμος;** Το πόσο έτοιμος είσαι θα φανεί από το πώς μπορείς να αντιμετωπίσεις τα προσομοιωμένα διαγωνίσματα που παρατίθενται στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Η διαδικασία αυτή θα καταδείξει το βαθμό ετοιμότητάς σου (όλα τα προσομοιωμένα διαγωνίσματα έχουν τρίωρη διάρκεια).

Επιπλέον, μπορείς να διαπραγματευτείς τα πραγματικά θέματα του 2016 (σε όλους τους τύπους σχολείων) δίνοντας «πραγματικές εξετάσεις».

Αν το ενδιαφέρον σου είναι αυξημένο για το μάθημα μπορείς, αν το επιθυμείς, να δεις θέματα που προτείνονται από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και ακόμη να ανατρέξεις στα 10 απαιτητικά θέματα (χωρίς να απογοητευτείς αν δεν τα καταφέρεις πλήρως).

Τέλος, τώρα πρέπει να δεις πόσο καλά τα έγραψες στο τετράδιό σου, δηλαδή δεν αρκεί ότι έλυσες τα θέματα αλλά μετράει και ο τρόπος της παρουσίασης, της δομής και της

αιτιολόγησης. Για το σκοπό αυτό θα ανατρέξεις στο e-book των λύσεων για να συγκρίνεις το γραπτό σου με τις λύσεις (το e-book θα σου δοθεί ηλεκτρονικά αργότερα).

### **Μη-Γραμμικά:**

Σε όποιο σημείο της μελέτης σου επιθυμείς, μπορείς να ανατρέξεις για «αξιολόγηση» σε όποιο θέμα (Κεφάλαιο) θέλεις και σε όποια κατηγορία θεμάτων θέλεις (Σχολικού, ΨΕΒ, προτεινόμενα, θέματα Πανελλαδικών). Σου προτείνω να μην προτρέξεις να αντιμετωπίσεις πριν από τα άλλα (Σχολικού, ΨΕΒ, προτεινόμενα) τα προσομοιωμένα διαγωνίσματα αλλά αυτό να το κάνεις ως τελικό στάδιο. Είναι απαραίτητο να έχεις δει βασικές ασκήσεις του σχολικού σου βιβλίου και του ΨΕΒ. Μετά θα «ζυγίσεις» πού μπορείς και πού θέλεις «προπόνηση». Έτοιμος θα είσαι όταν γράφεις **ΜΟΝΟΣ** σου, χωρίς βοήθεια, στο τετράδιό σου και επιτυγχάνεις τους στόχους σου.

Μπορείς να διαμορφώσεις μόνος σου το στόχο σου και να πορευτείς. Ανάλογα με αυτόν διαμορφώνεις τη μελέτη σου από το θέμα Α έως και το Θέμα Δ ..και κάτι παραπάνω.

Καλή μελέτη και..... σε βάθος

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ Α΄: ΘΕΜΑΤΑ

<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>	<b>ΘΕΜΑ Α</b>		<b>ΣΕΛΙΔΕΣ</b>
	<b>1.1</b>	Οι πιο σημαντικοί ορισμοί	11-13
	<b>1.2</b>	Διατυπώσεις και Γεωμετρικές Ερμηνείες Θεωρημάτων	14
	<b>1.3</b>	Θεωρήματα και Προτάσεις για Απόδειξη	15-19
	<b>1.4</b>	Ερωτήσεις Αντικειμενικού Τύπου	20-42
	<b>1.5</b>	Ερωτήσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων	43-59
<b>1<sup>ο</sup></b>			

<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>	<b>ΘΕΜΑ Β</b>		<b>ΣΕΛΙΔΕΣ</b>
	<b>2.1</b>	Σχολικού Βιβλίου	62-87
	<b>2.2</b>	Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου	88-94
	<b>2.3</b>	Προτεινόμενα	95-98
	<b>2.4</b>	Πανελλαδικών Εξετάσεων	99-106
	<b>2.5</b>	Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Β	107-109
<b>2<sup>ο</sup></b>			

<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>	<b>ΘΕΜΑ Γ</b>		<b>ΣΕΛΙΔΕΣ</b>
	<b>3.1</b>	Σχολικού Βιβλίου	114-120
	<b>3.2</b>	Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου	121-134
	<b>3.3</b>	Προτεινόμενα	135-141
	<b>3.4</b>	Πανελλαδικών Εξετάσεων	142-162
	<b>3.5</b>	Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Γ	163-170
<b>3<sup>ο</sup></b>			





<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο  1<sup>ο</sup></b>	<b>ΘΕΜΑ Α</b>	
	<b>1.1</b>	Ορισμοί
	<b>1.2</b>	Διατυπώσεις και Γεωμετρικές Ερμηνείες Θεωρημάτων
	<b>1.3</b>	Θεωρήματα και Προτάσεις για Απόδειξη
	<b>1.4</b>	Ερωτήσεις Αντικειμενικού Τύπου
	<b>1.5</b>	Ερωτήσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων

## 1.1. Οι πιο σημαντικοί ορισμοί

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$ ;
2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ ;
3. Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;
4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει:
  - στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο,
  - στο  $x_1 \in A$  (ολικό) ελάχιστο.
5. Αν  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο συναρτήσεις τι ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$ ;
6. Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται:
  - γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;
  - γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;
7. Πότε μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση «1-1»;
8. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ;
9. Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;
10. Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής
  - σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ ;
  - σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;
11. Τι ονομάζεται ακολουθία;

- 12.** Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  μίας συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$ ;
- 13.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;
- 14.** Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$ , όταν  $f$  είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ;
- 15.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;
- 16.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού  $A$ , παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;
- 17.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι:
- α.** Μία συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;
  - β.** Μία συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;
- 18.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Πότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ ;
- 19.** Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ ;
- 20.** Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ; (αντιστοίχως στο  $-\infty$ );

**21.** Πότε λέμε ότι ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (αντιστοίχως στο  $-\infty$ );

**22.** Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ ;

**23.** Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  από το  $a$  στο  $\beta$ ;

**24.** Αν  $g$  συνεχής στο  $[a, \beta]$ , ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = \beta$  αν:

**i.**  $g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ ;

**ii.**  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ ;

**iii.** η  $g$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[a, \beta]$ ;

Να αποδείξετε τους τύπους σε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός σχήματος.

**25.** Ποιος είναι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων  $f, g$  στο  $[a, \beta]$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = \beta$ ;

Να αποδείξετε τους τύπους σε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός σχήματος.

## 1.2. Διατυπώσεις και Γεωμετρικές Ερμηνείες σημαντικών Θεωρημάτων και Προτάσεων

1. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.
2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
3. Να διατυπώσετε το θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών.
4. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.
5. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
6. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
7. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.
8. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital.
9. Τι παριστάνει γεωμετρικά το  $\int_a^\beta f(x)dx$ , αν  $f(x) \geq 0$  με  $f$  συνεχή στο  $[a, \beta]$ ;
10. Τι παριστάνει γεωμετρικά το  $\int_a^\beta c dx$ , αν  $c > 0$  ( $a > \beta$ );
11. Τι παριστάνει γεωμετρικά το  $\int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$ , με  $f, g$  συνεχείς στο  $[a, \beta]$ ;
12. Να διατυπώστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

### 1.3. Θεωρήματα και Προτάσεις για απόδειξη

1. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f, f^{-1}$ ; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

2. Αν  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

3. Έστω η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x), Q(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $Q(x_0) \neq 0$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ .

4. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

5. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

6. Έστω η σταθερή συνάρτηση  $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 0$ , δηλαδή  $(c)' = 0$ .

7. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ , δηλαδή  $(x)' = 1$ .

8. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = v x^{v-1}$ , δηλαδή  $(x^v)' = v x^{v-1}$ .

**9.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**10.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**11.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^{-\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$ , δηλαδή  $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$ .

**12.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\nu\nu x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x}$ , δηλαδή:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x}.$$

**13.** Η συνάρτηση  $f(x) = x^a$ ,  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = ax^{a-1}$ , δηλαδή  $(x^a)' = ax^{a-1}$ .

**14.** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = a^x \ln a$ , δηλαδή  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

**15.** Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$



**16.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**17.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- οι  $f, g$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει  $f(x) = g(x) + c$ .

**18.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**19.** Να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

**20.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

**i.** Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**ii.** Αν  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**iii.** Αν  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**21.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**22.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**23.** Έστω  $f, g$  συνεχείς στο διάστημα  $[a, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = a, x = \beta$ .

**i.** Αν  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ , να δείξετε ότι  $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$ .

**ii.** Αν  $f, g$  είναι μη αρνητικές στο  $[a, \beta]$  και  $f(x) \geq g(x)$ , να δείξετε ότι  $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$ .

**24. i.** Έστω  $g$  συνεχής στο  $[a, \beta]$  με  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$  και τις ευθείες  $x = a, x = \beta$ .

Να αποδείξετε ότι  $E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x)dx$

**ii.** Έστω  $f, g$  συνεχείς στο  $[a, \beta]$  και η διαφορά  $f(x) - g(x)$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[a, \beta]$  και  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = a, x = \beta$ . Να αποδείξετε ότι  $E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|dx$ .

## 1.4. Ερωτήσεις Αντικειμενικού τύπου

### α. Ερωτήσεις Κατανόησης του Σχολικού Βιβλίου

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> : ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

#### I.

<b>1.</b> Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$ , τότε:		
$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ .	Α	Ψ
$(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$ .	Α	Ψ
<b>2.</b> Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$ , τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .	Α	Ψ
<b>3.</b> Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \left( \frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0$ .	Α	Ψ
<b>4.</b> Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$ .	Α	Ψ
<b>5.</b> Ισχύει: <b>α.</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$ .	Α	Ψ
<b>β.</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ .	Α	Ψ
<b>6.</b> Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$	Α	Ψ
<b>7.</b> Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}, x \in (a, +\infty)$ , τότε κατ'ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .	Α	Ψ
<b>8.</b> Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x) \cdot g(x))$ , τότε πάντα είναι ίσο με $f(6) \cdot g(6)$ .	Α	Ψ
<b>9.</b> Αν $\lim_{x \rightarrow x_0}  f(x)  = 1$ , τότε κατ'ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$ .	Α	Ψ

10. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0}  f(x)  = 0$ , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .	A	Ψ
11. Αν $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$ , τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1.	A	Ψ
12. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4, f(1) = 3$ , τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \pi$ .	A	Ψ

## II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$  με  $l, m \in \mathbb{R}$  και  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε κατ'ανάγκη θα είναι:

A.  $l < m$       B.  $l \leq m$       Γ.  $l \geq m$       Δ.  $l = m$       E.  $m < l$

2. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x^2)^3}{(x^2 + 1)^3}$  είναι ίσο με:

A. 8      B. 1      Γ. 0      Δ.  $+\infty$       E. -8

3. Το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$  είναι ίσο με:

A.  $+\infty$       B.  $-\infty$       Γ. 1      Δ. -1      E. 0

4. Αν το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$  δεν υπάρχει, τότε:

A.  $x_0 = 0$       B.  $x_0 = 2$       Γ.  $x_0 = -1$       Δ.  $x_0 = 1$

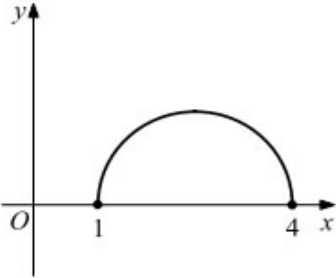


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

## I.

1. Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ , παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$ , τότε $f(0) \neq f(1)$ .	A	Ψ
2. Αν η συνάρτηση $f$ παραγωγίζεται στο $[a, \beta]$ με $f(\beta) < f(a)$ , τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$ .	A	Ψ
3. Αν οι $f, g$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a, \beta]$ , με $f(a) = g(a)$ και $f(\beta) = g(\beta)$ , τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.	A	Ψ
4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ , τότε:  α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$ .  β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f$ .	A	Ψ
	A	Ψ
5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.  β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.	A	Ψ
	A	Ψ
6. Η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.	A	Ψ

<p><b>7.</b> Αν οι συναρτήσεις <math>f, g</math> έχουν στο <math>x_0</math> σημείο καμψής, τότε και η <math>h = fog</math> έχει στο <math>x_0</math> σημείο καμψής.</p>	Α	Ψ
<p><b>8.</b> Δίνεται ότι η συνάρτηση <math>f</math> παραγωγίζεται στο <math>\mathbb{R}</math> και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα <math>x'x</math>. Αν υπάρχει κάποιο σημείο <math>A(x_0, f(x_0))</math> της <math>C_f</math> του οποίου η απόσταση από τον άξονα <math>x'x</math> είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της <math>C_f</math> είναι οριζόντια.</p>	Α	Ψ
<p><b>9.</b> Η ευθεία <math>x=1</math> είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :</p> <p><b>α.</b> <math>f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}</math></p> <p><b>β.</b> <math>g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}</math></p>		
<p><b>10.</b> Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης <math>f</math> δίνεται από το παρακάτω σχήμα,</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>τότε:</p>		
<p><b>i)</b> το πεδίο ορισμού της <math>\frac{1}{f'}</math> είναι το <math>(1, 4)</math>.</p>	Α	Ψ
<p><b>ii)</b> το πεδίο ορισμού της <math>\frac{1}{f'}</math> είναι το <math>[1, 4]</math>.</p>	Α	Ψ



iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$ .	A	Ψ
iv) υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ : $f'(x) = 0$ .	A	Ψ
<b>11.</b> Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:		
α. μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0, 1)$ .	A	Ψ
β. μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1, 0)$ .	A	Ψ
γ. τρεις πραγματικές ρίζες.	A	Ψ
<b>12.</b> Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις ισχύουν $f(0) = 4, f'(0) = 3, f''(0) = 6, g(0) = 5, g'(0) = 1, g'(4) = 2,$ τότε $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$ .	A	Ψ

## II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$  ισούται με:

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$       Γ.  $\sqrt{3}$       Δ. 0      E.  $\frac{3}{4}$

2. Το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$  ισούται με:

- A.  $\frac{1}{x^2}$       B.  $-\frac{2}{x^2}$       Γ.  $-\frac{1}{x^2}$       Δ.  $-\frac{2}{x}$       E. 0

3. Αν  $f(x) = 5^{3x}$ , τότε η  $f'(x)$  ισούται με:

- A.  $3x5^{3x-1}$       B.  $\frac{5^{3x}}{3 \ln 5}$       Γ.  $3 \cdot 5^{2x}$       Δ.  $3 \cdot 5^{3x}$       E.  $5^{3x} \cdot \ln 125$

4. Αν  $f(x) = \sigma\nu\nu^3(x+1)$ , τότε η  $f'(\pi)$  ισούται με:

A.  $3\sigma\nu\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$

B.  $3\sigma\nu\nu^2(\pi+1)$

Γ.  $-3\sigma\nu\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$

Δ.  $3\pi\sigma\nu\nu^2(\pi+1)$

5. Αν  $f(x) = (x^2 - 1)^3$ , τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

A. 1

B. -1

Γ. 0

Δ. 27

Ε. Δεν υπάρχει

6. Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 2x^2$  στα σημεία με τετμημένη  $x_0$  είναι παράλληλες, τότε το  $x_0$  είναι:

A. 0

B.  $\frac{1}{4}$

Γ.  $\frac{1}{2}$

Δ. 1

Ε. 2

7. Αν  $f(x) = e^{\beta x}$ ,  $g(x) = e^{\alpha x}$  και  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , τότε το  $\beta$  ως συνάρτηση

του  $\alpha$  ισούται με:

A.  $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$

B.  $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

Γ.  $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$

Δ.  $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$

Ε.  $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$

8. Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$  και  $f(0) = 0$ , τότε:

A.  $f(1) = -1$

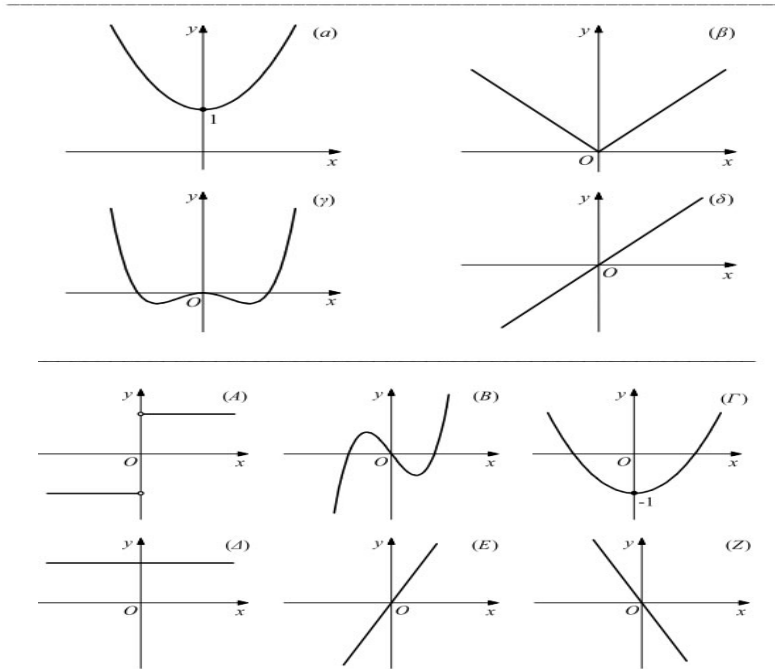
B.  $f(-1) > 0$

Γ.  $f(1) > 0$

Δ.  $f(-1) = 0$

III.

1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  σε εκείνη από τις συναρτήσεις  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.



2. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο  $+\infty$ .

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	Α. $y = 2$
2. $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$	Β. $y = x - 1$
3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$	Γ. $y = -x + 1$
	Δ. $y = x$
	Ε. $y = -x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

## I.

1. Ισχύει: $\int_a^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$ .	A	Ψ
2. Ισχύει: $\int_a^\beta (f(x) \cdot g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g(x)dx$ .	A	Ψ
3. Αν $\alpha = \beta$ , τότε $\int_\alpha^\beta g(x)dx = 0$ .	A	Ψ
4. Αν $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ , τότε κατ'ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ .	A	Ψ
5. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ , τότε $\int_a^\beta g(x)dx \geq 0$	A	Ψ
6. Αν $\int_a^\beta g(x)dx \geq 0$ , τότε κατ'ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ .	A	Ψ
7. $\int_{-a}^a (x^4 + 1)dx < \int_{-a}^a (x^4 + x^2 + 1)dx$ για κάθε $a > 0$ .	A	Ψ
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \eta\mu^2 x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sigma\nu x)dx$ .	A	Ψ
9. $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e \ln \frac{1}{t} dt$ .	A	Ψ
10. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των $x$ .	A	Ψ

## II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν  $f'(x) = \eta\mu\pi x$  και  $f(0) = 0$ , τότε το  $f(1) = 1$  ισούται με:

**A.**  $-\frac{1}{\pi}$       **B.**  $\frac{1}{\pi}$       **Γ.**  $-\frac{2}{\pi}$       **Δ.**  $\frac{2}{\pi}$

2. Το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx$  είναι ίσο με:

**A.**  $\frac{4}{3}$       **B.** 0      **Γ.**  $-\frac{4}{3}$       **Δ.**  $\frac{2}{3}$       **E.**  $\frac{5}{3}$

3. Έστω  $f, g$  δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο  $[a, \beta]$ . Αν  $f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

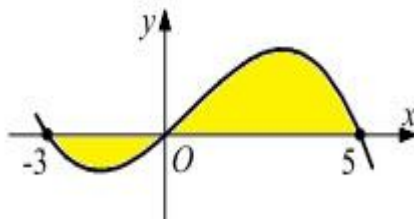
**A.**  $f'(x) \leq g'(x), x \in [a, \beta]$

**B.**  $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$

**Γ.**  $\int f(x) dx \leq \int g(x) dx$

**Δ.**  $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_\beta^a g(x) dx$

4. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του επόμενου σχήματος



Είναι ίσο με:

**A.**  $\int_{-3}^5 f(x) dx$

**B.**  $\int_5^{-3} f(x) dx$

**Γ.**  $\int_{-3}^0 f(x) dx - \int_0^5 f(x) dx$

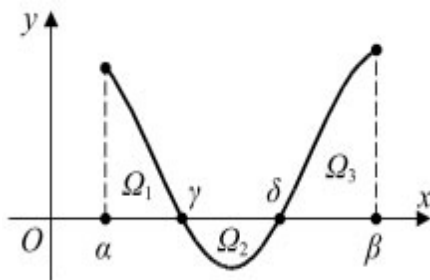
**Δ.**  $\int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$

5. Αν  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$  και  $f(0) = g(0) + 2$ , τότε για κάθε  $x \in [-1, 1]$  ισχύει :

A.  $f(x) = g(x) - 2$                       B.  $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx = 4$

Γ.  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$     Δ. Οι  $C_f$ ,  $C_g$  έχουν κοινό σημείο στο  $[-1, 1]$

6. Έστω η συνάρτηση  $f$  του επόμενου σχήματος:



Αν  $E(\Omega_1) = 2$ ,  $E(\Omega_2) = 1$ ,  $E(\Omega_3) = 3$ , τότε το  $\int_a^\beta f(x)dx$  είναι:

- A. 6                      B. -4                      Γ. 4                      Δ. 0                      E. 2

### III.

1. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα ;

A.  $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$       B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx$       Γ.  $\int_0^\pi \epsilon \varphi x dx$       Δ.  $\int_0^1 \ln x dx$

E.  $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx$       ΣΤ.  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$

2. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I$$

(θέσαμε  $x = \frac{1}{u}$ , οπότε  $dx = -\frac{1}{u^2}$ ). Άρα  $I = -I$ , οπότε  $I = 0$ . Αυτό, όμως,

είναι άτοπο, αφού  $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0$ , επειδή  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

## β. Ερωτήσεις θεωρίας κλειστού τύπου-Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου

### Α. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 = x_2$ , τότε  $f(x_1) = f(x_2)$ .
2. Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) < f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .
3. Αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια των συναρτήσεων  $f, g$  όταν  $x \rightarrow x_0$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

4. Για κάθε συνάρτηση  $f$  η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$ , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$ , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .
5. Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$ .
6. Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .
7. Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» είναι γνησίως μονότονη.
8. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και  $l$  ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$



**9.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

**10.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

**11.** Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1», τότε ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A.$$

**12.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

**13.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**14.** Αν  $a > 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ .

**15.** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}$  και ορίζονται οι συνθέσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

**16.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα  $x'x$ , της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**17.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**18.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1», αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

**19.** Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στο  $x'x$ ) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**20.** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $ho(gof)$ , τότε ορίζεται και η  $(hog)of$  και ισχύει  $ho(gof) = (hog)of$ .

**21.** Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

**22.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $gof$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**23.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**24.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**25.** Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$ .

**26.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  «κοντά» στο  $x_0$ .

**27.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**28.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**29.** Αν  $x \neq 0$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

**30.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι  $[f(a), f(\beta)]$  ή  $[f(\beta), f(a)]$ .

**31.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

**32.** Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1», τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

**33.** Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**34.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) \neq 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι «1-1» στο  $\Delta$ .

**35.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της  $C_f$  σε κάθε σημείο  $x_0 \in \Delta$  είναι «κάτω» από τη  $C_f$ .

**36.** Αν  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ , τότε  $f'(x) = a^x$ .

**37.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}^*$ .

**38.** Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 0$ .

**39.** Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f(a) = f(\beta)$  με  $a < \beta$ , τότε ορίζεται η  $\frac{1}{f'(x)}$  στο  $[a, \beta]$ .

**40.** Αν το  $(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  και η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $x_0$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .

**41.** Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

- 42.** Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f'(x_0) = 0$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε κατ' ανάγκη έχει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .
- 43.** Ανάμεσα σε δυο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.
- 44.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχή σε ένα διάστημα  $\Delta$  ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι «1-1» στο  $\Delta$ .
- 45.** Αν  $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x = 0$  τοπικό μέγιστο.
- 46.** Αν  $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x = 1$  τοπικό μέγιστο.
- 47.** Αν  $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x = 2$  τοπικό ελάχιστο.
- 48.** Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ .
- 49.** Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  έχει στο  $+\infty$  οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .
- 50.** Αν μια συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο σημείο  $x_0$ , αλλά δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
- 51.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  και για ένα σημείο  $x_0 \in D_f$  ισχύει:
- $$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
- τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
- 52.** Μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  δεν έχει ασύμπτωτες.

**53.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f$  κυρτή στο  $\Delta$ , τότε  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

**54.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Στα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  όπου η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η  $C_f$  έχει οριζόντια εφαπτομένη.

**55.** Αν μια συνάρτηση  $f$  ορίζεται και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .

**56.** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, δεν έχουν ασύμπτωτες.

**57.** Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμπής.

**58.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: (a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $\beta$ , το  $f(\beta)$ .

**59.** Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , με  $P(x), Q(x)$  πολυώνυμα βαθμού  $n \geq 1$  και  $Q(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου ο βαθμός του αριθμητή ισούται με το βαθμό του παρονομαστή. Τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει ασύμπτωτες στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$ .

**60.** Ισχύει η σχέση  $\int_a^\beta f(x) g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta (f'(x) \cdot g(x)) dx$ , όπου  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$ .

**61.** Ισχύει η ισοδυναμία:  $\int_a^\beta f(x) dx = 0 \Leftrightarrow a = \beta = 0$ .

**62.** Ισχύει:  $(\int_a^\beta f(x) dx)' = 0$ .

63. Ισχύει:  $\int_a^\beta c dx = c(a - \beta)$  με  $\beta > a$ .

64. Αν  $f'$ ,  $g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g'(x)dx.$$

65. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , τότε το  $\int_a^\beta f(x)dx$  παριστάνει εμβαδόν.

66. Αν  $f$ ,  $g$  είναι συνεχείς στο  $[a, \beta]$  με  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και η  $f$  δεν είναι παντού ίση με τη  $g$  στο  $[a, \beta]$ , τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx.$$

67. Αν  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$  και  $a, \beta \in \Delta$ , τότε  $\int_a^\beta f(x)dx < 0$ .

68. Αν  $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

69. Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και για κάθε  $x \in [a, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού 0 στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ .

70. Αν  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , τότε το πεδίο ορισμού της  $F$  είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της  $f$ .

71. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta).$$

72. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $a, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

73. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

**74.** Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^{\gamma} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**75.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και  $\int_a^{\beta} f(x)dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

**76.** Αν  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε και  $\int_a^{\beta} f(x)dx \neq 0$ .

**77.** Αν  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε  $a \in \Delta$ .

**78.** Αν  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[a, \beta]$  με  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε  $\int_a^{\beta} f(x)dx \geq \int_a^{\beta} g(x)dx$ .

**79.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  και ισχύει  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε  $\int_a^{\beta} f(x)dx \geq 0$ .

**80.** Αν  $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$ , τότε  $f'(3) = 0$ .

### B. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\eta\mu 2x$	α) $\eta\mu(2x)$
2) $\eta\mu^2(x)$	β) $2\sigma\upsilon\nu(2x)$
3) $\eta\mu(x^2)$	γ) $\sigma\upsilon\nu(x^2)$
4) $\eta\mu^3(x)$	δ) $2x\sigma\upsilon\nu(x^2)$
	ε) $3\eta\mu^2(x)$
	στ) $3\eta\mu^2(x)\sigma\upsilon\nu(x)$

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την ασύμπτωτή της στο  $+\infty$  από τη στήλη Β.

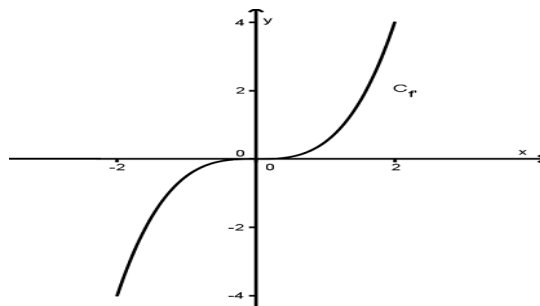
Στήλη Α	Στήλη Β
1) $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{\ln x}$	α) $y = 2x + 1$
2) $g(x) = x - 5 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$	β) $y = x - 5$
3) $h(x) = 2x + 1 + \frac{x + 2}{x + 1}$	γ) $y = 2x + 2$
	δ) $y = x - 4$
	ε) $y = 2x + 3$



3. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
$f$	$f'$
1) $e^{3x}$	α) $3e^x$
2) $e^{x^3}$	β) $e^{3x}$
3) $3e^x$	γ) $3x^2e^{x^3}$
4) $e^{x+3}$	δ) $3e^{3x}$
	ε) $e^{x+3}$
	στ) $e^{3x^2}$
	ζ) $e^x + e^3$

4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-2, 2]$ . Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:



Το σημείο  $A(0, f(0))$  είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της  $f$ .
2. θέση τοπικού ελάχιστου της  $f$ .
3. σημείο καμπής της  $C_f$ .

### Γ. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

**1.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $x \in \mathbb{R}$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_0) = -3$ . Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, +\infty)$ , τότε η  $f$  έχει:

**i.** καμία ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**ii.** μία ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**iii.** δύο ακριβώς ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

**iv.** περισσότερες από δύο ρίζες στο  $\mathbb{R}$

**2.** Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Αν  $f$  παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(0) = 0$  και η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , τότε το  $f(0)$  είναι:

**i.** τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**ii.** τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**iii.** δεν είναι ακρότατο της  $f$ .

**3.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $(0, +\infty)$  με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ .

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι κατ'ανάγκη σωστή;

**i.** Η  $y = 5$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

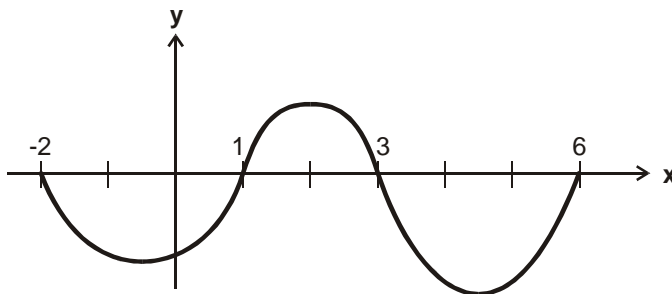
**ii.**  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

**iii.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4] = 1$ .

## 1.5. Ερωτήσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων

### α. Θεωρία

1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .
2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
3. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .
  - α. Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .
  - β. Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ ;
4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-2, 6]$ .



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

5. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = \sigma \nu x$ .

**6.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**7.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**8.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

**α.** όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$ .

**β.** κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**9.** Πότε μία ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**10.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon \varphi x$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sin x = 0\}$  και

$$\text{ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

**11.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι  $f'(x) = 0$ .

**12.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**13.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και
- $f(a) \neq f(\beta)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον,  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**14.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**15.** Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**16.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται «1-1»;

**17.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**18.** Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

**19.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**20.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**21.** Να αποδείξετε ότι:  $(\sin x)' = -\eta\mu x$ .

**22.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**23.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**24.** Πότε η ευθεία  $y=l$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**25.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**26.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα  $(a, \beta)$  και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**27.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  ισχύει, να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**28.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**29.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**30.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**31.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(\sin x)' = \cos x$ .

**32.** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της  $f$  στο  $\Delta$ .

**33.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a).$$

**34.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

**35.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

**36.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**37.** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;

**38.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**39.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο, όμως, η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**40.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

- 41.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ;
- 42.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;
- 43.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  ;
- 44.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;
- 45.** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  ;
- 46.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ'ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:  
Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .
- 47.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;
- 48.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- 49.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .
- 50.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής .
- 51.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = l$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  ;



**52.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**53.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**β. Αντικειμενικού τύπου**

**1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο  $x_0$ .

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
α. $f(x) = 3x^3, x_0 = 1$	1. $y = 2x + \pi$
β. $f(x) = \eta\mu 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}$	2. $y = \frac{1}{4}x + 1$
γ. $f(x) = 3 x , x_0 = 0$	3. $y = 9x - 6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$	4. $y = -9x + 5$
	5. δεν υπάρχει

**2.** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α.  $\int_a^b f(x)dx = \dots\dots\dots$       β.  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \dots\dots\dots$

γ.  $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \dots\dots\dots,$

όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις  $[a, \beta]$ .

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**2.** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}$  και ορίζονται οι συνθέσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

**3.** Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

**4.** Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2).$$

**5.** Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**6.** Αν μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1», τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύει  $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$  και  $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$ .

**7.** Αν μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1», τότε υπάρχουν σημεία της με την ίδια τεταγμένη.

**8.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[a, \beta]$  και συνεχής στο  $(a, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[a, \beta]$  μία μέγιστη τιμή.

**9.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**10.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $-f$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .

**11.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1», αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

**12.** Κάθε συνάρτηση, που είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

**13.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

**14.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**15.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**16.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει  $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ .

**17.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή

είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**18.** Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

**19.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  με  $f(a) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ'ανάγκη  $f(\beta) > 0$ .

**20.** Ισχύει ότι:  $|\eta\mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**21.** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .

**22.** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ .

**23.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0.$$

**24.** Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \right).$$

**25.** Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$ , τότε αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$  είναι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

26. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

27. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

28. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

29. Αν  $a > 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

30. Αν  $0 < a < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ .

31. Αν  $0 < a < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ .

32. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

33. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

34. Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

35. Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (-f(x)) = +\infty$ .

36. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

37. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .

38. Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

39. Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f''$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

- 40.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- 41.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε  $f(x) = g(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .
- 42.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ , στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- 43.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .
- 44.** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
- 45.** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
- 46.** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
- 47.** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  και σημείο  $x_0 \in [a, \beta]$  στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι  $f'(x_0) = 0$ .
- 48.** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) \geq 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**49.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφεται κοίλα προς τα άνω, τότε κατ'ανάγκη θα ισχύει  $f''(x) \geq 0$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**50.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(a, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν η  $f$  είναι κυρή στο  $(a, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$  ή αντιστρόφως, τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**51.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση της παράστασης.

**52.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

**53.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(a, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(a, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**54.** Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και για κάθε  $x \in [a, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$ , τότε  $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$ .

**55.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx.$$

**56.** Το ολοκλήρωμα  $\int_a^\beta f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

**57.** Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = a$ ,  $x = \beta$  και τον άξονα  $x'x$  είναι  $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x)dx$ .

**58.** Αν  $f$  είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε:

$$\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

**59.** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta (f'(x) \cdot g(x))dx.$$

**60.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx = [xf(x)]_a^\beta - \int_a^\beta xf'(x)dx.$$

**61.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**62.** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

**63.** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

**64.** Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .



**65.** Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .

**66.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

**67.** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_a^\beta f(x) dx > 0$ .

**68.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**69.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right).$$

**70.** Αν είναι  $0 < a < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

**71.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , τότε υποχρεωτικά  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

**72.** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε το  $\int_a^\beta f(t) dt = G(a) - G(\beta)$ .

**73.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**74.** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**75.** Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

**76.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[a, \beta]$  μία μέγιστη τιμή  $M$  και μία ελάχιστη τιμή  $m$ .

**77.** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**78.** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $\nu \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

**79.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\nu x - 1}{x} = 1.$

**80.** Αν  $f(x) = |x|$  για κάθε  $x \neq 0$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{|x|}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**81.** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , συνεχή στο  $[a, \beta]$ , ισχύει:

$$\text{Αν } \int_a^\beta f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [a, \beta].$$

**82.** Μια συνάρτηση είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

**83.** Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$

**84.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$

**85.** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**86.** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $\nu \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

- 87.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ , που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.
- 88.** Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$ , για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ .
- 89.** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .
- 90.** Για κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\Delta$  ισχύει  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .
- 91.** Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[a, \beta]$ , τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx = -\int_\beta^a f(x)dx.$$



<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>	<b>ΘΕΜΑ Β</b>	
	<b>2.1</b>	Σχολικού Βιβλίου
	<b>2.2</b>	Ψηφιακού Βοηθήματος του Υπουργείου
	<b>2.3</b>	Προτεινόμενα
	<b>2.4</b>	Πανελλαδικών Εξετάσεων
<b>2.5</b>	Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Β	
<b>2°</b>		

## 2.1. Σχολικού Βιβλίου

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**1.** Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2} & \text{ii. } f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x} \\ \text{iii. } f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{iv. } f(x) = \ln(1-e^x) \end{array}$$

**2.** Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } f(x) = \frac{|x|}{x} + 1 & \text{ii. } f(x) = x|x| \\ \text{iii. } f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases} & \text{iv. } f(x) = |\ln x| \end{array}$$

και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε καθεμιά περίπτωση.

**3.** Για ποιές τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ , όταν:

$$\text{i. } f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{ii. } f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{iii. } f(x) = e^x - 1$$

**4.** Για ποιές τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , όταν:

**α.**  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  και  $g(x) = x + 1$

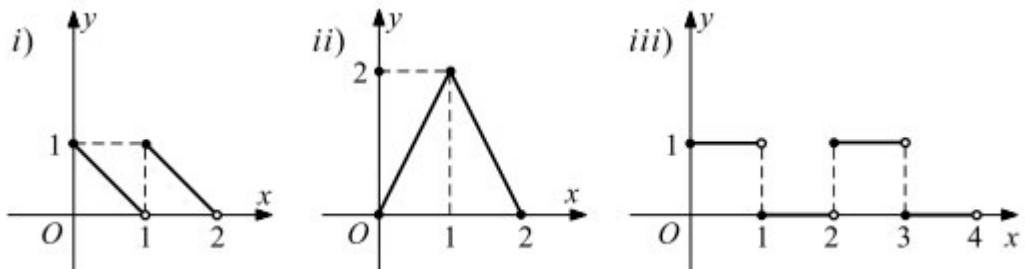
**β.**  $f(x) = x^3 + x - 2$  και  $g(x) = x^2 + x - 2$

5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$\text{i. } f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{2} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{\eta\mu x + |\eta\mu x|}{2}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Από τη γραφική παράσταση της  $f$  να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

6. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι :



7. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι  $f = g$ . Στις περιπτώσεις που είναι  $f \neq g$ , να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

α.  $f(x) = \sqrt{x^2}$  και  $g(x) = (\sqrt{x})^2$ .

β.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$  και  $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$ .

γ.  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$  και  $g(x) = \sqrt{x} + 1$ .

8. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}$

Να βρείτε τις συναρτήσεις  $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ .

**9.** Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

**10.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $gof$ , αν:

**α.**  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**β.**  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

**γ.**  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  και  $g(x) = \epsilon\varphi x$ .

**11.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x-2}.$$

Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $gof$  και  $fog$ .

**12.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x+1$  και  $g(x) = ax+2$ . Για ποια τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  ισχύει  $fog = gof$ ;

**13.** Να βρείτε συνάρτηση  $f$  τέτοια, ώστε να ισχύει:

**α.**  $(fog)(x) = x^2 + 2x + 2$ , αν  $g(x) = x+1$ .

**β.**  $(fog)(x) = \sqrt{1+x^2}$ , αν  $g(x) = -x^2$ .

**γ.**  $(gof)(x) = |\sigma\nu\nu x|$ , αν  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .



14. Δίνονται οι συναρτήσεις:

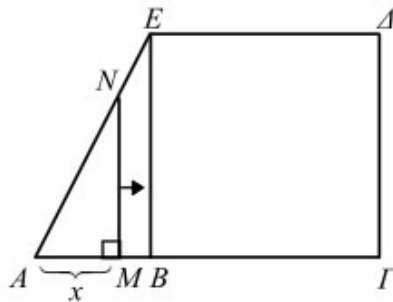
$$f(x) = \frac{ax + \beta}{x - a}, \text{ με } \beta \neq -a^2 \text{ και } g(x) = x - 2\sqrt{x + 1}$$

Να αποδείξετε ότι:

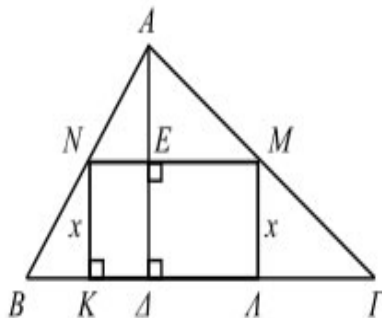
α.  $f(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{a\}$  και

β.  $g(g(x)) = x$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

15. Στο επόμενο σχήμα είναι  $AB = 1$ ,  $AG = 3$  και  $\Gamma\Delta = 2$ . Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του  $x = AM$ , όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα  $AG$ .



16. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους  $x$  cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  βάσης  $B\Gamma = 10$  cm και ύψους  $A\Delta = 5$  cm. Να εκφράσετε το εμβαδό  $E$  και την περίμετρο  $P$  του ορθογωνίου ως συνάρτηση του  $x$ .



**17.** Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

$A(x) = 2,89x + 70,64$  (για τους άνδρες) και  $\Gamma(x) = 2,75x + 71,48$  (για τις γυναίκες), όπου  $x$  σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

**α.** Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

**β.** Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

**18.** Σύρμα μήκους  $l = 20\text{cm}$  κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη  $x$  cm και  $20 - x$  cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του  $x$ .

**19.** Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός  $P$  της πόλης είναι  $x$  εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη:

$$N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$$

χιλιάδες αυτοκίνητα.

Έρευνες δείχνουν ότι σε  $t$  έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι  $\sqrt{t+4}$  εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

**α.** Να εκφράσετε τον αριθμό  $N$  των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του.

**β.** Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα;

**20.** Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και για κάθε μία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφη της.

**i.**  $f(x) = 3x - 2$

**ii.**  $f(x) = x^2 + 1$

**iii.**  $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$

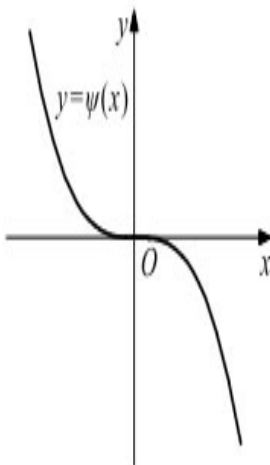
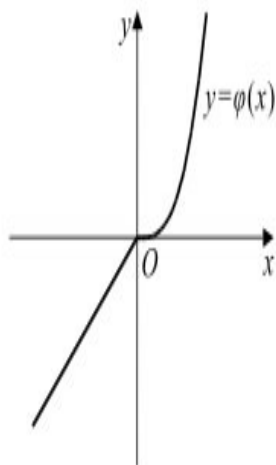
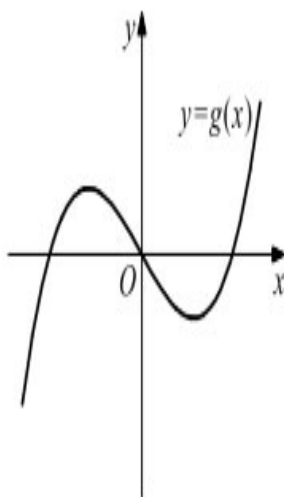
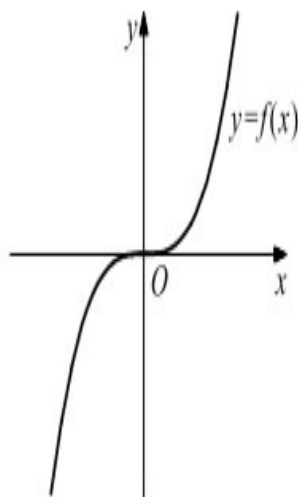
**iv.**  $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

**v.**  $f(x) = \ln(1-x)$

**vi.**  $f(x) = e^{-x} + 1$

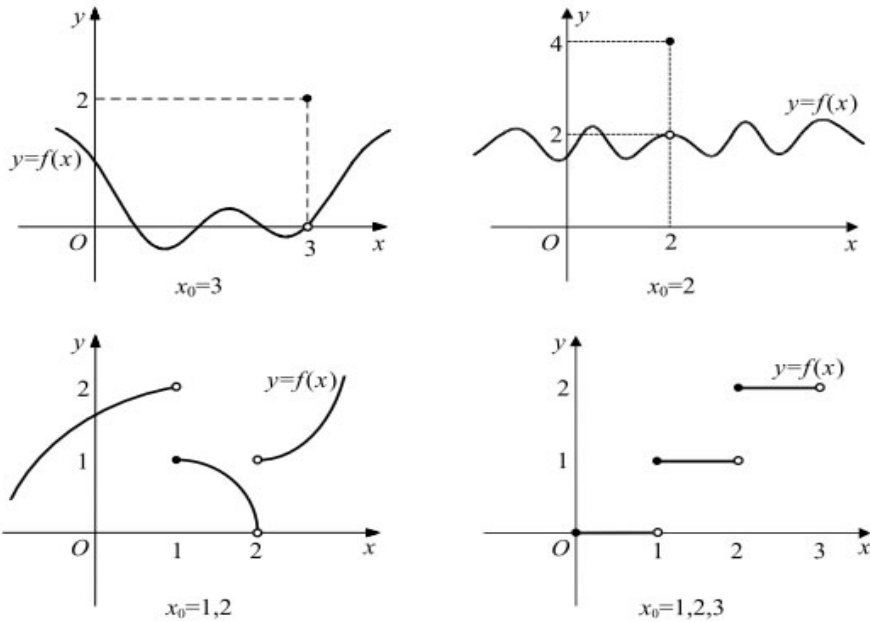
vii.  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$       viii.  $f(x) = |x - 1|$

21. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ .



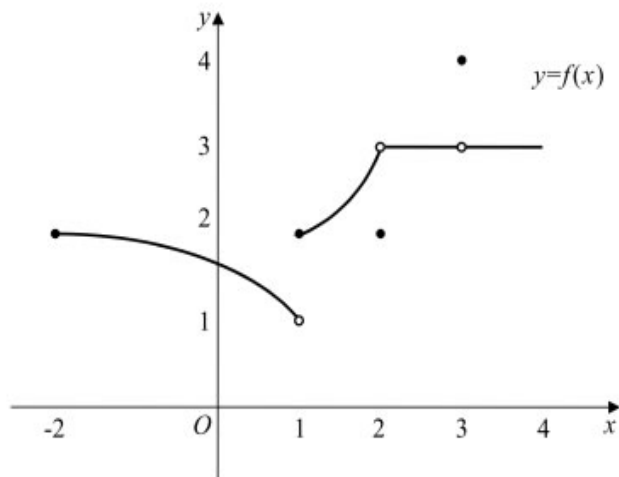
Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

22. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και το  $f(x_0)$ , εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι :



23. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη στο  $[-2, +\infty)$  και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

- i)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$
- ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- iv)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$
- v)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$
- vi)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



**24.** Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όταν:

$$\text{i. } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, x_0 = 2 \qquad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1 \qquad \text{iv. } f(x) = x + \frac{\sqrt{x}}{x}, x_0 = 0$$

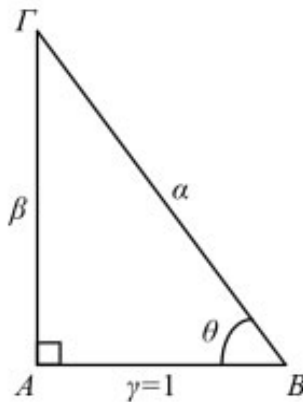
**25.** Ομοίως όταν :

$$\text{α. } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}, x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1$$

$$\text{β. } f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x - 1}, x_0 = \frac{1}{3}$$

**26.** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με  $\gamma = 1$ . Να

υπολογίσετε τα όρια: **i.**  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$  **ii.**  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$  **iii.**  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$



27. Να προσδιορίσετε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x)$  να υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ .

28. Αν  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + \beta$ , να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

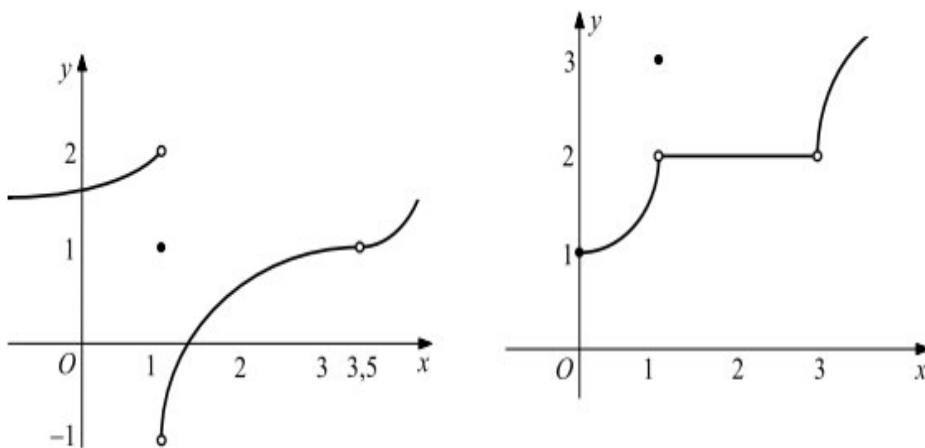
29. Να βρείτε τα όρια :

α.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$ .

β.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 5 - x}{x + \sqrt{4 + 3x^2}}$ .

γ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$ .

30. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.



**31.**

**α.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ . Να βρείτε το  $f(0)$ , αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $xf(x) = \sin x - 1$ .

**β.** Ομοίως, να βρείτε το  $g(0)$  για τη συνάρτηση  $g$  που είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^2$ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Αν  $x+1 \leq f(x) \leq x^2+x+1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι :

i.  $f(0)=1$

ii.  $1 \geq \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq x+1, x < 0$

iii.  $1 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq x+1, x > 0$

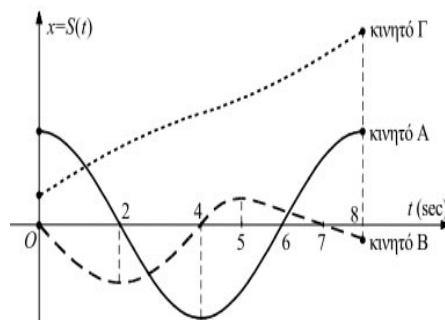
iv.  $f'(0)=1$

2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε:

i.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$

ii.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα  $x'x$  στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε :



α. Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

β. Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

γ. Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή  $t = 2$  sec, ποιο τη χρονική στιγμή  $t = 4$  sec και ποιο τη χρονική στιγμή  $t = 6$  sec;



**δ.** Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;

**ε.** Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

**στ.** Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

**4.** Έστω  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x}$  σε ένα σημείο της  $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ . Αν Α, Β είναι τα σημεία στα οποία η  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

**α.** Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

**β.** Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του  $\xi \in \mathbb{R}^*$ .

**5.** Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

**i.**  $f(x) = x^{\ln x}$

**ii.**  $f(x) = 2^{5x-3}$

**iii.**  $f(x) = (\ln x)^x, x > 1$

**iv.**  $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\nu x}$

**6.** Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε:

$$f(0) = 4, f'(-1) = 2, f''(2) = 4, f^{(3)}(1) = 6$$

**7.** Αν μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = a$ , να αποδείξετε ότι:

**i.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x) - af(a)}{x - a} = f(a) + af'(a)$

**ii.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x f(x) - e^a f(a)}{x - a} = e^a (f(a) + f'(a))$

**8.** Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad , \quad \text{ii. } f(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $O(0, 0)$  σε καθεμιά περίπτωση χωριστά.

**9.** Έστω  $f$  μια παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f'(1) = 1$  και  $g$  η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα  $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(1, f(1))$  εφάπτεται της  $C_g$  στο  $B(0, g(0))$ .

**10.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$ , για κάθε  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**α.** Να βρείτε την  $f'(0)$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

**11.** Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 1$ . Καθώς περνάει από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , η τεταγμένη  $y$  ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $x$  τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το  $A$ .

**12.**

**α.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  με  $f'(x) \neq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\eta\mu \frac{x}{2} = x$ , αληθεύει μόνο για  $x = 0$ .

**13.**

**α.** Να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**β.** Αν  $f$  είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , να αποδείξετε ότι για όλα τα  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$|f(\beta) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |\beta - a|$$

**14.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0, 4]$  και ισχύει  $2 \leq f'(x) \leq 5$  για κάθε  $x \in (0, 4)$ . Αν  $f(0) = 1$ , να αποδείξετε ότι  $9 \leq f(4) \leq 21$ .

**15.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  και ισχύει  $f'(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Αν  $f(-1) = -1$  και  $f(1) = 1$ , να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ , εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$ .

**16.** Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = 2^x$  και  $g(x) = -x^2 + 2x + 1$  έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία, τα  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ .

**17.** Να αποδείξετε ότι :

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$  είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

**β.** Η εξίσωση:

$$x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$$

είναι ισοδύναμη με την  $f(x) = a$  και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

**18.** Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu x - \chi\sigma\nu x,$$

είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**β.**  $\eta\mu x - \chi\sigma\nu x > 0$ , για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**γ.** Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**19.** Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\varphi x - 3x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  είναι γνησίως αύξουσα.

**β.**  $2\eta\mu x + \epsilon\varphi x \geq 3x$ , για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**20.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2\eta\mu x - x + 3, x \in [0, \pi]$$

**α.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(0, \pi)$ .

**21.**

**α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$f(x) = \ln x + x - 1$  και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

**β.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3.$$

**γ.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$g(x) = x \ln x \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

**22.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

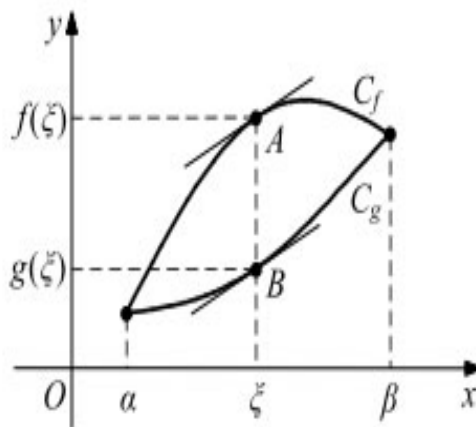
**i. α)**  $e^x > 1+x$                       **β)**  $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$

**ii. α)**  $\sin x > 1-\frac{1}{2}x^2$               **β)**  $\eta\mu x > x-\frac{1}{6}x^3$

**iii. α)**  $(1+x)^v \geq 1+vx$ ,  $v \in \mathbb{N}$  με  $v \geq 2$

**β)**  $(1+x)^v \geq 1+vx+\frac{v(v-1)}{2}x^2$ ,  $v \in \mathbb{N}$  με  $v \geq 3$

**23.** Στο επόμενο σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Το σημείο  $\xi \in [a, \beta]$  είναι το σημείο στο οποίο η καρακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των  $C_f$  και  $C_g$  παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.



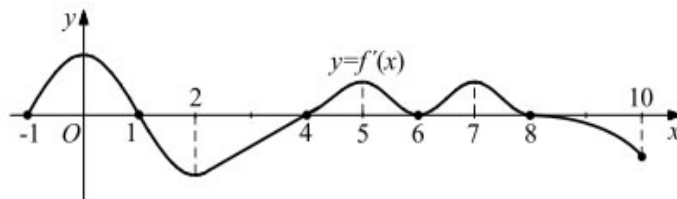
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των  $C_f$  και  $C_g$  στα σημεία  $A(\xi, f(\xi))$  και  $B(\xi, g(\xi))$  είναι παράλληλες.

24. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  και το σημείο  $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ .

α. Να βρείτε το σημείο  $M$  της  $C_f$  που απέχει από το σημείο  $A$  τη μικρότερη απόσταση.

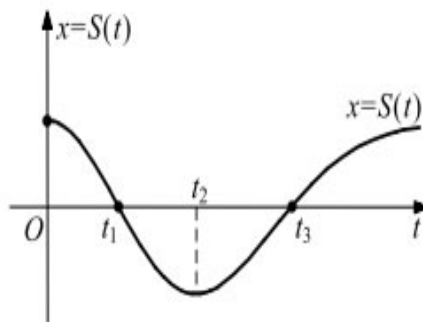
β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M$  είναι κάθετη στην  $AM$ .

25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-1, 10]$ .



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

26. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση  $C$  της συνάρτησης θέσεως  $x = S(t)$  ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.



Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_3$ , να βρείτε:

**α.** Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά;

**β.** Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

**27.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

**β.** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$$

είναι συνευθειακά.

**28.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $[-2, 2]$ , για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

**29.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$



Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , ενώ

**β.** Η  $g$  είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**30.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ (1 - e^{-x}) \ln x, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

**α.** Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x.$$

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $0(0, 0)$ .

**31.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\text{i. } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11 \quad \text{ii. } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{iii. } f(x) = x^4 - 2x^2$$

**32.** Ομοίως τις συναρτήσεις :

$$\text{i. } f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

**33.** Αν  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ , με  $f(0) = g(0)$  και  $f'(x) > g'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $f(x) < g(x)$  στο  $(-\infty, 0)$  και  $f(x) > g(x)$  στο  $(0, +\infty)$ .

**34.**

**α.** Αν  $a, \beta > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $a^x + \beta^x \geq 2$ , να αποδείξετε ότι  $a \cdot \beta = 1$ .

**β.** Αν  $a > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $a^x \geq x+1$ , να αποδείξετε ότι  $a = e$ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Να υπολογίσετε το κ έτσι, ώστε:

$$\int_1^{\kappa} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} dx - \int_{\kappa}^1 \frac{5}{x^2 + 1} dx = 3$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i.  $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

ii.  $\int_1^e \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3}} dx$

iii.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x) dx$

iv.  $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 7x}{x^2 + 5} dx + 2 \int_2^1 \frac{x}{x^2 + 5} dx = \frac{3}{2}.$$

4. Να αποδείξετε ότι:  $2 \int_a^{\beta} f(x) f'(x) dx = (f(\beta))^2 - (f(a))^2$ .

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(0, 0)$  και  $B(1, 1)$ , να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^1 f'(x) dx$ , εφόσον η  $f'(x)$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ .

6. α. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

β. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2})$ .

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i.  $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$

ii.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x) \eta\mu x - \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)] dx$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i. } \int_0^2 (x^2 - |x-1|) dx \quad \text{ii. } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ αν } f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \eta\mu x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$\text{iii. } \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx.$$

**9.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i. } \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ii. } \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$\text{iii. } \int_0^1 x \ln(9+x^2) dx \quad \text{iv. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

**10.** Αν  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta\mu^2 x dx$ ,  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ , να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I+J, I-J, I, J.$$

**11.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με  $f''$  συνεχή και για την οποία ισχύει:

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = 2$$

Αν  $f(\pi) = 1$ , με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το  $f(0)$ .

**12.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$ , με  $f'', g''$  συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$  και  $f'(\beta) = g'(\beta)$ , να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x)g''(x) - f''(x)g(x)) dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta))$$

**13.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 3x^2$

**α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, 3)$ .

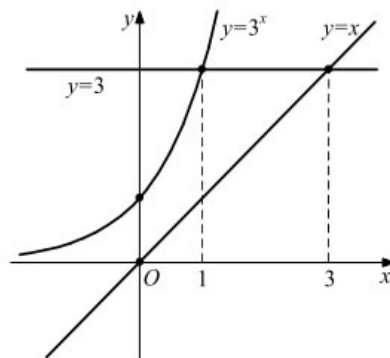
**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της στο  $A$  και τον άξονα των  $x$ .

**14.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \sqrt{x-1}$  και  $g(x) = \frac{x+1}{3}$ .

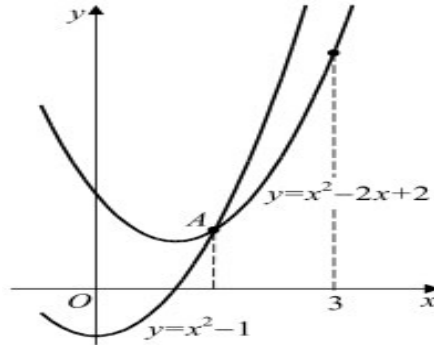
**15. i.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν,  $E(\lambda)$ , του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \frac{e}{x}$ ,  $g(x) = \ln x$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία  $x = \lambda$ ,  $\lambda > e$ .

**ii.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .

**16.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



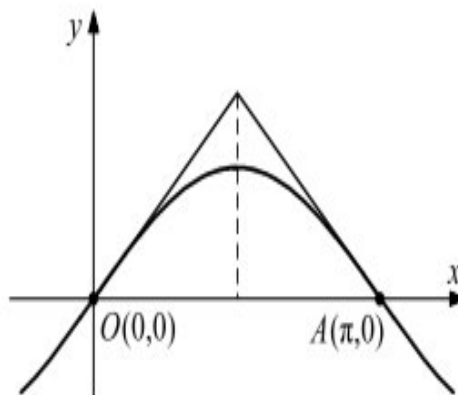
**17.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



**18.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$

**α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  στα σημεία  $O(0, 0)$  και  $A(\pi, 0)$ .

**β.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις εφαπτόμενες στα σημεία  $O$  και  $A$ .



**19.**

**α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x}$  την εφαπτόμενή της στο σημείο  $(1,1)$  και τον άξονα των  $x$ .

**β.** Να βρείτε την ευθεία  $x = a$ , η οποία χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

**20.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \ln \frac{1}{x}$  και την ευθεία  $y = \ln 2$ .

**21. α.** Να βρείτε συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0, 2)$  και η κλίση της στο σημείο  $M(x, f(x))$  είναι  $2x - 3$ .

**β.** Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η  $C_f$  και ο άξονας των  $x$ .

**22.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (x-1)(x-3)$

**α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία Α, Β που η  $C_f$  τέμνει τον άξονα των  $x$ .

**β.** Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η  $C_f$  χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι  $2/1$ .

## 2.2. Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$ .

α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της  $f$ .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $\mathbb{R}$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

γ. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.    ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

γ. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

δ. Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(1+x) = 2$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$ .

α. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$ .

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός  $x \in \mathbb{R}$  για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

γ. Να λύσετε την ανίσωση:  $3x2^x + 2^x < 1$ .



**6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα, τη  $x = 1$ .

**γ.** Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

**7.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όταν:

**i.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$     **ii.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$     **iii.**  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$

**8.** Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία  $A(1, 8)$  και  $B(5, 12)$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παίρνει την τιμή  $\frac{29}{3}$ .

**γ.** Υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, 5)$  τέτοιο, ώστε:  $f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$

**9.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

**γ.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$

**δ.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$ .

**10.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = -2x^3 - 3x - 1$$

**α.** Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση:  $f^{-1}(x) = 2$ .

**δ.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f^{-1}(x) \geq x - 1$ .

**11.** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

**α.** Να βρείτε το  $f^{-1}(1)$ .

**β.** Να βρείτε το  $f(3)$ .

**γ.** Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 3$ .

**δ.** Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$ .

**12.** Δίνεται η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  περνάει από το σημείο  $M(1, 1)$ .

**β.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$ .

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

**γ.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς τη συνέχεια.

**δ.** Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g$  με τύπο:

$$g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$$

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$ .

**β.** Να βρείτε συνάρτηση  $h$  για την οποία να ισχύει  $(h \circ g)(x) = x$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι περιττή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-2} + x - 3$ .

α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και το σύνολο τιμών της  $f$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(0, 1)$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x^2)$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της  $f$ .

β. Να βρείτε τα σημεία της  $C_f$  στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x}$ ,  $x \neq 0$

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \neq 0$ .

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

γ. Αν  $A$  και  $B$  τα σημεία που η εφαπτομένη στο  $M$  τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το  $M$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$ .

5. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ . Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στα οποία η εφαπτομένη:

α. να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x$ .

β. να σχηματίζει γωνία  $135^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ .

γ. να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

δ. να είναι κάθετη στην ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$ .

7. Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i.  $x^{\eta\mu x}, x > 0$     ii.  $2^{x \cdot \ln x}, x > 0$     iii.  $\sqrt{5x^8 + 1}$

8. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:

$$-2x + 1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

τότε:

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 0$ .

β. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 0$  και ισχύει  $f'(0) = -2$

9. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 > 0$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2}$     ii.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

**10.** Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο  $O(0, 0)$ , δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2$ . Να βρείτε τις διαστάσεις του  $a$ ,  $\beta$ , ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

**11.** Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2$ .

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f'(0) = 2$ .

**12.** Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$ . Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x) + 2f'(x) = 2f''(x).$$

**13.** Να δείξετε ότι:  $2 \ln(x-1) \leq x - 3 + \ln 4$  για κάθε  $x > 1$ .

**14.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  στο σημείο της  $A(1, 1)$  εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 2x^2 + 7x$ .

**15.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$  έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

**α.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon : y = -\frac{1}{2}x + 7$ .

**β.** Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της  $C_f$  που διέρχονται από το  $O(0, 0)$ .

**γ.** Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο  $A(2, 0)$ ;

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \kappa \cdot x - 1$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$

**α.** Αν η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$  είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y = 3x + 5$ , να βρείτε την τιμή του  $\kappa$ .

**β.** Αν  $\kappa = 2$  να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x - 1$ .

**18. α.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 24x^2 + 5x - 7$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του  $a$ , ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Για ποια τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το  $A(1, f(1))$ ;

**19. α.** Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

**i.**  $e^{x-1} \geq x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$     **ii.**  $e^{x^2} \geq 1 - x$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

**β.** Να δείξετε ότι:  $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

**1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:  $f(x) = \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

**β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**γ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$  αν  $x \rightarrow -\infty$ .

### 2.3. Προτεινόμενα

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ \lambda, & \text{αν } x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

**B1.** Να δείξετε ότι  $\kappa = 2$  και  $\lambda = 4$ .

**B2.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = e^x + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1».

**B2.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(\ln x) = f(1 - x^2)$ .

**B3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση  $e^{x^2} - e^x + x^2 - x > 0$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$  και  $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ .

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  καθώς και το πλήθος των ριζών της.

**B3.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

**B4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  δεν είναι αντιστρέψιμη.

**B5.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**4.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$ .

**B1.** Αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[a, \beta]$ , να αποδείξετε ότι:

$$f'(a) < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < f'(\beta)$$

**B2.** Αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[a, \beta]$ , να αποδείξετε ότι:

$$f'(\beta) < \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < f'(a)$$

**5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

**B3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

**B4.** Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

**6.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, x \in \mathbb{R}$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**B2.** Να λύσετε την εξίσωση  $3^x + 4^x = 5^x$ .

**B3.** Να λύσετε την ανίσωση  $3^{\ln x} + 4^{\ln x} < 7 \cdot 5^{\ln x - 1}$ .

**7. B1.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - x}$$

**B2.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|1-x^2| + |x^2-3| - 14}{x^2 - 2x - 3}$$



**B3.** Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 = 1$ , όπου:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 1, & \text{αν } x > 1 \\ \sqrt{x-1}, & \\ \frac{x^2 - x}{\eta\mu 3x}, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

**8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - 2 \ln x$

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

**B3.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**B4.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  $x^2 - 1 - \lambda x = 2x \ln x$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**9. B1.** Αν  $f, g$  οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  και  $g(x) = (x - 2)^2$  αντίστοιχα, να βρείτε τα επόμενα όρια:

**i.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)(x)}{x^2 - 1}$ .

**ii.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x}$ .

**B2.** Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ , ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^3 - \beta x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2} = -2$$

**B3.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 + 2x + \mu}{x}$$

Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  για όλες τις τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**10.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ ,  $x > 0$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η  $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1$ .

**B3.** Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

## 2.4. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων

**1.** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1 \\ x - 1, & x = 1 \\ ax - 2a + 3, & x > 1 \end{cases}$$

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ .

**B2.** Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**2.** Έστω  $f$  μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

**B1.** Αν η  $f$  είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι  $a = -\frac{1}{9}$ .

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(4, f(4))$ .

**B3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

**3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(3, f(3))$ .

**B3.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

**4.** Δίνεται η πραγματική συνάρτηση  $f(x) = x^2 - κx + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $κ$ , για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, 0)$ .

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $B(0, f(0))$ , όταν  $κ = 17$ .

**5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**B1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**B2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

**B3.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ .

**6.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

**B1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = x - 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

**B3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

**7.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 \ln x$ .

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

**B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**8.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$ ,  $m \in \mathbb{R}$  και  $m > 0$ .

**B1.** Να βρείτε τον  $m$ , ώστε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B2.** Αν  $m = 10$ , να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**9.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + \kappa, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$ .

**B3.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\mu$ , ώστε να ισχύει:

$$\mu f'(5) + f'(5) + 34 = 0.$$

**10.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + 3x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1)$ . Να αποδείξετε ότι:

**B1.**  $\kappa = -1$ .

**B2.** Η συνάρτηση  $f$  δεν έχει τοπικά ακρότατα.

**B3.** Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

**11.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x < 1 \\ x^4 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

**B3.** Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[-1, 2]$ .

**12.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2 + (x-2)^2, \quad x \geq 2.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.

**B3.**

**α.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**13.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία της στο  $\mathbb{R}$ .

**B2.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx.$$

**B3.** Για κάθε  $x < 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x).$$

**14.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 2$ .

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(0, f(0))$ .

**B3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = \frac{1}{2}x - 2$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .

**15.** Έστω η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

**B1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι:

**α.** συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ ,

**β.** παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 1$ .

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(2, 1)$ .

**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x-1} + ax$ ,  $x \neq 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$

**B1.** Να βρείτε το  $a$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): x - 3y + 6 = 0$ .

**B2.** Αν  $a = 1$ , τότε:

**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα .

**β.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  .

**γ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)-6}{x^2-1}$  .

**17.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**B2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$  , όπου  $g(x) = \sqrt{f(x)-2}$  .

**B3.** Να λύσετε την εξίσωση:  $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$ ,  $x \in (0, +\infty)$  .

**B4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να διέρχεται από το σημείο  $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$  .

**18.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$  .

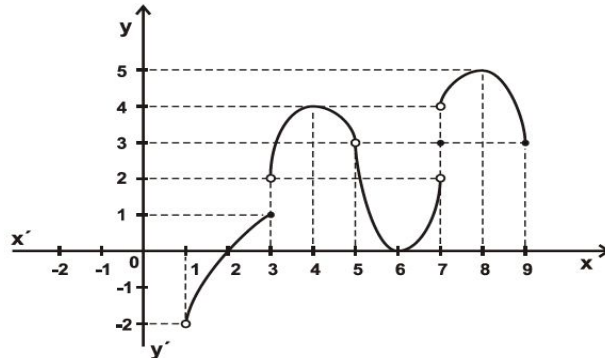
**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  .

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  .



**19.** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$     δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$     ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει

$$f'(x_0) = 0.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**20.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**B2.** Αν  $a = 1$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**B3.** Για την παραπάνω τιμή του  $a$ , να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

**21.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{ax-1}{x+1}$ ,  $x \neq -1$ , όπου το  $a$  είναι ένας

πραγματικός αριθμός.

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$ .

Αν  $a = 3$  τότε:

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**B3.** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  είναι η:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}, x \neq 3.$$

**B4.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

## 2.5. Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Β

### 1<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

#### **ΘΕΜΑ 1ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:  $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».
- iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(1+x) = 2$ .

#### **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

**A.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \neq 0$ .

**B.** Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

**Γ.** Αν  $A$  και  $B$  τα σημεία που η εφαπτομένη στο  $M$  τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το  $M$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$ .

#### **ΘΕΜΑ 3ο**

**A.** Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

- i.  $e^{x-1} \geq x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ii.  $e^{x^2} \geq 1 - x$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

**B.** Να δείξετε ότι:  $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

2<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**ΘΕΜΑ 1ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} + 2.$$

- A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
- B.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  καθώς και το πλήθος των ριζών της.
- Γ.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .
- Δ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  δεν είναι αντιστρέψιμη.
- E.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

- B1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι:
- α.** συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ ,
- β.** παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 1$ .
- B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(2, 1)$ .

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

3<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**ΘΕΜΑ 1ο**

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 > 0$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

**A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**B.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

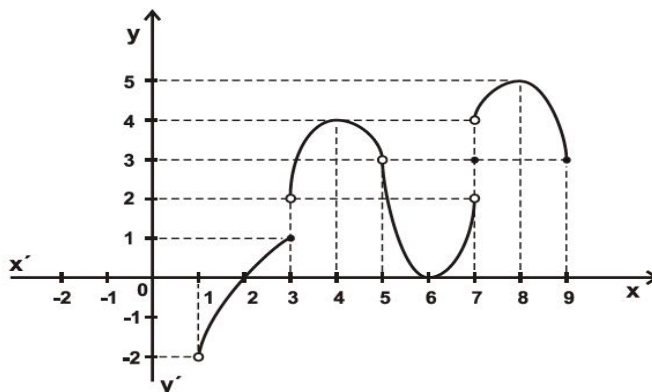
**Γ.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

**Δ.** Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**B.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$     δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$     ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Γ.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Δ.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Ε.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει

$$f'(x_0) = 0.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>	<b>ΘΕΜΑ Γ</b>	
	<b>3.1</b>	Σχολικού Βιβλίου
	<b>3.2</b>	Ψηφιακού Βοηθήματος του Υπουργείου
	<b>3.3</b>	Προτεινόμενα
	<b>3.4</b>	Πανελλαδικών Εξετάσεων
<b>3.5</b>	Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Γ	
<b>3<sup>ο</sup></b>		

### 3.1. Σχολικού Βιβλίου

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΟΡΙΟ –ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[-1, 1]$ , για την οποία ισχύει:

$$x^2 + f^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

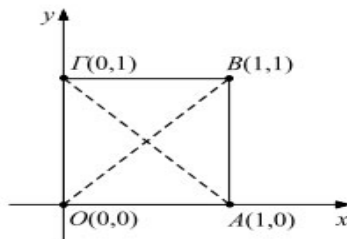
α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

γ. Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της  $f$  και ποια η γραφική της παράσταση;

δ. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης  $f$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f^2(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

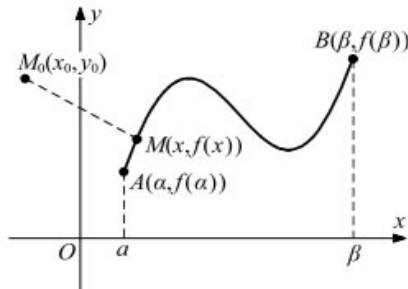
2. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του επόμενου σχήματος και μία συνεχής στο  $[0, 1]$  συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



α. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

β. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η  $C_f$  τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

**3.** Στο επόμενο σχήμα η καμπύλη  $C$  είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και το  $M_0(x_0, y_0)$  είναι ένα σημείο του επιπέδου.



**α.** Να βρείτε τον τύπο της απόστασης  $dx = (M_0M)$  του σημείου  $M_0(x_0, y_0)$  από το σημείο  $M(x, f(x))$  της  $C_f$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $d$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της  $C_f$  που απέχει από το  $M_0$  λιγότερο από ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της  $C_f$  που απέχει από το  $M_0$  περισσότερο από ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**1.**

**α.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

**β.** Να αποδείξετε ότι  $a^{a+1} > (a+1)^a$  για κάθε  $a > e$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι για  $x > 0$  ισχύει  $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2^x = x^2$  έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ .

**2. α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  είναι κυρτή, ενώ η  $g(x) = \ln x$  είναι κοίλη.

**β.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, 1)$  και της  $C_g$  στο  $B(1, 0)$ .

Να αποδείξετε ότι:

**γ. i)**  $e^x \geq x+1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .      **ii)**  $\ln x \leq x-1$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

**δ.** Η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $C_g$ .

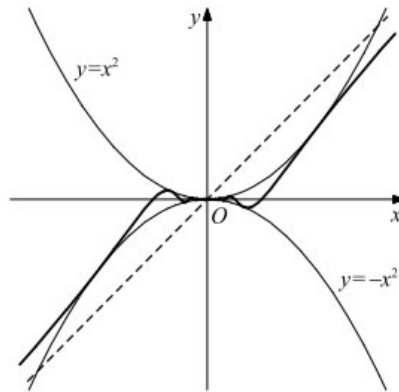
**3. α.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = e^x - \lambda x$ ,  $\lambda > 0$ .

**β.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda > 0$  για την οποία ισχύει  $e^x \geq \lambda x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**γ.** Για την τιμή του  $\lambda$  που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = \lambda x$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = e^x$ .

**4.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και στη συνέχεια ότι η ευθεία  $y = 0$  (ο άξονας  $x'x$ ) είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $O(0, 0)$ .

**β.** Ο άξονας  $x'x$  έχει με την  $C_f$  άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της  $C_f$ .

**γ.** Η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .

**5. Α.** Έστω μια συνάρτηση  $\varphi$  τέτοια, ώστε:

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0 \text{ και } \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ (1).}$$

Να αποδείξετε ότι :

**α.** Η συνάρτηση  $\psi(x) = [\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε τον τύπο της.

**β.**  $\varphi(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

**Β.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  τέτοιες, ώστε:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ και } f''(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$g(0) = 1, g'(0) = 0 \text{ και } g''(x) + g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

**α.** Οι συναρτήσεις  $\varphi(x) = f(x) - \eta\mu x$  και  $\psi(x) = g(x) - \sigma\upsilon\nu x$  ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος Α.

**β.**  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

**1. α.** Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση  $u = \pi - x$  για να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx.$$

**β.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3 + \eta\mu^2 x} dx.$$

**2.** Αν  $I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2} dt$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,

**α.** Να υπολογίσετε το άθροισμα  $I_\nu + I_{\nu+1}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

**β.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_0, I_1, I_2.$$

**3. α.** Να βρεθεί το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x=1$ ,  $x=\lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

**β.** Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda$  έτσι, ώστε  $E(\lambda) = \frac{1}{2}$ .

**γ.** Να βρεθούν τα όρια:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda) \text{ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda).$$

4. Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις συνεχείς στο  $[a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι:

α<sup>1</sup>. Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε  $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$ .

β. Αν  $m$  η ελάχιστη και  $M$  η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_a^\beta f(x)dx \leq M(\beta - \alpha).$$

γ. Με τη βοήθεια της ανισότητας  $e^{\eta\mu x} > x$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , να

αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι γνησίως

φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ και } \beta) \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \leq \frac{1}{2}$$

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x^2}$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας  $e^x \geq 1+x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \text{ και } \beta) \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x} dx \leq 1.$$

---

<sup>1</sup> Η πρόταση αυτή μπορεί να χρησιμοποιείται αναπόδεικτα σε ασκήσεις.



### 3.2. Ψηφιακό Βοήθημα του Υπουργείου

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΟΡΙΟ –ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνονται οι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f$  και  $g$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο  $A(2, -1)$ .
- $\rho_1 = -1$  και  $\rho_2 = 5$  είναι δύο διαδοχικές ρίζες της  $g(x) = 0$ .

Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β.  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 5)$ .

γ.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 1$ .

α. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $f(x) = a$  έχει μοναδική ρίζα.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός  $\lambda > 0$  για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:

$$2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- β.** Αν το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- δ.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**4.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 0)$  και  $B(2, 3)$ .

- α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- β.** Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(2e^x + 1) = 3$ .
- δ.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(3x + 5) \leq 0$ .

**5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[-3, 3]$  για την οποία ισχύει:

$$3x^2 + 4f^2(x) = 27 \text{ για κάθε } x \in [-3, 3].$$

- α.** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $(-3, 3)$ .
- γ.** Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .
- δ.** Αν επιπλέον  $f(1) = \sqrt{6}$ , να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}.$$

**6.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε:

α. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}$ .

β. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}$ .

γ. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

δ. Το  $f(0)$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$(fof)(x) + 2f(x) = 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5.$$

α. Να βρείτε το  $f(5)$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

γ. Να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .

δ. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$ .

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = a^{2x} + 2a^x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*.$$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β. Αν  $f(0) = -2$  να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

γ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}, a < 2.$$

δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}, a > 3.$$

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**α.** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$ .

**β.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

**γ.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}.$$

**δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [0,1]$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) - \xi = 0$ .

**10. α.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**β.** Δίνεται η συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sigma\nu x - \eta\mu x + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός

αριθμός.

**γ.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\epsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}.$$

**11.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα.

**γ.** Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση  $y = x$ .

δ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(2e^{x-1}) = f(3-x).$$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \text{ και } g(x) = 2 - x.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

β. Να ορισθεί η συνάρτηση  $f \circ g$ .

γ. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

δ. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης  $f \circ f \circ g$ .

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

α. Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda$ .

β. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

γ. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 2\ln(8x+1)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

και η  $g : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \text{ και } g(x+3) = g(x) + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

**α.** Το  $\kappa$  αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**β.** Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**γ.** Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

**δ.** Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{2x} + 5x$

α. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

β. Να λύσετε την εξίσωση:  $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$ .

2. Δίνεται μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 0$  με  $f'(0) = 1$  και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α. Να υπολογίσετε το  $f(0)$  και το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

β. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της με  $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$ .

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $a, \beta$  ισχύει:  $a^x + \beta^x \geq 5e^x - 3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $a \cdot \beta = e^5$ .

4. Έστω  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[0, 1]$  και παραγωγίσιμες στο  $(0, 1)$  με  $f(0) = f(1) = 0$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ .

α. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση  $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$  στο διάστημα  $[0, 1]$ .

β. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

**5.** Αν η ευθεία  $y = 3x - 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , τότε:

**α.** Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x).$$

**β.** Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1.$$

**6.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2011.$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}.$$

**7.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2$  που διέρχονται από το σημείο  $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ .

**8.** Δίνεται ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο  $[0, 3]$ .

Να δείξετε ότι:

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$



**9.** Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία  $A(1, 0)$ ,  $B(x, \ln x)$ ,  $\Gamma(x, 0)$ ,  $x > 1$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το  $x = 2 \text{ cm}$ . Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του  $x$  είναι σταθερός και ίσος με  $0,5 \text{ cm/sec}$ .

**10. α.** Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $(x - \rho)^2$  αν και μόνο αν  $P(\rho) = P'(\rho) = 0$ .

**β.** Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$  να έχει παράγοντα το  $(x - 1)^2$ .

**11.** Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, 2)$ .

**12.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-3, 3)$  η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in (-3, 3) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμψής.

**13.** Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**α.** Να δείξετε ότι  $f'(0) = 2$ .

**β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(0, f(0))$  είναι η  $y = 2x + 2$ .

**γ.** Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $x = 2 \text{ cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

**14. Α.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι:

**α.** Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε η  $f'$  είναι περιττή.

**β.** Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε η  $f'$  είναι άρτια.

**Β.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x^5 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot e^{f(x)} + \eta\mu x + x.$$

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να υπολογίσετε την τιμή  $g'(0)$ .

**15.** Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**β.** Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ .

**γ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$ , έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ .

**16.** Να υπολογίσετε τα όρια: **i.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ , **ii.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

**17.** Δίνεται η άρτια συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = 2 \text{ και } x \cdot f'(x) = -3f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = x^3 \cdot f(x)$  είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ .

**β.** Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**γ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

**18.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x.$$

**α.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \lambda$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**δ.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

**19.** Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση  $P$  για την οποία ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } P'(1) = 2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$ .

**20.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  ισχύει  $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ , να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (\alpha, \gamma)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

**21.** Να υπολογίσετε τα όρια: **i.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ , **ii.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

**22.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $[1, 6]$  και παραγωγίσιμη στο  $(1, 6)$  με  $f(1) = f(6)$ .

**α.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (1, 6)$  τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  να έχει στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  οριζόντια εφαπτομένη.

**β.** Να δείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$  με  $\xi_1 \neq \xi_2$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0.$$

**23.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - \eta \mu x.$$

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

γ. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**24.** Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν:

$$f(2) = 5, \quad f(1) = 3 \quad \text{και} \quad f(x) \leq 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = 0$ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x, \quad x > 0.$$

α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι:  $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$  για κάθε  $x > 0$ .

γ. Αν ισχύει  $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$  για κάθε  $x > 0$  και  $\lambda > 0$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\lambda = e$ .

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x=1$  και  $x=e^2$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln x - 1$

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  του άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=e$  και  $x=\lambda > 0$ .

β. Να βρείτε το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $M(e^2, f(e^2))$ .

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ .

### 3.3. Προτεινόμενα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0, x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

και  $g(x) = f(x) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), x > 0$ .

**Γ1.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  καθώς και την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

**Γ2. i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς την μονοτονία της.

**ii.** Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } x > 1 \text{ και } e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } 0 < x < 1$$

**Γ3. i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς τα κοίλα της στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  στα σημεία  $A(2, g(2))$  και  $B(1, g(1))$  αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x) \leq e^{-x^2}(x-1), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

**2.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = e^x + x^2 + x$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός  $a \in (-1, 0)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει:  $e^a + 2a + 1 = 0$ .

**Γ2.** Να δείξετε ότι:  $f(x) \geq a^2 - a + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $a$  ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

**Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{2017}{2016}$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2 + 1) + f(x^2 + 2) < f(x^2) + f(x^2 + 3), \text{ για κάθε } x > 0$$

**Γ5.** Έστω ένα σημείο  $M(x(t), y(t))$  το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της  $f$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0$ , με  $x(t_0) \in (-1, 0)$ , ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του  $M$ , ως προς το χρόνο, να μηδενίζεται.

**3.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Γ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .



**Γ3.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  να είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

**Γ4. i.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \frac{1}{e}$ ,  $x = e$ .

**4.** Έστω συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο  $f'(0) \neq 0$ , για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} - e \cdot f(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να βρεθεί το  $f(0)$ .

**Γ2.** Να δείξετε ότι η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

**Γ3.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2) - f(1 + 2 \ln x) \geq 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**5.** Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ2. i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**ii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Γ3.** Αν για τους αριθμούς  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $2\alpha + \beta > 0$  και  $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ , ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους  $a, \beta$ .

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία  $x=1$ .

**6.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f(x) = x^2 - \sin x + g(a), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{όπου} \quad a > 0.$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ2.** Για τις διάφορες τιμές του  $a$ , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Γ3.** Για  $a = 1$

**i.** Να αποδείξετε ότι από το σημείο  $M(0, -2)$  άγονται ακριβώς δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$ .

**ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο  $N(x(t), y(t))$  της  $C_f$ , με  $x(t) \in (0, 1)$ , όπου κατά τη χρονική στιγμή  $t_0$ , ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι διπλάσιος από αυτόν της τεταγμένης του, αν υποθέσουμε ότι αυτοί οι ρυθμοί μεταβολής τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι μη μηδενικοί.

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x+1) - g(x)]$ .

**7.** Έστω μία συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1) = 0, f'(1) = 1 \text{ και}$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) = 2 \ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - x(2 \ln x + 1), x > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή στο  $(0, +\infty)$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln x, x > 0$ .

**Γ3. i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**ii.** Αν ένα σημείο  $M(x(t), y(t))$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec και  $x(t) > 1$ , κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης  $C_{f \circ f}$  της  $f \circ f$  με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με  $1 \text{ cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου  $M$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία  $x(t_0) = 2 \text{ cm}$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$\left| f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \right| < \sqrt{f(a) \cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } a, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \text{ με } a < \beta.$$

**8.** Έστω συνάρτηση  $f$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $[-2, 2]$  για την οποία ισχύει ότι:

$$[f(x)]^2 - xf(x) + x^2 - 3 = 0, \text{ για κάθε } x \in [-2, 2]$$

**Γ1.** Αν η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x = a$  ( $0 < a < 2$ ), να αποδείξετε ότι  $f(a) = 2a$  και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το  $a$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

**Γ3.** Αν επιπλέον η  $f''$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , τότε:

**i.** Να δείξετε ότι η εξίσωση:  $2f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x-1}{2}\right)$  είναι αδύνατη.

**ii.** Να δείξετε ότι η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα και να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα καθώς και να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**iii.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^2 f(x)dx \leq 4$ .

**9.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $g$  παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $a = 1$ .

**Γ2.** Αν  $g(e) = -1$ , να δείξετε ότι  $g(x) = -\ln^2 x$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**Γ3.** Αν  $g(x) = -(\ln x)^2$  σε όλο το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή  $x_0 \in (0, 1)$ , για την οποία η διαφορά  $f(x) - g(x)$  γίνεται ελάχιστη.

**ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων  $M, N$  με  $M(\xi, f(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  και  $N(\xi, g(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$  με  $\xi \in (0, +\infty)$ , στα οποία οι  $C_f$  και  $C_g$  δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.

**Γ4. i.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα και των ευθειών  $x=1$ ,  $x=e$ .

**10.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και σύνολο τιμών το διάστημα  $[-1, 4]$ .

**Γ1.** Αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

**α.** Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε:  $f''(\xi) = -f'(\xi)$ .

**γ.** Η εξίσωση  $f'(x) = (e^x + x^2)f(x)$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

**Γ2.** Έστω επιπλέον συνάρτηση  $g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη με παράγωγο  $g'$  συνεχή και γνησίως μονότονη.

Αν ισχύει  $g'(f(x)+1) = e^x f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $g(x) \geq g(1)$ .

### 3.4. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (a^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(a + 1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

Γ1. Να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ .

Γ2. Να βρεθούν τα  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 5$ .

Γ3. Για τις τιμές των  $a, \beta$  του ερωτήματος Β να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - a}$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $a$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία  $x = 4$ .

Γ2. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $a$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(1, 0)$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 3)$ .

Γ3. Αν  $a > 2$ , να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός  $x_0 \in (1, 2)$  τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0$  να είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .

3. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[0, 1]$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ . Αν  $f(0) = 2$  και  $f(1) = 4$ , να δείξετε ότι:

Γ1. η ευθεία  $y = 3$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ ,

**Γ2.** υπάρχει  $x_1 \in (0, 1)$ , τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4},$$

**Γ3.** υπάρχει  $x_2 \in (0, 1)$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(x_2, f(x_2))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = 2x + 2000$ .

**4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5.$$

**Γ1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Γ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0 = 0$ .

**Γ3.** Αν  $h(x) = e^{-x} f(x)$ , να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των συναρτήσεων  $f$  και  $h$  στα σημεία  $A(0, f(0))$  και  $B(0, h(0))$  αντίστοιχα είναι παράλληλες.

**5.** Για μια συνάρτηση  $f$ , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου  $\beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $\beta^2 < 3\gamma$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.

**Γ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ3.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(0, 1)$ .

**6.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}, \text{ όπου } a \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1}$ .

**Γ2.** Να βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**Γ3.** Για  $a = -1$ , να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .

**7.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης  $f \circ g$  είναι «1-1».

**Γ1.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι «1-1».

**Γ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

**8.** Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x.$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(e^x) \geq f(1+x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, 0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 3$ .



**9.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Γ2.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $-\infty$ .

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$$

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

**10.** Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$$

και το σημείο  $x_0 = 5$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 5$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παραγωγίζεται στο  $x_0 = 5$  και να βρείτε την  $f'(5)$ .

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(5, f(5))$ .

**Γ4.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**11.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = e^x f(x),$$

όπου  $f$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

**Γ2.** Αν  $f(x) = 2x^2 - 3x$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I(a) = \int_a^0 g(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Γ3.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{a \rightarrow -\infty} I(a)$ .

**12.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6ax + \beta,$$

όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $a, \beta$  πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = -2$  και είναι  $f(-2) = 98$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $a = -6$  και  $\beta = 54$ .

**Γ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Γ3.** Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης  $f$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(-1, 2)$ .

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

**Γ1.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ2.** Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e x$ . Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

**Γ3.** Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι  $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ .

**Γ4.** Υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$$

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**Γ2.** Αν η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2005)$  και  $B(-2, 1)$ , να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2.$$

**Γ3.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $M$  της  $C_f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$ .

**15.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 2 \ln x, \quad x > 0.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Γ3.** Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$$

**i.** Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  έτσι, ώστε η  $g$  να είναι συνεχής.

ii. Αν  $\kappa = -\frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, e)$ .

**16.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου  $a > 0$  και  $a \neq 1$

**Γ1.** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 1$ , να αποδείξετε ότι  $a = e$ .

**Γ2.** Για  $a = e$ ,

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-1, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

**Γ3.** Αν  $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $(1, 2)$ .

**17.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2), \quad x > -1,$$

όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός με  $\lambda \geq -1$ .

**Γ1.** Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

και να είναι πραγματικός αριθμός.

**Γ2.** Έστω ότι  $\lambda = -1$ .

**α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + a^2 = 0$  έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$  με  $a \neq 0$ .

**18.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 3x + \sin x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

**Γ3.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^2 + 8) = f(6x).$$

**Γ4.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x}.$$

**19.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο πιθανά σημεία καμπής.

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .



**21.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f$  παραγωγίσιμη τέτοιες, ώστε:

- $(f(x)+x)(f'(x)+1) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$  και  $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, x \in \mathbb{R}$

**Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(g(x)) = 1.$$

**22.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2 f'(x) - 3 = -f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$  και στη συνέχεια ότι η

συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  του ερωτήματος Γ1.

**Γ3.** Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \leq f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

**Γ4.** Να βρείτε την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{f'(x)} - \kappa \right) = 5.$$

**23.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + ax, x \neq 1, a \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να βρείτε το  $a$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): x - 3y + 6 = 0$ .

**Γ2.** Αν  $a = 1$ , τότε:

**i.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα.

**ii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**iii.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)f(x) - 6}{x^2 - 1}.$$

**24.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = x - \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $h$  ως προς την κυρτότητα.

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο  $-\infty$ .

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\varphi(x)$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$ .

**25.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$ .

**Γ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .



**Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι, για  $x > 0$ , ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 = 4^x$ ,  $x > 0$ , έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 4$ .

**26.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x-3)^2(x-1), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία:

**α.** Είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση  $y = 4x + 3$

**β.** Η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της  $f$  είναι ακέραιος αριθμός.

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (x-1)f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**27.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και να αποδείξετε ότι έχει μία ακριβώς ρίζα.

**28.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες  $x_1, x_2$ .

**Γ3.** Αν για τις ρίζες  $x_1, x_2$  του ερωτήματος Γ3 ισχύει ότι  $x_1 < x_2$ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (x_1, 1)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να διέρχεται από το σημείο  $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$ .

**29.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ με } x \in (0, +\infty).$$

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Γ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ , όπου  $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$

**Γ3.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2, \quad x \in (0, +\infty).$$

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να διέρχεται από το σημείο  $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$ .

**30.****Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Γ4.** Αν  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x) \quad \text{όταν } x \in [0, +\infty).$$

**31.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right).$$

**Γ3.** Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3, x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Γ4.** Αν  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

**32.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Γ2.** Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της  $f''$ .

**Γ3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**33.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση  $f$ .

**Γ2.** Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση  $f$  ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$ .

**34.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}, x > 2.$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $(2, +\infty)$ .

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τις ευθείες  $y = x + 1$ ,  $x = \lambda$  και  $x = \lambda + 1$  με  $\lambda > 2$ .

**Γ4.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in (2, +\infty)$  ισχύει  $E(\lambda) > \ln 2$ .

**35.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = (x-1)\ln x - 1, x > 0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1 = (0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2 = [1, +\infty)$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1} = e^{2013}, x > 0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x) + 1$  με  $x > 0$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e$ .

**36.** Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ . Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η  $f$  είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

**Γ4.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$ .

**37.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$ ,  $x > 0$

**Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

**Γ4.** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με  $x_1 < x_2$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιος, ώστε  $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$  και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**38.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0.

**Γ2.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης  $x = e^{\frac{a}{x}}$  για όλες τις πραγματικές τιμές του  $a$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x),$$

για κάθε  $x > 0$ .

**39.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - e \ln x, \quad x > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ισχύει  $f(x) \geq e$  για κάθε  $x > 0$ .

**40.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta,$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με  $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

**Γ2.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

**Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής της  $f$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία

$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και την ευθεία :

$$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$$

**41.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - 1}$$

**Γ4.** Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $(3, 0)$ .

**42.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a, & x < 1 \\ (x - \beta)^2, & x \geq 1 \end{cases}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\beta^2 - 2\beta = a$  και ότι  $a \geq -1$ .

**Γ2.** Αν είναι  $-1 \leq a \leq 1$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

**Γ3.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , να βρείτε το  $a$  και το  $\beta$ .

**Γ4.** Αν  $a = \frac{5}{4}$  και  $\beta = -\frac{1}{2}$ , να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**43.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, x \neq 0$

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Γ3.** Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$

**44.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}, \quad \text{με } a, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , να αποδείξετε ότι  $a + \beta = 5$

**Γ2.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , να αποδείξετε ότι  $a = 1$  και  $\beta = 4$ .

**Γ3.** Για  $a = 1$  και  $\beta = 4$ , να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής της

συνάρτησης  $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \neq 0$  στο  $-\infty$  και στο  $+\infty$ .



**45.** Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

**Γ1..** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι:

**α.** συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ .

**β.** παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(2, 1)$ .

**46.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 2$ .

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(0, f(0))$ .

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = \frac{1}{2}x - 2$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

**47.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x}$ , με  $x > 0$ .

**Γ1.** Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2}$$

**Γ2.** Να βρείτε το σημείο  $M$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που απέχει από το σημείο  $O(0, 0)$  τη μικρότερη απόσταση.

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -2x + 6$ .

**48.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$$

**Γ1.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**Γ2.** Για  $\lambda = 0$

- i.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .
- ii.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .

**49.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x < 1 \\ x^4 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.

**Γ2.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

**Γ3.** Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[-1, 2]$ .

**50.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1)$ . Να αποδείξετε ότι:

**Γ1.**  $k = -1$ .

**Γ2.** Η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.

**Γ3.** Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

### 3.5. Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Γ

#### 1<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

##### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**A.** Να δείξετε ότι  $f'(0) = 2$ .

**B.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(0, f(0))$  είναι η  $y = 2x + 2$ .

**Γ.** Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $x = 2 \text{ cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

##### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0, x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

και  $g(x) = f(x) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), x > 0$ .

**A.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  καθώς και την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

**B. i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς την μονοτονία της.

**ii.** Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } x > 1 \text{ και } e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } 0 < x < 1$$

**Γ. i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς τα κοίλα της στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  στα σημεία  $A(2, g(2))$  και  $B(1, g(1))$  αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

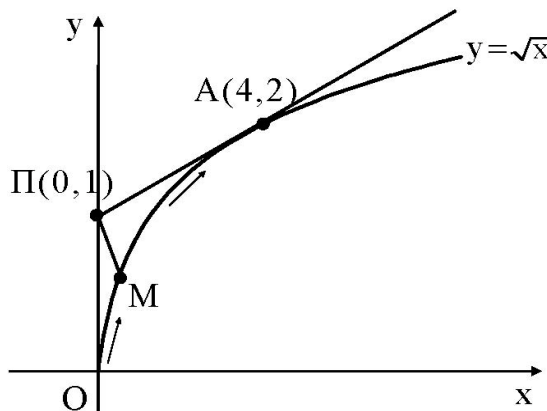
$$e^{-4}(7-3x) \leq e^{-x^2}(x-1), \text{ για κάθε } x \in \left( \frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty \right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left( \frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1 \right).$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Ένα κινητό  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ .

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση  $\Pi(0, 1)$  ενός συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$  και παρατηρεί το κινητό από την αρχή  $O$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή  $t, t \geq 0$  είναι  $x'(t) = 16 \text{ min/sec}$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή  $t, t \geq 0$  δίνεται από τον τύπο:  $x(t) = 16t$ .

**B.** Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το  $A(4, 2)$  και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

**Γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

**Δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$  κατά την οποία η απόσταση  $d = \text{ΠΜ}$  του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό  $M$  και ο παρατηρητής  $\Pi$  είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$ .

2<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

**A.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**B.** Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ .

**Γ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$ , έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ .

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $g$  παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

**A.** Να δείξετε ότι  $a = 1$ .

**B.** Αν  $g(e) = -1$ , να δείξετε ότι  $g(x) = -\ln^2 x$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**Γ.** Αν  $g(x) = -(\ln x)^2$  σε όλο το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

- i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή  $x_0 \in (0, 1)$ , για την οποία η διαφορά  $f(x) - g(x)$  γίνεται ελάχιστη.
- ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων  $M, N$  με  $M(\xi, f(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  και  $N(\xi, g(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$  με  $\xi \in (0, +\infty)$ , στα οποία οι  $C_f$  και  $C_g$  δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.

**A. i.** Να υπολογίσετε το όριο: 
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$$

- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα και των ευθειών  $x=1, x=e$ .

### **ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2 \ln x, x > 0$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**B.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Γ.** Έστω η συνάρτηση :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$$

**i.** Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  έτσι, ώστε η  $g$  να είναι συνεχής.

**ii.** Αν  $\kappa = -\frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, e)$ .

**3<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln x - 1$ .

**A.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  του άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = e$  και  $x = \lambda > 0$ .

**B.** Να βρείτε το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .

**Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $M(e^2, f(e^2))$ .

**Δ.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

**A.** Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

**B.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .



Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε το σημείο

$A(x_0, f(x_0))$  να είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

Δ. i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \frac{1}{e}$ ,  $x = e$ .

### **ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1.$$

Α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Γ. Αν για τους αριθμούς  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $2\alpha + \beta > 0$  και  $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ , ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους  $a, \beta$ .

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία  $x = 1$ .

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = e^{x-1} - \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$

**A.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

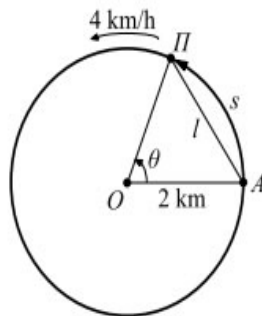
**B.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες  $x_1, x_2$ .

**Γ.** Αν για τις ρίζες  $x_1, x_2$  του ερωτήματος Γ3 ισχύει ότι  $x_1 < x_2$ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (x_1, 1)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να διέρχεται από το σημείο  $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$ .

<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>  <b>4<sup>ο</sup></b>	<b>ΘΕΜΑ Δ</b>	
	<b>4.1</b>	Σχολικού Βιβλίου
	<b>4.2</b>	Ψηφιακού βοηθήματος του Υπουργείου
	<b>4.3</b>	Προτεινόμενα
	<b>4.4</b>	Πανελλαδικών Εξετάσεων
	<b>4.5</b>	Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Δ

### 4.1. ΘΕΜΑ Δ-Σχολικού Βιβλίου

1. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας  $\rho = 2\text{ km}$  με ταχύτητα  $v = 4\text{ km/h}$ . Αν  $S$  είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και  $l$  το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή  $t$ :



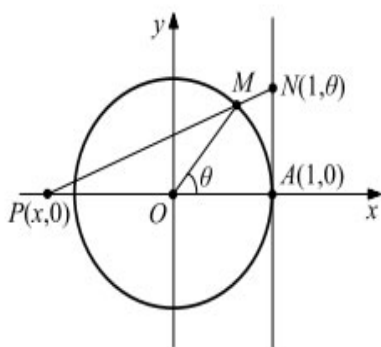
A) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\theta = \frac{S}{2}$  και  $l = 4\eta\mu \frac{\theta}{2}$ ,      ii.  $S = 4t$ ,  $\theta = 2t$  και  $l = 4\eta\mu t$ .

B) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης  $l$ . Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης  $l$ , όταν:

α.  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ,    β.  $\theta = \pi$     και    γ.  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ;

2. Στο επόμενο σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα  $1\text{ cm}$  και η  $\epsilon$  εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο Α. Το τόξο ΑΜ είναι  $\theta$  rad και το ευθ. τμήμα ΑΝ είναι  $\theta$  cm. Η ευθεία ΜΝ τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $P(x, 0)$ .



Να δείξετε ότι : i)  $x = \frac{\theta \sigma \upsilon \nu \theta - \eta \mu \theta}{\theta - \eta \mu \theta} = x(\theta)$       ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} x(\theta) = -2$

## 4.2. Ψηφιακό βοήθημα του Υπουργείου

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>: ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = 3 \ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$$

α. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την  $f$ .

β. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

γ. Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$ .

δ. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό  $\mu$  για το οποίο ισχύει:

$$3 \ln 4\mu - 3 \ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

β. Να βρείτε το  $f(1)$ .

γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = x - 1$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ .

**3.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:

$$\kappa\eta\mu^2x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - \lambda \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

**α.** Να βρείτε τα  $\kappa$  και  $\lambda$ .

**β.** Αν  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 1$  να βρείτε την  $f$ .

**γ.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}.$$

**4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**β.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**γ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**δ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \kappa$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $\mathbb{R}$  για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**1.** Έστω  $f$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  
 $f'(x) < x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι:

**α.** Η  $g(x) = 3f(x) - x^3$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ ,

**β.**  $f(2) - f(1) < 3$ ,

**γ.** υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) < 3$ .

**2.**

**α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$g(x) = x - \ln x.$$

**β.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x.$$

**γ.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**3.**

**α.** Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

**β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2},$$



έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x,$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $f$  του προηγούμενου ερωτήματος.

**4.** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν:

- $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $f(0) = 2$  και
- $f'(x) \cdot \sin x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

**5.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}, \quad x > -1 \quad \text{και} \quad \lambda > 0.$$

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ένα ελάχιστο.

**β.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

**6.**

**A.** Να λύσετε την εξίσωση:  $3^x + 2^x = 5^x$ .

**B.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) = -2f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = e^{2x} \cdot f(x),$$

είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να βρείτε τον τύπο της  $f$  αν  $f(0) = 1$ .

**γ.** Αν  $h, \varphi$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και} \\ h(0) = \varphi(0),$$

τότε να δείξετε ότι  $h = \varphi$ .

**7.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$$

**α.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

**β.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ , αν υπάρχουν.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

ε. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3, \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

**8.** Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1.$$

α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

ε. Αν για τους αριθμούς  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $2\alpha + \beta > 0$  και  $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ ,

ισχύει:

$$e^{\alpha+2\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{2\alpha+\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2,$$

να υπολογίσετε τους  $a, \beta$ .

**9.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2^x}}, x > 0$$

α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β.** Να δείξετε ότι:  $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[9]{3}$ .

**10.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

**α.** Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

**β.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**γ.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε το σημείο

$A(x_0, f(x_0))$  να είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

**δ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

**11.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$$

**α.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1).$$

**γ.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}.$$

**12.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

**α.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

**β.** Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

**13.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$  και παραγωγίσιμη στο

$$\left(\frac{1}{2}, 3\right) \text{ με } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ και } f(3) = 12.$$

**α.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $y = 4x + 2$ .

**β.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $B(\gamma, f(\gamma))$  να διέρχεται από το  $O(0, 0)$ .

**14.**

**A.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να δείξετε ότι:

$$f(a) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right), \text{ για κάθε } a, \beta \in \Delta.$$

**B.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$ ,  $x > -1$

α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

β. Αν  $a > \frac{1}{e}$ ,  $\beta > \frac{1}{e}$ , να δείξετε ότι:

$$\frac{2 - \ln^2 a}{\ln a + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \ln^2(\sqrt{a \cdot \beta})}{\ln(\sqrt{a \cdot \beta}) + 1}$$

### 4.3. Προτεινόμενα

**1.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = (0, +\infty)$  με σύνολο τιμών  $f(A) = \mathbb{R}$ , τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ .

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$  ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$  στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα  $y'y$ , και την ευθεία  $x = 1$ .

**Δ3.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θεωρούμε τα σημεία,  $A(x, f^{-1}(x))$  και  $B(f^{-1}(x), x)$  των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

**β)** Να βρείτε για ποια τιμή του  $x \in \mathbb{R}$  η απόσταση των σημείων  $A$ ,  $B$  γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

**2.** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ακόμα:

$$\ln f(x) + f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι:

**i)**  $f'(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και **ii)** Η  $f$  είναι κυρτή.

**Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^6 \left( \int_1^2 f(x) dx \right) dt \geq 5.$$

**Δ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (2, 4)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_2^4 \frac{[f(x)]^2}{1+f(x)} dx = 2f(\xi)f'(\xi).$$

**3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(e^x - x) = \sin x,$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Δ5.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \frac{f(x)}{e^x - x} dx.$$



4. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , για την οποία επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\eta\mu \frac{1}{x}} = 2016 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{x}{f(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε το  $f(0)$  και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

Δ2. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  που έχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A(1, 0)$ .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο  $f$ .

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x < 0$  ισχύει:

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 f(x) dx < -2\sqrt{2}.$$

5. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $(1, +\infty)$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 1$  που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + x \ln x}{x \ln x}, \quad \text{για κάθε } x > 1 \quad \text{με } f(e) = e^e.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ,  $x > 1$  καθώς και ότι οι συναρτήσεις;

$$g(x) = e^x, \quad h(x) = \ln x,$$

δεν έχουν κοινό σημείο στο  $(1, +\infty)$ .

Δ2.

i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  $f(x) = \frac{\lambda}{x}$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$x > 1$ .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της  $A(e, f(e))$ .

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

i.  $\frac{f(x)}{e^{e-1}} \geq (1+e)x - e^2$ , για κάθε  $x > 1$  και

ii.  $\int_2^3 f(x) dx \geq e^{e-1} \cdot \frac{5+5e-2e^2}{2}$ .

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

6. Έστω συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f''$  συνεχή και  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ1. Έστω  $I = \int_1^e \left( \frac{\ln x + f''(\ln x)}{x} \right) dx$

i. Να δείξετε ότι:

$$I = \frac{1}{2} + f'(1) - f'(0).$$

ii. Αν ισχύει ότι  $I > \frac{1}{2}$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή.

iii. Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f(2016) = 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$f(2015) + f(2017) > 0.$$

Δ2. Επιπλέον ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \ln x - x}{(x-1)^2} = \kappa \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

**i.** Να βρείτε το  $f(1)$ .

**ii.** Να βρείτε το  $f'(1)$ .

**iii.** Να δείξετε ότι  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**7.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Δ1. i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη.

**ii.** Να αποδείξετε ότι :

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x(x^4 + x^2 + 1), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ2. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0 \in (0, 1)$ .

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0$$

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:

$$3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t) dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42, \quad \text{με } 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$$

**Δ4. i.** Να αποδείξετε ότι:

$$3 \int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4$$

**ii.** Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $x_0$ , το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 |f^{-1}(x)| dx$$

**8.** Έστω συνάρτηση  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(x+1) = f(x) + 3x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi, x_0 \in (0, 1)$  τέτοια, ώστε:

**i.**  $f'(\xi) = 0$ .

**ii.**  $f''(x_0) = 3$ .

**Δ2.** Να δείξετε ότι:

$$\int_{\xi}^{\xi+1} xf''(x)dx = 3.$$

**Δ3.** Αν επιπλέον ισχύει  $\int_0^2 f(x)dx = 2$ , τότε να:

**i.** Υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

**ii.** δείξετε ότι:

$$4F(x+1) = 4F(x) + 6x^2 + 1,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $F$  μια αρχική της  $f$  στο  $\mathbb{R}$ .

**9.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 2f(1)$ .

**Δ3.** Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$ .

**Δ4.**

**i.** Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Δίνεται επιπλέον ότι  $\int_0^1 f'(x)dx = 1$  καθώς και ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και τις ευθείες  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

Δ5.

i. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}$$

ii. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 20e^x + 4x^5 - 5x^4 - 20x^2 + 20x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Δ2. Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

i. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$  για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\ln(x^2 + x + 1)) = f(x^2 + x)$$

iii. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x \cdot e^x) > f(e^x - 1).$$

Δ3. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = x + c - 2\sqrt{c \cdot x},$$

με  $x, c > 0$  και  $c$  σταθερά.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $c > 0$  ισχύει:

$$f(c^3 + 4c^2 + 5c + 2) > f(8c\sqrt{2c}).$$

#### 4.4. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων

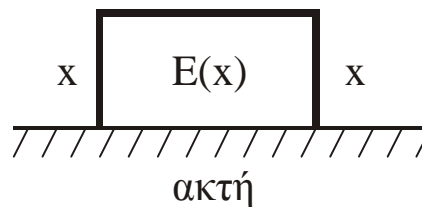
**1.** Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω  $f(t)$  η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο  $t$  από τη χορήγησή του, όπου  $t \geq 0$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της  $f(t)$  είναι  $\frac{8}{t+1} - 2$ .

**Δ1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f(t)$ .

**Δ2.** Σε ποια χρονική στιγμή  $t$ , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

**Δ3.** Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή  $t = 8$  υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή  $t = 10$  η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται  $\ln 11 \cong 2,4$ ).

**2.** Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600



μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(x)$  της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο  $E(x) = -2x^2 + 600x$  (υποθέτουμε ότι  $0 < x < 300$ ).

**Δ2.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $x$  έτσι ώστε το εμβαδόν  $E(x)$  της περιοχής να γίνει μέγιστο.

**Δ3.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

**3.** Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη

συνάρτηση:  $f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$ , όπου  $a$  και  $\beta$  είναι σταθεροί θετικοί

πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος  $t$  μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

**α.** Να βρείτε τις τιμές των σταθερών  $a$  και  $\beta$ .

**β.** Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

**4.** Η τιμή  $P$  (σε χιλιάδες ευρώ) ενός προϊόντος,  $t$  μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}.$$

**Δ1.** Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

**Δ2.** Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

**Δ3.** Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

**Δ4.** Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

**5.** Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με  $x$  χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10, \quad 1 < x < 5 .$$

**Δ1.** Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή.

**Δ2.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για  $x_1 = 2$  και για  $x_2 = 4$  (δηλαδή για 2.000 στροφές ανά λεπτό και 4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα).

**6.** Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο  $(0, +\infty)$  με:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0$$

**Δ1.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Δ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Δ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = e$ .

**7.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

**Δ1.** Να βρείτε την παράγωγο  $f'(x)$ .

**Δ2.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση  $f$ .

**Δ3.** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .



**8.**

**Δ1.** Έστω δύο συναρτήσεις  $h, g$  συνεχείς στο  $[a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι αν

$$h(x) > g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, \beta], \text{ τότε και } \int_a^\beta h(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx.$$

**Δ2.** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , που ικανοποιεί τις

$$\text{σχέσεις: } f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

**α.** Να εκφραστεί η  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

**β.** Να δείξετε ότι:

$$\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

**γ.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x=0, x=1$  και τον άξονα  $x'x$ , να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$

**9.** Έστω η συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2f'(0) = 1.$$

**Δ1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f$ .

**10.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}, & x < 2 \\ -x^2 + \kappa, & x \geq 2 \end{cases}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

**Δ1.** Το  $\kappa$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$ ,

**Δ2.** το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,

**Δ3.** το ρυθμό μεταβολής της  $f$  στο  $x_1 = 4$  και

**Δ4.** την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x+3} \text{ στο } -\infty.$$

**11.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(a, \beta)$ . Αν ισχύει  $f(a) = f(\beta) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (a, \beta)$ ,  $\delta \in (a, \beta)$  έτσι, ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

**Δ1.** Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(a, \beta)$ .

**Δ2.** Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$  τέτοια, ώστε  $f''(\xi_1) < 0$  και  $f''(\xi_2) > 0$ .

**Δ3.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής<sup>1</sup> της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**12.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

**Δ3.** Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

---

<sup>1</sup> Η σωστή διατύπωση είναι , «πιθανό σημείο καμπής»

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$ .

**13.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι:

**i.**  $f(0) = 0$ .

**ii.**  $f'(0) = 1$ .

**Δ2.** Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3.$$

**Δ3.** Αν επιπλέον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$  και  $f'(x) > f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:

**i.**  $xf(x) > 0$  για κάθε  $x \neq 0$  και

**ii.**  $\int_0^1 f(x) dx < f(1)$ .

**14.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(2-a)x^2 - \kappa x + 2}{x-3} \text{ με } a, \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 3.$$

**Δ1.** Αν η ευθεία  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ , τότε να αποδείξετε ότι  $a = 1$  και  $\kappa = 3$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $\xi \in (1, 2)$ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Δ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$ .

**15.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\kappa x - x^2}{4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $0(0, 0)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 4$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $(2, 4)$  υπάρχει μοναδικό σημείο  $\xi$ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $AB$ , όπου  $A(2, f(2))$  και  $B(4, f(4))$ .

**16.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Δ3.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(a, \ln a)$  με  $a > 0$  και η εφαπτομένη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $a$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Δ4.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

**17.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x, \quad x > 0.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$$

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $a \in (0, +\infty)$  τέτοιος, ώστε  $(a+1)^a = a^{a+1}$ .

**18.** Για  $\kappa \in \mathbb{R}$  δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - \kappa x^2 + 10$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να βρείτε την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Δ2.** Για  $\kappa = 3$

**α.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ .

**γ.** Για κάθε  $a \in (14, 15)$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = a - 5$  έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα  $(0, 1)$ .

**19.** Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + \kappa}{x}$ , όπου  $\kappa$  είναι πραγματικός αριθμός.

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Δ2.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , να βρείτε την τιμή του  $\kappa$ .

**Δ3.** Για  $\kappa = 1$ ,

**α.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**β.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

**20.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = \kappa x e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

$$f'(0) = 2f(0) \quad (2)$$

$$f'(2) = 2f(2) + 12e^4 \quad (3)$$

$$f(1) = e^2 \quad (4)$$

όπου  $\kappa$  ένας πραγματικός αριθμός.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα  $[0, 2]$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4$$

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 6$  και ότι ισχύει  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in [0, 2]$ .

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^3 e^{2x}$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

**Δ5.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}$ .

**21.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} + 2x, \quad x \neq 0.$$

Να βρείτε:

**Δ1.** Τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

**Δ2.** Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Δ3.** Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Δ4.** Το σημείο  $M(\xi, f(\xi))$ ,  $\xi > 0$  της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με  $A(1, f(1))$  και  $B(3, f(3))$ .

**22.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$$

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**Δ2.** Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ :

**α.** Στο ανοικτό διάστημα  $(-3, 3)$ .

**β.** Στο σημείο  $x_0 = -3$ .

**Δ3.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

**Δ4.** Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

**23.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) \quad (1)$$

$$f'(0) < f(1) - f(0) \quad (2)$$

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

Αν επιπλέον  $g(x) = f(x) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}.$$

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^2 f(x)dx > 2$ .

**Δ5.** Αν το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = 1$  είναι  $E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$ , τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

**24.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) + xf'(x) = \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = xf'(x) + \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $x \neq 0$ .



**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $1 - \sin x = x \eta \mu x$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, \pi)$  τέτοιο, ώστε:

$$\xi \eta \mu \xi + \sigma \nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2.$$

**25.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x - \beta}, \text{ όπου } a, \beta \text{ ακέραιοι αριθμοί.}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A\left(-2, \frac{5}{12}\right)$

δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι  $\frac{5}{18}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $a = 1$  και  $\beta = 4$ .

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

**Δ3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0$  (1) είναι ισοδύναμη με την  $f(x) = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**26.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = x\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.** Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

**Δ2.** Η εξίσωση  $f(x^3 - x + 1) = f(2)$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 3)$ .

**Δ3.** Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση  $f$  ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[1, 3]$ , και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1 \in (1, 2)$ ,  $\xi_2 \in (2, 3)$  και  $\xi_3 \in (1, 3)$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:  $2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$ .

**27.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν:

- $\sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0$
- $f(0) = 0$

**Δ1.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**Δ2.** Αν  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $f(x^4 + 1) = f(3x^3 + 2x^2 + 3x)$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$  και μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 4)$ .

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 4)$ .

**28.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$  και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

**Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**α.** Ένα υλικό σημείο  $M$  ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t=0$  από ένα σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq x_0$  με  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$  του σημείου  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $y(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ ;

**β.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**29.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{ax^2 - x + 2}{x + 1}, \quad x \neq -1 \text{ και } a \in \mathbb{R}.$$

Αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , τότε:

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $a = 1$ .

**Δ2.**

**α.** Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  και στο  $-\infty$ .

**β.** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**30.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.**

**α.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την ευθεία  $y = x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**31.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

**32.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + ax^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου  $a$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αν η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 = 1$  τοπικό ακρότατο, τότε:

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $a = -12$ .

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις τιμές του  $\beta \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(x) \geq \beta$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ3.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^\nu} \eta\mu \left( \frac{1}{x^2} \right) \right),$$

για τις διάφορες ακέραιες τιμές του  $\nu$ .

33. Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cdot \eta\mu x dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ1. Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  και  $f'(0) = 1$ .

Δ2.

α. Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατο στο  $\mathbb{R}$ .

β. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Δ3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}.$$

Δ4. Να δείξετε ότι:

$$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2.$$

34. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το  $x_0 = 1$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της  $f$ .

**Δ3.**

**α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$ .

**β.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = x_0$ , όπου ο  $x_0$  η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

**Δ4.** Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[1, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \text{ για κάθε } x > 1.$$

**35.** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(x) \cdot f'(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.** Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x).$$

**Δ3.** Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[1, +\infty)$ .

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \sin x$  στο  $\mathbb{R}$ .

**36.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right).$$

**Δ3.** Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του  $M$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right) = f(x).$$

**37.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$ .

**Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}.$$

**38.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν επιπλέον δίνεται ότι:

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

**39.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

**Δ2.** Δίνεται επίσης μια συνάρτηση  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

**Δ3.** Αν για τη συνάρτηση  $f$  του ερωτήματος Δ1 και τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος Δ2 ισχύει ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \text{ και } g(0) = g'(0) = 1, \text{ τότε}$$

**i.** Να αποδείξετε ότι  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

**ii.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι «1-1».



## 4.5. Διαγωνίσματα επιπέδου θέματος Δ

### 1° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

#### **ΘΕΜΑ 1ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$$

**A.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**B.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Γ.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Δ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \kappa$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$  για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

#### **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{ax^2 - x + 2}{x + 1}, \quad x \neq -1 \text{ και } a \in \mathbb{R}.$$

Αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , τότε:

**A.** Να αποδείξετε ότι  $a = 1$ .

**B.**

**α.** Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  και στο  $-\infty$ .

**β.** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

**A.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R} .$$

**B.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Δ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(e^x - x) = \sin x,$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**E.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \frac{f(x)}{e^x - x} dx$$

**2<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

**A.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

**B.** Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \text{ , για κάθε } x > 0.$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\kappa x - x^2}{4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $O(0, 0)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 4$ .

**B.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

**Γ.** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $(2, 4)$  υπάρχει μοναδικό σημείο  $\xi$ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $AB$ , όπου  $A(2, f(2))$  και  $B(4, f(4))$ .

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**A.** Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 2f(1)$ .

**Γ.** Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$ .

**Δ.**

**α.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

Δίνεται επιπλέον ότι:  $\int_0^1 f'(x)dx = 1$  καθώς και ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και τις ευθείες  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

**Ε.**

**α.** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}.$$

**β.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}.$$

**3<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$$

- A. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- Δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- Ε. Αν για τους αριθμούς  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $2\alpha + \beta > 0$  και  $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ , ισχύει:

$$e^{\alpha+2\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{2\alpha+\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους  $a, \beta$ .

**ΘΕΜΑ 2ο**

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω  $f(t)$  η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο  $t$  από τη χορήγησή του, όπου  $t \geq 0$ . Αν ο ρυθμός

μεταβολής της  $f(t)$  είναι  $\frac{8}{t+1} - 2$ .

- A. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f(t)$ .
- B. Σε ποια χρονική στιγμή  $t$ , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

Γ. Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή  $t = 8$  υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή  $t = 10$  η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται  $\ln 11 \cong 2,4$ ).

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**A. i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη.

**ii.** Να αποδείξετε ότι :

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x(x^4 + x^2 + 1), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

**B. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0 \in (0,1)$ .

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0 .$$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42, \quad \text{με } 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1.$$

Δ. α. Να αποδείξετε ότι:

$$3 \int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4 .$$

β. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $x_0$ , το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 |f^{-1}(x)| dx .$$

<b>Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο</b>  <b>5<sup>ο</sup></b>	<b>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ</b>	
	<b>5.1</b>	Επαναληπτικά Θέματα από την Ε.Μ.Ε.
	<b>5.2</b>	Προσομοιωμένα Διαγωνίσματα Πανελλαδικών Εξετάσεων
	<b>5.3</b>	Θέματα Πανελλαδικών 2016
	<b>5.4</b>	Δέκα απαιτητικά θέματα (3 <sup>ο</sup> και 4 <sup>ο</sup> )
<b>5.5</b>	Παράρτημα: Α. Εξεταστέα ύλη Β. Οδηγίες διδασκαλίας Γ. Οδηγίες πριν...τις εξετάσεις	

### 5.1. Επαναληπτικά Θέματα Ε.Μ.Ε

**1.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - \sin^2 x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**α.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

**γ.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$f(x) > 2x^3 - 1$$

**δ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

αντιστρέφεται και να ορίσετε την  $F^{-1}$ .

**2.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**β.** Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0.

**γ.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .

**3.** Έστω συνεχής συνάρτηση  $f : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 2 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in [0, 8].$$

Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.



**β.**  $f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{3}{2}$ .

**γ.** Η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**δ.** Οι γραφικές παραστάσεις και των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του.

**4.** Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2) - 5}{x-1} = 6.$$

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $f(3) = 5$ ,

**ii.**  $f'(3) = 6$ .

**β.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2 - f(x)}{\eta\mu(x-3)}.$$

**γ.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = xf'(x) - 3x - 7\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R},$$

τέμνει τον άξονα  $x'x$  τουλάχιστον σε ένα σημείο.

**δ.** Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $g'(x) < f''(3)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = x^6$ , έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

**5.** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \ln f(x)$ . Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με  $\alpha < \beta < \gamma$  και οι  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

**α.** Υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

$$f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2).$$

**β.** Υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2.$$

**6.** Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(0) = 2e$ , οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

**α.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \text{ και } g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2.$$

**β.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις  $f, g$  και  $f - g$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f, C_g$  των συναρτήσεων  $f, g$  αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

**δ.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}.$$

**7.** Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$f(x) = (a+1)^x - a^x, \quad a > -1.$$

**α.** Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ , για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ .

**β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

**γ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**δ.** Να λύσετε το σύστημα:

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19.$$

**8.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $(0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 1)$  η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(1) = 0$  και
- $2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$ , για κάθε  $x \in (0, 1)$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}, \quad x \in (0, 1].$$

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$ .
- ii. το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f^{-1}(x)).$$

**γ.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

**δ.** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

**9.** Έστω η συνάρτηση  $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(2) = 0$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[2, +\infty)$  και κυρτή στο  $(2, +\infty)$ , τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(4, 5)$ .

Αν επιπλέον ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$

γ. i. Να βρείτε τις τιμές των  $f(3)$  και  $f'(3)$ .

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

10. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $(3x^2 f^2(x) - 1) f'(x) + x f''(x) = 0$ , για κάθε  $x \neq 0$
- $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και  $f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$ .

γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(3x) = f(2x) + f(5x).$$

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  ως προς τη μονοτονία και να

αποδείξετε ότι:

$$f^2\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < f(a)f(\beta) \text{ για } 1 < a < \beta$$

11. Έστω η συνάρτηση:  $f(x) = e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$

και  $F$  μία αρχική της  $f$ .

Έστω ακόμα μία συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$F(g(x)) = e^{g(x)} \left[ \frac{1}{x} + \ln x \right], x \in \mathbb{R}.$$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $g(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι:  $g(x) = e^x (x^2 + 1)$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 3$

**δ.** Αν για τη συνεχή συνάρτηση  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:

$$h(g(x) + x - 3) = f(h(x) + h(x) - 3), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h$  έχει με την ευθεία  $y = x$  ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

**ε.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 2e - 1$ .

**12.** Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy}$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

**β.** Να βρείτε το  $f(1)$ .

**γ.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**δ.** Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot f(x) \right)$ .

**ε.** Να λύσετε την εξίσωση:  $x \cdot \left( x + \sin \frac{\pi}{x} \right) = x - 1$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

στ. Αν  $g$  είναι μία συνεχής συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  και  $a > 0$ , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{1}{a}}^a g(f(x)) \frac{\ln x}{x} dx.$$

**13.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \ln x + 2xf''(x) = 0$
- $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = e$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι:

$$2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3 - x.$$

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx.$$

ε. Να αποδείξετε ότι:

$$e + \sqrt[3]{e} > 2\sqrt[5]{e}.$$

**14.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(-x) \cdot f(x) = -x$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και  $f(0) = 1$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}, x \in \mathbb{R}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 0$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ , το οποίο και να προσδιορίσετε.

**γ.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή.

**δ.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

**ε.** Αν  $h(x)$  είναι μία αρχική συνάρτηση της  $f$ , να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης  $h(x)$ .

**στ.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $C_h$ , τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0, x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ .

**15.** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , και

μία αρχική συνάρτηση της  $h(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}$  οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $(f''(x) - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu x - f'(x)(F(x) + F(-x)) = 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f''(0) + 1 = f'(0) = f(0) = 0$

**α.** Να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(-x) = \eta\mu x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**β.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

γ. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta.$$

ε. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}.$$



## 5.2. Προσομοιωμένα Διαγωνίσματα

1<sup>ο</sup>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A1.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται «1-1» σε ένα σύνολο  $A$ ;

(Μονάδες 4)

**A2.** Αν  $c > 0$ , τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το  $\int_a^{\beta} c dx$  ( $\alpha < \beta$ );

(Μονάδες 4)

**A3.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(Μονάδες 7)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**β.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  με  $f(a) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ'ανάγκη  $f(\beta) > 0$ .

γ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ , στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα σύνολο  $A$  είναι συνεχής στο  $A$  και  $f'(x)=0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $A$ , τότε η  $f$  είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο  $A$ .

ε. Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^a f(x)dx = 0$$

(Μονάδες 2x5=10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 4)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

**B3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

**B4.** Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

(Μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2+1}(x-1)}{\ln|x|}, & \text{αν } x \neq 0, x \neq 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases},$$

και  $g(x) = f(x) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), x > 0$  .

**Γ1.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  καθώς και την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

**(Μονάδες 6)**

**Γ2. i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς την μονοτονία της.

**ii.** Να αποδείξετε ότι:

$$e^{-x^2+1} \leq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } x > 1 \text{ και } e^{-x^2+1} \geq \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{3}-1)}{2(x-1)}, \text{ αν } 0 < x < 1$$

**(Μονάδες 2x4=8)**

**Γ3. i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $g$  ως προς τα κοίλα της στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  στα σημεία  $A(2, g(2))$  και  $B(1, g(1))$  αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e^{-4}(7-3x) \leq e^{-x^2}(x-1), \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \text{ και}$$

$$e^{-x^2} \geq e^{-1}, \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

**(Μονάδες 5+ 6=11)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = (0, +\infty)$  με σύνολο τιμών  $f(A) = \mathbb{R}$ , τέτοια, ώστε:

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ .

**(Μονάδες 6)**

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}.$$

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$  ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$  στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα  $y'y$ , και την ευθεία  $x = 1$ .

**(Μονάδες 8)**

**Δ3.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f^{-1}(x))$ ,  $B(f^{-1}(x), x)$  των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  αντίστοιχα.

**α.** Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

**β.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $x \in \mathbb{R}$  η απόσταση των σημείων  $A$ ,  $B$  γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή του.

**(Μονάδες 6+5=11)**

2<sup>ο</sup>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ ;

(Μονάδες 5)

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

(Μονάδες 3+7)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της  $C_f$  σε κάθε σημείο  $x_0 \in \Delta$  είναι «κάτω» από τη  $C_f$  εκτός από το κοινό τους σημείο.

**β.** Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$  τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx .$$

**γ.** Αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 .$$

δ. Αν το  $(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  και η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $x_0$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .

ε. Αν  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx.$$

(Μονάδες 5x2=10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$$

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 4)

**B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  καθώς και το πλήθος των ριζών της.

(Μονάδες 6)

**B3.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 5)

**B4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  δεν είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 4)

**B5.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

(Μονάδες 6)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 5)

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  τέτοιο, ώστε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  να είναι σημείο καμπής της  $C_f$ .

(Μονάδες 6)

Γ4. i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \frac{1}{e}$ ,  $x = e$ .

(Μονάδες 4+ 5=9)

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 5)

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**(Μονάδες 6)**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**(Μονάδες 5)**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ln(e^x - x) = \sin x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**(Μονάδες 5)**

**Δ5.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \frac{f(x)}{e^x - x} dx.$$

**(Μονάδες 4)**



3<sup>ο</sup>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A1.** Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$ ;

(Μονάδες 5)

**A2.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

(Μονάδες 10)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) < f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

**β.** Ανάμεσα σε δύο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.

**γ.** Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta \in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}.$$

**δ.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και  $l$  ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

ε. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$ .

(Μονάδες 5x2=10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$$

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(Μονάδες 5)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

(Μονάδες 5)

**B3.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 8)

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2.$$

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση :

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1.$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

**Γ2. i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**ii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(Μονάδες 2x5=10)

**Γ3.** Αν για τους αριθμούς  $a, \beta \in \mathbb{R}$  με  $2a + \beta > 0$  και  $a + 2\beta - 1 > 0$ , ισχύει:

$$e^{2a+\beta-1} - \ln(2a + \beta) + e^{a+2\beta-2} - \ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους  $a, \beta$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία  $x = 1$ .

**(Μονάδες 5)**

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $(1, +\infty)$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 1$  που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x \cdot \ln x, x > 1$$

καθώς και ότι οι συναρτήσεις:  $g(x) = e^x, h(x) = \ln x$  δεν έχουν κοινό σημείο στο  $(1, +\infty)$ .

**(Μονάδες 4)**

**Δ2. i.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**ii.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{\lambda}{x}$  με

$$\lambda \in \mathbb{R}, x > 1.$$

**(Μονάδες 4x2=8)**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της  $A(e, f(e))$ .

**(Μονάδες 4)**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:

i.  $\frac{f(x)}{e^{x-1}} \geq (1+e)x - e^2$ , για κάθε  $x > 1$ .

ii.  $\int_2^3 f(x)dx \geq e^{-1} \cdot \frac{5+5e-2e^2}{2}$ .

**(Μονάδες 2x3= 6)**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

**(Μονάδες 3)**

4<sup>ο</sup>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A1.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

(Μονάδες 4)

**A2.** Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης  $f$ ;

(Μονάδες 4)

**A3.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(a, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(a, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

(Μονάδες 7)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $f$  συνεχής με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε ισχύει πάντοτε

$$\int_a^\beta f(x)dx \neq 0.$$

**β.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου:  $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ .

**γ.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  «κοντά» στο  $x_0$ .

**δ.** Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ .

**ε.** Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Στα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  όπου η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 5x2=10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ \lambda, & \text{αν } x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

**B1.** Να δείξετε ότι  $\kappa = 2$  και  $\lambda = 4$ .

(Μονάδες 8)

**B2.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(Μονάδες 5)

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

(Μονάδες 5)

**B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $f(x) = 2\ln(8x+1)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω μία συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) = 2 \ln x + 3, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - x(2 \ln x + 1), \quad x > 0.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή στο  $(0, +\infty)$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

**(Μονάδες 5)**

**Γ3. i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**ii.** Αν ένα σημείο  $M(x(t), y(t))$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec και  $x(t) > 1$ , κινείται πάνω στην καμπύλη της γραφικής παράστασης  $C_{fof}$  της  $fof$  με σταθερό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του και ίσο με  $1 \text{ cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου  $M$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία  $x(t_0) = 2 \text{ cm}$ .

**(Μονάδες 4+6=10)**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$\left| f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \right| < \sqrt{f(a) \cdot f(\beta)} \text{ για κάθε } a, \beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \text{ με } a < \beta.$$

**(Μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x, x \in \mathbb{R}$$

**Δ1. i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη.

**ii.** Να αποδείξετε ότι:

$$e^{5x} + e^{3x+2} + e^{x+4} \geq e^5 \cdot x(x^4 + x^2 + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**(Μονάδες 3+ 4=7)**

**Δ2. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0 \in (0,1)$ .

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 12x \geq 2x_0^6 + 3x_0^4 + 6x_0^2 - 12x_0.$$

**(Μονάδες 2x4=8)**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:

$$3 < \frac{\int_{\xi_1+1}^{\xi_2+1} f(t)dt}{\xi_2 - \xi_1} < 42, \text{ με } 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1.$$

**(Μονάδες 4)**

**Δ4. i.** Να αποδείξετε ότι:

$$3 \int_0^1 e^{x^2} dx \geq 4.$$

**ii.** Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $x_0$ , το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 |f^{-1}(x)| dx.$$

**(Μονάδες 2x3=6)**



5<sup>ο</sup>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A1.** Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) της γραφικής παράστασης  $C_f$  μίας συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$ ;

(Μονάδες 4)

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

(Μονάδες 4)

**A3.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ότι ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}, \text{ δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

(Μονάδες 7)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**β.** Αν  $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$ , τότε  $f'(3) = 0$ .

γ. Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον  $x'x$ ) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  έχει στο  $+\infty$  οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

(Μονάδες 5x2=10)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5.$$

**B1.** Να βρείτε το  $f(5)$ .

(Μονάδες 5)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

**B3.** Να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .

(Μονάδες 6)

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1\right) = 2.$$

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $g$  παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $a = 1$ .

**(Μονάδες 3)**

**Γ2.** Αν  $g(e) = -1$ , να δείξετε ότι:  $g(x) = -\ln^2 x$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ3.** Αν  $g(x) = -(\ln x)^2$  σε όλο το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**i.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή  $x_0 \in (0, 1)$ , για την οποία η διαφορά  $f(x) - g(x)$  γίνεται ελάχιστη.

**ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων  $M, N$  με  $M(\xi, f(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  και  $N(\xi, g(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$  με  $\xi \in (0, +\infty)$ , στα οποία οι  $C_f$  και  $C_g$  δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.

**(Μονάδες 5+4=9)**

**Γ4. i.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$$

**(Μονάδες 4)**

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα και των ευθειών  $x=1$ ,  $x=e$ .

(Μονάδες 4)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \quad f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 4)

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = 2f(1).$$

(Μονάδες 3)

**Δ3.** Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$ .

(Μονάδες 4)

**Δ4. i.** Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Δίνεται επιπλέον ότι  $\int_0^1 f'(x) dx = 1$  καθώς και ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και τις ευθείες  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

**(Μονάδες 3+4=7)**

**Δ5. i.** Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}.$$

**ii.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}.$$

**(Μονάδες 4+ 3=7)**

6<sup>ο</sup>

Διαγώνισμα από το Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Βοήθημα του Υπουργείου

Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> - Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$

και

- $f(a) \neq f(\beta)$

Τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

(Μονάδες 10)

**A2.**

1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα .

(Μονάδες 3)

2) Πότε μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η εικόνα ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**β.** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $ho(gof)$ , τότε ορίζεται και η  $(hog)of$  και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

**γ.** Μία συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.

**δ.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**ε.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**(Μονάδες 10)**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $0 < f(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x) + 1}$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την  $f$ .

**(Μονάδες 5)**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι γνησίως αύξουσα και «1-1».

**(Μονάδες 5)**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(g(x^3 + 1)) = f(g(4x^2 + 2x))$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

**(Μονάδες 10)**

**B4.** Να επιλυθεί η ανίσωση:

$$(f \circ g)(x^3 + 4) > (f \circ g)(3x^2).$$

(Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^x - 1) - x$$

**Γ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 3)

**Γ2.** Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

(Μονάδες 4)

**Γ3.** Μελετήστε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 5)

**Γ4.** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και βρείτε την  $f^{-1}(x)$ .

(Μονάδες 4)

**Γ5.** Αν  $h(x) = \ln \frac{1}{x}$ , αποδείξτε ότι υπάρχει  $x_0 > 0$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = h(x_0)$ .

(Μονάδες 5)

**Γ6.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}.$$

(Μονάδες 4)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1».



**(Μονάδες 3)**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.

**(Μονάδες 5)**

**Δ3.** Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα  $x'x$ .

**(Μονάδες 3)**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα .

**(Μονάδες 4)**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = -1$ .

**(Μονάδες 4)**

7<sup>ο</sup>

Διαγώνισμα από το Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Βοήθημα του Υπουργείου

Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> - Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  με  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

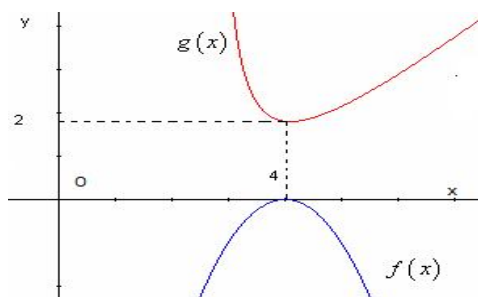
(Μονάδες 10)

2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δίνεται το παρακάτω σχήμα, τότε  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ .



β. Αν η  $f$  δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Η  $f$  είναι «1-1» αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

δ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  στο σύνολο  $A = [1, 4]$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [1, 4]$  και  $f(3) = -2$ . Τότε ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [1, 4]$ .

ε. Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^{-1}(-2015) = 4$ ,  $f^{-1}(1949) = -1$ . Τότε δεν υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ .

(Μονάδες 5x2=10)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R},$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

(Μονάδες 10)

**B2.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x$ .

(Μονάδες 5)

**B3.** Να βρείτε τα όρια: **α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x}$  και **β)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \ln^2 x, & 0 < x \leq e \\ ax + \ln(x - e + 1), & e < x \end{cases}$$

**α)** Να βρείτε τον αριθμό  $a \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

**β)** Αν  $a = \frac{3}{e}$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = 6$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $(1, 2e)$ .

(Μονάδες 5)

**Γ2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν:

- $f(e^{f(x)}) = 4 \ln x + 3$ , για κάθε  $x > 0$  και
- $(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x^4 + 3)^2 + 1$ , για κάθε  $x > e^{\frac{3}{4}}$

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

(Μονάδες 5)

**β)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 3)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(f \circ f)(x) = f(e^{x-2014})$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ1. Να δείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 4)

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$  στο  $[0, +\infty)$ .

(Μονάδες 3)

Δ3. Να δείξετε ότι  $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$  (Μονάδες 2) και ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  (Μονάδες 5).

(Μονάδες 7)

Δ4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, \beta$  ισχύει:

$$\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1,$$

να αποδείξετε ότι  $a + \beta = 0$ .

(Μονάδες 5)

Δ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 6)

8<sup>ο</sup>

Διαγώνισμα από το Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Βοήθημα του Υπουργείου

Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> - Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου

**ΘΕΜΑ Α**

1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 10)

2. Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

(Μονάδες 5)

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

β. Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι στο συνεχής  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

γ. Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f, g$  στο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της  $f + g$  στο  $x_0$ .

δ. Αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R}$  τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε υπάρχει και το όριο της  $g$  στο  $x_0$ .

ε. Αν  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$ , τότε  $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$

(Μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει η σχέση:

$$f(f(x)) = 2g(x) - x$$

**B1.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 5)

**B2.** Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

(Μονάδες 5)

**B3.** Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_0) = x_0$

**α)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

(Μονάδες 5)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f(x + x_0 - 2)) + x + x_0 = 2f(x + x_0 - 2) + 2$$

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$$

(Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}, & -1 \leq x < 0 \\ a^2 \ln(x+e) + 2a + (\beta^2 + \frac{1}{2})e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να βρείτε τις τιμές των  $a$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 8)

Γ2. Αν  $a = -1$  και  $\beta = 0$ ,

α) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)+1}{x+1}$ .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( xf(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$ .



(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0, 1)$ .

**Δ1. α)** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{x}$

(Μονάδες 4)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2x) - 1}{x} = 4f'(0)$

(Μονάδες 4)

**Δ2.** Αν επιπλέον για την  $f$  ισχύει,  $f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τον τύπο της.

(Μονάδες 7)

**Δ3.** Αν  $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της  $C_f$ , οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$

(Μονάδες 6)

**β)** Έστω σημείο  $M$  της  $C_f$  με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του  $M$  απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων  $O$  με ταχύτητα  $2\text{cm/sec}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $OAM$ .

(Μονάδες 6)

### 5.3. Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016

#### ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

##### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(a, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(a, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta)$ .

**β.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ.** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

δ. Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

ε. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[α, β]$  μία μέγιστη τιμή  $M$  και μία ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 9**

**B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ 3°

**Γ1.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Αν  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν  $f$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x), \text{ όταν } x \in [0, +\infty).$$

**Μονάδες 9**

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cdot \eta\mu x dx = \pi$ ,  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$  (μονάδες 4) και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**Δ2. α)** Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατο στο  $\mathbb{R}$  (μονάδες 4)

**β)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  (μονάδες 2)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι:  $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

**Μονάδες 6**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ .

**β.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ.** Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , είναι σταθερή στο  $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

**δ.** Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $y = f(x)$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

**ε.** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μία μέγιστη τιμή  $M$  και μία ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Αν  $a = 1$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 11**

**B3.** Για την παραπάνω τιμή του  $a$ , να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της  $f''$ .

**Μονάδες 11**

**Γ3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(x) \cdot f'(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[1, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να λυθεί η εξίσωση:  $f(x) = \sin x$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = l$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**β.** Αν  $f(x) = |x|$  για κάθε  $x \neq 0$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{|x|}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**γ.** Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**δ.** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $n \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

**ε.** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , συνεχή στο  $[a, \beta]$ , ισχύει:

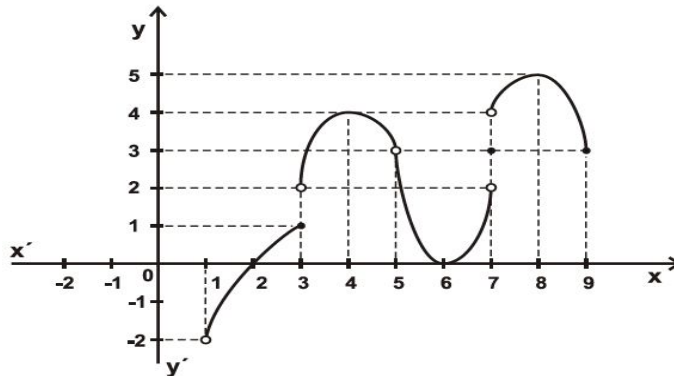
$$\text{αν } \int_a^\beta f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [a, \beta]$$

**Μονάδες 10**



**ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$     δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$     ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει

$$f'(x_0) = 0.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right).$$

**Μονάδες 9**

**Γ3.** Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του  $M$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το  $x_0 = 1$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.**

**α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 3**

**β.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = x_0$ , όπου ο  $x_0$  η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

**(Μονάδες 4)**

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[1, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \text{ για κάθε } x > 1$$

**Μονάδες 5**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = l$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**β.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**γ.** Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

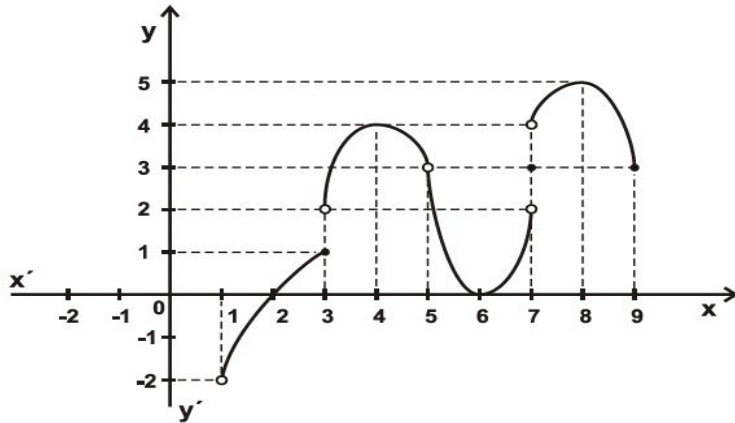
**δ.** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $n \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

**ε.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ , που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$     δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$     ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση  $f$  ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right).$$

**Μονάδες 9**

**Δ3.** Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός

μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να λυθεί στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right) = f(x).$$

**Μονάδες 6**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ  
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$ .

**β.** Το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$ , για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ .

**γ.** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**δ.** Για κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\Delta$  ισχύει  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

**ε.** Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx.$$

**Μονάδες 10**



### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ax-1}{x+1}, x \neq -1,$$

όπου το  $a$  είναι ένας πραγματικός αριθμός.

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$ .

**Μονάδες 5**

Αν  $a = 3$  τότε:

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**Μονάδες 6**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  είναι η

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}, x \neq 3.$$

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}, x > 2$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $(2, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τις ευθείες  $y = x + 1$ ,  $x = \lambda$  και  $x = \lambda + 1$  με  $\lambda > 2$ .

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in (2, +\infty)$  ισχύει  $E(\lambda) > \ln 2$ .

**Μονάδες 5**

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x.$$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}.$$

**Μονάδες 5**

### 5.4. Δέκα απαιτητικά θέματα (3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup>)

1. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = x + c - 2\sqrt{c \cdot x}, \text{ όπου } x, c > 0$$

A. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B. Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = x + c_1 - 2\sqrt{c_1 \cdot x}, \text{ όπου } x, c_1 > 0 \text{ και } c_1 > c.$$

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (c, c_1)$ .

Γ. Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = |f - g|$ .

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2.$$

A. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

B. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x)}{\eta \mu x}.$$

Γ. Να βρείτε το  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(e^x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

Δ. Να αποδείξετε ότι  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ και } g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

**A.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

**B.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f(x) + \frac{1-e^2}{2e}\right) = 0.$$

**Γ.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Δ.** Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

**4.** Έστω η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f(x) > \ln x, \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

**A.** Να υπολογίσετε το  $f(1)$ .

**B.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x, x > 0.$$

**Γ.** Έστω η συνάρτηση:  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $g$ .

**γ.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$g(x) = e^{-2}.$$

**Δ.** Να αποδείξετε ότι  $g(x) < x$  για κάθε  $x > 0$ .

**5.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}.$$

**A.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = e^{x^2} + x^2 \text{ στο σύνολο } (0, +\infty).$$

**Β.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(\ln x) > f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ στο σύνολο } (0, +\infty).$$

**Γ.** Έστω οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^{|\eta\mu x|} - |x|, x \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) = e^{|x|} - |\eta\mu x|, x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $C_f, C_g$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα.

**Δ.** Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\eta\mu x} - \eta\mu x - 1}{\ln(\eta\mu x + 1)}.$$

**6.**

**Α.** Έστω  $f$  συνάρτηση συνεχής στο  $[-a, a]$ ,  $a > 0$  και άρτια. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$$

**Β.** Έστω η συνάρτηση  $g$  με πεδίο ορισμού το  $[0, 2]$ , σύνολο τιμών το  $\left[-1, \frac{1}{4}e^{2a}\right]$ ,  $a < 0$  με συνεχή παράγωγο και γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 \left| \frac{ag(x) - g'(x)}{g^2(x)} \right| dx \geq 5.$$

**Γ.** Αν μια συνεχής συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot h(h(x)) dx \geq 2h(h(0)).$$

**7.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**A.** Να εξετάσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**B.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx.$$

**Γ.** Έστω τα ολοκληρώματα:

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

**α.** Να δείξετε ότι  $K = \sqrt{3} - I$ .

**β.** Να υπολογίσετε τα  $K, J$ .

(Sujet national Bac. 95)

**8.**

**A.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I_\nu = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^\nu} dt$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  για:

**i.**  $\nu \geq 3$     **ii.**  $\nu = 1$  και  $\nu = 2$

**B.** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , η οποία έχει στο  $[a, \beta]$  παράγωγο  $\nu + 1$  τάξης συνεχή. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta \frac{(\beta - t)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)} dt = f(\beta) - f(a) - (\beta - a)f'(\alpha) - \dots - \frac{(\beta - a)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\alpha)$$

(είναι  $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \nu$ ).

**Γ.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \varepsilon \varphi x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Να αποδείξετε ότι  $g^{(\nu)}(x) = P_{\nu+1}(u)$ , όπου  $P_{\nu+1}(u)$  είναι πολυώνυμο  $\nu + 1$  βαθμού ως προς τη μεταβλητή  $u = \varepsilon \varphi x$ .

**9.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ και } e^x \cdot f'(x) = f(x) - f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**A.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$$

**B.**

**α.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**β.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(x)) > \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}.$$

**Γ.** Αν  $g(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ), να δείξετε ότι:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

**Δ.**

**α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**β.** Να βρείτε, συναρτήσει του  $x_0$ , το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τις ευθείες  $y = x$  και  $x = 0$ .

**γ.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} f^{-1}(x) dx.$$

**10.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**A.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1».

**Β.**

**α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0 \in (-2, 0)$

**β.** Να λύσετε την ανίσωση :

$$f(f(f(x))) > f(f(0)).$$

**Γ.** Αν για την συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(g(x) - 4x) = f(3 - x^2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε το  $x_1$  στο οποίο η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει μέγιστο.

**Δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h = f^3 + f$  και τις ευθείες  $x = -2$  και  $x = 0$ .



**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ**

## Α. Εξεταστέα ύλη

ΔΙΔΑΚΤΕΑ-ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2016-2017			
ΤΑΞΗ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ			
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ			
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ			
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ			
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ			
ΜΕΡΟΣ Β': Ανάλυση			
Από το βιβλίο «Μαθηματικά» Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ' τάξης Γενικού Λυκείου των Ανδρεαδάκη Στ., κ.ά.			
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 <sup>ο</sup>  Όριο -Συνέχεια συνάρτησης	ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ	Δ.Ω.	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
	1.1. Πραγματικοί αριθμοί.	1	
	1.2. Συναρτήσεις.	3	
	1.3. Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση.	4	
	1.4. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ .	3	
	1.5. Ιδιότητες των ορίων.	6	Χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου "Τριγωνομετρικά όρια"
	1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	4	
	1.7. Όριο συνάρτησης στο άπειρο.	4	
	1.8. Συνέχεια συνάρτησης.	12	
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>37</b>	
2 <sup>ο</sup> Διαφορικός Λογισμός	2.1. Η έννοια της παραγώγου.	7	Χωρίς την υποπαραγράφο "Κατακόρυφη εφαπτομένη"
	2.2. Παραγωγίσιμες	2	Χωρίς τις αποδείξεις των

	συναρτήσεις-Παράγωγος συνάρτηση.		τύπων $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ στη σελίδα 106 και $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$ στη σελίδα 107.
	<b>2.3.</b> Κανόνες παραγωγίσης.	<b>5</b>	Χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων
	<b>2.4.</b> Ρυθμός μεταβολής.	<b>4</b>	
	<b>2.5.</b> Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.	<b>4</b>	
	<b>2.6.</b> Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	<b>6</b>	
	<b>2.7.</b> Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	<b>5</b>	Χωρίς το θεώρημα της σελίδας 146 (κριτήριο της 2ης παραγωγού).
	<b>2.8.</b> Κυρτότητα- Σημεία καμπής συνάρτησης.	<b>4</b>	Θα μελετηθούν μόνο οι συνα ρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους.
	<b>2.9.</b> Ασύμπτωτες -Κανόνες De L' Hospital.	<b>4</b>	

	<b>2.10.</b> Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	<b>1</b>	
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>46</b>	
<b>3<sup>ο</sup> Ολοκληρωτικός Λογισμός</b>	<b>3.1.</b> Αόριστο ολοκλήρωμα.	<b>2</b>	Μόνο η υποπαράγραφος «Αρχική συνάρτηση» που θα συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος θα περιλαμβάνεται στις διδακτικές οδηγίες
	<b>3.4.</b> Ορισμένο ολοκλήρωμα	<b>5</b>	
	<b>3.5.</b> Η συνάρτηση <sup>1</sup> $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .	<b>5</b>	
	<b>3.7.</b> Εμβαδόν επιπέδου χωρίου.	<b>4</b>	Χωρίς την εφαρμογή 3 της σελίδας 230.
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>16+4=20</b>	Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών

<sup>1</sup> **Υπόδειξη --οδηγία:**

Διατυπώνεται **χωρίς να αποδειχτεί** η πρόταση:

«Αν  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  , όπου  $\Delta$  διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για

κάθε  $a$  η συνάρτηση:  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  είναι μια παράγουσα της  $f$ ,

και με τη βοήθεια αυτής **αποδεικνύεται το Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης.**

Η εισαγωγή της συνάρτησης γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό **δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που**

**αναφέρονται στην παραγωγή της συνάρτησης  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  και γενικότερα**

**της συνάρτησης  $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$  .**

		<p>που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων</p>
<p><b><u>Παρατηρήσεις:</u></b></p> <p><b>1.</b> Η διδακτέα-εξεταστέα ύλη θα διδαχτεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων.</p> <p><b>2.</b> Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δεν διδάσκονται και δεν εξετάζονται.</p> <p><b>3.</b> Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.</p> <p><b>4.</b> Εξαιρούνται από την εξεταστέα--διδακτέα ύλη οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του <math>e</math> και του <math>10</math>.</p>		

## B. Οδηγίες διδασκαλίας

### Διαχείριση της ύλης

#### **ΗΜΕΡΗΣΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ**

Στις φετινές οδηγίες κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθούν χρήσιμες προτάσεις που, χωρίς να ανήκουν στην εξεταστέα ύλη, διευκολύνουν τη διδακτική διαδικασία.

Για διδακτικούς λόγους αλλά και για λόγους ανάδειξης της αξίας της αποδεικτικής διαδικασίας (επικύρωση της μαθηματικής αλήθειας, διεύρυνση της κατανόησης) κρίθηκε σκόπιμο να αναφέρουμε και την απόδειξη ορισμένων εξ αυτών κάτι, που κάνοντας ο καθηγητής στην τάξη, δεν εξηγεί μόνο το πώς και το γιατί της συγκεκριμένης πρότασης, αλλά διευρύνει και το μεθοδολογικό «οπλοστάσιο» του μαθητή, πέρα από το γεγονός ότι μπορούν να αποτελούν εργαλεία για τη λύση των ασκήσεων.

## ΜΕΡΟΣ Β΄:

### Ανάλυση

#### **Κεφάλαιο 1ο** (Προτείνεται να διατεθούν 37 διδακτικές ώρες)

Ειδικότερα:

##### **§1.1** (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ' ύπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

##### **§1.2** (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στις έννοιες της ισότητας και της σύνθεσης συναρτήσεων και στη χρήση και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων.

##### **§1.3** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

A) Να γίνουν ασκήσεις ελέγχου της ιδιότητας «1-1» μέσα από γραφήματα.

B) Στην άσκηση 3 (σελ. 38) να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων που δίδονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Να γίνουν και άλλες τέτοιου τύπου ασκήσεις.

**Γ) Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορούν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις :**

i) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ .

ii) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$ .

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη των προτάσεων:

**Απόδειξη:**

i) Έστω ότι υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$ , για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει:  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \geq x_2$

και, επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ , που αντίκειται στην υπόθεση.

- Αν ήταν  $x_1 > x_2$ , και, επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ , που αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ήταν  $x_1 = x_2$ , από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$  που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

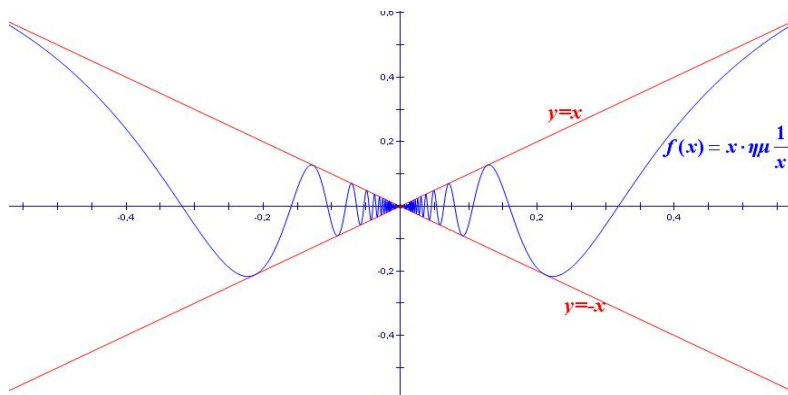
Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

ii) Αντίστοιχη με την i).

#### §1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

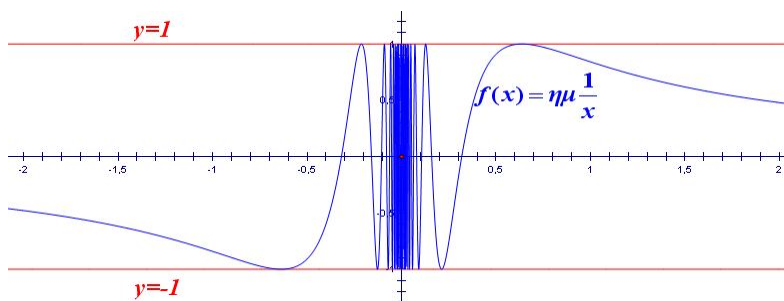
Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου (σελ. 43) δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο  $x_0$  δεν επηρεάζει το όριο της όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , καθώς και ότι η τιμή του  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο  $x_0$ . Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το  $x_0$  αλλά μπορεί να διαφέρουν στο  $x_0$  (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$  (σχολικό βιβλίο, σελ. 40-42). Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του  $x_0$ , δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του  $x_0$  και σε ένα διάστημα δεξιά του  $x_0$ . Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές

παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$  (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η  $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$  (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

**§1.5** (Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες)

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από



πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το

$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$ » (άσκηση 3i) θα πρέπει να ζητείται από τους μαθητές να

αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια

μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι  $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$  και

$g(x) = \frac{(x+4)(x^2+4)}{x^2-2x+4}$  είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να

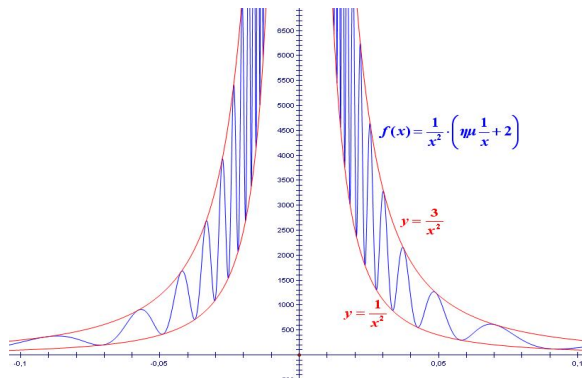
δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 (σελ. 57), να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο  $x_0$  και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το  $x_0$  να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο  $x_0$  πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

**§1.6** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία,

όπως π.χ.  $f(x) = \frac{1}{x^2} \eta \mu \frac{1}{x} + 2$  (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που

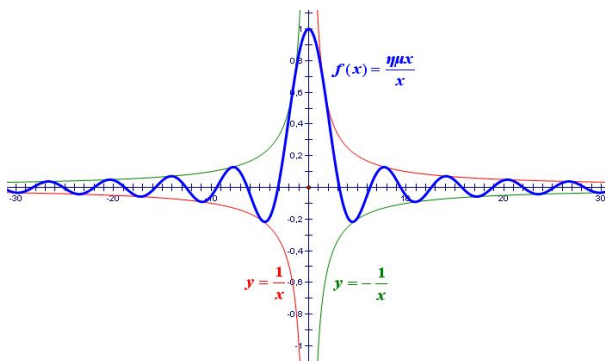
συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο  $x_0$  με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$  (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = \eta \mu x$ .



Σχήμα 4

Τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n}$  να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

**Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο.**

Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

i) Αν ισχύουν:

α)  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και

β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

, τότε θα ισχύει και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

ii) Αν ισχύουν:

α)  $f(x) \geq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και

β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

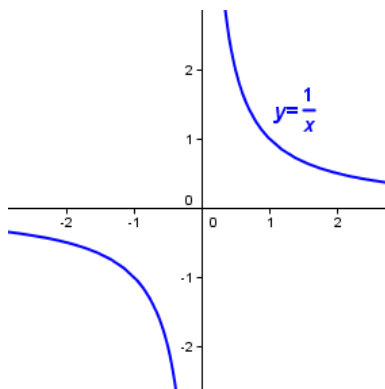
, τότε θα ισχύει και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με την βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων.

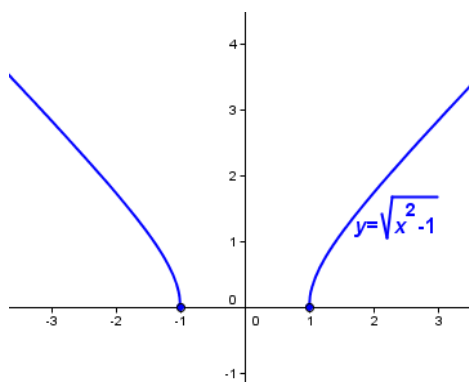
**§1.8** (Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες)

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για

παράδειγμα οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$  (Σχήμα 5) και  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  (Σχήμα 6)



Σχήμα 5



Σχήμα 6

και να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών (σελ. 76). Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του  $[a, \beta]$ .

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 46 διδακτικές ώρες)

### §2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης (σελ. 96) να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της

εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  στο σημείο  $O$ , ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  στο

σημείο  $O$ , ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

### §2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του  $h$

και του  $x$  στην έκφραση  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  που χρησιμοποιείται στο βιβλίο

για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ. 107). Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

### §2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί βάρος στην παραγωγή σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση

της σελίδας 234 σχετικά με το ότι το σύμβολο  $\frac{dy}{dx}$  δεν είναι πηλίκο.

Στην εφαρμογή 2 (σελ. 118) που αφορά στην εφαπτομένη του κύκλου να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνώρισαν στη γεωμετρία.

### §2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

**§2.5** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών. Επειδή οι μαθητές έχουν χρησιμοποιήσει το Θεώρημα του Bolzano, σε ασκήσεις όπως η εφαρμογή 1 ii) μπορεί να συζητηθεί πρώτα η δυνατότητα απόδειξης με χρήση του Θεωρήματος Bolzano και να φανεί ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα. Έτσι φαίνεται ότι το Θεώρημα Rolle αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο και για τέτοιες

περιπτώσεις. Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση τι εκφράζει το πηλίκο  $\frac{S(2,5) - S(0)}{2,5}$

(μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

**§2.6** (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του λόγου

μεταβολής  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η

συνάρτηση  $f$  είναι:

- i) γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , αν και μόνο αν  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$  έχουν θετική κλίση.
- ii) γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , αν και μόνο αν  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$  έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 253 χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .

**§2.7** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

**§2.8** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

**§2.9** (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το  $\frac{\ln x}{1 - x^2}$ , το οποίο είναι της μορφής « $\frac{0}{0}$ ». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

### **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ**

- i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$ .

- ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $g$  στο κοινό τους σημείο  $A(1,0)$  είναι οι ευθείες  $\varepsilon: y = x - 1$  και  $\zeta: y = -2x + 2$  αντιστοίχως και να τις χαράξετε.
- iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$  προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτομένων τους  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$  για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  η τιμή του πηλίκου  $\frac{\ln x}{1 - x^2}$  είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου  $\frac{x - 1}{1 - x^2}$ , δηλαδή ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1 - x^2} = \frac{x - 1}{-2x + 2} = \frac{x - 1}{-2(x - 1)} = -\frac{1}{2}$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

Επομένως, «κοντά» στο  $x_0 = 1$  ισχύει  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , το οποίο υπό μορφή

ορίου γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

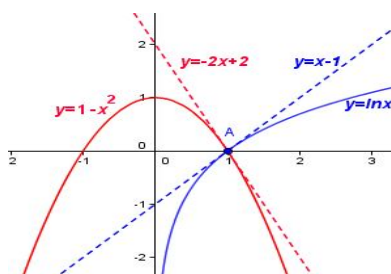
### ΣΧΟΛΙΟ

Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$  προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτομένων τους  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$  μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

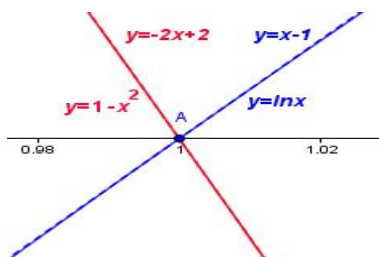
- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις  $y = \ln x$ ,  $y = 1 - x^2$  και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$  αντιστοίχως (σχήμα 7).



- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλληπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο  $A(1,0)$ . Θα παρατηρήσουμε ότι η  $y = \ln x$  θα συμπίσει με την ευθεία  $y = x - 1$ , ενώ η  $y = 1 - x^2$  θα συμπίσει με την ευθεία  $y = -2x + 2$  (σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

**§2.10** (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Οι τέσσερις (4) διδακτικές ώρες που απομένουν από τον συνολικό αριθμό των προτεινομένων ωρών να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

**Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>** (Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

**§3.1** (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

A) Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Β) Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 305) να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

**Πίνακας συναρτήσεων-παραγουσών**

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x  + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^a$	$G(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$G(x) = \eta\mu x + c, c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c, c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x) = \epsilon\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$

**Σημείωση:**

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του  $x$  που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 305 μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες των  $f$  και  $g$  αντιστοίχως και ο  $\lambda$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

- i) Η συνάρτηση  $F - G$  είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $f - g$  και
- ii) Η συνάρτηση  $\lambda F$  είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $\lambda f$ .

Οι εφαρμογές των σελίδων 188 και 189 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α' Ομάδας.

**Τυπογραφικό λάθος:** Στη διατύπωση του Θεωρήματος αντί  $c \in \mathbb{R}$  να γραφεί  $G$ .

**§3.4** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Να γίνει αναλυτικά το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

**Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:**  
 «Έστω  $f$  και  $g$  δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ .

- Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε θα ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx.$$

- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  δεν είναι ίσες στο  $[a, \beta]$  (δηλαδή, αν υπάρχει  $\xi \in [a, \beta]$  με  $f(\xi) \neq g(\xi)$ ), τότε θα ισχύει:  $\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx$  »

**Τυπογραφική διόρθωση:** Στην ισότητα του πρώτου πλαισίου τα άκρα ολοκλήρωσης να αντιστραφούν.

**§3.5** (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Δεν θα διδαχθούν<sup>2</sup> ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγωγή της συνάρτησης  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  και γενικότερα της συνάρτησης  $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ .

§3.7 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

### **Επισήμανση**

1. Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη **εξαιρούνται** οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

---

<sup>2</sup>Με εγκύκλιο-οδηγία του ΥΠ.Π.Ε.Θ. διευκρινίστηκε ότι δεν θα διδαχθεί καμία άσκηση η οποία χρησιμοποιεί **με οποιοδήποτε τρόπο** την συνάρτηση ολοκλήρωμα, ακόμα και χωρίς την παραγωγή της.

**ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ****Α. Εξεταστέα ύλη**

<b>ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2015-2016</b>			
<b>ΤΑΞΗ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>			
<b>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</b>			
<b>ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ</b>			
<b>ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση</b>			
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ</b>	<b>ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ</b>	<b>Δ.Ω.</b>	<b>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</b>
<b>1<sup>ο</sup></b> <b>Όριο -Συνέχεια</b> <b>συνάρτησης</b>	<b>1.1.</b> Πραγματικοί αριθμοί.	<b>2</b>	
	<b>1.2.</b> Συναρτήσεις.	<b>3</b>	
	<b>1.3.</b> Μονότονες συναρτήσεις- Αντίστροφη συνάρτηση.	<b>4</b>	
	<b>1.4.</b> Όριο συνάρτησης στο	<b>4</b>	
	<b>1.5.</b> Ιδιότητες των ορίων	<b>7</b>	Χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου "Τριγωνομετρικά όρια"
	<b>1.6.</b> Μη πεπερασμένο όριο στο	<b>4</b>	
	<b>1.7.</b> Όρια συνάρτησης στο άπειρο.	<b>5</b>	
	<b>1.8.</b> Συνέχεια συνάρτησης.	<b>14</b>	
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>43</b>	
<b>2<sup>ο</sup></b> <b>Διαφορικός Λογισμός</b>	<b>2.1.</b> Η έννοια της παραγώγου.	<b>9</b>	Χωρίς την υποπαραγράφο "Κατακόρυφη εφαπτομένη"
	<b>2.2.</b> Παραγωγίσιμες συναρτήσεις- Παράγωγος συνάρτησης.	<b>5</b>	Χωρίς τις αποδείξεις των τύπων $(\eta\mu\chi)'=\sigma\eta\chi$ στη σελίδα 106 και $(\sigma\eta\chi)'=-\eta\mu\chi$ στη σελίδα 107.
	<b>2.3.</b> Κανόνες παραγωγίσισης.	<b>7</b>	Χωρίς την

			απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων
	<b>2.4.</b> Ρυθμός μεταβολής.	<b>5</b>	
	<b>2.5.</b> Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.	<b>6</b>	
	<b>2.6.</b> Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.	<b>7</b>	
	<b>2.7.</b> Τοπικά ακρότατα συνάρτησης	<b>7</b>	Χωρίς το θεώρημα της σελίδας 146 (κριτήριο της 2ης παραγωγού).
	<b>2.8.</b> Κυρτότητα- Σημεία καμπής συνάρτησης.	<b>6</b>	Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους.
	<b>2.9.</b> Ασύμπτωτες -Κανόνες De l' Hospital.	<b>6</b>	
	<b>2.10.</b> Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	<b>1</b>	
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>46</b>	

## **B. Διαχείριση της ύλης**

Η διαχείριση είναι η ίδια με την προτεινόμενη για τη Γ΄ Τάξη του Ημερησίου Γενικού Λυκείου, με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο και παράγραφο:

### **ΜΕΡΟΣ Β΄: Ανάλυση**

**Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 43 διδακτικές ώρες)** Ειδικότερα:

§1.1 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

§1.2 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

§1.3 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.4 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.5 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§1.6 (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

§1.7 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§1.8 (Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

**Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 56 διδακτικές ώρες)**

§2.1 (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

§2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.3 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.4 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

§2.5 (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

§2.6 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

**§2.9** (Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Οι 4 διδακτικές ώρες που απομένουν (από τον συνολικό αριθμό των ωρών που προτείνεται να διατεθούν για το κεφάλαιο αυτό), προτείνεται να διατεθούν για επίλυση επαναληπτικών ασκήσεων.

**Επισημάνσεις**

1. Στο εισαγωγικό κείμενο (σελ. 115) της παρουσίασης της έννοιας της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης, η συνάρτηση  $y = \eta\mu 2x$  να αντικατασταθεί από μια άλλη, για παράδειγμα την  $y = \ln 2x$ .

$$\left( (\ln 2x)' = (\ln 2 + \ln x)' = (\ln 2)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \right).$$

2. Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη **εξαιρούνται** οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.



### Γ. Οδηγίες... πριν τις εξετάσεις

Αγαπητέ μαθητή της Γ' Λυκείου που έχεις επιλέξει να εξεταστείς (και) στα Μαθηματικά:

Με την ευκαιρία της έκδοσης του βιβλίου αυτού και στο δύσκολο δρόμο που μας απομένει μέχρι τις εξετάσεις σου, δρόμο τον οποίο θα **διανύσουμε μαζί**, θα ήθελα να σου προτείνω τα επόμενα:

**1ο)** Το **βασικό** σου διδακτικό υλικό είναι το **Σχολικό Βιβλίο**. Με όλα τα προβλήματά του, το σχολικό βιβλίο είναι εκείνο το οποίο θα σε οδηγήσει στην κατανόηση των απαραίτητων εννοιών (και όχι των «περιττών» και των «τεχνασμάτων»), που είναι και το **κλειδί** για κάθε επιτυχία σου.

**2ο)** Το **επιπλέον διδακτικό υλικό** που καλείσαι να μελετήσεις είναι αυτό του **Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Βοηθήματος του Υπουργείου Παιδείας**, το οποίο διαρκώς βελτιώνεται και με το οποίο μπορείς να προχωρήσεις σε **βαθύτερη μελέτη** των εννοιών, της θεωρίας και των λύσεων των ασκήσεων. Στο πλαίσιο αυτό, εμείς σου δίνουμε **επιλεγμένο υλικό, σε συνδυασμό με το σχολικό βιβλίο, και βασισμένο στην φιλοσοφία των εξετάσεων**, που αποσκοπεί στην άρτια προετοιμασία σου.

**3ο)** **Να μην βιάζεσαι να καλύψεις την ύλη**. Κάνενας λόγος δεν υπάρχει να αγχωθείς για αυτό το θέμα. Η ύλη ολοκληρώνεται αρκετά πριν τις εξετάσεις και έχεις αρκετό χρόνο για επαναλήψεις. Εμείς θα σε βοηθήσουμε σε αυτό, γιατί το υλικό μας ακολουθεί τη ροή της ύλης στο σχολείο σου και μόνο. Η παράμετρος αυτή είναι βασική γιατί η αφιέρωση ικανού χρόνου σε τμήματα της ύλης που είναι σημαντικά θα σε κάνει να φτάσεις πιο γρήγορα στον προορισμό σου.

**4ο)** Τα θέματα στα οποία θα εξεταστείς απαιτούν **σωστή προετοιμασία και κατανόηση**. Ήδη το πνεύμα των εξετάσεων από πέρσι άρχισε να γίνεται διαφορετικό από τα προηγούμενα χρόνια.

**5ο)** **Να κλείσεις τα αυτιά σου** σε ό,τι δεν είναι αξιόπιστο και επίσημο. Να ακούς και να βλέπεις μόνο όσα επίσημα ανακοινώνονται από το ΥΠ.Π.Ε.Θ.

**6ο)** **Να ξεκουράζεσαι** και να ακολουθείς **έναν υγιεινό τρόπο ζωής**, μέσα στα πλαίσια του οποίου και η διασκέδαση δεν θα λείπει. Να έχεις μόνο έναν προγραμματισμό και να προσπαθείς να τον εφαρμόσεις.

**7ο)** Να έχεις **καθημερινή επαφή** με το μάθημα και να **μην διακόπτεις** για μεγάλο χρονικό διάστημα τη μελέτη σου.

Σου εύχομαι να είσαι καλά, με υγεία και σωστή προετοιμασία

**ΘΑ ΠΕΤΥΧΕΙΣ ΤΟΝ ΣΤΟΧΟ ΣΟΥ**

### Βιβλιογραφικές αναφορές

---

1. Σχολικό Βιβλίο Γ' Λυκείου: «Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής» των Ανδρεαδάκη Σ, Κατσαργύρη Β, κ.α.
2. Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Βοήθημα του Υπουργείου ([study4exams.gr](http://study4exams.gr))
3. Δημήτρης Μπούζας, Χρήστος Λινζερίνος, Οδυσσέας Βέρρας, «Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο», [maths4people.blogspot.gr](http://maths4people.blogspot.gr).
4. Καραγιάννης Ιωάννης, «Διδακτική και Μεθοδολογία στα Ολοκληρώματα» (Εκδόσεις Ζήτη, 1997).
5. Σημειώσεις του Συγγραφέα.
6. Μαθηματικός Περιηγητής ([blogs.sch.gr/iokaragi](http://blogs.sch.gr/iokaragi)).
7. Σημειώσεις Α. Ρουμελιώτη

