ΓΙΑΝΝΗΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

- **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
- **ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΕΡΟΣ Β

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γιάννης Καραγιάννης
Τηλ. 2241068945
e-mail: iokaragi@sch.gr
ΡΟΔΟΣ

Σελίδες:
Σχήμα: 14x27
ISSN:

Φιλολογική Επιμέλεια: Τσομαρέλη Τριανταφυλλιά
Επιμέλεια εξωφύλλου:

Λίγα λόγια για τον αναγνώστη-μαθήτριακαι μαθητή

Το μικρό αυτό βιβλίο αυτό αποτελεί ένα σημαντικό βοήθημα για να μάθεις την θεωρία που περιλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής για τις πανελλαδικές εξετάσεις.

Οι ερωτήσεις θεωρίας, δηλαδή οι αποδείξεις των θεωρημάτων και των προτάσεων, οι ορισμοί καθώς και οι γεωμετρικές ερμηνείες αποτελούν τα 2 ή τα 3 ερωτήματα από το $1^{ο}$ θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων.

Οι αποδείξεις των προτάσεων καθώς και οι ορισμοί δίνονται όπως ακριβώς γράφονται στο σχολικό βιβλίο .Ωστόσο εδώ θα τα βρεις «μαζεμένα» χωρίς να σπαταλάς περιττό χρόνο να τα βρεις στο βιβλίο σου, να αναρωτιέσαι αν είναι εντός ή εκτός εξεταστέας ύλη ή καιπως ακριβώς θα πρέπει να τα απαντήσεις.

Καλή μελέτη λοιπόν

Γιάννης Καραγιάννης

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α;

Απάντηση

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο x ∈ Α αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbf{R}$$

$$x \to f(x)$$

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σύνολο των σημείων Μ(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

● έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**

● για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο,

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο,

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, $f(x_0)$, όταν

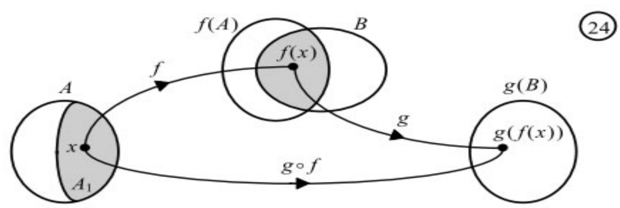
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

5. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(gof)(x) = g(f(x)) \ .$$



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο:

$$A_1 = \{x \in A \,/\, f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

6. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**
- **γνησίως φθίνουσα σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται :

● **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

● **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

7. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι :

- **Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο;**
- **Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι :

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το το $f(x_0)$, όταν το $f(x_0)$ για κάθε x ∊ Α .

8. Πότε μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1−1»;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

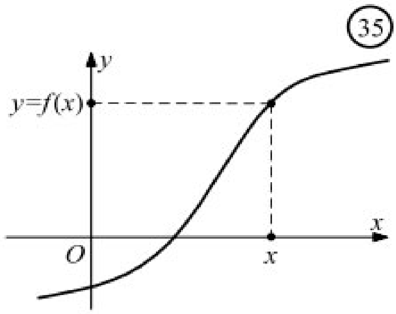
«Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$»

που σημαίνει ότι: «τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες».

9. Τι ονομάζουμε αντίστροφη της συνάρτησης $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f : A → **R**. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A) , της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x) = y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση g : f(A) → **R.**



με την οποία κάθε y ϵ f(A) αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x ϵ A για το οποίο ισχύει $g(y) = x$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

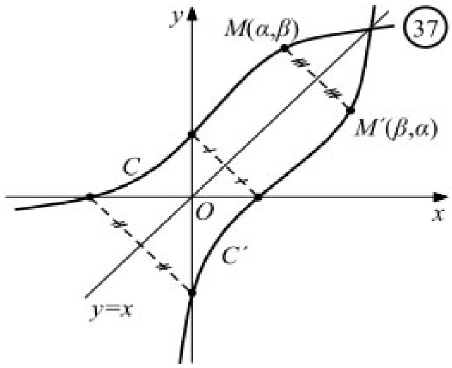
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$. Επομένως έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

10. Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων C_f, $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f, f^{-1} αντίστοιχα; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και $C΄$ των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C¨ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy.

11. Αν $P(x)=a_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ένα πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1}x^{v-1} + \cdots + \alpha_0) \\ &= \lim_{x\to x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{v-1}x^{v-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v \lim_{x\to x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x\to x_0} x^{v-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1}x_0^{v-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).\end{aligned}$$

12. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

13. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

14. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής

- **σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);**
- **σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;**

Απάντηση

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

● Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

15. Πότε μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τινή της , στο σημείο x_0.

16. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α, β).

17. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

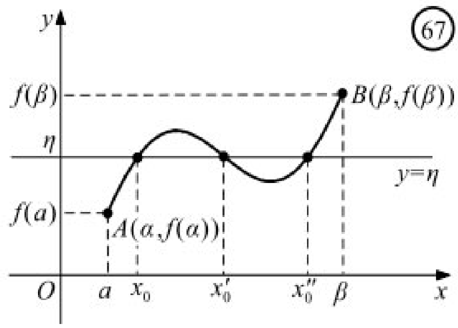
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και

- $g(\alpha)\, g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, πάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



18. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

19. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)\ ,\ \lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

21. Τι οναμάζεται ακολουθία;

Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

22. Πότε λέμε ότι μία ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l\in\mathbb{R}$;

Απάντηση

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$.

23. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο **R** τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

24. Να αποδείξετε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

25. Εστω η σταθερή συνάρτηση f(x) = c, c ∈ R**. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο** R **και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$.**

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$. ■

26. Έστω η συνάρτηση f(x) = x. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R **και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.**

Απόδειξη:

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$. ■

27. **Έστω η συνάρτηση f(x) = x^{ν} , $\nu \in$ N-{0, 1} . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.**

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

Δηλαδή: $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. ■

28. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Απόδειξη

Αν x_0 είναι ένα σημείο του (0, +∞) , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Δηλαδή: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

29. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

30. Έστω η συνάρτηση f(x) = $x^{-\nu}$, ν ϵ N^*. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη

Για κάθε x ϵ **R*** έχουμε :

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}. \quad ■$$

31. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1 = R − {x | συνx = 0} και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη

Για κάθε x ϵ R_1 έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \quad ■$$

32. Η συνάρτηση $f(x) = x^{a}$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει: $f'(x) = \alpha x^{a-1}$, δηλαδή $\left(x^{a}\right)' = \alpha x^{a-1}$.

Απόδειξη

Αν y = $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε u = αlnx, τότε έχουμε y = e^{u}. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

33. Η συνάρτηση f(x) = α^{x}, α > 0, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x} \ln a$, δηλαδή $\left(a^{x}\right)' = \alpha^{x} \ln a$.

Απόδειξη

Αν y = $\alpha^{x} = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε u = xlnα, τότε έχουμε y = e^{u}. Επομένως:

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^{x} \ln \alpha.$$

34. Η συνάρτηση f(x) = ln |x|, x ∈ R^{*}, είναι παραγωγίσιμη στο R^{*} και ισχύει $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

Απόδειξη

— αν x > 0, τότε $\left(\ln|x|\right)' = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ ενώ

— αν x < 0, τότε ln |x| = ln (−x), οπότε, αν θέσουμε y = ln(−x) και u = −x , έχουμε y = lnu.

Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$.

35. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y = f(x) **ως προς το x στο σημείο x_0 όταν η συνάρτηση f είναι παραγωίσιμη στο x_0;**

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x , y συνδέονται με τη σχέση y = f(x) , όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

36. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

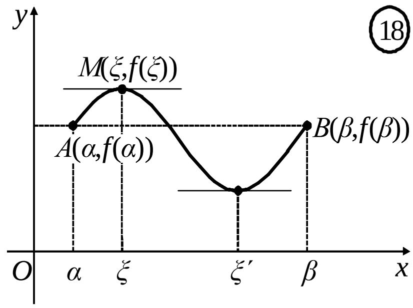
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



37. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

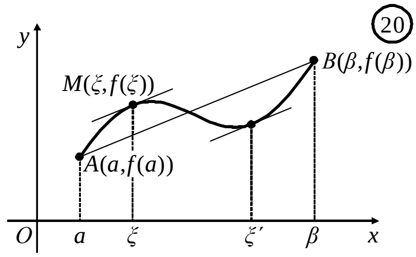
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο



σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.

38. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **η είναι συνεχής στο Δ και**
- $f'(x)=0$ **για κάθε εσωτερικό σημείο** x **του Δ,**

τότε να αποδείξετε ότι η είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ . \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είνα $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

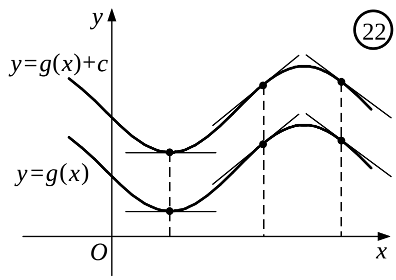
39. Έστω δυο συναρτήσεις f, g **ορισμένες σε ένα διάστημα** ***Δ*****. Αν**

- **οι** f, g **είναι συνεχείς στο** ***Δ*** **και**

- $f'(x)=g'(x)$ **για κάθε** ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** **σημείο** ***x*** **του** ***Δ*****,**

Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη



Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■

40. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.**
- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι η *f* είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.**

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Η απόδειξη για τη γνησίως φθίνουσα είναι ανάλογη.

40. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A* παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση

Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της *f***.

41. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A* παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) .$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της *f***.

42. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

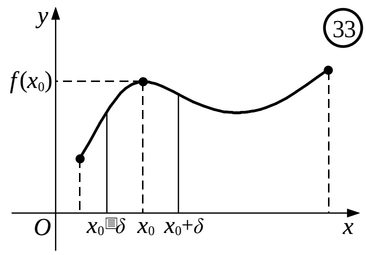
Απάντηση

Διατύπωση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$,

οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$,

οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

43. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η *f* είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

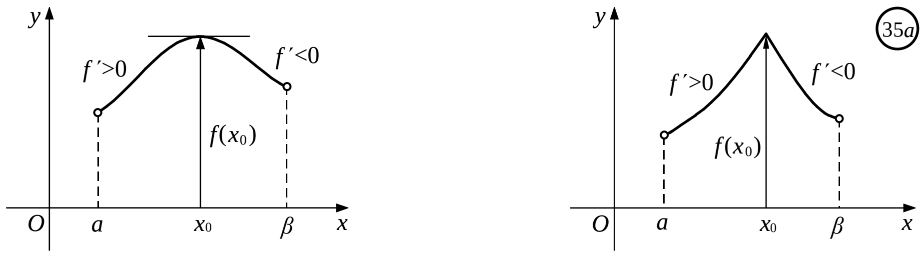
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$

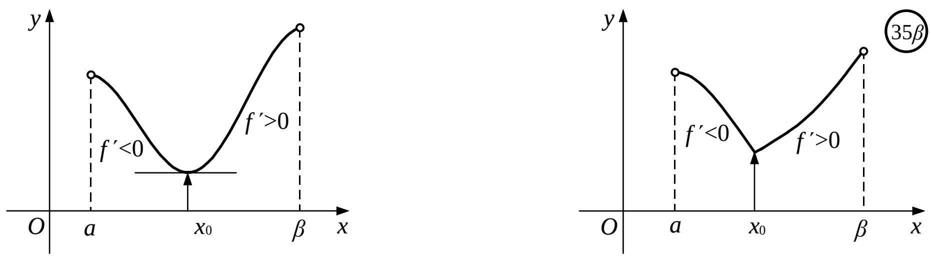


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

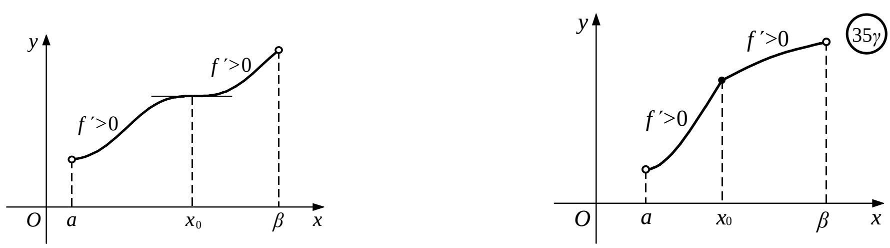
$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta)\ ,$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο $(\alpha,\ \beta)$ και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,\ x_0]$ και $[x_0,\ \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

44. Πότε λέμε ότι:

Α. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο *Δ*;

Β. Μία συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο *Δ*;

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και *π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η* στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

45. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f με την κυρτότητά της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα *Δ* και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι κυρτή στο *Δ*.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι κοίλη στο *Δ*.

46. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της *f*;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο $(x_0,\ \beta)$, ή αντιστρόφως,

και

- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της *f*.

47. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ποια είναι η τιμή της $f''(x_0)$;

Απάντηση

Αν το $A(x_0,\ f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

48. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της *f* ;

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.

49. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Απάντηση

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

50. Πότε λέμε ότι ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

51. Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital

Απάντηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

52. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

53. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x) = F(x) + c , c ∈ R , είναι παράγουσες της f στο Δ και**

- **κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x) = F(x) + c , c ∈ R.**

Απόδειξη

● Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x) = F(x) + c, (c ∈ **R**) είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

● Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε x ∈ Δ ισχύουν F'(x) = f(x) και G'(x) = f(x), οπότε G'(x) = F'(x), για κάθε x ∈ Δ

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε G(x) = F(x) + c, για κάθε x ∈ Δ ■

54. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες ισότητες-ανισότητες, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

Α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \ldots\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

Β. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \ldots$

Γ. Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \ldots\ \ldots$

Δ. Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α,β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \ldots\ \ldots$$

Απάντηση

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

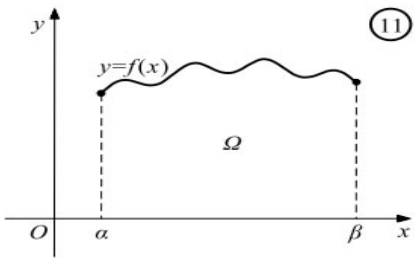
Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∊ [α,β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

55. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ αν $f(x) \geq 0$;

Απάντηση

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∊ [α,β], τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β (Σχ. 11). Δηλαδή, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)$



56. Τι παριστάνει γεωμετρικά το $\int_{\beta}^{\alpha} cdx$ αν c > 0;

Απάντηση

Το $\int_{\alpha}^{\beta} cdx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση β − α και ύψος c .

57. Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες ισότητες, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

« Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ, τότε ισχύει:

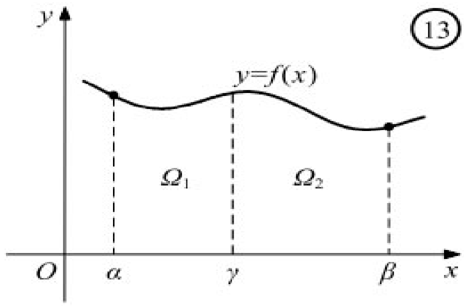
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\dots} f(x)dx + \int_{\dots}^{\beta} f(x)dx \text{ »}$$

Β. Αν f(x) ≥ 0 και α < γ < β τι δηλώνει , η παραπάνω ιδιότητα;

Απάντηση

Α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

Β. Ε(Ω) = Ε(Ω_1) + Ε(Ω_2), όπου $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ και $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (Σχήμα 13)



58. Να συμπληρώσετε το επόμενο κενό, ώστε η πρόταση να είναι αληθής:

«Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx,\ x \in \Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)dx\right)' = \dots$ για κάθε $x \in \Delta$ ».

Απάντηση

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)dx\right)' = f(x)$$

59. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Απάντηση

Διατύπωση

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

«Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(a)$»

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ είναι μια παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει c ∈ **R** τέτοιο, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για x = α , έχουμε:

$$G(a) = F(a) + c = \int_{a}^{a} f(x)dx + c = c$$

οπότε c = G(α).

Επομένως, G(x) = F(x) + G(α),

οπότε, για x = β , έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_{a}^{\beta} f(x)dx + G(a)$$

και άρα $\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(a)$.

60. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα;

Απάντηση

$$\int_{a}^{\beta}\left(f(x)\cdot g'(x)\right)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\left(f'(x)\cdot g(x)\right)dx$$

, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

61. Ποιος είναι τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα ;

Απάντηση

$$\int_{a}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f\left(u\right)du\ ,$$

όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις , u = g(x) , du = g΄(x)dx και u_1 = g(α) , u_2 = g(β).

62. Αν g συνεχής στο $[a,\ \beta]$, ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$ αν:

i. $f(x)\geq 0$ **για κάθε** $x\in[a,\beta]$**;**

ii. $g(x)\leq 0$ **για κάθε** $x\in[a,\beta]$**;**

ii. η g δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,\ \beta]$;.

Να αποδείξετε τον τύπο ii. με τη βοήθεια ενός σχήματος.

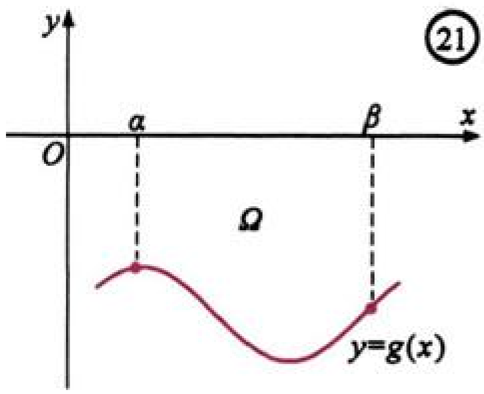
Απάντηση

i.

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

ii. Με τη βοήθεια του τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα x'x, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με g(x) ≤ 0 για κάθε x ∈ [α,β] και τις ευθείες x = α και x = β (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας x'x είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = 0, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)]dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\,.$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει g(x) ≤ 0 για κάθε x ∈ [α,β] , τότε

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

iii. $E = \int_{a}^{\beta} |f(x)| dx$

63. Ποιος είναι ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[a, \beta]$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$; Να αποδείξετε τους τύπους σε κάθε περίπτωση με τη βοήθεια ενός σχήματος.

Απάντηση

- Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις:

  (i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και

  (ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο [α,β].

  τότε ισχύει: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x) \right) dx$

- Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες x = α και x = β είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

<u>Αποδείξεις:</u>

- Έστω δύο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 18α).

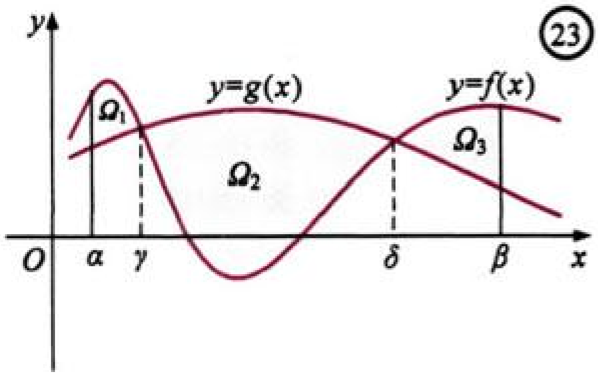
Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx\,.$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$$

- Αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3.



$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$$= \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x))dx + \int_{\gamma}^{\delta} (g(x) - f(x))dx + \int_{\delta}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\gamma} | f(x) - g(x) | dx + \int_{\gamma}^{\delta} | f(x) - g(x) | dx + \int_{\delta}^{\beta} | f(x) - g(x) | dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} | f(x) - g(x) | dx$$

Επομένως ,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} | f(x) - g(x) | dx$$

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Σχολικό Βιβλίο: *Μαθηματικά Γ΄τάξης Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής*, Ανδρεαδάκης Σ κ.α (ανατύπωση 2016).