ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορισμός: *κάθε συνάρτηση με πεδίο το Α={ν* $\in \mathbf{N}, \nu \geq \kappa, \kappa \in \mathrm{N}\}$ *ονομάζεται ακολουθία (*δηλαδή ακολουθία είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Ν των φυσικών από το οποίο έχουμε ίσως αποκόψει κάποιο αρχικό του τμήμα π.χ. Α={4,5,6,…})

Συμβολισμός : Συνήθως συμβολίζουμε με κάποιο μικρό γράμμα του Ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου. π.χ. α(ν),β(ν),s(ν)…

ή $\alpha_\nu, \beta_\nu, s_n, \ldots$

παραδείγματα ακολουθιών :

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu + 1}{3\nu + 2}, \nu \in \mathrm{N}$$

$$\beta_\nu = \frac{2\nu + 1}{\nu - 3}, \nu \in \mathrm{A} = \{4, 5, 6, \ldots\}$$

$$s_\nu = \sqrt{\nu^2 - 5\nu}, \nu \in \mathrm{A} = \{5, 6, \ldots\}$$

Αναδρομικές ακολουθίες : (ακολουθίες αναγωγικού τύπου)

Παραδείγματα:

$\alpha_1 = 3, \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$**(αριθμητική πρόδος με πρώτο όρο το $\alpha_1 = 3$ και διαφορά ω=5)**

εύκολα :

$\alpha_2 = \alpha_1 + 5 = 3 + 5 = 8$

$\alpha_3 = \alpha_2 + 5 = 8 + 5 = 13...$

$\alpha_1 = 2, \alpha_{\nu+1} = 3 \bullet \alpha_\nu$**(γεωμετρική πρόδος με πρώτο όρο το $\alpha_1 = 2$ και λόγο λ=5)**

εύκολα :

$\alpha_2 = \alpha_1 \bullet 3 = 2 \bullet 3 = 6$

$\alpha_3 = \alpha_2 \bullet 3 = 6 \bullet 3 = 18...$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ :

α) μια ακολουθία α_ν είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in N$ είναι $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$

β) μια ακολουθία α_ν είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in N$ είναι $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$

γ) μια ακολουθία α_ν είναι αύξουσα αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in N$ είναι $\alpha_{\nu+1} \geq \alpha_\nu$

δ) μια ακολουθία α_ν είναι φθίνουσα αν και μόνο αν για κάθε $\nu \in N$ είναι $\alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu$

παρατηρήσεις:

-μια ακολουθία λέγεται **μονότονη** όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και λέγεται **γνησίως μονότονη** όταν είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα

- αν μια ακολουθία είναι γνήσια μονότονη προφανώς είναι μονότονη

- μια ακολουθία είναι μονότονη όταν ισχύει κάποια από τις παραπάνω σχέσεις για «σχεδόν όλους» τους φυσικούς δηλαδή ισχύει για όλους τους φυσικούς αφού εξαιρεθεί ένα πεπερασμένο αρχικό πλήθος από το σύνολο των φυσικών π.χ. {6,7,8,…})

Παραδείγματα μονοτονίας ακολουθιών :

1° παράδειγμα: Να μελετήσετε την μονοτονία της $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu+2}{\nu+1}$

Λύση

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{3(\nu+1)+2}{(\nu+1)+1} - \frac{3\nu+2}{\nu+1} = \frac{1}{(\nu+2)(\nu+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$$

οπότε α_ν γνησίως αύξουσα

2° παράδειγμα: Να μελετήσετε την μονοτονία της $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu}{\nu+1}$

Λύση

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\dfrac{3^{\nu+1}}{\nu+2}}{\dfrac{3^\nu}{\nu+1}} = \frac{3 \bullet 3^\nu \bullet (\nu+1)}{3^\nu \bullet (\nu+2)} = \frac{3\nu+3}{\nu+2} > 1$$

επομένως

$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$

δηλαδή α_ν γνησίως αύξουσα (λάβαμε υπόψη ότι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί)

3° παράδειγμα: Να μελετήσετε την μονοτονία της $\alpha_\nu = (\nu+1)^{\frac{1}{\nu}}$

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}, x > 0$

η f είναι παρ/μη με

$$f'(x) = f(x)\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

Αν $\Phi(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$,

Φ παρ/μη με $\Phi'(x)=-\ln(x+1)<0$ για $x>0$ άρα Φ ην **γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$**

για $x>0 \Leftrightarrow \Phi(x) < \Phi(0) = 0$ άρα $f'(x)<0$

οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

επομένως είναι γνησίως φθίνουσα και η α_ν που είναι περιορισμός της f στο N^*

<u>Φραγμένη ακολουθία</u>

-Μια ακολουθία α_ν λέμε ότι είναι φραγμένη άνω αν και μόνο αν υπάρχει

S $\in$ R τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \le S$ για κάθε ν $\in N^*$

-Μια ακολουθία α_ν λέμε ότι είναι φραγμένη κάτω αν και μόνο αν υπάρχει

S $\in$ R τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \ge s$ για κάθε ν $\in N^*$

-Μια ακολουθία α_ν λέμε ότι είναι φραγμένη άνω και κάτω ή <u>απλά φραγμένη</u> αν και μόνο αν υπάρχουν

s, S $\in$ R τέτοιος ώστε $s \le \alpha_\nu \le S$ για κάθε ν $\in N^*$

-Μια ακολουθία α_ν λέμε ότι είναι φραγμένη άνω και κάτω ή <u>απλά φραγμένη</u> αν και μόνο αν υπάρχουν

s, S $\in$ R τέτοιος ώστε $s \le \alpha_\nu \le S$ για κάθε ν $\in N^*$

-Μια ακολουθία α_ν λέμε ότι είναι απόλυτα φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in R_+$ **τέτοιος ώστε $|\alpha_\nu| \le \theta$ για κάθε ν $\in N^*$**

<u>Πρόταση:</u> Μια ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απόλυτα φραγμένη (απόδειξη σε όλα τα πανεπιστημιακά βιβλία)

<u>όριο ακολουθίας</u>

Η ακολουθία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών N άρα η μόνη δυνατότητα που έχουμε είναι να βάλουμε το ν να τείνει στο **+∞**

συμβολίζουμε: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = l$ ή $\lim \alpha_\nu = l$ ή $\alpha_\nu \to l$

με $l \in R$ (όταν υπάρχει το όριο της α_ν διότι μπορεί και να μην υπάρχει το όριο μιας ακολουθίας!)

<u>μερικά εισαγωγικά ζητήματα:</u>

Γειτονιά ενός πραγματικού αριθμού l με ακτίνα ε είναι το διάστημα (l-ε,l+ε)

<u>Ορισμός(γεωμετρικός)</u>

Μια ακολουθία α_ν έχει όριο τον l αν και μόνο αν για οσοδήποτε μικρή ακτίνα γειτονιάς του l «σχεδόν όλοι» οι όροι της ακολουθίας α_ν ανήκουν στην γειτονιά του l (ο όρος «σχεδόν όλοι είναι ένας αυστηρά μαθηματικός όρος και σημαίνει ότι οι όροι της ακολουθίας α_ν ανήκουν στην γειτονιά του l για κάθε $\nu > \nu_0(\varepsilon)$ που σημαίνει ότι το ν_0 είναι σταθερός και εξαρτάται κάθε φορά από την επιλογή της ακτίνας ε της γειτονιάς του l)

<u>Ορισμός(αλγεβρικός)</u>

$$\lim \alpha_\nu = l \in R \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0(\varepsilon) \in \mathrm{N} : |\alpha_\nu - l| < \varepsilon, \forall \nu > \nu_0\}$$

<u>μερικές κουβέντες για την μέθοδο δουλειάς:</u>

όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_ν έχει όριο τον πραγματικό αριθμό l τότε

* Λύνω ως προς ν την ανίσωση $|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$ (σε καλές ασκήσεις απαιτείται μέθοδος "αυθαίρετων μεγεθύνσεων ")

*Ονομάζω ν_0 τον μικρότερο φυσικό που είναι ίσος ή μεγαλύτερος με την λύση της παραπάνω ανίσωσης ή και μεγαλύτερος (εδώ θα χρειαστεί να δούμε μια νέα μαθηματική έννοια που λέγεται «ακέραιο μέρος»)

* χρησιμοποιώντας τον ορισμό αποδεικνύουμε το ζητούμενο!

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu + 1}$ **δείξτε** $\lim \alpha_\nu = 0$

Λύση

για κάθε ε>0

$$\left|\alpha_\nu - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\alpha_\nu\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\nu+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Αν **ονομάσουμε ν_0 τον μικρότερο φυσικό που είναι μεγαλύτερος από τον $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$**

τότε $\{\forall\varepsilon > 0, \exists\nu_0(\varepsilon) \in \mathrm{N} : \left|\alpha_\nu\right| < \varepsilon, \forall\nu > \nu_0\} \Leftrightarrow$

$\lim \alpha_\nu = 0$

<u>Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού</u>

Ονομάζω ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x και συμβολίζω [x] τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι δεν ξεπερνά τον x

Δηλαδή : $x - 1 < [x] \le x, \forall x \in \mathrm{R}$

π.χ.1

[3,2]=3 ,[2,99]=2, $[\frac{5}{3}] = 1$, [-5]=-5, [-3,7]=-4

(προσοχή : σε μια πρώτη επαφή με το ακέραιο μέρος δημιουργείτε η αίσθηση ότι [-3,7]=-3 που είναι φανερά λάθος μια και -3>-3,7) π.χ.2

παραπάνω αποδεικνύοντας ότι $\lim \alpha_\nu = 0$ για την $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu+1}$

το όριο της ακολουθίας

καταλήξαμε $\nu > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ οπότε επιλέγουμε $\nu_0 = [\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}]$

και συμπεραίνουμε

$$\{\forall\varepsilon > 0, \exists\nu_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu| < \varepsilon, \forall\nu > \nu_0\} \Leftrightarrow$$
$$\lim \alpha_\nu = 0$$

<u>Βασικές προτάσεις</u>

1η) Αν μια ακολουθία α_ν συγκλίνει τότε έχει μοναδικό όριο

Απόδειξη:

Έστω ότι η α_ν συγκλίνει σε δύο διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς α και α΄ τότε υπάρχει

$$\nu_1 \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\varepsilon > 0 (1)$$

και

$$\nu_2 \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu - a'| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\varepsilon > 0 (2)$$

Αν ονομάσω

ν_0 τον μεγαλύτερο από τους ν_1, ν_2 δηλαδή $\nu_0=\max\{\nu_1, \nu_2\}$ τότε : $\forall$ ν>$\nu_0, \varepsilon > 0$ είναι

$$\left.\begin{cases} |\alpha_\nu - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \text{και} \\ |\alpha_\nu - a'| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow |\alpha_\nu - a| + |\alpha_\nu - a'| < \varepsilon$$

Ας υποθέσουμε ότι α΄ >α τότε θέτω όπου ε=α΄-α>0

Οπότε :

$$|\alpha - \alpha'| = |(\alpha_\nu - \alpha') - (\alpha_\nu - \alpha)| \le$$
$$\le |\alpha_\nu - a| + |\alpha_\nu - a'| < \alpha' - \alpha$$

άτοπο

(απόδειξη υπάρχει σε όλα τα πανεπιστημιακά βιβλία αλλά την παρουσιάσαμε ως παράδειγμα χρήσης του ορισμό του ορίου συνάρτησης)

2η) Αν μια ακολουθία α_ν συγκλίνει τότε το όριο παραμένει το ίδιο και όταν παραλείψουμε ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων

Δηλαδή αν η ακολουθία

$\alpha_\nu, \nu \in \mathrm{N}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό l τότε και η ακολουθία

$\beta_\nu = \alpha_{\nu+\kappa}, \nu \in \mathrm{N}, \kappa \in \mathrm{N}^*, \kappa$ **σταθερός συγκλίνει και μάλιστα έχει το ίδιο όριο με τη α_ν δηλαδή στο $l \in R$**

δηλαδή :

$$\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim \alpha_{\nu+k} = l, k \in N^*$$

3η) Αν δύο ακολουθίες έχουν «σχεδόν όλους» τους όρους τους ίσους τότε συγχρόνως συγκλίνουν ή συγχρόνως αποκλίνουν (θυμίζουμε ότι ο όρος «σχεδόν όλοι οι όροι» σημαίνει εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων)

4η) $\lim \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \lim |\alpha_\nu| = 0$

(προσοχή η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει παρά μόνο για όριο 0 για παράδειγμα η ακολουθία

$\alpha_\nu = (-1)^\nu$ **μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αποκλίνει**
όμως η $|\alpha_\nu| = 1$ προφανώς συγκλίνει στο 1 διότι είναι σταθερή

5η) Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε είναι φραγμένη

Απόδειξη:

Έστω

$$\lim \alpha_\nu = l \in R \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0(\varepsilon) \in \mathrm{N} : |\alpha_\nu - l| < \varepsilon, \forall \nu > \nu_0\}$$

ονομάζω $A = \{|\alpha_0 - l|, |\alpha_1 - l|, |\alpha_2 - l|, \ldots, |\alpha_{\nu_0} - l|\}$ και m τον μεγαλύτερο από τους ε, A δηλαδή m=max{ε,A}

Τότε

$$\left|\alpha_\nu - l\right| < m \Leftrightarrow \alpha_\nu - l - m < \alpha_\nu - l < m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow l - m < \alpha_\nu < m + l, \forall \nu \in N$$

Επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη

Ιδιότητες ορίων

Αν οι ακολουθίες

α_ν, β_ν **είναι συγκλίνουσες ακολουθίες και μάλιστα**
$\alpha_\nu \to \alpha, \beta_\nu \to \beta$ **με** $\alpha, \beta \in R$

Τότε:

i) $\alpha_\nu + \beta_\nu \to \alpha + \beta$

ii) $\alpha_\nu - \beta_\nu \to \alpha - \beta$

iii) $\kappa\alpha_\nu \pm \lambda\beta_\nu \to \kappa\alpha \pm \lambda\beta$ **με** $\kappa, \lambda \in R$

iv) $\alpha_\nu \bullet \beta_\nu \to \alpha \bullet \beta$

v) $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \dfrac{\alpha}{\beta}, \beta \neq 0$

vi) $\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} \to \sqrt[\kappa]{\alpha}$ **,a>0**

vii) $\text{Αν} : \alpha_\nu \to \mathbf{a} \Rightarrow |\alpha_\nu| \to |\mathbf{a}|$

viii) $\text{Αν} : \alpha_\nu \to \mathbf{a} > \mathbf{0}$ τότε «σχεδόν όλοι» οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί(εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αρχικό πλήθος όρων της ακολουθίας)

ix) $\text{Αν} : \alpha_\nu \to \mathbf{o}, \beta_\nu$ **φραγμένη τότε** $\alpha_\nu \bullet \beta_\nu \to \mathbf{o}$

x) $\text{Αν} : \alpha_\nu \to \mathbf{a}, \gamma_\nu \to \mathbf{a}$ **και** $\alpha_\nu \le \beta_\nu \le \gamma_\nu$
για **σχεδόν όλα τα ν τότε** $\boldsymbol{\beta}_\nu \to \mathbf{a}$

xi) $\text{Αν} : \alpha_\nu \to +\infty$ **και** $\alpha_\nu \le \beta_\nu$
για **σχεδόν όλα τα ν τότε** $\boldsymbol{\beta}_\nu \to +\infty$

xii) $\text{Αν} : \alpha_\nu \to -\infty$ **και** $\alpha_\nu \ge \beta_\nu$
για **σχεδόν όλα τα ν τότε** $\boldsymbol{\beta}_\nu \to -\infty$

(<u>προσοχή:</u>

για την (v) : $\beta \neq \mathbf{o}$ σημαίνει ότι οι όροι της ακολουθίας εκτός ίσως από ένα αρχικό πεπερασμένο πλήθος είναι διάφοροι του 0

για την (vι) : $\beta > \mathbf{o}$ σημαίνει ότι οι όροι της ακολουθίας εκτός ίσως από ένα αρχικό πεπερασμένο πλήθος είναι θετικοί για την (x) :ειδική περίπτωσή αυτής της πρότασης είναι :

Αν $|\alpha_\nu| \leq |\beta_\nu|$ **για "σχεδόν όλα" τα ν και** $\beta_\nu \to 0$ **τότε** $\alpha_\nu \to 0$

Ακολουθία που αποκλίνει στο $\pm\infty$

Ορισμοί

$$\lim\alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow \{\forall M > 0, \exists \nu_0(M) \in \mathbb{N} : \alpha_\nu > M, \forall \nu > \nu_0\}$$

$$\lim\alpha_\nu = -\infty \Leftrightarrow \{\forall M > 0, \exists \nu_0(M) \in \mathbb{N} : \alpha_\nu < -M, \forall \nu > \nu_0\}$$

Υπολογισμός ορίων ακολουθίας:

Άσκηση 1η (βασική)

$$\text{Αν} \quad \alpha_\nu = \frac{1}{\nu^\kappa}, \kappa \in \mathbb{N}^* \ \textbf{δείξτε} \ \lim\alpha_\nu = 0$$

Λύση

για **κάθε** $\varepsilon>0: |\alpha_\nu| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu^\kappa} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \sqrt[\kappa]{\frac{1}{\varepsilon}}$

αν **επιλέξω** $\nu_0 = 1 + [\sqrt[\kappa]{\frac{1}{\varepsilon}}]$ **τότε**

$\forall \varepsilon>0, \exists \nu_0 = 1 + [\sqrt[\kappa]{\frac{1}{\varepsilon}}] : |\alpha_\nu| < \varepsilon, \forall \nu \geq \nu_0$

άρα $\lim \alpha_\nu = 0$

Άσκηση 2η

δείξτε **ότι η** $\alpha_\nu = \frac{\sin n}{\nu} \to 0$

Λύση

για **κάθε** $\varepsilon>0: |\alpha_\nu| = \frac{|\sin \nu|}{\nu} \leq \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}$

αν **επιλέξω** $\nu_0 = 1 + [\frac{1}{\varepsilon}]$ **τότε**

$\forall \varepsilon>0, \exists \nu_0 = 1 + [\frac{1}{\varepsilon}] : |\alpha_\nu| < \varepsilon, \forall \nu \geq \nu_0$

άρα $\lim \alpha_\nu = 0$

η «τεχνική των αυθαιρέτων μεγεθύνσεων» που χρησιμοποιήθηκε στην παραπάνω άσκηση συνηθίζεται στην περίπτωση που ο τύπος της ακολουθίας οδηγεί σε ανίσωση που δεν επιδέχεται μεθοδική λύση . Σε τέτοιες περιπτώσεις μεγαλώνουμε τον τύπο της οδηγώντας σε διαχειρίσιμη ανίσωση την οποία και επιλύουμε

Β τρόπος

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{\sin n}{\nu}\right| \le \frac{1}{\nu} \to 0$$

επομένως $\alpha_\nu \to 0$

(χρησιμοποιήθηκε η πρώτηση :Αν $|\alpha_\nu| \le |\beta_\nu|$ για "σχεδόν όλα" τα ν και $\beta_\nu \to 0$ τότε $\alpha_\nu \to 0$)

Άσκηση $2^η$

δείξτε ότι η $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu + 2}{2\nu + 3} \to \dfrac{3}{2}$

Λύση

δείξτε ότι η $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu + 2}{2\nu + 3} \to \dfrac{3}{2}$

για **κάθε ε>0:** $\left|\alpha_\nu - 3\right| = \left|\frac{3\nu+2}{2\nu+3} - \frac{3}{2}\right| = 5\,\frac{1}{4\nu+6} \leq \frac{5}{\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\nu > \frac{5}{\varepsilon}$ **άν επιλέξω** $v_0 = 1 + [\frac{5}{\varepsilon}]$ **τότε**

$\forall \varepsilon>0, \exists v_0 = 1 + [\frac{5}{\varepsilon}] : \left|\alpha_\nu - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon, \forall \nu \geq v_0$

άρα $\lim \alpha_\nu = \frac{3}{2}$

Βασικές ακολουθίες

Θεωρούμε **ως δεδομένα τα παρακάτω όρια:**

- $\frac{1}{\nu^\kappa} \to 0, \kappa > 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1, \alpha > 0$
- $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1, \alpha > 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \to 1, \alpha\nu\ \alpha_\nu \to \alpha > 0$
- $(1 + \frac{\alpha}{\nu})^\nu \to e^\alpha$
- $\alpha^\nu \to \begin{cases} +\infty, \alpha\nu\ \alpha>1 \\ 1, \alpha\nu\ \alpha=1 \\ 0, \alpha\nu\ \alpha<1 \end{cases}$

Άσκηση $3^{η}$

βρείτε **το όριο της ακολουθίας** $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu^2 - 3\nu + 2}{5\nu^2 + 2\nu - 1}$

Λύση

$$\alpha_\nu == \frac{3\nu^2 - 3\nu + 2}{5\nu^2 + 2\nu - 1} = \frac{3 - 3\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{2}{\nu^2}}{5 + \dfrac{2}{\nu} - \dfrac{1}{\nu^2}} \to \frac{3}{5}$$

(χρησιμοποιήθηκε : $\dfrac{1}{\nu}, \dfrac{1}{\nu^2} \to 0$)

Άσκηση $4^{η}$

βρείτε **το όριο της ακολουθίας** $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} - \sqrt{\nu^2 + 2\nu - 1}$

Λύση

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} - \sqrt{\nu^2 + 2\nu - 1} =$$

$$\nu\left(\sqrt{1 - \frac{3}{\nu} + \frac{2}{\nu^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}}\right) = +\infty \bullet 0 \quad \text{ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ !!!!}$$

πάμε από την αρχή

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} - \sqrt{\nu^2 + 2\nu - 1} = \frac{(\sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2})^2 - (\sqrt{\nu^2 + 2\nu - 1})^2}{\sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} + \sqrt{\nu^2 + 2\nu - 1}} =$$

$$\frac{\nu(-5 + \frac{3}{\nu})}{\nu\left(\sqrt{1 - \frac{3}{\nu} + \frac{2}{\nu^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}}\right)} =$$

$$= \frac{-5 + \frac{3}{\nu}}{\sqrt{1 - \frac{3}{\nu} + \frac{2}{\nu^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}}} = -\frac{5}{3}$$

Προσοχή το τέχνασμα (γνωστό και από τα λυκιακά χρόνια) της χρήσης κατάλληλης ταυτότητας σε ακολουθίες που έχουν ρίζες χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που το όριο είναι απροσδιόριστο

<u>Άσκηση 5η</u>

βρείτε το όριο της ακολουθίας

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} + \sqrt[3]{8\nu^3 + 2\nu - 1} - 3\nu$$

Λύση

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} + \sqrt[3]{8\nu^3 + 2\nu - 1} - 3\nu =$$

$$= (\sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} - \nu) + (\sqrt[3]{8\nu^3 + 2\nu - 1} - 2\nu) =$$

$$= \frac{-3\nu + 2}{\sqrt{\nu^2 - 3\nu + 2} + \nu} + \frac{2\nu - 1}{(\sqrt[3]{8\nu^3 + 2\nu - 1})^2 + 2\nu\sqrt[3]{8\nu^3 + 2\nu - 1} + 4\nu^2} =$$

$$\frac{-3 + 2\frac{1}{\nu}}{\sqrt{1 - 3\frac{1}{\nu} + 2\frac{1}{\nu^2}} + 1} + \frac{1}{\nu}\frac{2 - \frac{1}{\nu}}{(\sqrt[3]{8 + 2\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}})^2 + 2\sqrt[3]{8 + 2\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}} + 4} \to -\frac{3}{2}$$

-Στην αρχή δοκιμάσαμε να βρούμε το όριο βγάζοντας κοινό παράγοντα τον μεγιστοβάθμιο αλλά προέκυψε απροσδιοριστία $+\infty \bullet (1 + 2 - 3)$

-Η τεχνική που χρησιμοποιήσαμε για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα της απροσδιοριστίας είναι γνωστή από τα όρια συναρτήσεων στο Λύκειο και υπάρχει σε ανάπτυξη σε βοηθήματα

<u>Άσκηση 6η</u>

βρείτε το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = (1 - \frac{2}{\nu + 2})^\nu$

Λύση

α΄τρόπος

$$\alpha_\nu = (1 - \frac{2}{\nu + 2})^\nu = (1 - \frac{2}{\nu + 2})^{(\nu+2)-2} =$$

$$= (1 - \frac{2}{\nu + 2})^{(\nu+2)} \bullet (1 - \frac{2}{\nu + 2})^{-2} \to e^{-2} \bullet 1 = e^{-2}$$

β΄τρόπος

θέτω n=ν+2 οπότε

$$\alpha_\nu = (1 - \frac{2}{\nu + 2})^\nu = (1 - \frac{2}{n})^{n-2} = (1 - \frac{2}{n})^n \bullet (1 - \frac{2}{n})^{-2} \to e^{-2}$$

γ΄τρόπος

θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = (1 - \frac{2}{x + 2})^x = e^{x\ln(1-\frac{2}{x+2})}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x\ln(1 - \frac{2}{x + 2})) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 - \frac{2}{x + 2})}{\frac{1}{x}} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1 - \frac{2}{x + 2}))'}{(\frac{1}{x})'}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2 + 2x} = -2$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-2}$ άρα και η $\alpha_\nu \to e^{-2}$

Για τον γ τρόπο: Ήταν απαραίτητο να θεωρήσω συνάρτηση f για να εφαρμόσω Del' hospital μιας και η ακολουθία δεν είναι καν συνεχής συνάρτηση πόσο μάλλον δεν είναι παρ/μη

<u>Σειρές πραγματικών αριθμών</u>

Στα μαθηματικά ονομάζουμε **σειρά** το άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας. Οι σειρές διαχωρίζονται σε πεπερασμένες και άπειρες, στις πρώτες έχουν ορισθεί ο πρώτος και ο τελευταίος όρος, ενώ στις άπειρες οι όροι συνεχίζονται επ'αόριστον [1].

Για την ακρίβεια, σειρά ονομάζεται το άθροισμα των όρων μιας άπειρης ακολουθίας

$$s_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

Το παραπάνω το γράφουμε πιο σύντομα χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος Σ

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

Ένα παράδειγμα είναι η μαθηματική αναπαράσταση του παραδόξου της διχοτόμησης του Ζήνωνα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Οι όροι της σειράς συχνά παράγονται σύμφωνα με έναν ορισμένο κανόνα, δηλαδή από κάποιον τύπο ή από έναν αλγόριθμο. Όταν το πλήθος των όρων είναι άπειρο, η έννοια αυτή αποκαλείται μια άπειρη σειρά.

<u>Κριτήρια σύγκλισης σειρών</u>

1°. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu$ έχει ελπίδα να συγκλίνει μόνο αν $lim\alpha_\nu = 0$ **<u>(επομένως αν $lim\alpha_\nu \neq 0$ είναι βέβαιο ότι η σειρά δεν συγκλίνει</u>)**

2°. η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ ονομάζεται αρμονική σειρά

3° . Η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$ **συγκλίνει αν ρ>1** και **αποκλίνει αν ρ<1**

4° . Η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n}$ γεωμετρική σειρά

συγκλίνει μόνο αν $|\alpha| < 1$

5°. Αν $0 \leq \alpha_{\nu} \leq M\beta_{\nu}$ $M > 0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$:

A) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ συγκλίνει τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ συγκλίνει
B) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\nu} = +\infty$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\nu} = +\infty$ συγκλίνει
C) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\nu} = -\infty$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\nu} = -\infty$

6°. Αν $\alpha_{\nu}, \beta_{\nu} > 0$ και $lim \frac{\alpha_{\nu}}{\beta_{\nu}} = k$>0 τότε

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\nu}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$

Συγχρόνως συγκλίνουν ή συγχρόνως αποκλίνουν

7° . Αν $lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ σίγουρα συγκλίνει

(αν $lim\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ δεν συγκλίνει και αν $lim\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ δεν είμαστε βέβαιοι για τίποτα)

8ο . **Αν** $\boldsymbol{lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ **τότε** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu$ **σίγουρα συγκλίνει**

(αν $lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ δεν συγκλίνει και αν $lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

δεν είμαστε βέβαιοι για τίποτα)

Λυμένα παραδείγματα

Άσκηση 1

Να ελεγχθεί η σύγκλιση της σειράς .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Λύση :

Έχουμε:

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)} = \frac{1}{12}$$

Λύση :

Έχουμε:

$$\alpha_n = \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Αναλύουμε το n-οστό όρο α_n σε άθροισμα απλών κλασμάτων και έχουμε:

$$\alpha_n = \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)} \equiv \frac{A}{4n-1} + \frac{B}{4n+3} = \frac{A(4n+3)+B(4n-1)}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$$

$$= \frac{(4A+4B)\cdot n + (3A-B)}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$$

Οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} 4A+4B=0 \\ 3A-B=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4A=1 \\ A=-B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{array}$$

Άρα:

$$\alpha_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

με

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+3}\right) = \frac{1}{12}$$

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

α) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

<u>Λύση :</u>

α) Για κάθε n=1,2,… έχουμε:

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n)^2-1^2}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Κάνουμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα όπου A, B σταθερές, οπότε πρέπει:

$(2n+1)A+(2n-1)B=1$ ή

$2(A+B)n+A-B-1=0$.

Η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε n=1,2,… όταν και μόνο όταν:

$2(A+B)=0$ και $A-B-1=0$.

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων αυτών είναι:

$A=1/2$, $B=-1/2$.

Συνεπώς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right]$$

Παρατηρούμε ότι αν

$\alpha_n=\dfrac{1}{2(2n-1)}$, n=1,2,…, οπότε

$$\alpha_{n+1}=\frac{1}{2(2(n+1)-1)}=\frac{1}{2(2n+1)} .$$

Συνεπώς η σειρά είναι <u>τηλεσκοπική</u>

και συγκλίνει στην τιμή

$$\alpha_1-\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2} .$$

<u>Άσκηση 4</u>

Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση κάθε μια από τις παρακάτω σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot 10^n}{3^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{3^n+1}$

<u>Λύση :</u>

(α) Χρησιμοποιώντας το <u>κριτήριο του λόγου</u>, αν

$$\alpha_n = \frac{n! \cdot 10^n}{3^n}$$

τότε πρόκειται για μιά σειρά θετικών όρων και:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\dfrac{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{n! \cdot 10^n}{3^n}} = \frac{10\,(n+1)}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

άρα η σειρά αποκλίνει.

(β) Χρησιμοποιώντας το <u>κριτήριο της ρίζας</u> , αν

$$\alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

τότε πρόκειται γιά μιά σειρά θετικών όρων και:

$$\sqrt[n]{\alpha_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^{n}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}.$$

Αλλά είναι γνωστό ότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Άρα:

$$\sqrt[n]{\alpha_n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{e}\qquad(<1)$$

, δηλαδή η σειρά συγκλίνει.

(γ) Είναι φανερό ότι πρόκειται για μιά σειρά θετικών όρων.
Επίσης:

$$3^n<3^n+1\Rightarrow\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^n}$$

οπότε:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{3^n+1}<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{3^n}=5\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

<u>Άσκηση 5</u>

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

(α) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

(β) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n+2}{n^2(n+1)^2}$

<u>Λύση :</u>

(α) Αν

$$\beta_n = \frac{1}{n\,(n-1)}$$

τότε χρησιμοποιώντας ανάλυση απλών κλασμάτων, έχουμε:

$$\frac{1}{n\,(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} \Rightarrow A\,(n-1) + B\,n = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

δηλαδή

$$\beta_n = \frac{1}{n\,(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

, οπότε η σειρά

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

η οποία είναι <u>**τηλεσκοπική**</u> οπότε έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ \ (n-1)} = \alpha_1 - \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 1$$

(β) Αν

$$\gamma_n = \frac{4n+2}{n^2\,(n+1)^2}$$

τότε χρησιμοποιώντας ανάλυση απλών κλασμάτων (ανάλογα με το (α)), έχουμε: $\gamma_n = \dfrac{4n+2}{n^2\ \ (n+1)^2} = 2\ \left[\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$,

οπότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+2}{n^2\ \ (n+1)^2} = 2\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 2\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots\right]$$

είναι **τηλεσκοπική**. Επομένως :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+2}{n^2(n+1)^2} = 2$$

Άσκηση 6

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^n}$

Λύση :

α) Θέτουμε

$$\alpha_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Τότε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{[n!(n+1)]^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}$$

και

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4} < 1$$
.

Άρα η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ συγκλίνει, σύμφωνα με το <u>κριτήριο του λόγου</u>

β) Θέτουμε $\alpha_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n}$, τότε:

$$(\alpha_n)^{1/n} = \left(\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/n}$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

Συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^n}$$

συγκλίνει σύμφωνα με το <u>κριτήριο της ρίζας</u>

Άσκηση 7

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1}$

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(γ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$

Λύση :

α) Αφού

$|n-2| \leq |n| + |2|$,

έχουμε ότι:

$$\left|(-1)^n \frac{n-2}{n^3+1}\right| \le \frac{n+2}{n^3+1}\ , n = 1, 2, \ldots$$

Επειδή $n+2 \le 3n$ και $n^3 + 1 > n^3$ έχουμε ότι:

$$\left|(-1)^n \frac{n-2}{n^3+1}\right| \le \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}\ , n = 1, 2, \ldots$$

Επειδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$$

συγκλίνει, σύμφωνα με το <u>κριτήριο σύγκρισης</u> συνεπάγεται ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1}$$

συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς συγκλίνει.

β) Η ακολουθία

$$(-1)^n \frac{n}{n+1}$$

δεν συγκλίνει στο μηδέν, Άρα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$ αποκλίνει.

<u>**Άσκηση 8**</u>

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

(i) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n+1}$$

Εφαρμόζοντας το <u>κριτήριο σύγκρισης</u> έχουμε ότι:

$$\alpha_n = \frac{n+1}{3n^4-2} \le \frac{n+1}{3n^4-n^4} \le \frac{n+n}{2n^4} = \frac{2n}{2n^4} = \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n^2}\ .$$

Θέτουμε

$b_1 = 2, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$,

για κάθε $n \geq 2$.Αλλά η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει ως p-σειρά για p=2>1. Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

ΕΙΣΑΓΩΓΉ

■Κάθε πραγματικός αριθμός x∈R

■Αν x, y ∈R τότε (x, y) $\in R^2$

……………………………………………………………

■Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ∈R τότε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση f: $R^n \to R^k$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών (n,k$\in N^*$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + 3y^2}{4z^4 + 1}$$

Τότε:

$f(1,-2,0) = \frac{1^2+3(-2)^2}{40^4+1}$=15

α) f(x,y) = x^2y+5
Πεδίο ορισμού της f, είναι όλο το xy-επίπεδο.

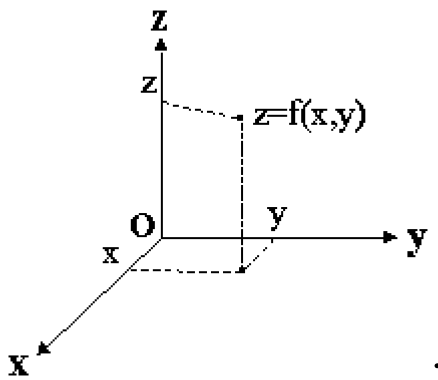
β) f(x,y) = $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

Πεδίο ορισμού της f, είναι το σύνολο των σημείων (x,y) για τα οποία ισχύει $x^2+y^2 \leq 1$. Δηλαδή είναι το σύνολο των σημείων ενός κλειστού δίσκου που έχει κέντρο στο (0,0) και ακτίνα 1.

Εάν z=f(x,y), οι μεταβλητές x και y ονομάζονται ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ η z εξαρτημένη μεταβλητή.

1.2: ***Γραφική παράσταση***

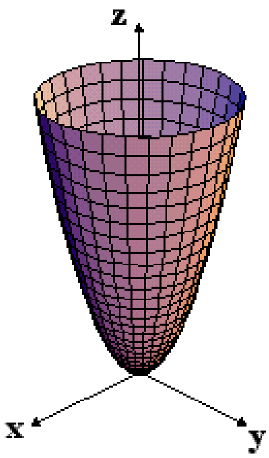
Γραφική παράσταση της f ονομάζουμε το σύνολο των σημείων (x,y,z) των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση z=f(x,y). (Δηλαδή για να σχηματίσουμε την γραφική παράσταση της f παριστάνουμε τις τιμές της f(x,y) ως ύψη z πάνω από τα αντίστοιχα σημεία (x,y). Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο.

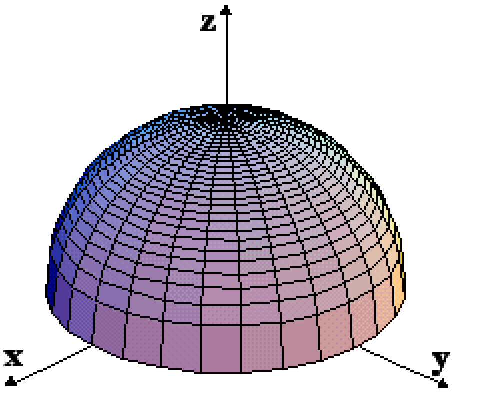


Παραδείγματα

α) $f(x,y) = x^2+y^2$

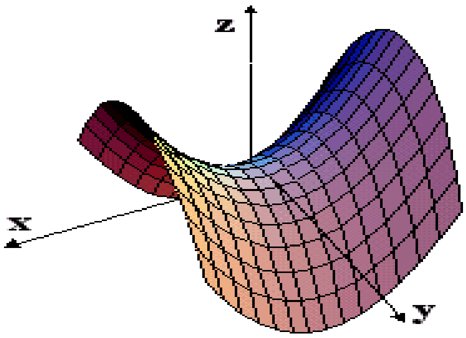
β) $f(x,y) = \sqrt{r^2 - (x^2+y^2)}$

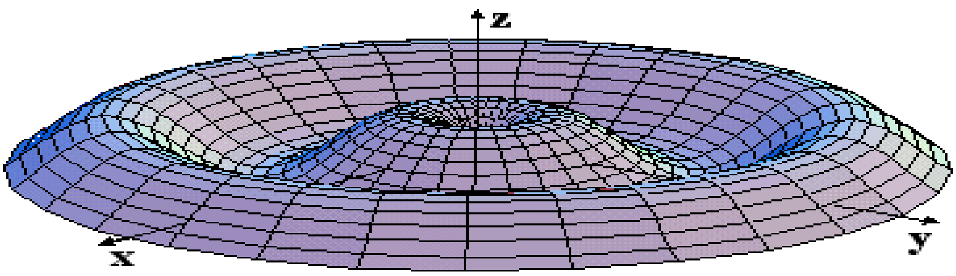




γ) $f(x,y) = x^2-y^2$

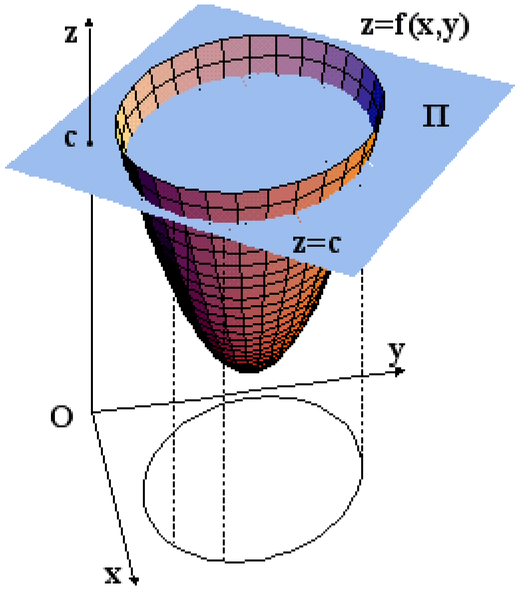
δ) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$





1.3: *Ισοσταθμικές καμπύλες*

Έστω συνάρτηση $z=f(x,y)$. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π, με εξίσωση $z=c$, το οποίο τέμνει την γραφική παράσταση της f. (Προφανώς το Π είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο και ο αριθμός $|c|$ προσδιορίζει την απόσταση του Π απ'αυτό.)



Η τομή του Π με την επιφάνεια $z=f(x,y)$, θα είναι μια καμπύλη στο χώρο, η οποία έχει για σημεία της , όλα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία ισχύει: $z=f(x,y)$ και $z=c$. Δηλαδή θα είναι όλα τα σημεία (x,y,c) για τα οποία $f(x,y)=c$. Προβάλλουμε την καμπύλη αυτή πάνω στο xy-επίπεδο. Η προβολή της, θα είναι μια καμπύλη που θα έχει για σημεία της, όλα τα σημεία $(x,y,0)$ για τα οποία ισχύει $f(x,y)=c$. Με άλλα λόγια θα είναι μια καμπύλη στο xy-επίπεδο στα σημεία της οποίας η f παίρνει σταθερή τιμή c. Καμπύλες αυτού του τύπου θα τις ονομάζουμε ισοσταθμικές καμπύλες της f.

Ερώτηση:

Τι είδους καμπύλες είναι οι ισοσταθμικές των παρακάτω συναρτήσεων;

i) $f(x,y)=x^2+y^2$, ii) $f(x,y)=y^2-x^2$, iii) $f(x,y)=4-x-2y$,
iv) $f(x,y)=xy$, v) $f(x,y)=x^2/9 + y^2/4$.

Παρατήρηση: *Όπως είδαμε και προηγουμένως, οι ισοσταθμικές καμπύλες μιας συνάρτησης αποτελούν ουσιαστικά την αποτύπωση της γραφικής της παράστασης στο xy-επίπεδο. Επομένως αυτές μπορούν να μας φανούν χρήσιμες στο να βγάζουμε συμπεράσματα για την μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών.*

1.4: ***Συνέχεια***

Μια ακολουθία σημείων $< P_i\ (x_i\ , y_i\ ) >$ θα λέμε ότι τείνει σε κάποιο σημείο $P_o(x_o\ , y_o\ )$ αν το ίδιο ισχύει για τις ακολουθίες των αντιστοίχων συντεταγμένων τους· δηλαδή $P_i\ (x_i\ , y_i\ ) \to P_o(x_o\ , y_o\ )$ αν $x_i \to x_o$ και $y_i \to y_o$.

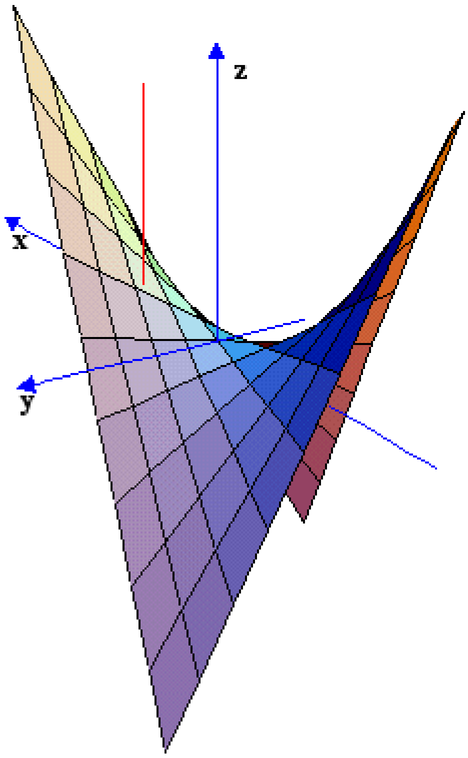
Μια συνάρτηση f(x,y) θα λέμε ότι είναι συνεχής σε κάποιο σημείο P_o αν για κάθε ακολουθία σημείων P_i που τείνει σ'αυτό ($P_i \to P_o$), ισχύει το ίδιο και για τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης ($f\ (P_i) \to f(P_o)$).

Οι ασυνέχειες μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών εκδηλώνονται γεωμετρικά με "διακοπές" της επιφανείας που αποτελεί την γραφική της παράσταση.

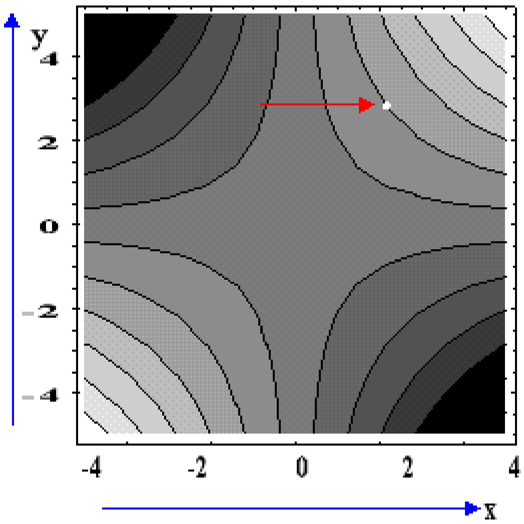
<u>Παράδειγμα</u> Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{εάν } (x,y) \neq (2,3) \\ 0 & \text{εάν } (x,y) = (2,3) \end{cases}$$

Εδώ υπάρχουν ακολουθίες σημείων P_i , οι οποίες τείνουν στο σημείο (2,3) και για τις οποίες έχουμε $f(P_i)\to 24$. Όμως $f(2,3)=0\neq 24$. Άρα η f(x,y) δεν είναι συνεχής στο σημείο (2,3) Στην γραφική παράσταση της f(x,y) παραπλεύρως η κατακόρυφη ευθεία (x=2,y=3,z=t) η παράλληλη προς τον z-άξονα δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την επιφάνεια παρά μόνο με το μοναχικό σημείο της επιφανείας το (2,3,0) που βρίσκεται στο xy-επίπεδο.



Την ασυνέχεια της f(x,y) μπορούμε να διακρίνουμε από την γραφική παράσταση των ισοσταθμικών της. Το οριζόντιο επίπεδο z=24 τέμνει την επιφάνεια έτσι ώστε η αντίστοιχη ισοσταθμική παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο (2,3).



Η συνάρτηση θα γίνει συνεχής εάν ορίσουμε να παίρνει την τιμή 24 όταν (x,y)=(2,3). Δηλαδή να είναι f(2,3)=24.

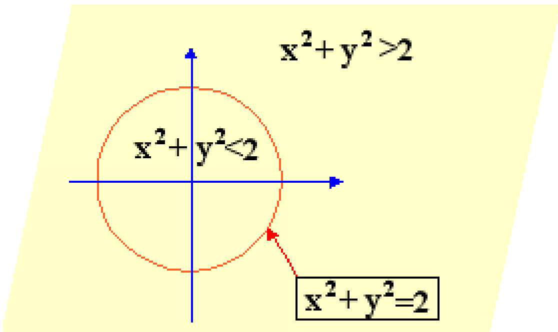
1.5: *<u>Περιοχές του επιπέδου</u>*

Μια εξίσωση της μορφής g(x,y)=c ορίζει μια καμπύλη στο xy-επίπεδο, η οποία το χωρίζει σε δύο υποπεριοχές, όπου τα σημεία της καθεμιάς ικανοποιούν μια από τις ανισώσεις.

$$g(x,y) < c \quad \text{ή} \quad g(x,y) > c \qquad (1.1)$$

Παράδειγμα

Η ανισότητα $x^2+y^2>2$ χαρακτηρίζει τα εκτός της περιφέρειας σημεία του επιπέδου ενώ η $x^2+y^2<2$ χαρακτηρίζει τα εσωτερικά σημεία της περιφέρειας.



Έχουμε επίσης τις σχέσεις

$$g(x,y) \leq c \quad \text{ή} \quad g(x,y) \geq c \qquad (1.2)$$

Όπου η καθεμιά μαζί με την αντίστοιχη περιοχή περιλαμβάνει και τα σημεία της καμπύλης

$$g(x,y) = c \qquad (1.3)$$

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής ονομάζουμε τις περιοχές της μορφής (1.1) ανοικτές και αυτές της μορφής (1.2) κλειστές. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η καμπύλη (1.3) ονομάζεται σύνορο της περιοχής.

Έτσι μια κλειστή περιοχή περιέχει και το σύνορό της ενώ μια ανοικτή δεν το περιέχει.

Μια περιοχή ονομάζεται φραγμένη αν περιέχεται μέσα σε κάποιο κύκλο δηλαδή αν τα σημεία της δεν τείνουν στο άπειρο.

Μια κλειστή και φραγμένη περιοχή ονομάζεται συμπαγής.

Γειτονιά ενός σημείου (x_o,y_o) στο επίπεδο θα ονομάζουμε έναν ανοικτό δίσκο N, ο οποίος έχει για κέντρο του το (x_o,y_o). Με άλλα λόγια

$$\mathbf{N} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\middle|\, \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{y_0})^2} < \mathbf{r}\right\}$$

όπου ο r εκφράζει την ακτίνα του δίσκου N.

<u>ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</u>

(ομοιότητες και διαφορές με τα όρια συναρτήσεων μιας μεταβλητής)

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^2+3y^2}{4x^2+y^2}$$

Βρείτε

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y), \quad \lim_{y\to 0, x\to 0} f(x,y),$$

Τι σημαίνουν τα παραπάνω ;

Το πρώτο όριο ζητάει να βάλουμε πρώτα το x$\to 0$ και κατόπιν $y \to 0$

Το δεύτερο όριο ζητάει να βάλουμε πρώτα το y$\to 0$ και κατόπιν $x \to 0$

<u>ΟΠΩΣ ΘΑ ΔΟΥΜΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ</u>

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0,}\left[\lim_{x\to 0,}\frac{x^2+3y^2}{4x^2+y^2}\right] = \lim_{y\to 0,}\left[\frac{3y^2}{y^2}\right] = 3$$

$$\lim_{y\to 0, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0,}\left[\lim_{y\to 0,}\frac{x^2+3y^2}{4x^2+y^2}\right] = \lim_{x\to 0,}\left[\frac{x^2}{4x^2}\right] = \frac{1}{4}$$

<u>ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ</u>

Αν τα «διαδοχικά όρια» βγάζουν διαφορετικό αποτέλεσμα όταν αλλάξουμε την σειρά τους τότε δεν υπάρχει το όριο που ζητείται

Έτσι στην παραπάνω συνάρτηση δεν υπάρχει το όριο

$\lim_{(x,y)\to(0,o)} f(x,y)$,

Να υπολογισθεί το $\lim_{(x,\upsilon)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

<u>Λύση</u>

(η παλιά μέθοδος των απλοποιήσεων)

$$\lim_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\upsilon})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}{\sqrt{\boldsymbol{x}}-\sqrt{\boldsymbol{y}}} = \lim_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\upsilon})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{y}}}}$$

$$= \lim_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\upsilon})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})}\left[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{y}}\right\}\right] = \mathbf{0}$$

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\upsilon})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$

<u>ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ</u> Στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής όταν λέμε $x \to \alpha$ γενικά σημαίνει ότι ο x έχει δύο δυνατότητες να πλησιάσει το α (από δεξιά $x \to \alpha^{+}$ ή από αριστερά $x \to \alpha^{-}$) . Στις συναρτήσεις 2 μεταβλητών όταν γράφουμε (x,y)$\to (\alpha,\beta)$ το σημείο (x,y) έχει άπειρες δυνατότητες να πλησιάσει στο σημείο (α, β). Το ίδιο συμβαίνει όταν δουλεύουμε στον χώρο των 3 διαστάσεων , 4ων, …

Βασικό : Όταν ένα όριο υπάρχει πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο που επιλέγω να προσεγγίσω το σημείο . Αν λοιπόν διαλέγοντας διαφορετικούς δρόμους προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα τότε το όριο δεν υπάρχει .

<u>Παράδειγμα</u>

Δείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,v)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Προσεγγίζω το σημείο (0,0) ακλουθώντας την ευθεία y=2x τότε :

$$\lim_{(x,v)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x^2}{x^2+4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}$$

Προσεγγίζω το σημείο (0,0) ακλουθώντας την ευθεία y=3x τότε :

$$\lim_{(x,v)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-9x^2}{x^2+9x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{10x^2} = -\frac{8}{10}$$

Άρα δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο

<u>Παρατήρηση:</u> υπάρχουν ασκήσεις που ζητούν να δείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο όριο κάνει Α τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό

Παράδειγμα *(για την παρατήρηση).* Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} \quad .$$

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου έχουμε:
Θα πρέπει δοθέντος *ε*>0 να υπάρχει *δ*>0, τέτοιος ώστε για

$|x|<\delta, \quad |y|<\delta$, να είναι $\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$.

Είναι όμως

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |y|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le |y| < \delta = \varepsilon \ ,$$

γεγονός που δείχνει ότι το όριο είναι ίσο με μηδέν.

Παράδειγμα .Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} \quad . \qquad (2.1)$$

Λύση:

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta$ το ζητούμενο όριο γράφεται

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\rho\sin^3\theta = 0,$$

διότι $-1\le\sin\theta\le 1$. Επομένως το ζητούμενο όριο είναι ίσο με μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου έχουμε: Θα πρέπει δοθέντος *ε*>0 να υπάρχει *δ*>0, τέτοιος ώστε για

$|x|<\delta, \quad |y|<\delta$, να είναι $\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$.

Είναι όμως

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |y|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le |y| < \delta = \varepsilon ,$$

γεγονός που δείχνει ότι το όριο (2.1) είναι ίσο με μηδέν.

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση που πρέπει να θυμόμαστε πάντα είναι ότι κοντά στην αρχή των συντεταγμένων ισχύει

$$\sin x \approx x, \quad \tan x \approx x$$

Η αντικατάσταση του ημιτόνου και της εφαπτομένης με το τόξο τους είναι πολύ χρήσιμη γιατί απλοποιεί σημαντικά τις ασκήσεις. Αυτό φαίνεται καθαρά στην παρακάτω άσκηση.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \sin^2 y}{\tan x + y} . \qquad (3.1)$$

Λύση:

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \sin^2 y}{\tan x + y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x - y) = 0 .$$

Επομένως το όριο είναι ίσο με μηδέν.

Παράδειγμα. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^4\right) \ln\left[x^2 + y^4\right] . \qquad (4.1)$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι, αν θέσουμε

$x^2 + y^4 = t$,

μετατρέπουμε το όριο (4.1) σε όριο συνάρτησης μιας μεταβλητής. Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{t\to 0} t \ln t = \lim_{t\to 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \tag{4.2}$$

που είναι της μορφής $-\frac{\infty}{\infty}$. Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας του d'Hospital στην (4.2), ο οποίος δίνει

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{(\ln t)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t\to 0} t = 0 \cdot$$

Α. Μερικές παράγωγοι

Έστω συνάρτηση f(x, y) δύο μεταβλητών ονομάζω μερική παράγωγο της F ως προς x και συμβολίζω $\frac{\partial f}{\partial x}$ την παράγωγο της f ως προς την μεταβλητή x (το y θεωρείται σταθερός σε αυτή την διαδικασία) . Όμοια ορίζεται η $\frac{\partial f}{\partial y}$

Παράδειγμα

Αν f(x, y)=$3x^2y^3 - 5x^3y^4$ βρείτε : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 - 15x^2y^4$$

$$και \;\; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 20x^3y^3$$

Β. Διαφορικό συνάρτησης

1. Έστω συνάρτηση f(x, y) δύο μεταβλητών τότε ονομάζουμε διαφορικό της f και συμβολίζουμε df το

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Παράδειγμα

Το df της προηγούμενης συνάρτησης

f(x, y)=$3x^2y^3 - 5x^3y^4$

είναι $df = f_x dx + f_y dy =$

=$(6xy^3 - 15x^2y^4)dx + (9x^2y^2 - 20x^3y^3)dy$

2. η παράσταση A(x,y)dx+B(x, y)dy είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης αν $A_y = B_x$

Παράδειγμα 1ο

Να εξετασθεί αν η παράσταση

$$(siny - ycosx)dx + (xcowy - sinx)dy$$

είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης

Ονομάζω:

A(x,y)= $xcosy - sinx, B(x,y) = xcosy - sinx$

Παρατηρώ :

$A_y = B_x = cosy - sinx$ επομένως η παράσταση είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης

<u>Παράδειγμα 2°</u> Να ευρεθεί αν η παράσταση

$$\left[y - \frac{2x\sin y}{\left(1+x^2\right)^2}\right]dx + \left[x + \frac{\cos y}{1+x^2}\right]dy,$$

αποτελεί διαφορικό κάποιας συνάρτησης.

Λύση: Έχουμε

$$f_1 = \left[y - \frac{2x\sin y}{\left(1+x^2\right)^2}\right], \quad f_2 = \left[x + \frac{\cos y}{1+x^2}\right].$$

Από τις (5.2) βρίσκουμε

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1 - \frac{2x\cos y}{\left(1+x^2\right)^2} \quad ,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η παράσταση είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης f

<u>Γ. Ακρότατα συνάρτησης</u>

Αν δοθεί μια συνάρτηση f(x, y) δύο μεταβλητών και ζητηθούν τα ακρότατα της τότε

1° → βρίσκουμε f_x , f_y

2° → βρίσκουμε $λύσεις\ των\ εξισόδεων\ f_x = 0$, f_y=0

3° → Υπολογίζουμε την παράσταση

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

4° → "Ρίχνουμε" στο Δ τις τιμές που βρήκαμε στο 2° βήμα

Και τώρα αποφασίζουμε :

- **Αν Δ>ο και** $f_{xx} < 0$ τότε έχουμε **τ. μέγιστο**
- **Αν Δ>ο και** $f_{xx} > 0$τότε έχουμε **τ. ελάχιστο**
- **Αν Δ<0** έχουμε **σαγματικό σημείο**
  (το σαγματικό σημείο είναι το αντίστοιχο του σημείου καμπής)
- **Αν Δ=0 Τότε δεν προκύπτει συμπέρασμα**

<u>Παράδειγμα</u>

Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

f(x, y)= $\boldsymbol{x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y}$

<u>Λύση</u>

$\boldsymbol{f_x = 2x + y - 3}$, $\quad \boldsymbol{f_y = x + 2y - 6}$,

$\boldsymbol{f_{xx} = 2}$, $\quad \boldsymbol{f_{yy} = 2}$, $\boldsymbol{f_{xy} = 1}$

Εξετάζω πότε

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{f_x = 0} \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{f_y = 0} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{2x + y - 3 = 0} \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{x + 2y - 6 = 0} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{Bmatrix}$$

Στο σημείο (0,3) έχουμε

$\boldsymbol{\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 3} > 0$

Επειδή **Δ>0 και** $f_{xx} > 0$ **η f στο σημείο (0,3) έχει τ.ε.**

<u>Ο τελεστής ∇</u>

Ο τελεστής **∇ ανάδελτα** χρησιμοποιείται για διανυσματική παραγώγιση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} * \vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y} * \vec{e_y}$ ->για 2 μεταβλητές

Και

$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} * \vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y} * \vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z} * \vec{e_z}$ ->για 3 μεταβλητές

<u>Κλίση μιας συνάρτησης f (gradf)</u>

Ονομάζουμε κλίση μιας συνάρτησης και συμβολίζουμε gradf το

Gradf= $\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} * \vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y} * \vec{e_y}$

Παράδειγμα

Αν $f(x,y) = x^2 \cos(y^3)$ βρείτε την κλίση της f στο σημείο P(1,0)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 \cos(y^3))}{\partial x} = \mathbf{2x} \cos(y^3)$ **επομένως** $\frac{\partial f}{\partial x}|_P = \mathbf{2} * \mathbf{1} * \cos(0^3) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 \cos(y^3))}{\partial y} = -x^2 \sin(y^3)\, 3\, y^2$ **επομένως** $\frac{\partial f}{\partial y}|_P = -1^2 * \sin(0^3) * 3 * 0^2 = 0$

Gradf$|_P$**=** $\nabla f|_P \equiv \frac{\partial f}{\partial x}|_P * \vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}|_P * \vec{e_y}$ =

$2\, \vec{e_x} + 0 * \vec{e_y} = 2\, \vec{e_x}$

<u>Απόκλιση της</u> F(x,y,z)=f(x,y,z) $\vec{e_x}$ + g(x,y,z) $\vec{e_y}$ + h(x,y,z) $\vec{e_z}$

Απόκλιση της F είναι η συνάρτηση

$$divF = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Εναλλακτικά $divF = \nabla \bullet F.$ (η . συμβολίζει εσωτερικό γινόμενο)

Παράδειγμα

Αν F(x,y,z)=$2x^3e^y sinz \overrightarrow{e_x}$+$x^2e^y \overrightarrow{e_y}$+ x^2sinz f(x,y,z) $\overrightarrow{e_z}$

βρείτε div F

<u>Λύση</u>

f(x,y,z)= $2x^3e^y sinz$,g(x,y,z)= x^2e^y , h(x,y,z)= x^2sinz

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2e^y sinz$, $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2e^y$, $\frac{\partial h}{\partial z} = x^2cosz$

Τότε : divF=$6x^2e^y sinz + x^2e^y + x^2cosz$

<u>Παρατήρηση :</u> Ένα διανυσματικό πεδίο f για τα οποίο ισχύει $\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 0$ ονομάζεται **ασυμπίεστο**.

<u>Στροβιλισμός της</u> F(x,y,z)=f(x,y,z) $\overrightarrow{\boldsymbol{e_x}}$**+ g(x,y,z)** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_y}}$**+ h(x,y,z)** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_z}}$

Ονομάζω στροβιλισμό της F(x,y,z)=f(x,y,z) $\overrightarrow{e_x}$+ g(x,y,z) $\overrightarrow{e_y}$+ h(x,y,z) $\overrightarrow{e_z}$ και συμβολίζω **<u>curlF (ή rotF)</u>** το

$$curlF = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

ή

Εναλλακτικά **curl F=** $\nabla \mathbf{x} \mathbf{F} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

(το **x** συμβολίζει εξωτερικό γινόμενο)

Παράδειγμα

Δίνεται η F(x,y,z)=2xy$\overrightarrow{e_x}$+3$\overrightarrow{e_y}$+5$z^2\overrightarrow{e_z}$

f(x,y,z)= 2xy ,g(x,y,z)=3, h(x,y,z)=5z^2

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial z} = 10z$

Curl F= $\nabla x F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 3 & 5z^2 \end{vmatrix}$ =

=$\left(\frac{\partial(5z^2)}{\partial y} - \frac{\partial 3}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x}$ - $\left(\frac{\partial(5z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial(3)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$ $=$

=0$\overrightarrow{e_x}$-0$\overrightarrow{e_y}$-2x$\overrightarrow{e_z}$=-2x$\overrightarrow{e_z}$

Μια διανυσματική συνάρτηση λέγεται αστρόβιλο πεδίο αν **rotF=0** **(ή το ίδιο curlF=0)**

Παράδειγμα Να προσδιοριστούν οι σταθερές *a,b, c* ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x+2y+az)\boldsymbol{e}_x + (bx-3y-z)\boldsymbol{e}_y + (4x+cy+2z)\boldsymbol{e}_z$$

να είναι αστρόβιλο.

Λύση: Θα πρέπει

$$\text{rot}\,\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} =$$

$$= (c+1)\boldsymbol{e}_x + (a-4)\boldsymbol{e}_y + (b-2) = 0 .$$

Επομένως βρίσκουμε a=4,b=2, c=-1 .

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Αν $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και f:$R^n \to R$ τότε ονομάζω παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$ στο σημείο P το εσωτερικό γινόμενο $\nabla f|_P . \vec{\boldsymbol{\alpha}}$

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2 y - yz^3 + z$$

στο σημείο P(1,-2,0), κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{u}$= $2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$.

Λύση: Η κλίση της συνάρτησης (1.1) είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \quad = 2xy\boldsymbol{e}_x + \left(x^2 - z^3\right)\boldsymbol{e}_y + \left(1 - 3yz^2\right)\boldsymbol{e}_z .$$

Στο σημείο P(1,-2,0) έχει την τιμή

$$(\nabla f)_P = -4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 1\boldsymbol{e}_z .$$

Η διανυσματική μονάδα κατά την κατεύθυνση διανύσματος ***u*** είναι

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\vec{\mathrm{u}}}{|\mathbf{u}|} = \frac{2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z}{3} .$$

Τελικά η παράγωγος της συνάρτησης κατά την ζητούμενη κατεύθυνση στο σημείο *P*(1,-2,0) είναι

$$D_{\alpha} f = (\nabla f)_P \bullet \boldsymbol{\alpha} = \frac{-8+1-2}{3} = -3 .$$

Προσοχή: **<u>Δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι το $\vec{\alpha}$ είναι διανυσματική μονάδα.</u>**

2. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

στο σημείο *P*(1,0), κατά την κατεύθυνση της ευθείας διανύσματος $2x - y - 1 = 0$ (προς τα θετικά *y*).

Λύση: Η κλίση της συνάρτησης (2.1) είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y = \left[\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\boldsymbol{e}_x + \left[\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\boldsymbol{e}_y$$

Στο σημείο *P*(1,0) έχει την τιμή

$$(\nabla f)_P = 0\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y .$$

Η διανυσματική μονάδα κατά την κατεύθυνση της δοθείσης ευθείας είναι

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{5}} \, .$$

$$D_\alpha f = \left(\nabla f\right)_P \bullet \boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} \, .$$

<u>Ολοκληρώματα</u>

<u>Α. γενικευμένα</u>

1. Άπειρα όρια ολοκλήρωσης

Τα <u>ολοκληρώματα</u> στα οποία το ένα όριο είναι το άπειρο, ονομάζονται **γενικευμένα** ή μη γνήσια ολοκληρώματα(improper integrals):

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δύναται να οριστεί ως το όριο ενός άλλου γνήσιου ολοκληρώματος. Δεδομένου ότι το ανώτερο όριο του γνήσιου ολοκληρώματος τείνει στο ∞, διαμορφώνεται η παρακάτω εξίσωση:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \equiv \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad (1)$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Αν δεν υπάρχει, αποκλίνει και δεν έχει νόημα. Ομοίως έχουμε:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad (1')$$

Στην περίπτωση που και τα δύο όρια ολοκλήρωσης τείνουν προς το ∞, τότε:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

και

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο αν τα όρια του μπορούν να οριστούν.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Λαμβάνουμε υπόψιν ότι: $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^b = \frac{-1}{b} + 1$.

Σύμφωνα με την (*1*), το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1\right) = 1$$

Άρα, το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο, συγκλίνει και η τιμή του είναι 1.

Απείρως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Ένα ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει γενικευμένο ακόμα και με πεπερασμένα όρια ολοκλήρωσης, όταν η συνάρτηση γίνεται άπειρη σε κάποιο σημείο μέσα στο διάστημα [*a*,*b*].

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$.

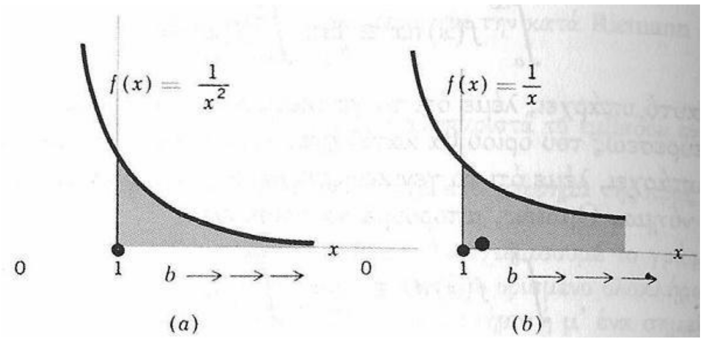
Η συνάρτηση είναι άπειρη στο κάτω όριο ολοκλήρωσης, ΔΗΛΑΔΉ 1/x->+∞ όταν x->0$^+$. Βρίσκουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{x} dx = lnx\Big]_0^1 = ln1 - ln\alpha = -lna$$, για a>0

και ύστερα υπολογίζουμε το όριο του καθώς το a->0$^+$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0^+} (-lna) = +\infty$$

Άρα το ολοκλήρωμα αποκλίνει.



Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το

$$\int_{o}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Λύση

Όταν x->0 $^+$, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, γίνεται άπειρη. Άρα το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο. Πρώτα, λοιπόν, βρίσκουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_a^9 = 6 - 2\sqrt{a}$$

Οπότε :

$$\int_{o}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_{a}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \left(6 - 2\sqrt{a}\right) = 6$$

Υποπερίπτωση

Όταν υπάρχει ασυνέχεια στο *c (με όριο άπειρο)* , όπου *a* < *c* < *b*, χωρίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα σε δυο:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\beta} f(x)dx$$

Αν κάθε γενικευμένο ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά συγκλίνει προς ένα όριο, τότε η τιμή του ολοκληρώματος θα είναι το άθροισμα των δυο γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 3

Υπολογίστε το $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx$. Η συνάρτηση τείνει στο ∞ ενώ το x πλησιάζει το 0. Έτσι:

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx$ = $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx = \int_{-1}^{0} x^{-3}dx + \int_{0}^{1} x^{-3}dx$ (έστω, $\equiv I_1 + I_2$)

Υπολογίζοντας το όριο του I_1

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-1}^{b} x^{-3}dx = \lim_{b\to 0^-} \left[\frac{-1}{2}x^{-2}\right]_{-1}^{b} = \lim_{b\to 0^-} \left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right) = -\infty$$

Συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου Ι (ή Α΄ είδους).

Ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ όπου c είναι μια επιτρεπτή σταθερά

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{c}^{\alpha} f(x)dx = A \in R$$

τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει και

$$\int_{c}^{+\infty} f(x)dx = A \in R$$

(ii) Παράδειγμα:

Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty}(\frac{1}{x}dx)$.

Λύση

Εδώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = 1/x$ είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής [2,b]. Άρα είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη στο διάστημα [2,b](διότι $\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{\chi}\right) = 0$).

Έχουμε :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{2}^{\alpha}\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to+\infty}[lnx - ln2] = +\infty$$

Επομένως δεν συγκλίνει το $\int_2^{\infty}(\frac{1}{x}dx)$

Γενικευμένα ολοκληρώματα τύπου ΙΙ (ή Β΄ είδους). Τα ολοκληρώματα αυτά έχουν τη μορφή: $\int_a^b f(x)dx$ όπου η συνάρτηση f(x) δεν ορίζεται και απειρίζεται σ΄ ένα από τα άκρα x=a ή x=b του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Η μέθοδος δουλειάς είναι η εξής : αντικαθιστώ το προβληματικό άκρο π.χ. το β με την μεταβλητή c όπου α<c<β ,υπολογίζω το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{c} f(x)dx = K(c)$$

και υπολογίζω το

$$\lim_{c\to\beta^-} K(c) = L$$

Τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = L$$

Παράδειγμα 1° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{x-2}dx$$

Λύση

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα ολοκλήρωσης εκτός από το άκρο x=2, που απειρίζεται και

$$\lim_{a\to 2^-} \int_{0}^{\alpha} \frac{1}{x-2}dx = \lim_{a\to 2^-} [\ln(2-\alpha) - ln2] = +\infty$$

Άρα το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Παράδειγμα 2° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής και φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης εκτός από το άκρο x=0 και

$$\lim_{a\to 0^+} \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} \left[2 - 2\sqrt{a}\right] = 2$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει με

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$$

Παράδειγμα 3° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_a^{+\infty} e^{kx}dx$$

<u>Λύση</u> e^{kx} είναι συνεχής στο [α, +∞) και

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t e^{kx}dx = \left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{t\to+\infty}[\frac{1}{k}(e^{kt} - e^{ak}), \kappa \neq 0 \\ ή \\ \lim\limits_{t\to+\infty}(t-\alpha), k = 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} [\frac{1}{k}(0 - e^{ak}), \kappa < 0 \\ [\frac{1}{k}(+\infty - e^{ak}), \kappa > 0 \\ ή \\ \lim\limits_{t\to+\infty}(t-\alpha), k = 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{k}e^{ak}, \kappa < 0 \\ +\infty, k > 0 \\ ή \\ +\infty, k = 0 \end{array}\right\}$$

Τελικά το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο αν $\kappa < 0$ και τότε

$$\int_a^{+\infty} e^{kx}dx = -\frac{1}{k}e^{ak}$$

Παράδειγμα 4° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\rho}}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t}\frac{1}{x^{\rho}}dx = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{-\rho+1}x^{-\rho+1}]_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{\rho}\neq\mathbf{1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[lnx]_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{\rho}=\mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{-\rho+1}(t^{-\boldsymbol{\rho}+\mathbf{1}}-\mathbf{1})], \boldsymbol{\rho}\neq\mathbf{1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[lnt], \boldsymbol{\rho}=\mathbf{1} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \left[\frac{1}{-\rho+1}(\mathbf{0}-\mathbf{1})\right], \boldsymbol{\rho}>1 \\ \left[\frac{1}{-\rho+1}(+\infty-\mathbf{1})\right], \boldsymbol{\rho}<1 \\ +\infty, \boldsymbol{\rho}=\mathbf{1} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{\rho-1}, \boldsymbol{\rho}>1 \\ +\infty, \boldsymbol{\rho}<1 \\ +\infty, \boldsymbol{\rho}=\mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

Τελικά το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν $\rho > 1$ και τότε

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\rho}}dx = \frac{1}{\rho-1}, \rho > 1$$

Παράδειγμα 5° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x-4}dx$$

Λύση

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x-4}dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{x-4}dx + \int_{4}^{5} \frac{1}{x-4}dx$$

$$\int_{4}^{5} \frac{1}{x-4}dx = \lim_{t\to 4^+}\int_{t}^{5} \frac{1}{x-4}dx = \lim_{t\to 4^+}[-\ln(t-4)] = +\infty$$

Άρα το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x-4}dx$$

δεν συγκλίνει !

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ Για να συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα αυτής της μορφής πρέπει να συγκλίνουν και τα δύο ολοκληρώματα έτσι στο παραπάνω γενικευμένο συμπεράναμε ότι δεν συγκλίνει αφού δεν συγκλίνει ένα από τα δύο ολοκληρώματα

Παράδειγμα 6° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}dx$$

Λύση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+4}dx$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \frac{x}{x^2+4}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t^2+4)-\ln 4}{2} = +\infty$$

Επομένως δεν συγκλίνει το ζητούμενο γενικευμένο ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 7° : Να υπολογισθεί (εφόσον υπάρχει) το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$$

Λύση

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1}dx$$

για το

$$\int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1}dx$$

Θέτω x=εφθ , dx=$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}d\theta$

Για x=t→θ=$\varepsilon\varphi^{-1}t$

Για x=0→θ=0

$$\int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{0}^{\varepsilon\varphi^{-1}t} \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\theta+1}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}d\theta = \int_{0}^{\varepsilon\varphi^{-1}t} d\theta = \varepsilon\varphi^{-1}t$$

Οπότε

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\varepsilon\varphi^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty}\varepsilon\varphi^{-1}t = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Άρα I=$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

<u>Παρατήρηση</u>

Όταν ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα ισούται με L$\in R$ λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν δεν υπάρχει ή ισούται με $\pm\infty$ τότε αποκλίνει (πολλοί συγγραφείς χωρίζουν την περίπτωση που το αποτέλεσμα είναι $\pm\infty$ λέγοντας ότι απειρίζεται από την περίπτωση που το γενικευμένο δεν υπάρχει οπότε λένε ότι δεν συγκλίνει)

Κριτήρια σύγκλισης Γενικευμένων

1° Αν $0 \le f(x) \le g(x)$ τότε:

Αν το

$$\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ συγκλίνει τότε συγκλίνει και το } \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$$

Αν το

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ αποκλίνει τότε αποκλίνει και το } \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το συγκλίνει το

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Λύση

Για κάθε x$\in [1,+\infty)$ $είναι\ 0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ και

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{t}}\right]=\frac{1}{e}$$

άρα συγκλίνει το

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$$

Οπότε συγκλίνει και το

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^{2}}dx$$

2ο Αν $0 \le f(x)\ \kappa\alpha\iota\ 0 < g(x)$ **για x>0 και**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \ge 0 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$$

<u>Αν 0<Α∈ R τότε</u>

$$\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota$$

Αν Α=0

$$\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota \Rightarrow \tau o \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota$$

Αν Α=∞ τότε:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx = +\infty$$

3° (Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy)

Αν $\mathbf{0 < f(x)}$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota\ f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o}$ $[\alpha, +\boldsymbol{\infty})$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)dx\ \ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota} \Leftrightarrow \sum_{\alpha}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\ \ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota}$$

Σχόλιο *: Η παραπάνω πρόταση διευκολύνει κυρίως την μελέτη σύγκλισης σειρών μέσω ολοκληρωμάτων*

<u>Παράδειγμα</u>

Να μελετήσετε την σύγκλιση της σειράς :

$$\sum_{1}^{\infty} n^{a}$$

Λύση

- Αν α ≥ 0 τότε η ακολουθία $\alpha_n = n^a \nrightarrow 0$ οπότε η σειρά αποκλίνει
- Αν α < 0 τότε $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{k\to+\infty}}$ $\boldsymbol{[\frac{x^{a+1}}{a+1}]_1^k, a \neq -1}$

$\mathbf{lim}_{\boldsymbol{\kappa\to+\infty}}\boldsymbol{[lnx]_1^{\infty}},$

$$\int_{1}^{+\infty} \boldsymbol{x^a dx} = \left\{ \begin{matrix} \lim\limits_{k\to+\infty} [\boldsymbol{\frac{x^{a+1}}{a+1}}]_1^k, \boldsymbol{a \neq -1} \\ \boldsymbol{\acute{\eta}} \\ \lim\limits_{\kappa\to+\infty} [\boldsymbol{lnx}]_1^{\infty}, \boldsymbol{\alpha = -1} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} +\infty, \mathbf{0} > \alpha > -\mathbf{1} \\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}, \boldsymbol{\alpha} < -\mathbf{1} \\ +\infty, \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{1} \end{matrix} \right\}$$

Τελικά   το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο αν α<-1 επομένως μόνο για α <-1 η σειρά

$$\sum_{1}^{\infty} n^{a} \text{ συγκλίνει αλλιώς αποκλίνει}$$

4° απόλυτη σύγκλιση ⇒ σύγκλιση

$$\boldsymbol{A\nu \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|dx \text{ συγκλίνει} \Rightarrow \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει}}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> δεν ισχύει το αντίστροφο δηλαδή μπορεί

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει ενώ}}$$

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|dx \text{ δεν συγκλίνει}}$$

Π.χ. το

$$\boldsymbol{\int_{0}^{+\infty} \frac{\eta\mu x}{x}dx \text{ συγκλίνει ενώ} \int_{0}^{+\infty} \frac{|\eta\mu x|}{x}dx \text{ δεν συγκλίνει}}$$

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ</u>

Αναζητούμε μια συνάρτηση y (όχι το συνηθισμένο f) που εμπλέκονται παράγωγοι

1° <u>Χωριζόμενων μεταβλητών</u>

(είναι αυτές που μπορούν να μαζευτούν από μία μεριά τα x και από άλλη μεριά τα ψ)

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Να λυθεί η xdx+ydy=o (1)

(1) xdx=-ydy

$$\int \mathrm{xdx} = -\int \mathrm{ydy} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + c \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 2c, c \geq 0$$

Άρα $y = \sqrt{2c - x^2}\,, y = -\sqrt{2c - x^2, \ldots}$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

$y\,' = y^2 e^{-x}$ καταρχήν η y = 0 την επαληθεύει

Για $y \neq 0$ έχουμε

$$y\,'\frac{1}{y^2} = e^{-x} \rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{1}{y^2} = e^{-x} \rightarrow \frac{1}{y^2}dy = e^{-x}dx$$

$\int \frac{1}{y^2} dy = \int e^{-x} dx \to \int y^{-2} dy = \int e^{-x} dx \to$

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + c \to y = \frac{1}{e^{-x} - c}$$

<u>Παράδειγμα 3ο</u>

y΄=(y+1)χ,   y(0)=1

$$\frac{dy}{dx} = (\mathrm{y} + 1)\chi \to \frac{1}{\mathrm{y} + 1}\mathrm{dy} = \mathrm{xdx} \to$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{y} + 1}\mathrm{dy} = \int \mathrm{xdx} \to \ln|\mathrm{y} + 1| = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + \mathrm{c}$$

Για χ=0 είναι $\ln|2| = \frac{1}{2}0^2 + \mathrm{c} \to c = \ln 2$

Άρα $\ln|\mathrm{y} + 1| = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + \ln 2 \to y + 1 = e^{\frac{1}{2}x^2 + ln2}$

$= 2e^{\frac{1}{2}x^2} \to y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$

2° <u>Γραμμικές εξισώσεις</u>

Μορφής   y΄+p(t)y=g(t)

Πως λύνω :

Πολ/ζω όλους με e εις την μαμά του p(t)

Δημιουργώ στο πρώτο μέλος το $\left(e^{p(t)}\right)$ ΄

Και βρίσκω ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 1ο

$y\,' + y = e^{-t} \rightarrow$

$y\,'e^{t} + ye^{t} = e^{-t}e^{t} \rightarrow$

$(ye^{t})\,' = 1 \rightarrow ye^{t} = t + c \rightarrow y = \dfrac{t+c}{e^{t}}$

Σειρές πραγματικών αριθμών

Στα μαθηματικά ονομάζουμε **σειρά** το άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας. Οι σειρές διαχωρίζονται σε πεπερασμένες και άπειρες, στις πρώτες έχουν ορισθεί ο πρώτος και ο τελευταίος όρος, ενώ στις άπειρες οι όροι συνεχίζονται επ'αόριστον [1].

Για την ακρίβεια, σειρά ονομάζεται το άθροισμα των όρων μιας άπειρης ακολουθίας

$$s_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

Το παραπάνω το γράφουμε πιο σύντομα χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος Σ

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

Ένα παράδειγμα είναι η μαθηματική αναπαράσταση του παραδόξου της διχοτόμησης του Ζήνωνα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Οι όροι της σειράς συχνά παράγονται σύμφωνα με έναν ορισμένο κανόνα, δηλαδή από κάποιον τύπο ή από έναν αλγόριθμο. Όταν το πλήθος των όρων είναι άπειρο, η έννοια αυτή αποκαλείται μια άπειρη σειρά.

<u>**Κριτήρια σύγκλισης σειρών**</u>

1°. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu$ έχει ελπίδα να συγκλίνει μόνο αν $lim\alpha_\nu = 0$ <u>**(επομένως αν $lim\alpha_\nu \neq 0$ είναι βέβαιο ότι η σειρά δεν συγκλίνει)**</u>

2°. η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

<u>ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ</u> ονομάζεται αρμονική σειρά

3° . Η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$ **<u>συγκλίνει αν ρ>1</u>** και **<u>αποκλίνει αν ρ<1</u>**

Πληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ.

4° . Η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ γεωμετρική σειρά

<u>συγκλίνει μόνο αν</u> $\underline{|\alpha| < 1}$

5°. Αν $0 \leq \alpha_\nu \leq M\beta_\nu \;\; M > 0 \; \tau ó\tau\varepsilon$:

D) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει
E) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty$ συγκλίνει
F) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_\nu = -\infty$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu = -\infty$

6°. Αν $\alpha_\nu , \beta_\nu > 0$ και $lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = k$>0 τότε

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_\nu$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu$

Συγχρόνως συγκλίνουν ή συγχρόνως αποκλίνουν

7° . **Αν** $\boldsymbol{lim \sqrt[n]{|a_n|}} < 1$ **τότε** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu}$ **σίγουρα συγκλίνει**

(αν $lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ δεν συγκλίνει και αν $lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ δεν είμαστε βέβαιοι για τίποτα)

8° . **Αν** $\boldsymbol{lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} < 1$ **τότε** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\nu}$ **σίγουρα συγκλίνει**

(αν $lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$δεν συγκλίνει και αν $lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

δεν είμαστε βέβαιοι για τίποτα)

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Α. Μερικές παράγωγοι

Έστω συνάρτηση f(x, y) δύο μεταβλητών ονομάζω μερική παράγωγο της F ως προς x και συμβολίζω $\frac{\partial f}{\partial x}$ την παράγωγο της f ως προς την μεταβλητή x (το y θεωρείται σταθερός σε αυτή την διαδικασία) . Όμοια ορίζεται η $\frac{\partial f}{\partial y}$

Παράδειγμα

Αν f(x, y)=$3x^2y^3 - 5x^3y^4$ βρείτε : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 - 15x^2y^4$$

$$\text{και} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 20x^3y^3$$

Β. Διαφορικό συνάρτησης

1. Έστω συνάρτηση f(x, y) δύο μεταβλητών τότε ονομάζουμε διαφορικό της f και συμβολίζουμε df το

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Παράδειγμα

Το df της προηγούμενης συνάρτησης

f(x, y)=$3x^2y^3 - 5x^3y^4$

είναι $df = f_x dx + f_y dy =$

=$(6xy^3 - 15x^2y^4)dx + (9x^2y^2 - 20x^3y^3)dy$

2. η παράσταση A(x,y)dx+B(x, y)dy   είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης αν $A_y = B_x$

Παράδειγμα

Να εξετασθεί αν η παράσταση

$(siny - ycosx)dx + (xcowy - sinx)dy$

είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης

Ονομάζω:

A(x,y)= $xcowy - sinx, B(x,y) = xcowy - sinx$

Παρατηρώ :

$A_y = B_x = cosy - sinx$ επομένως η παράσταση είναι ολικό διαφορικό συνάρτησης

<u>Γ. Ακρότατα συνάρτησης</u>

Αν δοθεί μια συνάρτηση f(x, y) δύο μεταβλητών   και ζητηθούν τα ακρότατα της τότε

1ο → βρίσκουμε f_x , f_y

2ο → βρίσκουμε $λύσεις\ των\ εξισόδεων\ f_x = 0$, f_y=0

3ο → Υπολογίζουμε την παράσταση

$Δ = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

4ο → "Ρίχνουμε" στο Δ τις τιμές που βρήκαμε στο 2ο βήμα

Και τώρα αποφασίζουμε :

- **Αν   Δ>ο   και** $f_{xx} < 0$ τότε έχουμε **τ. μέγιστο**
- **Αν   Δ>ο   και** $f_{xx} > 0$τότε έχουμε **τ. ελάχιστο**

- **Αν Δ<0** έχουμε **σαγματικό σημείο**
- **Αν Δ=0 Τότε δεν προκύπτει συμπέρασμα**

Παράδειγμα

Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

f(x, y)= $\boldsymbol{x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y}$

Λύση

$\boldsymbol{f_x = 2x + y - 3}$, $\boldsymbol{f_y = x + 2y - 6}$,

$\boldsymbol{f_{xx} = 2}$, $\boldsymbol{f_{yy} = 2}$, $\boldsymbol{f_{xy} = 1}$

Εξετάζω πότε

$$\begin{Bmatrix} f_x = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ f_y = 0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x + y - 3 = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x + 2y - 6 = 0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ y = 3 \end{Bmatrix}$$

Στο σημείο (0,3) έχουμε

$\boldsymbol{\Delta = f_{xxf_{yy}} - (f_{xy})^2 = 3} > 0$

Επειδή **Δ>0 και** $\boldsymbol{f_{xx}} > 0$ **η f στο σημείο (0,3) έχει τ.ε.**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ

Αναζητούμε μια συνάρτηση y (όχι το συνηθισμένο f) που ικανοποιεί μια σχέση που εμπλέκονται παράγωγοι .

1^o Χωριζόμενων μεταβλητών

(είναι αυτές που μπορούν να μαζευτούν από την μία μεριά τα x και από άλλη μεριά τα ψ)

Παράδειγμα 1ο

Να λυθεί η

xdx+ydy=o

xdx=-ydy

$$\int \mathrm{xdx} = -\int \mathrm{ydy} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + c \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 2c, c \geq 0$$

Άρα $y = \sqrt{2c - x^2}\,, y = -\sqrt{2c - x^2, \dots}$

Παράδειγμα 2ο

$y' = y^2 e^{-x}$ καταρχήν η y = 0 την επαληθεύει

Για $y \neq 0$ έχουμε

$$y'\frac{1}{y^2} = e^{-x} \rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{1}{y^2} = e^{-x} \rightarrow \frac{1}{y^2}dy = e^{-x}dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int e^{-x}dx \rightarrow \int y^{-2}dy = \int e^{-x}dx \rightarrow$$

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + c \rightarrow y = \frac{1}{e^{-x} - c}$$

Παράδειγμα 3ο

y΄=(y+1)x, y(0)=1

$$\frac{dy}{dx} = (\mathrm{y} + 1)x \rightarrow \frac{1}{\mathrm{y} + 1}\mathrm{dy} = \mathrm{xdx} \rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y+1}dy = \int xdx \rightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Για χ=0 είναι $\ln|2| = \frac{1}{2}0^2 + c \rightarrow c = \ln 2$

Άρα $\ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 \rightarrow y + 1 = e^{\frac{1}{2}x^2 + ln2}$

$= 2e^{\frac{1}{2}x^2} \rightarrow y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$

2ο <u>Γραμμικές εξισώσεις</u>

Α) Μορφής y΄+p(t)y=g(t)

Πως λύνω :

Πολλαπλασιάζω όλους με e εις την «μαμά» του p(t)

Δημιουργώ στο πρώτο μέλος το $\left(e^{p(t)}\right)'$

Και βρίσκω ολοκλήρωμα

Παράδειγμα 1ο

$\mathbf{y' + y = e^{-t} \rightarrow}$

$\mathbf{y'e^t + ye^t = e^{-t}e^t \rightarrow}$

$\mathbf{(ye^t)' = 1 \rightarrow ye^t = t + c \rightarrow y = \frac{t+c}{e^t}}$