

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 11

Ακολουθίες Cauchy.

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) είναι ακολουθία Cauchy εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ όταν $n, m > N$.
Ακολουθίες Cauchy

Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να βρούμε ένα σημείο (ένα όρο) στην ακολουθία, πέρα από το οποίο κάθε δύο όροι της ακολουθίας απέχουν λιγότερο από ε .

Πρόβλημα 11.1 Δείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι ακολουθία Cauchy.

Πρόβλημα 11.2 Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$.

Η σημασία της ιδιότητας Cauchy οφείλεται στο ότι ισχύει και το αντίστροφο: η ιδιότητα Cauchy εξασφαλίζει τη σύγκλιση μιας ακολουθίας χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το συγκεκριμένο όριο.

Θεώρημα Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Πρόβλημα 11.3 Θα αποδείξουμε το Θεώρημα.

α'. Δείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

β'. Δείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{n_i}) \rightarrow a$.

γ'. Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα για να δείξετε ότι $(a_n) \rightarrow a$.

Ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα

Ορισμός Ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A είναι

- **άνω φραγμένο** εάν υπάρχει αριθμός U τέτοιος ώστε $a \leq U$ για κάθε $a \in A$. U είναι **άνω φράγμα** του A .
- **κάτω φραγμένο** εάν υπάρχει αριθμός L τέτοιο ώστε $a \geq L$ για κάθε $a \in A$. L είναι **κάτω φράγμα** του A .
- **φραγμένο** εάν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.

Παράδειγμα Το σύνολο $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο εφόσον $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ για κάθε n .

Ορισμός Ένας αριθμός u είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** του A εάν
 Ελάχιστο άνω φράγμα 1) u είναι άνω φράγμα του A
 Μέγιστο κάτω φράγμα και 2) εάν U είναι άνω φράγμα του A , τότε $u \leq U$.

Ένας αριθμός l είναι **μέγιστο κάτω φράγμα** του A εάν
 1) l είναι κάτω φράγμα του A
 και 2) εάν L είναι κάτω φράγμα του A , τότε $l \geq L$.

Πρόβλημα 11.4 Δείξτε ότι ένα σύνολο A δεν μπορεί να έχει περισσότερα από ένα ελάχιστο άνω φράγμα και ένα μέγιστο κάτω φράγμα.

Συμβολισμός Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου A το συμβολίζουμε $\sup A$.
 Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου A το συμβολίζουμε $\inf A$.

Πρόβλημα 11.5 Ελέγξτε ότι 0 είναι κάτω φράγμα, και 2 είναι άνω φράγμα για κάθε ένα από τα σύνολα

$$\alpha'. \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\beta'. \{x \mid 0 < x < 1\}$$

$$\gamma'. \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\delta'. \{2 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\epsilon'. \{1 + (-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\zeta'. \{q \mid q^2 < 2, q \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Για ποιά από τα σύνολα μπορείτε να βρείτε ένα κάτω φράγμα μεγαλύτερο από το 0 και/ή ένα άνω φράγμα μικρότερο από το 2;

Βρείτε το μεγαλύτερο κάτω φράγμα και το μικρότερο άνω φράγμα για το κάθε σύνολο.

Μπορεί το μικρότερο άνω φράγμα ή το μεγαλύτερο κάτω φράγμα ενός συνόλου A να ανήκει στο σύνολο;

Πρέπει υποχρεωτικά να ανήκει στο σύνολο A το μικρότερο άνω φράγμα και το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A ;

Πρόβλημα 11.6 1) Υποθέστε ότι το σύνολο A έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\inf A \leq a < \inf A + \varepsilon$. Τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από αυτό το αποτέλεσμα;

2) Εάν ℓ είναι κάτω φράγμα του συνόλου A , και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\ell \leq a < \ell + \varepsilon$, δείξτε ότι $\ell = \inf A$.

Θεώρημα Κάθε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών που είναι κάτω φραγμένο έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα.

Πρόβλημα 11.7 Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω απόδειξη του Θεωρήματος. Υποθέστε ότι A είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο, και ότι x_1 είναι ένα κάτω φράγμα του A . Έστω a ένα στοιχείο του A .

α'. Βρείτε έναν αριθμό y_1 που δεν είναι κάτω φράγμα του A .

Ορίστε αναδρομικά δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n) , με το ακόλουθο τρόπο. Για κάθε n , ορίζουμε $h_n = \frac{x_n + y_n}{2}$. Τότε

$$x_{n+1} = \begin{cases} h_n & \text{εάν } h_n \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \\ x_n & \text{εάν } h_n \text{ δεν είναι κάτω φράγμα του } A \end{cases}$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n & \text{εάν } h_n \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \\ h_n & \text{εάν } h_n \text{ δεν είναι κάτω φράγμα του } A \end{cases}$$

Εξ ορισμού, κάθε x_n είναι κάτω φράγμα του A και κανένα y_n δεν είναι κάτω φράγμα του A .

β'. Δείξτε ότι $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}} > 0$.

γ'. Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και ότι η (y_n) είναι φθίνουσα.

δ'. Δείξτε ότι και οι δύο ακολουθίες είναι φραγμένες.

Επεται από το αξίωμα της πληρότητας ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν.

ε'. Δείξτε ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

ς'. Δείξτε ότι ℓ είναι κάτω φράγμα του A .

ζ'. Δείξτε ότι εάν L είναι ένα κάτω φράγμα του A , τότε $L \leq \ell$.

Συμπεραίνουμε ότι $\ell = L$.

Πρόβλημα 11.8 Υποθέτουμε ότι A είναι μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, που έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf A$. Ορίζουμε το σύνολο $-A = \{-a : a \in A\}$. Δείξτε ότι $-A$ είναι ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, που έχει ελάχιστο άνω φράγμα, και ότι $\sup(-A) = -\inf A$.

Θεώρημα Κάθε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών που είναι άνω φραγμένο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.