ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Εαρινό Εξάμηνο 2011-12**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης**

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 7

Πράξεις με όρια

Θεώρημα Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to a$ και $(b_n) \to b$. Τότε

$(ca_n + db_n) \to ca + db$ **Κανόνας Αθροίσματος** για ακολουθίες

$(a_n b_n) \to ab$ **Κανόνας Γινομένου** για ακολουθίες

εάν $b \neq 0$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$ **Κανόνας Πηλίκου** για ακολουθίες

Ενας άλλος τρόπος να διατυπώσουμε αυτούς τους κανόνες είναι συχνά πιο πρακτικός

Εάν οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν, τότε

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n + db_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n + d\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

και εάν $\lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}$$

Προσέξτε οτι απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύουν οι παραπάνω ισότητες, είναι να υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to\infty} a_n$ και $\lim_{n\to\infty} b_n$. Εάν αυτά δεν υπάρχουν, τα όρια στα αριστερά των παραπάνω ισοτήτων μπορεί να υπάρχουν, αλλά προφανώς τότε δεν ισχύει η ισότητα.

Παράδειγμα Εάν $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$, τότε τα όρια $\lim_{n\to\infty} a_n$ και $\lim_{n\to\infty} b_n$ δεν υπάρχουν, αλλά $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

Αυτές οι ισότητες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τα όρια πολλών ακολουθιών.

Παράδειγμα Κάθε σύμβολο = σημαίνει '*εφ' όσον υπάρχουν τα όρια στα δεξιά του =, τότε υπάρχουν και τα όρια στα αριστερά, και οι δύο εκφράσεις είναι ίσες*'. Με εξαντλητική λεπτομέρεια, θα γράφαμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(6n-1)}{2n^3+5} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(6-\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{5}{n^3}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(6-\frac{1}{n}\right)\right]}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n^3}\right)} \qquad \text{από τον Κανόνα Πηλίκου} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n^3}\right)} \qquad \text{από τον Κανόνα Γινομένου} \\
&= \frac{\left(1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(6-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2+5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)} \qquad \text{από τον Κανόνα Αθροίσματος} \\
&= \frac{(1+0)(6+0)}{2+0} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Αν δεν σας ζητείται να αναφέρετε που χρησιμοποιείτε κάθε κανόνα, θα γράφατε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(6n-1)}{2n^3+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(6-\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{5}{n^3}} = \frac{(1+0)(6+0)}{2+0} = 3$$

ή

$$\frac{(n^2+1)(6n-1)}{2n^3+5} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(6-\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{5}{n^3}} \to \frac{(1+0)(6+0)}{2+0} = 3$$

Πρόβλημα 7.1 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα αθροίσματος για τις μηδενικές ακολουθίες για να αποδείξετε τον κανόνα αθροίσματος για ακολουθίες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρόβλημα 7.2 Δείξτε οτι

$$(a_n-a)(b_n-b)+a(b_n-b)+b(a_n-a)=a_nb_n-ab$$

και χρησιμοποιήστε αυτήν την ταυτότητα και τους κανόνες για μηδενικές ακολουθίες, για να αποδείξετε τον κανόνα γινομένου για ακολουθίες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κανόνας Πηλίκου Εάν $(a_n) \to a$ και $(b_n) \to b \neq 0$, τότε $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$.

Πρόβλημα 7.3 Γράψτε την απόδειξη του κανόνα πηλίκου στον παρακάτω χώρο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα ακόλουθα βήματα:

1. Παρατηρήστε οτι $(bb_n) \to b^2$, και δείξτε οτι $bb_n > \frac{b^2}{2}$ για αρκετά μεγάλο n.
2. Δείξτε οτι, τελικά, $0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{b^2} \cdot |b - b_n|$, και συνεπώς $\left(\frac{1}{b_n}\right) \to \frac{1}{b}$.
3. Συμπεράνετε οτι $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρόβλημα 7.4 Βρείτε το όριο των παρακάτω ακολουθιών.

(α′) $\frac{3n^2+2}{4n^2-3n}$ (β′) $\frac{2^n-1}{2^n+1}$

(γ′) $\frac{(\sqrt{n}+3)(\sqrt{n}-1)}{3\sqrt{n}-5n}$ (δ′) $\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

Αλλα χρήσιμα αποτελέσματα

Θεώρημα
Θεώρημα Παρεμβολής για ακολουθίες

Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to \ell$ και $(b_n) \to \ell$. Εάν, τελικά, $a_n \leq c_n \leq b_n$ τότε $(c_n) \to \ell$.

Πρόβλημα 7.5 Αποδείξτε το Θεώρημα Παρεμβολής για ακολουθίες.

Λήμμα
Κανόνας Απολύτου Τιμής

Εάν $(a_n) \to a$ τότε $(|a_n|) \to |a|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Γνωρίζουμε οτι $(a_n - a)$ είναι μηδενική, και συνεπώς $(|a_n - a|)$ είναι μηδενική. Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα, $0 \leq \big|\,|a_n| - |a|\,\big| \leq |a_n - a|$. Αρα, από το Θεώρημα Παρεμβολής, $(||a_n| - |a||) \to 0$, και συνεπώς $(|a_n| - |a|) \to 0$. Επεται οτι $(|a_n|) \to |a|$.

Πρόβλημα 7.6 Βρείτε ένα παράδειγμα που δείχνει οτι η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει οτι εάν μια ακολουθία συγκλίνει τελικά, τότε συγκλίνει. Αρα μπορούμε να συμπληρώσουμε ή να διαγράψουμε οποιοδήποτε *πεπερασμένο* πλήθος όρων στην αρχή της ακολουθίας, χωρίς να αλλάξουμε τις ιδιότητες σύγκλισης της άπειρης ουράς της.

Θεώρημα Εστω N φυσικός αριθμός. Τότε η ακολουθία (a_n) τείνει στο a εάν και μόνον εάν η ακολουθία (a_{N+n}) τείνει στο a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εάν $(a_n) \to a$ γνωρίζουμε οτι υπάρχει N_1 τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ όταν $n > N_1$. Οταν $n > N_1$, τότε $N + n > N_1$, και συνεπώς $|a_{N+n} - a| < \varepsilon$. Αρα $(a_{N+n}) \to a$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε οτι $(a_{N+n}) \to a$. Τότε υπάρχει N_2 τέτοιο ώστε $|a_{N+n} - a| < \varepsilon$ όταν $n > N_2$. Οταν $n > N + N_2$, $n - N > N_2$. Συνεπώς $|A - n - a| = |a_{N+(n-N)} - a| < \varepsilon$. Αρα $(a_n) \to a$.

Παράδειγμα Γνωρίζουμε οτι $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, άρα $\left(\frac{1}{n+5}\right) \to 0$.

Πρόβλημα 7.7 Αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο: $(a_n) \to \infty$ εάν και μόνον εάν $(a_{N+n}) \to \infty$.

Δυνάμεις και Ρίζες

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των τελευταίων παραγράφων (συχνά και κάποια δόση πονηριάς) για να αποδείξουμε διάφορα ενδιαφέροντα αποτελέσματα για ακολουθίες με δυνάμεις και ρίζες.

Λήμμα Εάν $x > 0$ τότε $(x^{1/n}) \to 1$.

Πρόβλημα 7.8 Χρησιμοποιήστε τα ακόλουθα βήματα για να αποδείξετε το Λήμμα:

1. Πρώτα υποθέστε οτι $x \geq 1$, και συμπεράνετε οτι $x^{1/n} \geq 1$.
2. Θέσατε $a_n = x^{1/n} - 1$ και χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε οτι $x \geq 1 + na_n$.
3. Δείξτε οτι $(a_n) \to 0$.
4. Συμπεράνετε οτι $\left(x^{1/n}\right) \to 1$ όταν $x \geq 1$.
5. Τέλος δείξτε οτι $\left(x^{1/n}\right) \to 1$ και όταν $0 \leq x < 1$.

Λήμμα $\left(n^{1/n}\right) \to 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του προηγούμενου Λήμματος, αλλά πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί, και να δείξουμε πρώτα οτι $(n^{1/2n}) \to 1$.

Εφόσον $n \geq 1$, έχουμε $n^{1/2n} \geq 1$. Αρα

$$\sqrt{n} = \left(n^{1/2n}\right)^n = \left(1 + (n^{1/2n} - 1)\right)^n \geq 1 + n(n^{1/2n} - 1) > n(n^{1/2n} - 1)$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli. Αναδιατάσσουμε και έχουμε $1 \leq n^{1/2n} < \frac{1}{\sqrt{n}} + 1$. Από το Θεώρημα Σάντουιτς, $(n^{1/2n}) \to 1$. Αρα $\left(n^{1/n}\right) = \left(n^{1/2n}\right)^2 \to 1$ από τον Κανόνα Γινομένου.

Τι συμβαίνει εάν γράψουμε $n = \left(n^{1/n}\right)^n = \left(1 + (n^{1/n} - 1)\right)^n$ και εφαρμόσουμε την ανισότητα Bernoulli;

Λήμμα $(x^n) \to \begin{cases} \infty & \text{εάν } x > 1 \\ 1 & \text{εάν } x = 1 \\ 0 & \text{εάν } -1 < x < 1 \end{cases}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εάν $x > 1$ τότε $x^n = (1 + (x-1))^n \geq 1 + n(x-1)$, άρα $(x^n) \to \infty$.
Εάν $x = 1$ τότε $x^n = 1$ για κάθε n, άρα $(x^n) \to 1$.
Εάν $x = 0$ τότε $x^n = 0$ για κάθε n, άρα $(x^n) \to 0$.
Εάν $|x| < 1$ και $x \neq 0$ τότε $\frac{1}{|x|} > 1$, άρα $\left(\left(\frac{1}{|x|}\right)^n\right) \to \infty$. Επεται οτι $(|x^n|) = \left(\frac{1}{\frac{1}{|x|^n}}\right) \to 0$ και άρα $(x^n) \to 0$.

Πρόβλημα 7.9 Δείξτε οτι $(n^x) \to \begin{cases} \infty & \text{εάν } x > 0 \\ 1 & \text{εάν } x = 0 \\ 0 & \text{εάν } x < 0 \end{cases}$

Πρόβλημα 7.10 Βρείτε το όριο της ακολουθίας $(x^n + y^n)^{1/n}$ όταν $0 \leq x \leq y$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Παρεμβολής).

Το πρόβλημα 7.10 να παραδοθεί για διόρθωση, στην αρχή του επόμενου εργαστηρίου.

Quiz Ο καθηγητής φθάνει καθυστερημένος στην τάξη, και κοιτάει το ρολόι του. ''Πρέπει να το διορθώσω'' λέει. ''Εχω προσέξει οτι ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης συναντώνται ακριβώς κάθε 65 λεπτά''. Το ρολόι του πηγαίνει μπρός ή πίσω, και πόσο κάθε ώρα;