

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 6

Μηδενικές Ακολουθίες (συνέχεια)

Θεώρημα Υποθέστε ότι $(a_n) \rightarrow 0$ και $(c_n) \rightarrow 0$. Εάν, τελικά, $a_n \leq b_n \leq c_n$, τότε $(b_n) \rightarrow 0$.
(Θεώρημα Παρεμβολής (Θεώρημα Σάντουιτς))

Τα επόμενα προβλήματα μας βοηθούν να κατασκευάσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος Παρεμβολής.

Παραδείγματα Προφανώς $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Συνεπώς $(\frac{1}{n+1}) \rightarrow 0$.
Επίσης $0 \leq \frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n}$. Συνεπώς $(\frac{1}{n^{3/2}}) \rightarrow 0$.
Εάν

$$c_n = \begin{cases} 2^n & \text{εάν } n < 10^8 \\ \frac{(-1)^n}{n^2} & \text{εάν } n \geq 10^8 \end{cases}$$

τότε, τελικά, $-\frac{1}{n} \leq c_n \leq \frac{1}{n}$, και συνεπώς $(c_n) \rightarrow 0$.

Πρόβλημα 6.1 Εάν (a_n) είναι μία μηδενική ακολουθία και $0 \leq b_n \leq a_n$, δείξτε ότι η ακολουθία (b_n) είναι μηδενική.

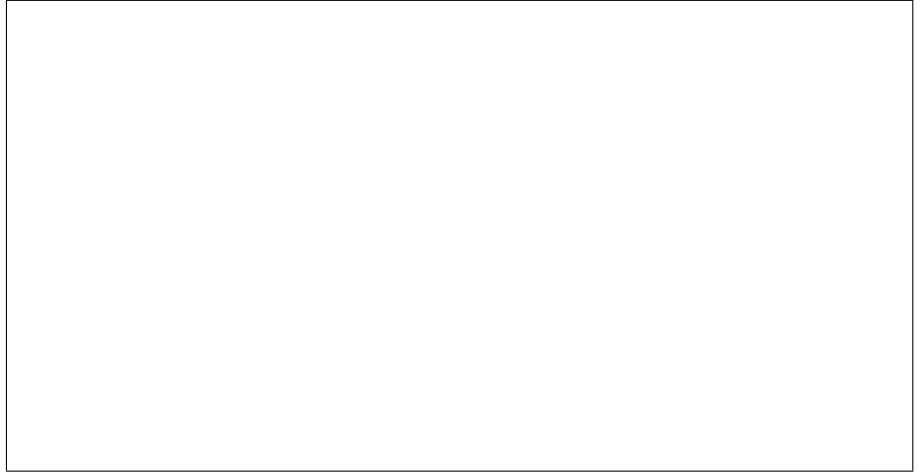
Πρόβλημα 6.2 Εάν (a_n) και (c_n) είναι μηδενικές ακολουθίες, και $a_n \leq b_n \leq c_n$, Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα που έχετε στο Φυλλάδιο 5 και το Πρόβλημα 6.1, για να

1. εξηγήσετε γιατί η ακολουθία $(c_n - a_n)$ είναι μηδενική
2. εξηγήσετε γιατί η ακολουθία $(b_n - a_n)$ είναι μηδενική
3. και τελικά να εξηγήσετε γιατί η ακολουθία b_n είναι μηδενική.

Πρόβλημα 6.3 Χρησιμοποιήστε τα δύο προηγούμενα προβλήματα για να κατασκευάσετε απόδειξη του Θεωρήματος Παρεμβολής με την υπόθεση ότι $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε n .

Τέλος, αποδείξτε το Θεώρημα με την υπόθεση ότι τελικά $a_n \leq b_n \leq c_n$. Γράψτε αυτή την απόδειξη στον παρακάτω χώρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Πρόβλημα 6.4 Αποδείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες τείνουν στο μηδέν, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα και ακολουθίες που ήδη γνωρίζετε ότι είναι μηδενικές. Αναφέρατε πού χρησιμοποιείτε τους Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου και το Θεώρημα Παρεμβολής.

$$(\alpha') \quad \left(\frac{n^2+2n+3}{n^3} \right) \quad (\beta') \quad \left(\frac{\sin n}{n} \right)$$

$$(\gamma') \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (\delta') \quad \left(\frac{n!}{n^n} \right)$$

Συγκλίνουσες Ακολουθίες

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) **τείνει στο a** εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N , τέτοιος ώστε, για κάθε $n > N$, ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$. Συγκλίνουσα ακολουθία

Συμβολισμός Θα δείτε όλους τους ακόλουθους συμβολισμούς για τη φράση (a_n) **τείνει στο a** :

$$(a_n) \rightarrow a \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow a \text{ καθώς } n \rightarrow \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Λέμε επίσης ότι (a_n) **συγκλίνει στο a** , ή ότι το **όριο** της ακολουθίας (a_n) καθώς το n τείνει στο ∞ είναι a .

Παράδειγμα Δείξτε ότι $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right) \rightarrow 1$:
Για κάθε $\varepsilon > 0$ διαλέγουμε ένα φυσικό αριθμό $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Όταν $n > N$,
 $|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Τα επόμενα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι συγκλίνουσες ακολουθίες και οι μηδενικές ακολουθίες είναι στενά συνδεδεμένες.

Λήμμα $(a_n) \rightarrow a$ εάν και μόνον εάν $(a_n - a) \rightarrow 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Γνωρίζουμε ότι $(a_n - a) \rightarrow 0$ σημαίνει: Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ όταν $n > N$. Αλλά αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της $(a_n) \rightarrow a$.

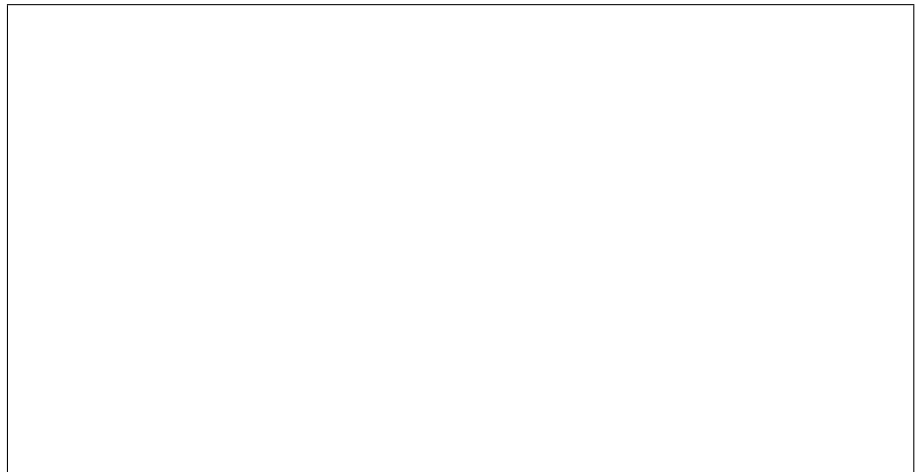
Μιλήσαμε για **το** όριο μιας ακολουθίας, αλλά μήπως μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα. Θα δείξουμε ότι το όριο, εάν υπάρχει είναι μοναδικό.

Θεώρημα Μια ακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει σε περισσότερα από ένα όρια.
Μοναδικότητα ορίου

Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα και χρησιμοποιήστε το για να γράψετε στον παρακάτω χώρο την απόδειξη του Θεωρήματος.

Πρόβλημα 6.5 Εάν $(a_n - a)$ είναι μηδενική ακολουθία και $(a_n - b)$ είναι μηδενική ακολουθία, δείξτε ότι $a = b$, εξετάζοντας τη διαφορά των δύο μηδενικών ακολουθιών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θεώρημα Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη
Ύπαρξη φράγματος

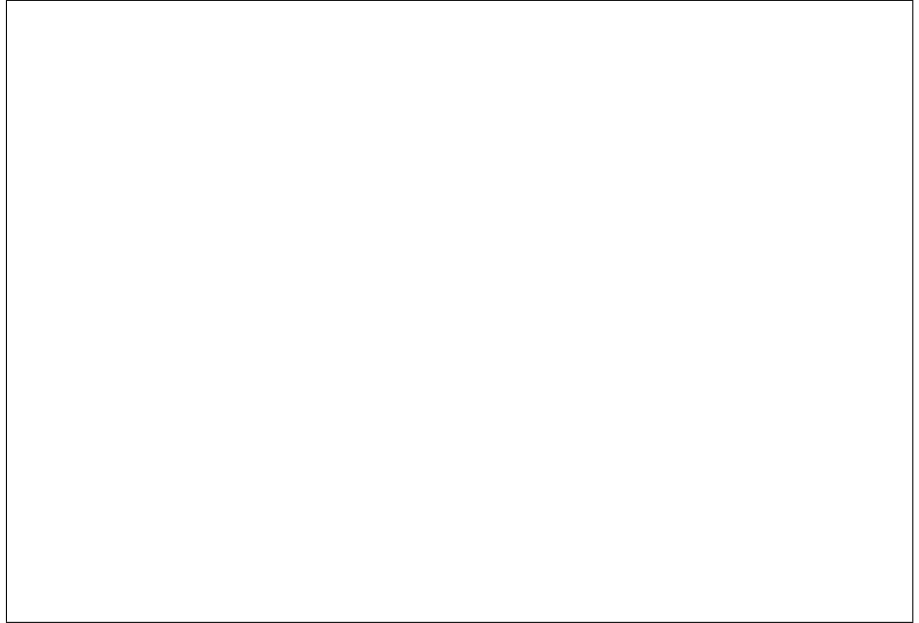
Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα και χρησιμοποιήστε το για να γράψετε στον παρακάτω χώρο την απόδειξη του Θεωρήματος.

Πρόβλημα 6.6 Αποδείξτε ότι, εάν $(a_n) \rightarrow a$, τότε η ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη από το $a + 1$ και τελικά κάτω φραγμένη από το $a - 1$. (Υπόδειξη: θέσατε $\varepsilon = 1$).

Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Φυλλαδίου 3, για να συμπεράνετε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι μία φραγμένη ακολουθία δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

**Απάντηση στο
Πρόβλημα του
Φυλλαδίου 4**

Αποδείξτε ότι εάν $(a_n) \rightarrow \infty$ και $(b_n) \rightarrow \infty$, τότε $(a_n + b_n) \rightarrow \infty$.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό C , υπάρχει φυσικός αριθμός K τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό $n > K$, ισχύει $a_n + b_n > C$. Δηλαδή πρέπει να αρχίσουμε θεωρώντας έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό C , και να εξηγήσουμε πώς θα βρούμε τον κατάλληλο φυσικό αριθμό K για τον οποίο ισχύει η συνθήκη.

Έστω ένας πραγματικός αριθμός C .

Αφού η ακολουθία $(a_n) \rightarrow \infty$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός K_1 τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό $n > K_1$, ισχύει $a_n > C/2$.

Παρόμοια, αφού η ακολουθία $(b_n) \rightarrow \infty$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός K_2 τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό $n > K_2$, ισχύει $b_n > C/2$.

Θέτουμε $K = \max\{K_1, K_2\}$. Εάν $n > K$, τότε $n > K_1$ και $n > K_2$, και συνεπώς $a_n > C/2$ και $b_n > C/2$. Άρα

$$a_n + b_n > C.$$

Πρόβλημα 6.7 Αποδείξτε, με ανάλογο τρόπο, ότι εάν $a_n \rightarrow \infty$ και $c < 0$, τότε $(c \cdot a_n) \rightarrow -\infty$.