ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Εαρινό Εξάμηνο 2011-12**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης**

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 6

Μηδενικές Ακολουθίες (συνέχεια)

Θεώρημα
Θεώρημα Παρεμβολής
(Θεώρημα Σάντουιτς)

Υποθέστε οτι $(a_n) \to 0$ και $(c_n) \to 0$. Εάν, τελικά, $a_n \leq b_n \leq c_n$, τότε $(b_n) \to 0$.

Τα επόμενα προβλήματα μας βοηθούν να κατασκευάσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος Παρεμβολής.

Παραδείγματα Προφανώς $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Συνεπώς $\left(\frac{1}{n+1}\right) \to 0$.
Επίσης $0 \leq \frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n}$. Συνεπώς $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \to 0$.
Εάν

$$c_n = \begin{cases} 2^n & \text{εάν } n < 10^8 \\ \frac{(-1)^n}{n^2} & \text{εάν } n \geq 10^8 \end{cases}$$

τότε, τελικά, $-\frac{1}{n} \leq c_n \leq \frac{1}{n}$, και συνεπώς $(c_n) \to 0$.

Πρόβλημα 6.1 Εάν (a_n) είναι μία μηδενική ακολουθία και $0 \leq b_n \leq a_n$, δείξτε ότι η ακολουθία (b_n) είναι μηδενική.

Πρόβλημα 6.2 Εάν (a_n) και (c_n) είναι μηδενικές ακολουθίες, και $a_n \leq b_n \leq c_n$, Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα που έχετε στο Φυλλάδιο 5 και το Πρόβλημα 6.1, για να

1. εξηγήσετε γιατί η ακολουθία $(c_n - a_n)$ είναι μηδενική
2. εξηγήσετε γιατί η ακολουθία $(b_n - a_n)$ είναι μηδενική
3. και τελικά να εξηγήσετε γιατί η ακολουθία b_n είναι μηδενική.

Πρόβλημα 6.3 Χρησιμοποιήστε τα δύο προηγούμενα προβλήματα για να κατασκευάσετε απόδειξη του Θεωρήματος Παρεμβολής με την υπόθεση οτι $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε n.
Τέλος, αποδείξτε το Θεώρημα με την υπόθεση οτι *τελικά* $a_n \leq b_n \leq c_n$. Γράψτε αυτή την απόδειξη στον παρακάτω χώρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρόβλημα 6.4 Αποδείξτε οτι οι παρακάτω ακολουθίες τείνουν στο μηδέν, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα και ακολουθίες που ήδη γνωρίζετε οτι είναι μηδενικές. Αναφέρατε πού χρησιμοποιείτε τους Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου και το Θεώρημα Παρεμβολής.

(α′) $\left(\frac{n^2+2n+3}{n^3}\right)$ (β′) $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$

(γ′) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (δ′) $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

Συγκλίνουσες Ακολουθίες

Ορισμός
Συγκλίνουσα ακολουθία

Μια ακολουθία (a_n) **τείνει στο** a εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N, τέτοιος ώστε, για κάθε $n > N$, ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

Συμβολισμός Θα δείτε όλους τους ακόλουθους συμβολισμούς για τη φράση (a_n) *τείνει στο a*:

$$(a_n) \to a \quad \text{ή} \quad a_n \to a \text{ καθώς } n \to \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Λέμε επίσης οτι (a_n) **συγκλίνει στο** a, ή οτι το **όριο** της ακολουθίας (a_n) καθώς το n τείνει στο ∞ είναι a.

Παράδειγμα Δείξτε οτι $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right) \to 1$:
Για κάθε $\varepsilon > 0$ διαλέγουμε ένα φυσικό αριθμό $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Οταν $n > N$, $|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Τα επόμενα αποτελέσματα δείχνουν οτι οι συγκλίνουσες ακολουθίες και οι μηδενικές ακολουθίες είναι στενά συνδεδεμένες.

Λήμμα $(a_n) \to a$ εάν και μόνον εάν $(a_n - a) \to 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Γνωρίζουμε οτι $(a_n - a) \to 0$ σημαίνει: Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ όταν $n > N$. Αλλά αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της $(a_n) \to a$.

Μιλήσαμε για **το** όριο μιας ακολουθίας, αλλά μήπως μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα. Θα δείξουμε οτι το όριο, εάν υπάρχει είναι μοναδικό.

Θεώρημα
Μοναδικότητα ορίου

Μια ακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει σε περισσότερα από ένα όρια.

Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα και χρησιμοποιήστε το για να γράψετε στον παρακάτω χώρο την απόδειξη του Θεωρήματος.

Πρόβλημα 6.5 Εάν $(a_n - a)$ είναι μηδενική ακολουθία και $(a_n - b)$ είναι μηδενική ακολουθία, δείξτε ότι $a = b$, εξετάζοντας τη διαφορά των δύο μηδενικών ακολουθιών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεώρημα
Ύπαρξη φράγματος

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη

Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα και χρησιμοποιήστε το για να γράψετε στον παρακάτω χώρο την απόδειξη του Θεωρήματος.

Πρόβλημα 6.6 Αποδείξτε ότι, εάν $(a_n) \to a$, τότε η ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη από το $a + 1$ και τελικά κάτω φραγμένη από το $a - 1$. (Υπόδειξη: θέσατε $\varepsilon = 1$).
Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Φυλλαδίου 3, για να συμπεράνετε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι μία φραγμένη ακολουθία δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Απάντηση στο Πρόβλημα του Φυλλαδίου 4 Αποδείξτε οτι εάν $(a_n) \to \infty$ και $(b_n) \to \infty$, τότε $(a_n + b_n) \to \infty$.

Θέλουμε να αποδείξουμε οτι για κάθε πραγματικό αριθμό C, υπάρχει φυσικός αριθμός K τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό $n > K$, ισχύει $a_n + b_n > C$. Δηλαδή πρέπει να αρχίσουμε θεωρώντας έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό C, και να εξηγήσουμε πώς θα βρούμε τον κατάλληλο φυσικό αριθμό K για τον οποίο ισχύει η συνθήκη.

Έστω ένας πραγματικός αριθμός C.
Αφού η ακολουθία $(a_n) \to \infty$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός K_1 τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό $n > K_1$, ισχύει $a_n > C/2$.
Παρόμοια, αφού η ακολουθία $(b_n) \to \infty$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός K_2 τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό $n > K_2$, ισχύει $b_n > C/2$.
Θέτουμε $K = \max\{K_1, K_2\}$. Εάν $n > K$, τότε $n > K_1$ και $n > K_2$, και συνεπώς $a_n > C/2$ και $b_n > C/2$. Άρα

$$a_n + b_n > C\,.$$

Πρόβλημα 6.7 Αποδείξτε, με ανάλογο τρόπο, οτι εάν $a_n \to \infty$ και $c < 0$, τότε $(c \cdot a_n) \to -\infty$.