ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Εαρινό Εξάμηνο 2011-12**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης**

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

http://www.math.uoc.gr/~chrisk/ErgAn/

Φυλλάδιο 4

Ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο

Θέλουμε να ορίσουμε μια ακολουθία να τείνει στο άπειρο εάν οι όροι της γίνονται, τελικά, μεγαλύτεροι από οποιονδήποτε δοθέντα αριθμό.

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) **τείνει στο άπειρο** εάν, για κάθε αριθμό C, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε, για κάθε $n > N$, ισχύει $a_n > C$.

Συμβολισμός Θα δείτε όλους τους ακόλουθους συμβολισμούς για τη φράση (a_n) *τείνει στο άπειρο:*

$$(a_n) \to \infty \quad \text{ή} \quad a_n \to \infty \text{ καθώς } n \to \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,.$$

Παράδειγμα

1. Η ακολουθία $(a_n) = (n)$ τείνει στο άπειρο: από το Αξίωμα Αρχιμήδειας Διάταξης, για κάθε C μπορούμε να διαλέξουμε ένα φυσικό αριθμό $N > C$. Προφανώς, όταν $n > N$, $a_n = n > N > C$.
2. Η ακολουθία $\left(\frac{n}{2}\right)$ επίσης τείνει στο ∞. Για κάθε C διαλέγουμε $N > 2C$. Εάν $n > N$, τότε $\frac{n}{2} > \frac{N}{2} > C$.
3. $(2^n) \to \infty$. Από την Ασκηση 2.2.1, $2^n > n$. Για κάθε C, υπάρχει φυσικός $N > C$, και εάν $n > N$, τότε $2^n > n > N > C$.

Πρόβλημα 4.1

1. Δείξτε οτι η ακολουθία $(\sqrt{n})$ τελικά υπερβαίνει το 2, το 12, το 1000. Εν συνεχεία δείξτε οτι η ακολουθία τείνει στο άπειρο.
2. Δείξτε οτι η ακολουθία (x^n) τείνει στο άπειρο όταν $x > 1$. (Χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Bernoulli).

Πρόβλημα 4.2 Επιλέξτε τιμές του C για να δείξετε οτι οι ακολουθίες

1. $1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots, n, 1, \ldots$
2. $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$
3. $11, 12, 11, 12, \ldots, 11, 12, \ldots$

δεν τείνουν στο $+\infty$.

Είναι το άπειρο αριθμός;
Δεν έχουμε ορίσει το άπειρο να είναι κάποιο είδος αριθμού. Στην πραγματικότητα δεν ορίσαμε καθόλου το άπειρο …

Πρόβλημα 4.3 Βρείτε παραδείγματα για να δείξετε οτι

> …Αποφύγαμε κάτι τέτοιο, και ορίσαμε τη φράση 'τείνει στο άπειρο' σαν μια αυτοτελή έννοια, χρησιμοποιώντας μόνον (πεπερασμένους) αριθμούς.

1. Μια αύξουσα ακολουθία δεν τείνει υποχρεωτικά στο άπειρο.
2. Μια ακολουθία που τείνει στο άπειρο δεν είναι υποχρεωτικά αύξουσα.
3. Μια ακολουθία χωρίς άνω φράγμα δεν τείνει υποχρεωτικά στο άπειρο.

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) **τείνει στο μείον άπειρο** εάν, για κάθε αριθμό C, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $a_n < C$ όταν $n > N$.

Συμβολισμός

$$(a_n) \to -\infty \quad \text{ή} \quad a_n \to -\infty \text{ καθώς } n \to \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,.$$

Παράδειγμα Χρησιμοποιώντας τους τυπικούς ορισμούς μπορείτε να δείξετε οτι $(a_n) \to -\infty$ εάν και μόνον εάν $(-a_n) \to \infty$. Έπεται οτι οι ακολουθίες $(-n)$, $\left(\frac{-n}{2}\right)$ και $(-\sqrt{n})$ τείνουν στο μείον άπειρο.

Θεώρημα Εάν (a_n) και (b_n) είναι δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε, γιά κάθε k, $b_k \geq a_k$, και $(a_n) \to \infty$, τότε $(b_n) \to \infty$.

> **Επέκταση**
> Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμη και όταν η ανισότητα $b_n \geq a_n$ ισχύει *τελικά*. Αποδείξτε το.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέστε οτι $C > 0$. Γνωρίζουμε οτι υπάρχει N τέτοιο ώστε $a_n > C$ όταν $n > N$. Αρα $b_n \geq a_n > C$ όταν $n > N$. Αρα $(b_n) \to \infty$.

Παράδειγμα Γνωρίζουμε οτι $n^2 \geq n$ και $(n) \to \infty$. Αρα $(n^2) \to \infty$.

Θεώρημα
Αθροίσματα και Γινόμενα

Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to \infty$ και $(b_n) \to \infty$. Τότε $(a_n + b_n) \to \infty$, $(a_n b_n) \to \infty$, $(ca_n) \to \infty$ όταν $c > 0$, και $(ca_n) \to -\infty$ όταν $c < 0$.

Η απόδειξη των τεσσάρων προτάσεων αυτού του Θεωρήματος δεν είναι δύσκολη. Μας ενδιαφέρει κυρίως γιατί η λογική αυτών των αποδείξεων εμφανίζεται και σε πολλές άλλες περιπτώσεις. Κάθε εβδομάδα θα αποδεικνύουμε μία από αυτές.

Πρόβλημα 4.4 Αποδείξτε την πρώτη πρόταση του προηγούμενου Θεωρήματος: Εάν $(a_n) \to \infty$ και $(b_n) \to \infty$, τότε $(a_n + b_n) \to \infty$.

Πρόβλημα 4.5 Δείξτε οτι μια ακολουθία τείνει στο άπειρο εάν και μόνον εάν δεν έχει καμία άνω φραγμένη υπακολουθία.
Δηλαδή, δείξτε οτι εάν η ακολουθία (a_n) τείνει στο άπειρο, τότε κάθε υπακολουθία (a_{n_i}) δεν έχει άνω φράγμα, και οτι εάν η ακολουθία (a_n) δεν τείνει στο άπειρο, τότε μπορείτε να ορίσετε υπακολουθία (a_{n_i}) η οποία είναι άνω φραγμένη.

Μηδενικές Ακολουθίες

Εάν κάποιος σας ρώταγε εάν η ακολουθία

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, \dots \frac{1}{n},\ \dots$$

'τείνει στο μηδέν', μάλλον θα απαντούσατε 'ναι'.
Το ίδιο θα λέγατε, μετά από λίγη σκέψη, για τις ακολουθίες

$$1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \dots \frac{1}{n},\ 0,\ \dots$$

και

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5}, \dots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \dots$$

Θέλουμε να διατυπώσουμε έναν ακριβή ορισμό για το τι σημαίνει να τείνει στο μηδέν μια ακολουθία. Σαν ένα πρώτο βήμα, παρατηρήστε οτι σε κάθε μια από τις παραπάνω ακολουθίες, κάθε θετικός αριθμός είναι τελικά ένα άνω φράγμα της ακολουθίας, ενώ κάθε αρνητικός αριθμός είναι τελικά ένα κάτω φράγμα. Ετσι, καθώς προχωράει, η ακολουθία 'συμπιέζεται' κοντά στο μηδέν.

Πρόβλημα 4.6 Οι προτάσεις (α′) – (ε′) αποτελούν προσπάθειες να ορίσουμε την ιδιότητα '*η ακολουθία (a_n) τείνει στο μηδέν*'. Δείξτε οτι κάθε μία από τις ακολουθίες (i) – (v) ικανοποιεί κάποιες από τις προτάσεις (α′) – (ε′). Ελέγξτε τους όρους αυτών των ακολουθιών για να βεβαιωθείτε οτι δεν ταιριάζουν με τη διαισθητική εικόνα μίας ακολουθίας που τείνει στο μηδέν.

α′. Μια ακολουθία στην οποία κάθε όρος είναι γνήσια μικρότερος από τον προηγούμενο του.

β′. Μια ακολουθία στην οποία κάθε όρος είναι γνήσια μικρότερος από τον προηγούμενο του, και παραμένει θετικός.

γ′. Μια ακολουθία στην οποία, για αρκετά μεγάλο n, κάθε όρος είναι μικρότερος από κάποιο μικρό θετικό αριθμό.

δ′. Μια ακολουθία στην οποία, για αρκετά μεγάλο n, η απόλυτη τιμή κάθε όρου ειναι μικρότερη απο κάποιο μικρό θετικό αριθμό

ε′. Μια ακολουθία με αυθαίρετα μικρούς όρους.

i. $2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$

ii. $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots,\ \frac{n+1}{n}$

iii. $2,\ 1,\ 0,\ -0.1,\ -0.1,\ -0.1,\ -0.1,\ \ldots,\ -0.1,\ \ldots$

iv. $2,\ 1,\ 0,\ -0.1,\ 0.01,\ -0.001,\ 0.01,\ -0.001,\ \ldots,\ 0.01,\ -0.001,\ \ldots$

v. $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{8}, \ldots$

Πρόβλημα 4.7 Θεωρήστε την ακολουθία $-1, \frac{1}{2},\ \frac{-1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{-1}{5},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots$

1. Από ποιό σημείο και πέρα είναι οι όροι της ακολουθίας μεταξύ -0.1 και 0.1;

2. Από ποιό σημείο και πέρα είναι οι όροι της ακολουθίας μεταξύ -0.001 και 0.001;

3. Από ποιό σημείο και πέρα είναι οι όροι της ακολουθίας μεταξύ $-\varepsilon$ και ε, όπου ε είναι κάποιος μικρός αριθμός;

Το γράμμα ε προέρχεται από το error, όπου οι όροι της ακολουθίας θεωρούνται διαδοχικές προσπάθειες να επιτευχθεί ο στόχος 0.

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) **τείνει στο μηδέν** εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|a_n| < \varepsilon$ όταν $n > N$.

Συμβολισμός

$$(a_n) \to 0 \quad \text{ή} \quad a_n \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Λέμε επίσης οτι (a_n) **συγκλίνει στο μηδέν**, ή οτι η ακολουθία (a_n) είναι **μηδενική**.

Παράδειγμα Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ τείνει στο μηδέν, εφόσον για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα φυσικό αριθμό $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Οταν $n > N$, τότε $|a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Ποιό Αξίωμα χρησιμοποιείτε εδώ;

Πρόβλημα 4.8 Δείξτε οτι η ακολουθία $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ τείνει στο μηδέν.

Πρόβλημα 4.9 Δείξτε οτι η ακολουθία $(a_n) = 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots$ δεν τείνει στο μηδέν. (Βρείτε κάποιο $\varepsilon > 0$ για το οποίο δεν υπάρχει αντίστοιχο N.)

Η Άσκηση 4.4 να παραδοθεί για διόρθωση, στην *αρχή* του επόμενου εργαστηρίου.