M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 3

Ακολουθίες

Ολες οι ακολουθίες σε αυτό το μάθημα είναι άπειρες, και αποτελούνται μόνον από πραγματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, \ldots$

$\sin(1),\ \sin(2),\ \sin(3),\ \sin(4), \ldots$

Γενικά, παριστάνουμε μια ακολουθία με

$$(a_n) = a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει ένας όρος a_n της ακολουθίας. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μία ακολουθία ως εξής:

Ορισμός Μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

Για τις ακολουθίες, όπως και για άλλες συναρτήσεις, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα γράφημα. Αν συμβολίσουμε τις τρεις πρώτες ακολουθίες στο παράδειγμα $a_n = n$, $b_n = (-1)^n$, $c_n = \frac{1}{n+1}$, τα γραφήματά τους είναι σαν τα παρακάτω

Μπορούμε να πάρουμε μια άλλη παράσταση απλώς σημειώνοντας τα σημεία της ακολουθίας στην ευθεία των αριθμών.

Αυτές οι παραστάσεις δείχνουν πώς συμπεριφέρεται η ακολουθία. Η a_n πάει προς το άπειρο, η ακολουθία b_n πηδάει από το 1 στο -1 και πίσω, ενώ η ακολουθία c_n συγκλίνει στο 0. Σε αυτό το φυλλάδιο θα εξετάσουμε πώς να δώσουμε ακριβή έννοια σε κάθε μια από αυτές τις φράσεις.

Πρόβλημα 3.1 Γράψτε έναν τύπο για τον n-οστό όρο κάθε μιας από τις παρακάτω ακολουθίες, και σχεδιάστε την ακολουθία με τους δύο τρόπους που περιγράψαμε.

(i) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}, \ldots$

(iii) $0,\ -2,\ 0,\ -2,\ 0,\ -2, \ldots$ (iv) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}, \ldots$

Μονότονες Ακολουθίες

Ορισμός Μια ακολουθία a_n είναι

γνήσια αύξουσα	εάν	για κάθε n	$a_n < a_{n+1}$
αύξουσα	εάν	για κάθε n	$a_n \leq a_{n+1}$
γνήσια φθίνουσα	εάν	για κάθε n	$a_n > a_{n+1}$
φθίνουσα	εάν	για κάθε n	$a_n \geq a_{n+1}$
μονότονη	εάν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα		
μη-μονότονη	εάν δεν είναι ούτε αύξουσα, ούτε φθίνουσα		

Παράδειγμα Εξετάστε τις ακολουθίες (a_n), (b_n) και (c_n), που δίδονται από $a_n = n$, $b_n = (-1)^n$ και $c_n = \frac{1}{n}$. Παρατηρούμε οτι

1. Για κάθε n, $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$, και συνεπώς (a_n) είναι γνήσια αύξουσα.
2. $b_1 = -1 < 1 = b_2$, $b_2 = 1 > -1 = b_3$, άρα η (b_n) δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα, δηλαδή είναι μη-μονότονη.
3. Για όλα τα n, $c_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = c_{n+1}$, και συνεπώς (c_n) είναι γνήσια φθίνουσα.

Πρόβλημα 3.2 Εξετάστε εάν κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες έχει κάποιες από τις ιδιότητες: γνήσια αύξουσα, αύξουσα, γνήσια φθίνουσα, φθίνουσα. (Το γράφημα της ακολουθίας μπορεί να σας βοηθήσει να αποφασίσετε, αλλά στην απόδειξη πρέπει να χρησιμοποιήσετε τους τυπικούς ορισμούς).

(i) $a_n = -\frac{1}{n}$ (ii) $a_{2n-1} = n, a_{2n} = n$ (iii) $a_n = 1$

(iv) $a_n = 2^{-n}$ (v) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (vi) $\sin n$

Υπόδειξη: Στο (v) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$.

Φραγμένες Ακολουθίες

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) είναι

άνω φραγμένη	εάν υπάρχει αριθμός U τέτοιος ώστε $a_n \leq U$ για κάθε n U είναι ένα **άνω φράγμα** για την (a_n)
κάτω φραγμένη	εάν υπάρχει αριθμός L τέτοιος ώστε $a_n \geq L$ για κάθε n L είναι ένα **κάτω φράγμα** για την (a_n)
φραγμένη	εάν είναι άνω φραγμένη *και* κάτω φραγμένη
μη-φραγμένη	εάν δεν είναι **ούτε** άνω φραγμένη **ούτε** κάτω φραγμένη

Παράδειγμα Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι φραγμένη, εφόσον $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.
Η ακολουθία (n) είναι κάτω φραγμένη από το 1. Είναι άνω φραγμένη;

Σύμφωνα με την εικόνα μας για τους πραγματικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία, η ακολουθία (n) δεν είναι άνω φραγμένη: για κάθε υποψήφιο άνω φράγμα U, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n μεγαλύτερος από το U. *Ομως αυτό δεν μπορούμε να το αποδείξουμε με τα αξιώματα για τη διάταξη που έχουμε ήδη δεί.* Χρειαζόμαστε ένα νέο Αξίωμα.

Αξίωμα Αρχιμήδειας Διάταξης Για κάθε αριθμό C, υπάρχει ένας ακέραιος n, που είναι μεγαλύτερος απο το C.

Πρόβλημα 3.3 Εξετάστε εάν κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, φραγμένη, μη-φραγμένη ή τίποτε από αυτά. Βρείτε ένα άνω ή κάτω φράγμα, στις περιπτώσεις όπου υπάρχουν.

(i)	$\frac{(-1)^n}{n}$	(ii)	$\sqrt{n}$	(iii)	$a_n = 1$
(iv)	$\sin n$	(v)	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	(vi)	$(-1)^n n$

Πρόβλημα 3.4 Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι μονότονη αύξουσα.

1. Μπορεί να έχει ένα άνω φράγμα;
2. Μπορεί να έχει ένα κάτω φράγμα;
3. Πρέπει να έχει ένα άνω φράγμα;
4. Πρέπει να έχει ένα κάτω φράγμα;

Δώστε αριθμητικά παραδείγματα για κάθε περίπτωση.
Πώς θα άλλαζαν οι απαντήσεις σας εάν τα ίδια ερωτήματα ετίθεντο για μία μονότονη φθίνουσα ακολουθία;

Πρόβλημα 3.5 Εάν μία ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, πρέπει να περιέχει

1. ένα θετικό όρο;
2. μία απειρία θετικών όρων;

Υπακολουθίες

Μια υπακολουθία της (a_n) είναι μια ακολουθία που αποτελείται από κάποιους όρους (ή και από όλους τους όρους) της ακολουθίας (a_n), με την αρχική τους διάταξη. Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε τους όρους με άρτιο δείκτη, και να πάρουμε την υπακολουθία

$$a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \ldots$$

ή μπορούμε να επιλέξουμε τους όρους των οποίων ο δείκτης είναι τέλειο τετράγωνο

$$a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \ldots$$

Στην πρώτη περίπτωση διαλέγουμε τους όρους στις θέσεις 2, 4, 6, 8, ... και στη δεύτερη τους όρους στις θέσεις 1, 4, 9, 16, ...

Εν γένει, εάν έχουμε μια *γνήσια αύξουσα* ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_i) = n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ \ldots$ μπορούμε να ορίσουμε μια υπακολουθία της (a_n),

$$(a_{n_i}) = a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ \ldots$$

Ορισμός Μια **υπακολουθία** της (a_n) είναι μια ακολουθία της μορφής (a_{n_i}), όπου (n_i) είναι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Ουσιαστικά η ακολουθία (n_i) επιλέγει τους όρους της (a_n) που θα αποτελέσουν την υπακολουθία.

Πρόβλημα 3.6 Εστω $(a_n) = (n^2)$. Γράψτε τους πρώτους τέσσερεις όρους των τριών υπακολουθιών (a_{n+4}), (a_{3n-1}) και (a_{2^n}).

Πρόβλημα 3.7 Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα, αλλά όχι γνήσια αύξουσα.

1. Μπορεί να υπάρχει γνήσια αύξουσα υπακολουθία της (a_n);
2. Πρέπει να υπάρχει γνήσια αύξουσα υπακολουθία της (a_n);

Πρόβλημα 3.8 Εάν μια ακολουθία είναι φραγμένη, πρέπει κάθε υπακολουθία της να είναι φραγμένη;

Πρόβλημα 3.9

1. Εάν η υπακολουθία $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots$ είναι φραγμένη, έπεται ότι η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη;

2. Εάν η υπακολουθία $a_3, a_4, \ldots, a_{n+2}, \ldots$ είναι φραγμένη, έπεται ότι η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη;

3. Εάν η υπακολουθία $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots, a_{N+n}, \ldots$ είναι φραγμένη, έπεται ότι η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη;

Πρόβλημα 3.10 Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι μη φραγμένη.

1. Μπορεί να περιέχει φραγμένη υπακολουθία;

2. Πρέπει να περιέχει φραγμένη υπακολουθία;

Ξανακοιτάξτε τους ορισμούς φραγμένη και μη φραγμένη.

Λήμμα Κάθε υπακολουθία μιας φραγμένης ακολουθίας είναι φραγμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Υπάρχουν L και U τέτοια ώστε $L \leq a_n \leq U$ για κάθε n. Εάν (a_{n_i}) είναι μια υπακολουθία της (a_n), έπεται οτι $L \leq a_{n_i} \leq U$ **για κάθε** i. Αρα, η (a_{n_i}) είναι φραγμένη.

Συχνά ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά μιας ακολουθίας μετά από κάποιο σημείο, ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει πιο πριν. Εχουμε ένα σαφή τρόπο να κόψουμε τους N πρώτους όρους της ακολουθίας, ορίζοντας την υπακολουθία

$$(a_{N+n}) = a_{N+1},\ a_{N+2},\ a_{N+3},\ a_{N+4}, \ldots$$

που αρχίζει με τον όρο a_{N+1}. Χρησιμοποιούμε αυτήν την ιδέα στον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός Μια ακολουθία (a_n) ικανοποιεί μια ιδιότητα **τελικά** εάν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε η ακολουθία (a_{N+n}) να ικανοποιεί την ιδιότητα.

Για παράδειγμα, μια ακολουθία είναι **τελικά φραγμένη** εάν υπάρχει N τέτοιο ώστε η υπακολουθία (a_{N+n}) να είναι φραγμένη.
Η ακολουθία $((n-5)^2)$ είναι **τελικά αύξουσα.**

Λήμμα Εάν μια ακολουθία είναι τελικά φραγμένη, τότε είναι φραγμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορεί να φαίνονται προφανή, αλλά μάλλον θα σας προκαλέσει έκπληξη να μάθετε ότι κάθε ακολουθία, όσο παράξενη και να είναι η συμπεριφορά της, περιέχει μια αύξουσα ή μια φθίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα Κάθε ακολουθία έχει μια μονότονη υπακολουθία.

Απαντήστε στην επόμενη Ασκηση, και γράψτε την απάντηση με τη μορφή απόδειξης του Θεωρήματος.

Πρόβλημα 3.11 Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία. Θα ονομάσουμε έναν όρο a_δ *όρο δαπέδου* εάν κανένας από τους επόμενους όρους δεν είναι μικρότερος: δηλαδή εάν $a_\delta \leq a_n$ για κάθε $n \geq \delta$. Ένας όρος δαπέδου είναι ένα κάτω φράγμα για την υπόλοιπη ακολουθία.

1. Εάν υπάρχουν άπειροι όροι δαπέδου, δείξτε οτι σχηματίζουν μια αύξουσα υπακολουθία.

2. Εάν υπάρχει πεπερασμένος αριθμός από όρους δαπέδου και ο τελευταίος είναι ο a_Δ, κατασκευάστε μια φθίνουσα υπακολουθία με $a_{\Delta+1}$ σαν πρώτο όρο.

3. Εάν δεν υπάρχει κανένας όρος δαπέδου, κατασκευάστε μια φθίνουσα υπακολουθία με a_1, σαν πρώτο όρο.

Η απάντηση στο Πρόβλημα 3.11 να παραδοθεί για διόρθωση, στην *αρχή* του επόμενου εργαστηρίου.

Quiz Εχετε δύο φυτίλια, που δεν καίγονται με ομοιόμορφο τρόπο, αλλά γνωρίζετε οτι το κάθε ένα παίρνει ακριβώς 1 ώρα να καεί από τη μια άκρη έως την άλλη. Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα δύο φυτίλια για να μετρήσετε ένα χρονικό διάστημα ίσο με τρία τέταρτα της ώρας;