ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 2
Η Ανισότητα Bernoulli

Ο χειρισμός εκφράσεων με δυνάμεις είναι συχνά δύσκολος. Μία χρήσιμη ανισότητα, που συγκρίνει δυνάμεις με όρους πρώτου βαθμού είναι η ανισότητα του Bernoulli .

Ανισότητα Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ όπου $x > -1$ και n είναι φυσικός αριθμός

Για μη-αρνητικές τιμές του x η ανισότητα Bernoulli μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Διωνύμου, σύμφωνα με το οποίο η αριστερή πλευρά είναι

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\dots \\ &\quad +nx^{n-1}+x^n \\ &\geq 1+nx\end{aligned}$$

Γιατί δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο όταν $x < 0$;

Πρόβλημα 2.1 Αποδείξτε την Ανισότητα Bernoulli για $x > -1$, χρησιμοποιώντας *μαθηματική επαγωγή*. Σημειώστε πού χρησιμοποιείτε το στοιχείο οτι $x > -1$. Πότε ισχύει το '='; .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρόβλημα 2.2

1. Χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε οτι $2^n > n$ για κάθε n.

2. Υποθέστε οτι $0 < x < 1$. Δείξτε οτι, για όλους τους φυσικούς αριθμούς n,
$$x^n < \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{1-x}.$$
Υπόδειξη: Εξετάστε το $\frac{1}{x^n}$.

Απόλυτη Τιμή

Δίδουμε τον ορισμό της γνωστής μας συνάρτησης της *απολύτου τιμής*.

Ορισμός

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x, & \text{εάν } x < 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα 2.3

1. Βεβαιωθείτε οτι αυτός ο ορισμός δίδει πράγματι τη γνωστή συνάρτηση της απολύτου τιμής.
2. Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης.

Πρόβλημα 2.4 Ξαναγράψτε τις ακόλουθες εκφράσεις χωρίς τις απολύτους τιμές, διακρίνοντας διαφορετικές περιπτώσεις όπου απαιτείται.

(α) $a - |(a - |a|)|$ (β) $|(|x| - 1)|$

Ιδιότητες της Απολύτου Τιμής

1. Για κάθε a, $0 \leq |a|$.
2. Για κάθε a, $a \leq |a|$ και $-|a| \leq a$.
3. Για κάθε a, $|a| = |-a|$.
4. Για κάθε a, b, $|ab| = |a| \cdot |b|$.
5. Εάν $a \neq 0$, $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$.
6. $|a| = 0$ εάν και μόνον εάν $a = 0$.

Πρόβλημα 2.5 Αποδείξτε τις παραπάνω ιδιότητες

Ο χειρισμός εκφράσεων με απολύτους τιμές δεν είναι εύκολος. Μπορούμε να απαλείψουμε τις απολύτους τιμές εξετάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις, ή παίρνοντας το τετράγωνο της έκφρασης.

Παράδειγμα Λύστε την ανισότητα $|x + 4| < 2$.

Τετράγωνα
$0 \leq |x + 4| < 2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 < 4 \Leftrightarrow$
$x^2 + 8x + 12 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 6) < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -2$.

Ανάλυση Περιπτώσεων
Περίπτωση 1. $x + 4 \geq 0$. Τότε $|x + 4| < 2 \Leftrightarrow x + 4 < 2 \Leftrightarrow x < -2$. Αρα $-4 \leq x < -2$.
Περίπτωση 2. $x + 4 < 0$. Τότε $|x + 4| < 2 \Leftrightarrow -(x + 4) < 2 \Leftrightarrow$
$-x - 4 < 2 \Leftrightarrow x > -6$. Αρα $-6 < x < -4$.

Πρόβλημα 2.6 Λύστε τις ακόλουθες ανισότητες. Σε κάθε περίπτωση αποφασίστε εάν θα τετραγωνίσετε ή θα εξετάσετε περιπτώσεις.

1. $-2 < |x+4|$
2. $|x-1| + |x-2| \geq 5$
3. $|x-1| \cdot |x+1| > 0$

Τριγωνικές Ανισότητες

Μια ανισότητα που θα γίνει ένα από τα βασικότερα μαθηματικά εργαλεία σας είναι η *Τριγωνική Ανισότητα*.

Η Τριγωνική Ανισότητα Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y,

$$|x+y| \leq |x| + |y| \ .$$

Πρόβλημα 2.7 Βεβαιωθείτε οτι ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δοκιμάζοντας διάφορα ζεύγη αριθμών, θετικών και αρνητικών.
Τι έχει να κάνει η ανισότητα με τα τρίγωνα;

Πρόβλημα 2.8 Αποδείξτε την Τριγωνική Ανισότητα. Πότε ισχύει το '='; .
(Υπόδειξη: Τετραγωνίστε τις δύο πλευρές).

Αντίστροφη Τριγωνική Ανισότητα Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y,

$$|x| - |y| \leq |x-y| \, .$$

Πρόβλημα 2.9

1. Αποδείξτε και αυτήν την ανισότητα.
   (Υπόδειξη: Αντικαταστήσετε κάθε x στην Τριγωνική Ανισότητα με το $x - y$.)

2. Δείξτε οτι $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$. Πότε ισχύει το '='; .

3. Ομοίως, για κάθε δύο πραγματικούς x και y,
   $|\,|x| - |y|\,| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Διαστήματα

Στην Ανάλυση συχνά προσδιορίζουμε διαστήματα πάνω στην πραγματική ευθεία χρησιμοποιώντας απόλυτες τιμές, βασιζόμενοι στο επόμενο Θεώρημα.

Ιδιότητα Διαστήματος Εάν x και b είναι πραγματικοί αριθμοί, και $b > 0$ τότε

$$|x| < b \text{ εαν και μόνον εάν } -b < x < b\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέστε οτι $|x| < b$. Τότε $-|x| > -b$ και συνεπώς $-b < -|x| < x < |x| < b$. Αρα $-b < x < b$.
Αντιστρόφως, υποθέστε οτι $-b < x < b$. Τότε, εάν $x > 0$, $x = |x|$ και άρα $-b < |x| < b$. Εάν $x < 0$, τότε $x = -|x|$, άρα $-b < -|x| < b$ και συνεπώς $b > |x| > -b$.

Πόρισμα Εάν $x,\ a$ και b είναι πραγματικοί αριθμοί, και $b > 0$, τότε

$$|x - a| < b \text{ εαν και μόνον εάν } a - b < x < a + b\,.$$

Πρόβλημα 2.10

1. Λύστε την ανισότητα $|2x - 1| < 5$.

2. Σχεδιάστε τα ακόλουθα διαστήματα στην πραγματική ευθεία:

$$\{x : |x| < 1\} \qquad \{x : |x - 1| < 2\} \qquad \{x : |x + 4| < 1\}$$

Μια ματιά στο μέλλον

Ενα σημαντικό πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε σε επόμενα μαθήματα Ανάλυσης βασίζεται στην ακόλουθη ιδέα: Εάν έχουμε μια συνάρτηση του x, θέλουμε να βρούμε πόσο μπορούμε να επιτρέψουμε στο x να μεταβληθεί από μία δεδομένη τιμή, χωρίς να μεταβληθεί η τιμή της συνάρτησης περισσότερο από κάποια προκαθορισμένη ποσότητα.
Στο επόμενο παράδειγμα, παρατηρούμε οτι η συνάρτηση $x^2 + 3x$ παίρνει την τιμή 0 όταν $x = 0$. Θέλουμε να βρούμε πόσο μπορούμε να επιτρέψουμε στο x να μεταβληθεί από το 0 διατηρώντας τη μεταβολή του $x^2 + 3x$ από το 0 μικρότερη από 1.

Παράδειγμα Βρείτε ένα θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε $|x| < \delta \Rightarrow |x^2 + 3x| < 1$.

Προσέξτε οτι θέλουμε να βρούμε κάποιο τέτοιο δ και όχι το μεγαλύτερο δυνατό. Αυτό μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε κάπως τις ανισότητες.

Υποθέτουμε οτι $|x| < \delta$. Τότε

$$
\begin{array}{rcll}
|x^2 + 3x| & = & |x|\,|x+3| & \\
 & \leq & \delta(|x+3|) & \text{εφόσον } |x| < \delta \\
 & \leq & \delta(|x| + |3|) & \text{από την Τριγωνική Ανισότητα,} \\
 & & & \text{εφόσον } \delta > 0 \\
 & \leq & \delta(\delta + 3) & \\
 & \leq & \delta(1+3) & \text{εάν υποθέσουμε οτι } \delta \leq 1 \\
 & \leq & 1 & \text{εάν υποθέσουμε οτι } \delta \leq \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Επεται οτι $|x| < \frac{1}{4} \Rightarrow |x^2 + 3x| < 1$.

Πρόβλημα 2.11 Υποθέστε οτι $\epsilon > 0$ είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός. Βρείτε θετικό δ τέτοιο ώστε $|x| < \delta \Rightarrow |x^2 + 3x| < \epsilon$.

Πρόβλημα 2.12 Βρείτε θετικό δ τέτοιο ώστε $|x - 2| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}$.

Quiz Σε μια πόλη θέλουν να διαλέξουν για δήμαρχο τον πιο έξυπνο κάτοικο. Υπάρχουν τρεις υποψήφιοι και τους θέτουν το εξής πρόβλημα. Στο μέτωπο κάθε υποψηφίου κολλάνε ένα σταυρό, έτσι ο καθένας να μπορεί να δει το σταυρό των άλλων δύο αλλά όχι το δικό του. Οι σταυροί έχουν χρώμα μπλέ ή κόκκινο, και οι υποψήφιοι γνωρίζουν οτι υπάρχει τουλάχιστον ένας κόκκινος σταυρός.
Ενας υποψήφιος βλέπει οτι οι άλλοι δυο έχουν κόκκινο σταυρό. Περιμένει λίγα δευτερόλεπτα και λέει: Γνωρίζω τι χρώμα σταυρό έχω.
Τι χρώμα έχει, και πώς το βρήκε;