Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό
Θεματική Ενότητα ΠΛΗ 12

Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Μιχάλης Μαλιάκας
Μαρία Αδάμ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το εκπαιδευτικό υλικό που ακολουθεί απευθύνεται στους φοιτητές του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ) που μελετούν Γραμμική Άλγεβρα.

Η Γραμμική Άλγεβρα είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορες επιστήμες. Για παράδειγμα, το πρόβλημα επίλυσης μεγάλων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων ή του υπολογισμού ιδιοτιμών εμφανίζεται συχνά σε όλες τις θετικές επιστήμες, στην οικονομία, κοινωνιολογία και αλλού. Πιο γενικά, στις επιστήμες μελετώνται διάφορα φυσικά ή κοινωνικά φαινόμενα μέσω μαθηματικών μοντέλων τους. Τα *γραμμικά* μοντέλα είναι ιδιαίτερα σημαντικά, γιατί αφενός σε πολλές περιπτώσεις αναπαριστάνουν την πραγματικότητα με ικανοποιητικό βαθμό πιστότητας, αφετέρου υπάρχουν για αυτά πολλά ισχυρά μαθηματικά εργαλεία ένα από τα οποία είναι η Γραμμική Άλγεβρα. Πολλά φαινόμενα περιγράφονται από ποικίλους τύπους συναρτήσεων και είναι γνωστό από τα Μαθηματικά ότι ευρείες κλάσεις συναρτήσεων προσεγγίζονται από *γραμμικές* συναρτήσεις. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η Γραμμικά Άλγεβρα μας βοηθά στην άντληση πληροφοριών για τη συμπεριφορά και μη γραμμικών φαινομένων.

Σκοπός του υλικού

Υπάρχουν αρκετές ιδιαιτερότητες στην από απόσταση εκπαίδευση που θέτουν συγκεκριμένες απαιτήσεις στη μορφή του χρησιμοποιούμενου διδακτικού υλικού. Μια από αυτές είναι η αυξημένη δυνατότητα αυτενέργειας και αυτοαξιολόγησης του φοιτητή. Ο σκοπός του υλικού που ακολουθεί είναι να δοθεί η ευκαιρία στο φοιτητή

- να εξοικειωθεί με τις βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας
- να εξασκηθεί στις τεχνικές της Γραμμικής Άλγεβρας.

Ελπίζουμε ότι με τον τρόπο αυτό δίνεται η ευκαιρία στον ενδιαφερόμενο να κατανοήσει την σχετική ύλη πληρέστερα.

Οργάνωση των κεφαλαίων

Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε τέσσερα μέρη,

- Βασικές Έννοιες,
- Θεμελιώδεις Γνώσεις,
- Λυμένες Ασκήσεις,
- Ασκήσεις.

Στις Βασικές Έννοιες και Θεμελιώδεις Γνώσεις καταγράφονται οι ορισμοί των μαθηματικών εννοιών και τα αντίστοιχα θεωρήματα χωρίς να δίνονται αποδείξεις. Συχνά αυτά διευκρινίζονται με κατάλληλα παραδείγματα. Στις Λυμένες Ασκήσεις υπάρχουν πλήρεις λύσεις διαφόρων ασκήσεων με συγκεκριμένες αναφορές στους ορισμούς και στα θεωρήματα μέσω συνδέσμων. Στις Ασκήσεις υπάρχουν άλυτες ασκήσεις που συνοδεύονται σε κάθε περίπτωση είτε από υπόδειξη είτε από τις αριθμητικές απαντήσεις.

Τρόπος χρήσης του υλικού

Η παρουσίαση της ύλης δεν είναι αναγκαστικά σειριακή και συνεπώς διαφέρει από τα κλασικά βιβλία. Για παράδειγμα, στις Βασικές Έννοιες υπάρχουν όλοι οι σχετικοί ορισμοί του συγκεκριμένου κεφαλαίου και στις Θεμελιώδεις Γνώσεις υπάρχουν τα θεωρήματα. Νομίζουμε ότι έτσι αυξάνεται η χρηστικότητα του υλικού αυτού που προορίζεται να εμφανιστεί σε ηλεκτρονική μορφή. Προτείνουμε τον εξής τρόπο χρήσης του. Όταν ο φοιτητής μελετήσει μια ενότητα από το βιβλίο του ΕΑΠ, μπορεί να ανατρέξει στην αντίστοιχη ενότητα αυτού του υλικού και, αφού ασχοληθεί με τις Βασικές Έννοιες και τις Θεμελιώδεις Γνώσεις σαν μια επανάληψη, να επιχειρήσει να λύσει πολλές ασκήσεις. Πιστεύουμε ότι η μελέτη των Μαθηματικών δεν αρμόζει σε θεατές αλλά απαιτεί ενεργητική συμμετοχή.

Στόχοι των επιμέρους κεφαλαίων

Σε αντίθεση με τους φοιτητές των κλασικών Ανωτάτων Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων, οι φοιτητές του ΕΑΠ συνήθως αρχίζουν τις πανεπιστημιακές σπουδές αφού έχει μεσολαβήσει ένα σημαντικό χρονικό διάστημα από την αποφοίτησή τους από το Λύκειο. Επομένως νομίζουμε ότι είναι χρήσιμο οι Θεματικές Ενότητες που διδάσκονται στο πρώτο έτος του ΕΑΠ, να παρέχουν την ευκαιρία υπενθύμισης βασικών εννοιών από την ύλη που διδάσκεται στη μέση εκπαίδευση. Αυτός είναι ο σκοπός του Κεφαλαίου 1. Μελετάμε μερικές θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών που είναι απαραίτητες για τα επόμενα κεφάλαια όπως είναι τα σύνολα, οι απεικονίσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί, τα πολυώνυμα και η μαθηματική επαγωγή.

Στο Κεφάλαιο 2 αρχίζουμε τη μελέτη της επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Υπάρχουν πολλές σχετικές μέθοδοι αλλά ο σκοπός στο κεφάλαιο αυτό είναι να κατανοήσουμε μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων μια από αυτές, τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Αυτή θα εφαρμοστεί πολλές φορές στα επόμενα κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια πιο συστηματική ανάλυση της μεθόδου του Gauss που μας οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια του ΄κλιμακωτού πίνακα’. Επίσης μελετάμε πράξεις πινάκων και αποσαφηνίζουμε τη διασύνδεση του πολλαπλασιασμού πινάκων με την μετατροπή πίνακα στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του. Τέλος δίνεται μια εφαρμογή στον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα. Έχοντας μελετήσει το κεφάλαιο αυτό, θα είμαστε σε θέση, μεταξύ των άλλων, να επιλύουμε με συστηματικό τρόπο γραμμικά συστήματα και να υπολογίζουμε αντίστροφους πίνακες.

Οι ορίζουσες εισάγονται στο Κεφάλαιο 4. Σκοπός μας εδώ είναι να μάθουμε μερικές τεχνικές υπολογισμού οριζουσών και να κατανοήσουμε την εφαρμογή τους στον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα και στη λύση των γραμμικών συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετώνται μερικές βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας, όπως είναι η βάση και το εσωτερικό γινόμενο, χρησιμοποιώντας το ειδικό αλλά σημαντικό παράδειγμα των χώρων $\mathbb{R}^n$, που αποτελούν τυπικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων. Η κατανόηση των εννοιών αυτών στο εν λόγω παράδειγμα μας διευκολύνει στη μετάβαση σε ποιο γενικούς διανυσματικούς χώρους που πραγματοποιείται στα Κεφάλαια 6 και 7. Εδώ εισάγεται η έννοια της διάστασης και δίνονται σημαντικές εφαρμογές στα γραμμικά συστήματα μέσω της τάξης πίνακα. Έχοντας μελετήσει τα κεφάλαια αυτά, θα μπορούμε, μεταξύ των άλλων, να προσδιορίσουμε μια βάση και τη διάσταση διάφορων χώρων, όπως είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ που παράγονται από συγκεκριμένα διανύσματα

Οι γραμμικές απεικονίσεις μας επιτρέπουν να ‘συγκρίνουμε’ δυο διανυσματικούς χώρους. Αυτές μελετώνται στο Κεφάλαιο 8. Εδώ μας ενδιαφέρει να κατανοήσουμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις αναπαρίστανται από πίνακες και ότι η μελέτη τους ουσιαστικά ανάγεται στη μελέτη πινάκων.

Στο Κεφάλαιο 9 μελετάμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα (πινάκων και γραμμικών απεικονίσεων). Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στον υπολογισμό αυτών και άλλων συναφών ποσοτήτων. Οι έννοιες αυτές χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στο επόμενο κεφάλαιο, όπου αναπτύσσεται η έννοια της διαγωνοποίησης που είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες αυτού του υλικού. Ακολουθούν διάφορες εφαρμογές και τέλος μελετάμε τη διαγωνοποίηση συμμετρικών και Ερμιτιανών πινάκων.

Στο Κεφάλαιο 11 μελετάμε πραγματικές τετραγωνικές μορφές και εφαρμόζουμε τη διαγωνοποίηση 2×2 συμμετρικών πινάκων για να φτάσουμε σε ένα γεωμετρικό αποτέλεσμα, την ταξινόμηση των κωνικών τομών στο επίπεδο.

Ελπίζουμε πως το παρόν εκπαιδευτικό υλικό θα λειτουργήσει ως ένα χρήσιμο βοήθημα στα χέρια των φοιτητών του ΕΑΠ για να διευκολυνθούν στη μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας, *αλλά σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί να υποκαταστήσει ένα βιβλίο όπου η θεωρία αναπτύσσεται διεξοδικά.*

Θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον καθηγητή Τάσο Μπούντη που διάβασε κριτικά το κείμενο και υπέδειξε πολλά εύστοχα σημεία που βελτίωσαν το τελικό αποτέλεσμα.

Οι συγγραφείς
27/2/2005

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενες Έννοιες

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με έννοιες που είναι γνωστές από το Λύκειο, όπως είναι τα σύνολα, οι απεικονίσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί, η μαθηματική επαγωγή και τα πολυώνυμα. Ο σκοπός εδώ είναι να υπενθυμίσουμε βασικά στοιχεία και τεχνικές των μαθηματικών που είναι απαραίτητες στη μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Με

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\},\ \mathbb{N}=\{1,2,\ldots\},\ \mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\},\ \mathbb{R}$$

συμβολίζουμε αντίστοιχα το σύνολο των ακεραίων αριθμών, το σύνολο των θετικών ακεραίων, το σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για το σύνολο $\mathbb{N}$ των θετικών ακεραίων θα χρησιμοποιούμε συχνά την ονομασία ‘σύνολο των φυσικών αριθμών’.

ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός 1 (υποσύνολο)

*Έστω Α,Β δυο σύνολα. Θα λέμε ότι το Α είναι ένα **υποσύνολο** του Β (συμβολικά $A \subseteq B$) αν κάθε στοιχείο του Α είναι στοιχείο του Β.*

Παραδείγματα

- Το σύνολο $\{1,2,3\}$ είναι ένα υποσύνολο του $\{1,2,3,4\}$, αλλά δεν είναι ένα υποσύνολο του $\{2,3,4\}$.
- Το $\{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 2\}$ είναι ένα υποσύνολο του $\{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 3\}$, αλλά όχι του $\{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 2\}$.

Ένα υποσύνολο *Α* του *Β* λέγεται **γνήσιο** αν $A \neq B$. Βλέπουμε ότι κάθε υποσύνολο του *Β* εκτός από το ίδιο το *Β* είναι γνήσιο.

Ορισμός 2 (τομή, ένωση, συμπλήρωμα)

Έστω Α,Β δυο σύνολα.

- *Η **τομή** των Α,Β είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στο Α και στο Β. Η τομή των Α,Β συμβολίζεται με $A \cap B$.*
- *Η **ένωση** των Α,Β είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο Α ή στο Β. Η ένωση των Α,Β συμβολίζεται με $A \cup B$.*
- *Το **συμπλήρωμα** του Β στο Α είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β και συμβολίζεται με $A - B$.*

Παράδειγμα

- Έστω $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$. Τότε
  $A \cap B = \{2,3\}, A \cup B = \{1,2,3,4\}, A - B = \{1\}, B - A = \{4\}$.
- Αν $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 3\}$, τότε
  $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 2\}, A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 3\}$,
  $A - B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 1\}, B - A = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \le 3\}$

Ορισμός 3 (καρτεσιανό γινόμενο)

*Έστω Α,Β δυο σύνολα. Το **καρτεσιανό γινόμενο** των Α,Β είναι το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (a,b), όπου $a \in A$ και $b \in B$, και συμβολίζεται με $A \times B$.*

Παράδειγμα

Αν $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$, τότε έχουμε

$$A\times B=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}, B\times A=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}, B\times B=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2)\}.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο $A_1\times\ldots\times A_n$ των συνόλων $A_1,..,A_n$, δηλαδή το $A_1\times\ldots\times A_n$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων n – άδων $(a_1,\ldots,a_n)$, όπου $a_i\in A_i$. Στην ειδική περίπτωση $A_1=\ldots=A_n=A$, θα γράφουμε A^n στη θέση του $A_1\times\ldots\times A_n$.

Παράδειγμα

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\},\quad \mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ορισμός 4 (απεικόνιση επί και 1-1, εικόνα)

Έστω $f:X\to Y$ μια απεικόνιση. Θα λέμε ότι η f είναι

- ***επί*** *αν για κάθε $y\in Y$ υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$*
- ***ένα προς ένα*** *(συμβολικά 1-1) αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ με $x_1\neq x_2$ έπεται ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$.*

Παρατηρούμε ότι η f είναι 1-1 αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$ έπεται ότι $x_1=x_2$.

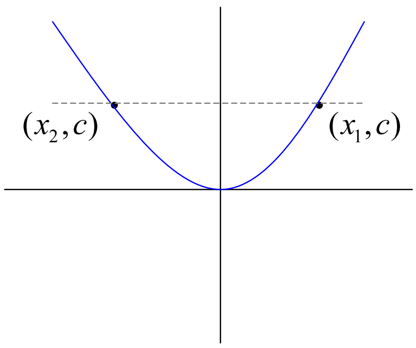
Η **εικόνα** $f(X)$ της $f:X\to Y$ είναι το σύνολο $\{f(x)\in Y\,|\,x\in X\}$. Η εικόνα της f συμβολίζεται και με imf. Παρατηρούμε ότι η f είναι επί αν και μόνο αν $f(X)=Y$.

Παραδείγματα

- Η απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=2x$, δεν είναι επί αφού, για παράδειγμα, δεν υπάρχει $x\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $f(x)=1$. Αυτή είναι 1-1 γιατί από τη σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ έπεται ότι $2x_1=2x_2$, δηλαδή $x_1=x_2$. Η εικόνα της είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων.

- Η απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to A, f(x)=2x,$ όπου A είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων είναι επί και 1-1.
- Η απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to\{1,-1\}, f(x)=\cos(x\pi)$, είναι επί. Αυτή δεν είναι 1-1 αφού, για παράδειγμα, $f(0)=f(2)$
- Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$, δεν είναι επί αφού δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x)=-1$. Επίσης η f δεν είναι 1-1 αφού, για παράδειγμα, $f(-2)=f(2)$. Η εικόνα της είναι το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

  Τα προηγούμενα συμπεράσματα έχουν γεωμετρικές ερμηνείες. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

  Παρατηρούμε ότι η οριζόντια διακεκομμένη ευθεία (της οποίας η εξίσωση είναι της μορφής $y=c,$ όπου c είναι μια θετική σταθερή) τέμνει την καμπύλη σε δυο σημεία. Δηλαδή υπάρχουν δυο διαφορετικά x που αντιστοιχίζουν στο ίδιο y και άρα η συνάρτηση $f(x)=x^2$ δεν είναι 1-1. Επίσης από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η εικόνα της συνάρτησης είναι ο πάνω ημιάξονας των y, δηλαδή είναι το σύνολο $\{y\in\mathbb{R} \mid y\ge 0\}$ των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.
- Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-3,$ είναι επί και 1-1. Πράγματι, αν $y\in\mathbb{R}$, τότε για $x=\dfrac{y+3}{5}$ έχουμε $f(x)=y$ και άρα η f είναι επί. Αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $5x_1-3=5x_2-3$ και επομένως $x_1=x_2$, δηλαδή η f είναι 1-1.

Ορισμός 5 (σύνθεση, αντίστροφη απεικόνιση)

- *Θεωρούμε απεικονίσεις* $f: X \to Y, g: W \to Z$ *τέτοιες ώστε* $f(X) \subseteq W$. *Τότε ορίζεται μια απεικόνιση* $g \circ f: X \to Z, (g \circ f)(x) = g(f(x))$. *Αυτή λέγεται η* ***σύνθεση*** *της f με τη g.*

  Παράδειγμα

  Για τις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3,$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$, έχουμε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-3) = (5x-3)^2 = 25x^2 - 30x + 9$. Στο παράδειγμα αυτό ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$. Για αυτή έχουμε $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 5x^2 - 3$.

- *Μια απεικόνιση* $f: X \to Y$ *λέγεται* ***αντιστρέψιμη*** *αν υπάρχει απεικόνιση* $g: Y \to X$ *τέτοια ώστε για κάθε* $x \in X$, $g(f(x)) = x$ *και για κάθε* $y \in Y, f(g(y)) = y$.

- *Στην περίπτωση που η f είναι αντιστρέψιμη, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδική g με τις προηγούμενες ιδιότητες. Η g αυτή λέγεται η* ***αντίστροφη*** *απεικόνιση της f και συμβολίζεται συχνά με* f^{-1}.

Παραδείγματα

- Η απεικόνιση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3,$ είναι αντιστρέψιμη. Πράγματι, θεωρώντας την απεικόνιση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \dfrac{y+3}{5}$, έχουμε

  $g(f(x)) = g(5x-3) = \dfrac{(5x-3)+3}{5} = x$ και

  $f(g(y)) = f(\dfrac{y+3}{5}) = 5\left(\dfrac{y+3}{5}\right) - 3 = y$.

- Η απεικόνιση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2,$ δεν είναι αντιστρέψιμη, γιατί αν υπήρχε $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε θέτοντας $x = \pm\sqrt{2}$ θα είχαμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες $g(f(\sqrt{2})) = \sqrt{2}, g(f(-\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$. Από αυτές παίρνουμε $g(0) = \sqrt{2}, g(0) = -\sqrt{2},$ δηλαδή $\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, που είναι άτοπο.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός 6 (άθροισμα και γινόμενο μιγαδικών)

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μίγαδικών αριθμών είναι το $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$, όπου $i^2=-1$.

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $a+bi$ με $a,b\in\mathbb{R}$, δηλαδή έχουμε $a+bi=c+di,$ όπου $a,b,c,d\in\mathbb{R},$ αν και μόνο αν $a=c$ και $b=d$.

Έστω $z,w\in\mathbb{C}$ με $z=a+bi$ και $w=c+di.$ Ορίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο μιγαδικών αριθμών ως εξής.

- *Πρόσθεση* $z+w=(a+c)+(b+d)i$.
- *Πολλαπλασιασμός* $zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$

  Παράδειγμα

  Αν $z=\sqrt{2}-5i$ και $w=1+3i$, τότε

  $$z+w=(\sqrt{2}+1)+(-5+3)i=(\sqrt{2}+1)+(-2)i$$

  $$zw=(\sqrt{2}+5\cdot 3)+(3\sqrt{2}-5)i=(\sqrt{2}+15)+(3\sqrt{2}-5)i\,.$$

Ορισμός 7 (αντίστροφος μιγαδικού)

Έστω $z=a+bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. (Από τώρα και στο εξής όταν γράφουμε $z=a+bi$ θα εννοούμε ότι $a,b\in\mathbb{R}$ ακόμα και αν δεν το αναφέρουμε ρητά). Τότε κάποιος από τους a,b είναι μη μηδενικός και άρα $a^2+b^2\neq 0$. *Ο μιγαδικός αριθμός* $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}i$ *ονομάζεται ο* ***αντίστροφος*** *του z και συμβολίζεται με* z^{-1}. Επισημαίνουμε ότι $zz^{-1}=z^{-1}z=1$.

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του $z=3-7i$ είναι ο $z^{-1}=\dfrac{3}{3^2+7^2}+\dfrac{7}{3^2+7^2}i=\dfrac{3}{58}+\dfrac{7}{58}i$

Ορισμός 8 (μέτρο μιγαδικού, συζυγής μιγαδικός)

- *Το* ***μέτρο*** *του* $z=a+bi$ *είναι ο πραγματικός αριθμός* $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- *Ο* ***συζυγής*** *του* $z=a+bi$ *είναι ο* $\overline{z}=a-bi$. *Παρατηρούμε ότι* $|z|^2=z\overline{z}$.

Παράδειγμα

Το μέτρο του $z = 3 - \frac{1}{2}i$ *είναι* $|z| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ *και ο συζυγής του είναι*

$\bar{z} = 3 + \frac{1}{2}i$.

Ορισμός 9 (τριγωνομετρική μορφή)

Έστω $z = a + bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και $\rho = |z|$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός θ τέτοιος ώστε

$$0 \le \theta < 2\pi, \cos\theta = \frac{a}{\rho}, \sin\theta = \frac{b}{\rho}.$$

Ο θ ονομάζεται το ***όρισμα*** *του z. Η παράσταση* $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ *ονομάζεται η* ***τριγωνομετρική μορφή*** *του z.*

Παράδειγμα

Για να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του $z = \sqrt{3} + i$, βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του

$$\rho = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

Για το όρισμα έχουμε $\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$ και άρα $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή $0 \le \theta < 2\pi$ έχουμε $\theta = \frac{\pi}{6}$. Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ορισμός 10 (βαθμός, διαίρεση)

Με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ και με $\mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων που έχουν συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

- *Έστω* $f(x) = f_n x^n + \ldots + f_1 x + f_0 \in \mathbb{F}[x]$. *Αν* $f_n \neq 0$, *θα λέμε ότι ο* ***βαθμός*** *του f(x) είναι n. Ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου ορίζεται να είναι το* $-\infty$.

- *Έστω* $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Θα λέμε ότι το f(x)* ***διαιρεί*** *το g(x) επί του* $\mathbb{F}$ *αν υπάρχει h(x) ∈F[x] τέτοιο ώστε g(x) = f(x)h(x).*

Παράδειγμα

Το x^2-1 διαιρεί το x^3+x^2-x-1 επί του $\mathbb{R}$ αφού $x^3+x^2-x-1=(x^2-1)(x+1)$.
Όμως το x^2+1 δεν διαιρεί το x^3+x^2-x-1 επί του $\mathbb{R}$ αφού σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $x^3+x^2-x-1=(x^2+1)h(x), h(x)\in\mathbb{R}[x]$. Αντικαθιστώντας το x με το i θα είχαμε $i^3+i^2-i-1=0 \Rightarrow -2-2i=0$, που είναι άτοπο.

Ορισμός 11 (ρίζα πολυωνύμου)

Ένας μιγαδικός αριθμός α λέγεται ***ρίζα*** *του πολυωνύμου* $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, *αν f(a) = 0.*

Παράδειγμα

Με πράξεις διαπιστώνεται ότι $(-1+i\sqrt{3})^3=8$. Άρα ο μιγαδικός αριθμός $-1+i\sqrt{3}$ είναι μια ρίζα του πολυωνύμου x^3-8.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΣΥΝΟΛΑ

Πρόταση 1 (τομή και ένωση)

Έστω A, B, C *σύνολα. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.*

$A\cap A=A$	$A\cup A=A$
$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup\varnothing=A$

Πρόταση 2 (συμπλήρωμα συνόλου)

Έστω S *ένα σύνολο,* $A\subseteq S$ *και* $B\subseteq S$. *Με* A^c *συμβολίζουμε το* $S-A$. *Τότε ισχύουν οι σχέσεις*

$$\left(A\cap B\right)^c=A^c\cup B^c \text{ και } \left(A\cup B\right)^c=A^c\cap B^c.$$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Πρόταση 3 (σύνθεση απεικονίσεων)

Έστω $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ *δυο απεικονίσεις. Ισχύουν τα εξής.*

1. *Αν οι f και g είναι επί , τότε και σύνθεση* $g \circ f$ *είναι επί.*
2. *Αν οι f και g είναι 1-1, τότε και η σύνθεση* $g \circ f$ *είναι 1-1.*
3. *Αν οι f και g είναι 1-1 και επί, τότε και η σύνθεση* $g \circ f$ *είναι 1-1 και επί.*

Πρόταση 4 (κριτήριο ύπαρξης αντίστροφης απεικόνισης)

Μια απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί.

Πρόταση 5

Έστω $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ *δυο απεικονίσεις που είναι 1-1 και επί. Τότε η σύνθεση* $g \circ f : X \to Z$ *είναι 1-1 και επί και ισχύει* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ΕΠΑΓΩΓΗ

Η **μαθηματική επαγωγή** ή απλά **επαγωγή** είναι μια μέθοδος απόδειξης που μπορεί να περιγραφεί ως εξής.

Έστω ότι για κάθε φυσικό αριθμό n έχουμε μια πρόταση P(n), που αφορά τον n, τέτοια ώστε
1. *η P(1) αληθεύει, και*
2. *για κάθε n, αν αληθεύει η P(n) τότε αληθεύει και η P(n+1).*

Τότε συμπεραίνουμε ότι η πρόταση P(n) αληθεύει για κάθε n.

Παράδειγμα

Να αποδειχτεί ότι για φυσικό αριθμό *n* έχουμε

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Λύση

Για $n = 1$, η αποδεικτέα σχέση γίνεται $-1 = -1\frac{1 \cdot 2}{2}$, που βέβαια αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι για συγκεκριμένο *n* ισχύει η ισότητα

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

και θα αποδείξουμε την

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^{n+1} (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Έχουμε

$$-1^2+2^2-3^2+\ldots+(-1)^{n+1}\left(n+1\right)^2=$$
$$\left(-1^2+2^2-3^2+\ldots+(-1)^n n^2\right)+(-1)^{n+1}\left(n+1\right)^2=$$
$$(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+1}\left(n+1\right)^2=$$
$$(-1)^{n+1}\frac{-n(n+1)+2(n+1)^2}{2}=$$
$$(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Πρόταση 6 (μέτρο μιγαδικού αριθμού)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Τότε*

1. $|z|=|-z|$
2. $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$
3. *αν* $z_2\neq 0$, *τότε* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$
4. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Παράδειγμα

Για να βρούμε το μέτρο του $\frac{1}{2+3i}+\frac{4-5i}{1-i}$ έχουμε

$$\frac{1}{2+3i}+\frac{4-5i}{1-i}=\frac{1-i+\left(4-5i\right)\left(2+3i\right)}{\left(2+3i\right)\left(1-i\right)}=\frac{24+i}{\left(2+3i\right)\left(1-i\right)}$$

και επομένως

$$\left|\frac{1}{2+3i}+\frac{4-5i}{1-i}\right|=\left|\frac{24+i}{\left(2+3i\right)\left(1-i\right)}\right|=\frac{|24+i|}{\left|\left(2+3i\right)\right|\left|\left(1-i\right)\right|}=$$
$$\frac{\sqrt{24^2+1^2}}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{577}{26}}.$$

Πρόταση 7 (συζυγείς μιγαδικοί)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Τότε*

1. $|z|^2=z\bar{z}$

2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
4. *αν* $z_2 \neq 0$, *τότε* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Πρόταση 8 (τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού)

Έστω $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *και* $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. *Τότε έχουμε*

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

και αν $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

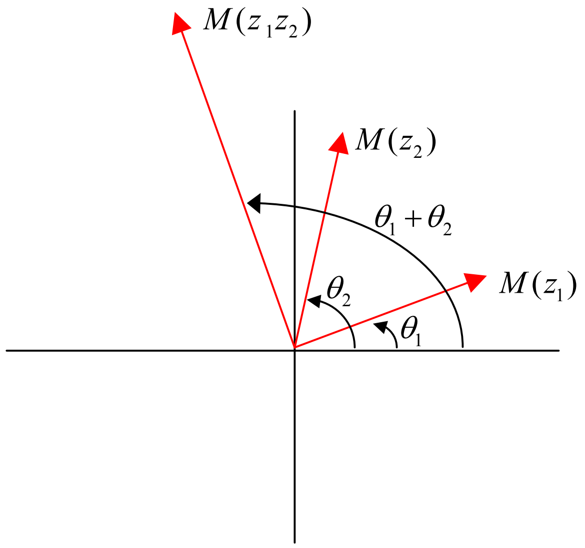
Θεώρημα 9 (του De Moivre)

Έστω $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$. *Τότε για κάθε ακέραιο αριθμό* n *έχουμε*

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Γεωμετρική ερμηνεία γινομένου μιγαδικών

Από την Πρόταση 8 βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία: στο γινόμενο $z_1 z_2$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα που το μέτρο του είναι το γινόμενο $|z_1||z_2|$ και σχηματίζει γωνία με τον άξονα των x ίση με $\theta_1 + \theta_2$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Θεώρημα 10 (n – στές ρίζες μιγαδικού)

Έστω $a \in \mathbb{C}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$. *Η εξίσωση* $z^n = a$ *έχει* n *διακεκριμένες λύσεις που δίνονται από τον τύπο*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

όπου ρ *είναι το μέτρο του* a *και* θ *είναι το όρισμά του.*

Παράδειγμα

Για να λύσουμε την εξίσωση $z^3 = i$ έχουμε

$$z^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \; k = 0, 1, 2.$$

Άρα οι λύσεις είναι

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$$

Σημείωση. Οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ αντιστοιχούν στα σημεία του επιπέδου που είναι κορυφές του κανονικού n - γώνου.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πρόταση 11 (βαθμός πολυωνύμου)

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Τότε* $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$, *όπου* $\deg f(x)$ *είναι ο βαθμός του f(x).*

Πρόταση 12 (αλγόριθμος διαίρεσης)

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ *με* $g(x) \neq 0$. *Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα* $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ *τέτοια ώστε* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ *και* $\deg r(x) < g(x)$.

Πρόταση 13 (ρίζες πολυωνύμων)

Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ *και* $a \in \mathbb{F}$. *Ισχύουν τα εξής*

1. *Το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $f(x)$ *με το* $x-a$ *είναι το* $f(a)$.
2. *Το α είναι ρίζα του* $f(x)$ *αν και μόνο αν το* $x-a$ *διαιρεί το* $f(x)$ *επί του* $\mathbb{F}$.
3. *Αν* $f(x)\neq 0$, *τότε το πλήθος των ριζών του είναι το πολύ* $\deg f(x)$.

Παράδειγμα

Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ με το $x-2$ είναι 3. Τότε από το 1 της προηγούμενης Πρότασης έχουμε $f(2)=3$, δηλαδή $2^3+a2^2+2\cdot 2-1=3 \Rightarrow a=-2$.

Θεώρημα 14 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)

Κάθε πολυώνυμο θετικού βαθμού με συντελεστές από το $\mathbb{C}$ *έχει τουλάχιστον μια μιγαδική ρίζα.*

Θεώρημα 15 (πλήθος ριζών πολυωνύμου)

Έστω $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ *ένα πολυώνυμο θετικού βαθμού με* $\deg f(x)=n$. *Τότε υπάρχουν* $c,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ *τέτοια ώστε* $f(x)=c(x-a_1)\ldots(x-a_n)$.

Πρόταση 16

Αν το $z\in\mathbb{C}$ *είναι ρίζα ενός πολυωνύμου που έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής* $\overline{z}$ *είναι ρίζα του πολυωνύμου αυτού.*

Για συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής των προηγούμενων αποτελεσμάτων παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 11,12,13.

Θεώρημα 17 (σχέσεις του Vieta)

Αν το $f(x)=f_nx^n+\ldots+f_1x+f_0$ *είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και* $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ *είναι οι ρίζες του, τότε*

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} a_{i_1}\ldots a_{i_k} = (-1)^k\frac{f_{n-k}}{f_n}.$$

Παράδειγμα

Αν a_1,a_2,a_3 είναι οι ρίζες του x^3-4x^2-3x-1, τότε

$$a_1+a_2+a_3=4$$
$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-3$$
$$a_1a_2a_3=1$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι αν A,B είναι σύνολα, τότε $A \cup B - A \cap B = (A-B) \cup (B-A)$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2 έχουμε

$$x \in A \cup B - A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ \kappa\alpha\iota \\ x \notin A \cap B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ ή } x \in B \\ \kappa\alpha\iota \\ x \notin A \text{ ή } x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in A \ \kappa\alpha\iota\ x \notin B \\ \text{ή} \\ x \in B \ \kappa\alpha\iota\ x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A - B \\ \text{ή} \\ x \in B - A \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A-B) \cup (B-A).$$

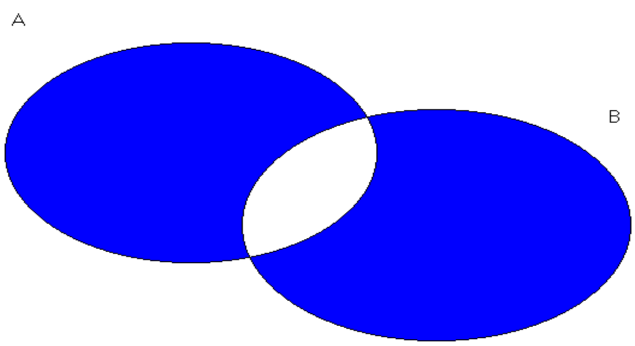
Άρα $A \cup B - A \cap B = (A-B) \cup (B-A)$.

Σημείωση

- Η λύση θα μπορούσε να διατυπωθεί με τη βοήθεια της Πρότασης 2 για $S = A \cup B$ ως εξής.

$$A \cup B - A \cap B = (A \cap B)^c = A^c \cup B^c =$$
$$(A \cup B - A) \cup (A \cup B - B) = (B-A) \cup (A-B).$$

- Το σύνολο $A \cup B - A \cap B = (A-B) \cup (B-A)$ αντιστοιχεί στο χρωματισμένο τμήμα του διαγράμματος του Venn. Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται ότι η προηγούμενη ισότητα είναι αναμενόμενη.



Άσκηση 2

1. *Να βρεθεί η εικόνα* $f(\mathbb{R})$ *της συνάρτησης* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-5.$
2. *Να βρεθεί η εικόνα της συνάρτησης*

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in\mathbb{R}, a>0.$$

Στη συνέχεια να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση

$$h:[\frac{-b}{2a},\infty)\to g(\mathbb{R}), h(x)=g(x),$$

είναι αντιστρέψιμη. Να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία.

Λύση

1. *Πρώτη λύση*. Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$f(x)=x^2-x-5=\left(x^2-2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2-5=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}\geq-\frac{21}{4}.$$

Άρα $f(\mathbb{R})=[-\frac{21}{4},\infty).$

Δεύτερη λύση. Ένα $y\in\mathbb{R}$ ανήκει στην εικόνα της $f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^2-x-5=y$, δηλαδή αν και μόνο αν το τριώνυμο $x^2-x-(5+y)$ έχει μια πραγματική ρίζα. Η διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\big(-(5+y)\big)$ του τριωνύμου είναι μη αρνητική αν και μόνο αν $1+4(5+y)\geq 0\Leftrightarrow y\geq-\frac{21}{4}$. Άρα $f(\mathbb{R})=[-\frac{21}{4},\infty).$

2. Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στην πρώτη λύση βρίσκουμε

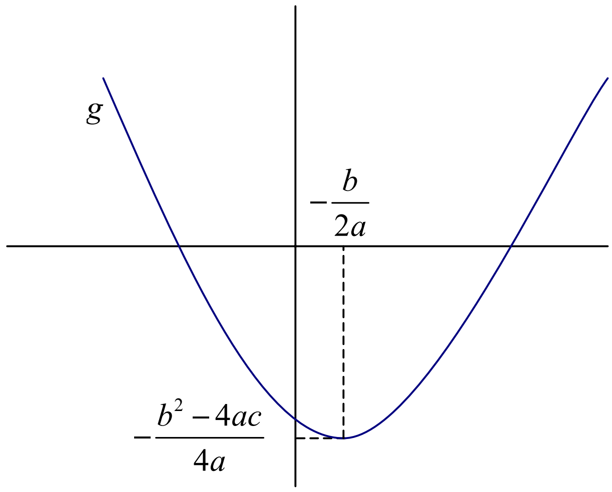
$$g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Επειδή $a>0$, συμπεραίνουμε ότι $g(\mathbb{R})=[-\frac{b^2-4ac}{4a},\infty)$.

Επειδή η h είναι επί, για να δείξουμε ότι αυτή είναι αντιστρέψιμη αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1-1 (βλ. Πρόταση 4). Έστω $x_1,x_2\in[\frac{-b}{2a},\infty)$ με $x_1\neq x_2$ και $h(x_1)=h(x_2)$. Θα φθάσουμε σε άτοπο. Έχουμε

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow ax_1^{\,2} + bx_1 + c = ax_2^{\,2} + bx_2 + c \Rightarrow$$
$$a(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}) + b(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$
$$a(x_1 + x_2) + b \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Επειδή όμως $x_1, x_2 \in [\frac{-b}{2a}, \infty)$, βλέπουμε ότι από τη σχέση $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ έπεται ότι $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Αυτό είναι άτοπο αφού $x_1 \neq x_2$.



Η συνάρτηση h είναι ο περιορισμός της g στο υποσύνολο $[\frac{-b}{2a}, \infty)$. Η γραφική παράσταση της h είναι το ‘δεξιό μισό’ της γραφικής παράστασης της g. Από το σχήμα φαίνεται ότι οι g και h έχουν την ίδια εικόνα (το τμήμα του άξονα των y που είναι πάνω από το $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ συμπεριλαμβανομένου του σημείου αυτού), αλλά μόνο η h είναι 1-1.

Άσκηση 3

Εξετάστε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, είναι 1-1 ή/και επί και επιπλέον προσδιορίστε την εικόνα της.

Λύση

Για το 1-1: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{x_2}{x_2^2+1}\Leftrightarrow$$
$$x_1x_2^2+x_1=x_1^2x_2+x_2\Leftrightarrow x_1x_2(x_1-x_2)=x_1-x_2\Leftrightarrow$$
$$x_1x_2=1.$$

Επομένως η $f(x)$ δεν είναι 1-1, αφού επιλέγοντας $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2$ με $x_1x_2=1$ έχουμε $f(x_1)=f(x_2)$. Για παράδειγμα, αν $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$, τότε $f(x_1)=f(x_2)=2/5$.

Για το επί: Έστω $y\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ με $y=f(x)$. Έχουμε

$$y=f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Leftrightarrow yx^2-x+y=0\Leftrightarrow$$
$$\Delta=1-4y^2\geq 0\Leftrightarrow y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Άρα η εικόνα της $f(x)$ είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ και συνεπώς η $f(x)$ δεν είναι επί.

Άσκηση 4

1. *Αποδείξτε ότι η απεικόνιση* $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ *δεν είναι αντιστρέψιμη.*
2. *Αποδείξτε ότι η απεικόνιση* $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}, f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ *είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφή της.*

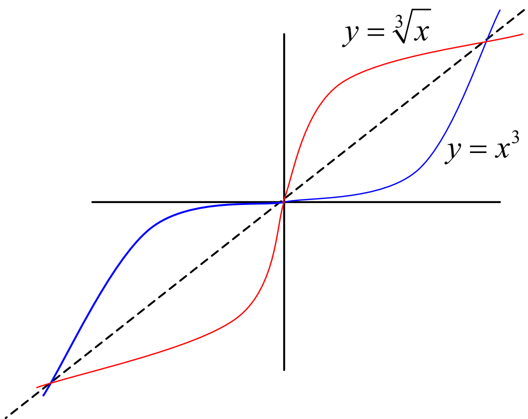
Λύση

1. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει x με $f(x)=1$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $x-1=x-2$, που είναι άτοπο. Άρα η $f(x)$ δεν είναι επί και άρα δεν είναι αντιστρέψιμη σύμφωνα με την Πρόταση 4.
2. Θα βρούμε μια απεικόνιση $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$, τέτοια ώστε $(g\circ f)(x)=x,\ (f\circ g)(y)=y$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2\}, y\in\mathbb{R}-\{1\}$.

   Έστω $y\in\mathbb{R}-\{1\}$. Λύνοντας τη σχέση $\frac{x-1}{x-2}=y$ ως προς x βρίσκουμε $\frac{x-1}{x-2}=y\Rightarrow x(y-1)=2y-1\Rightarrow x=\frac{2y-1}{y-1}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}, g(y)=\frac{2y-1}{y-1}$. Πρώτα από όλα πρέπει να επαληθεύσουμε ότι $g(y)\in\mathbb{R}-\{2\}$ για κάθε $y\in\mathbb{R}-\{1\}$. Πράγματι, αν

$g(y)=\dfrac{2y-1}{y-1}=2 \Rightarrow 2y-1=2y-2 \Rightarrow -1=-2,$ άτοπο. Για τη σύνθεση $g\circ f$ έχουμε $\left(g\circ f\right)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=\dfrac{2\dfrac{x-1}{x-2}-1}{\dfrac{x-1}{x-2}-1}=\dfrac{2x-2-x+2}{x-1-x+2}=x$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η σχέση $\left(f\circ g\right)(y)=y$. Άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι η $g(x)$.

Σημείωση Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος που συχνά είναι αποτελεσματικός: Έστω ότι $y=f(x)$ είναι μια αντιστρέψιμη συνάρτηση. Λύνουμε, αν αυτό είναι δυνατό, τη σχέση $y=f(x)$ ως προς x. Στην νέα σχέση $x=g(y)$ εναλλάσσουμε τα x,y παίρνοντας $y=g(x)$. Η συνάρτηση $y=g(x)$ είναι η ζητούμενη αντίστροφη. Ουσιαστικά ακολουθήσαμε αυτή την ιδέα στη λύση της προηγούμενης άσκησης. Ένα άλλο παράδειγμα υπάρχει στη Λυμένη Άσκηση 6. Επισημαίνουμε ότι από τον παραπάνω τρόπο φαίνεται ότι οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Στο επόμενο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της $y=x^3$ και της αντίστροφής της $y=\sqrt[3]{x}$



Άσκηση 5

Εξετάστε για ποια $k\in\mathbb{R}$ η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+3y,kx+6y),$ είναι 1-1 και επί.

Λύση

Ας εξετάσουμε πρώτα το 1-1. Έστω ότι $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$. Έχουμε

$$(x_1+3y_1, kx_1+6y_1)=(x_2+3y_2, kx_2+6y_2)\Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_1+3y_1=x_2+3y_2 \\ kx_1+6y_1=kx_2+6y_2 \end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases} kx_1+3ky_1=kx_2+3ky_2 \\ kx_1+6y_1=kx_2+6y_2 \end{cases}\Rightarrow$$
$$3(2-k)y_1=3(2-k)y_2\Rightarrow$$
$$(2-k)y_1=(2-k)y_2.$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

- Αν $k\neq 2$, τότε $(2-k)y_1=(2-k)y_2\Rightarrow y_1=y_2$. Από τη σχέση $x_1+3y_1=x_2+3y_2$ παίρνουμε $x_1=x_2$, οπότε $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, δηλαδή η απεικόνιση είναι 1-1.
- Έστω ότι $k=2$. Τότε η δοσμένη απεικόνιση είναι η $f(x,y)=(x+3y,2x+6y)$ που δεν είναι 1-1, αφού $f(0,0)=f(3,-1)$.

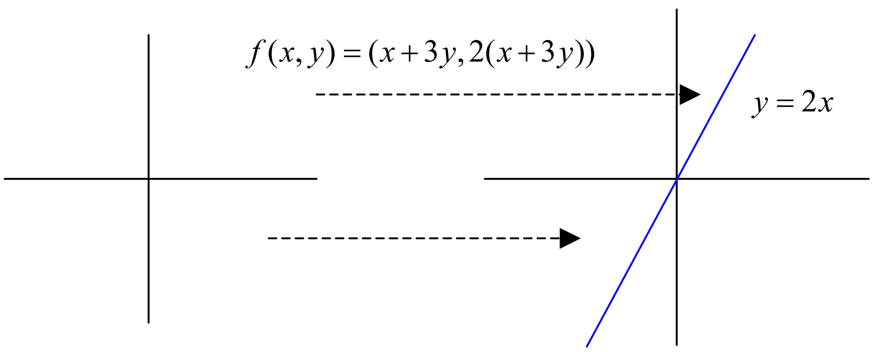
Για το επί: Επειδή μας ενδιαφέρει αν η απεικόνιση είναι 1-1 και επί, υποθέτουμε ότι $k\neq 2$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι επί. Έστω $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$f(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow (x+3y,kx+6y)=(a,b)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x+3y=a \\ kx+6y=b. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύστημα έχει λύση (για $k\neq 2$). Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος με 2 και αφαιρώντας από τη δεύτερη βρίσκουμε $(k-2)x=b-2a\Rightarrow x=\dfrac{b-2a}{k-2}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $y=\dfrac{a-x}{3}=\dfrac{a-\dfrac{b-2a}{k-2}}{3}$. Άρα η απεικόνιση είναι επί.

Τελικά βλέπουμε ότι η $f(x,y)$ είναι 1-1 και επί αν και μόνο αν $k\neq 2$.

Σημείωση. Αν $k=2$, τότε η f απεικονίζει το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ σε μια ευθεία, την $y=2x$.



Άσκηση 6

Υπενθυμίζουμε πρώτα ένα ορισμό. Έστω $f: X \to X$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών ταυτίζονται. Για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε επαγωγικά μια συνάρτηση $f^{(n)}: X \to X$ ως εξής: $f^{(1)} = f$, και αν $n \geq 2$, τότε $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$. Βλέπουμε ότι $f^{(n)} = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\ \text{φορές}}$, που είναι η σύνθεση της f με τον εαυτό της n φορές.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + 2$. *Να βρεθεί ένας ΄τύπος' για τη* $f^{(n)}$. *Επίσης εξετάστε αν η* $f^{(n)}$ *είναι αντιστρέψιμη και σε θετική περίπτωση υπολογίστε την αντίστροφή της.*

Λύση

Για να βρούμε ένα γενικό τύπο για τη $f^{(n)}$ ας κάνουμε μερικούς υπολογισμούς για n = 1,2,3. Έχουμε

$$f(x) = 5x + 2$$
$$f^{(2)}(x) = f(f(x)) = 5f(x) + 2 = 5(5x+2) + 2 = 5^2 x + 2(5+1)$$
$$f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x)) = 5f^{(2)}(x) + 2 = 5\left(5^2 x + 2(5+1)\right) + 2 = 5^3 x + 2(5^2 + 5 + 1).$$

Δηλαδή,

για $n = 1$, $f(x) = 5x + 2$

για $n = 2$, $f^{(2)}(x) = 5^2 x + 2(5+1)$

για $n = 3$, $f^{(3)}(x) = 5^3 x + 2(5^2 + 5 + 1)$.

Βασιζόμενοι σε αυτά, εικάζουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε

$$f^{(n)}(x) = 5^n x + 2(5^{n-1} + \ldots + 5 + 1).$$

Αποδεικνύουμε τον τύπο αυτό με επαγωγή. Η περίπτωση n = 1 προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο τύπος για συγκεκριμένο n. Έχουμε

$$f^{(n+1)}(x) = f\left(f^{(n)}(x)\right) =$$
$$5f^{(n)}(x) + 2 =$$
$$5\left(5^n x + 2(5^{n-1} + \ldots + 5 + 1)\right) + 2 =$$
$$5^{n+1} x + 2(5^n + \ldots + 5 + 1).$$

Άρα αποδείξαμε τον τύπο.

Τώρα εξετάζουμε αν η $f^{(n)}$ είναι 1-1. Έχουμε

$$f^{(n)}(x_1)=f^{(n)}(x_2)\Rightarrow 5^n x_1+2(5^{n-1}+\ldots+5+1)=5^n x_2+2(5^{n-1}+\ldots+5+1)$$
$$\Rightarrow 5^n x_1=5^n x_2\Rightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς είναι 1-1.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η $f^{(n)}$ είναι 1-1 παρατηρώντας ότι η f είναι 1-1 και εφαρμόζοντας την Πρόταση 3 2).

Τέλος για να βρούμε έναν τύπο για την αντίστροφη απεικόνιση της $f^{(n)}$, δεν έχουμε παρά να λύσουμε τη σχέση $y=f^{(n)}(x)=5^n x+2(5^{n-1}+\ldots+5+1)$ ως προς x. Έχουμε $x=\dfrac{y-2\left(5^{n-1}+\ldots+5+1\right)}{5^n}=\dfrac{1}{5^n}y-2\dfrac{5^{n-1}+\ldots+5+1}{5^n}$. Άρα η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{5^n}x-2\dfrac{5^{n-1}+\ldots+5+1}{5^n}$.

Άσκηση 7

Έστω $z=1+i\sqrt{3}, w=\sqrt{3}-i.$

1. *Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του* $\dfrac{z}{w}$.
2. *Να βρεθούν οι ακέραιοι k τέτοιοι ώστε* $\dfrac{z}{w^k}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}.$

Λύση

1. Παρατηρούμε ότι $iw=z$ και άρα $\dfrac{z}{w}=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$, που είναι η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή.

Σημείωση. Η προηγούμενη λύση βασίστηκε στην 'τυχερή' παρατήρηση ότι $iw=z$. Ένας πιο γενικός και συστηματικός τρόπος αντιμετώπισης της άσκησης είναι ο ακόλουθος.

Έχουμε $|z|=2, |w|=2.$ Επίσης

$$z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$w=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Από την Πρόταση 8 συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{z}{w}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

Η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $\dfrac{z}{w}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

2. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9 και την Πρόταση 8 παίρνουμε

$$\frac{z}{w^k}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^k}=$$

$$\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2^k\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}k\right)\right)}=$$

$$2^{1-k}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\right)\right).$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{z}{w^k}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\right)\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$2+k\neq 6n,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

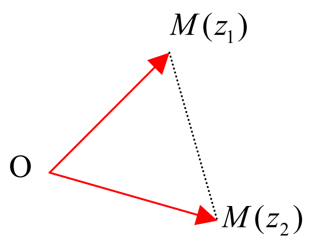
$$k\neq 6n-2,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Άσκηση 8

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, *τέτοιοι ώστε* $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$. *Δείξτε ότι* $z_1^{\ 3}+z_2^{\ 3}=0$.

Λύση

Ας δούμε μια λύση που είναι γεωμετρική. Από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από την αρχή των αξόνων O και τα πέρατα $M(z_1),M(z_2)$ των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς z_1,z_2 είναι ισόπλευρο.



Άρα η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM(z_1)},\overrightarrow{OM(z_2)}$ είναι π/3. Έστω

$w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Από τη γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών

συμπεραίνουμε ότι έχουμε $z_1=wz_2$ (ή $z_2=wz_1$). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$z_1^3 + z_2^3 = w^3 z_2^3 + z_2^3 = (w^3+1)z_2^3 =$$
$$\left(\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 + 1\right) z_2^3 =$$
$$\left(\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) + 1\right) z_2^3 =$$
$$(-1+1)z_2^3 = 0.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $z_1^3 + z_2^3 = 0$.

Άσκηση 9

Έστω $z = \cos\dfrac{2\pi}{2004} + i\sin\dfrac{2\pi}{2004}$.

1. *Αποδείξτε ότι* $1 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2000} = 0$.
2. *Αποδείξτε ότι για κάθε* $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, *έχουμε* $\left|z^{n_1} + \ldots + z^{n_k}\right| \le k$.

Λύση

1. Θέτοντας $w = z^4$ παρατηρούμε ότι

$$w^{501} = \left(z^4\right)^{501} = z^{2004} = \left(\cos\frac{2\pi}{2004} + i\sin\frac{2\pi}{2004}\right)^{2004} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$ σύμφωνα

με το Θεώρημα του De Moivre. Άρα έχουμε

$$1 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2000} = 1 + w + w^2 + \ldots + w^{500} = \frac{w^{501}-1}{w-1} = \frac{1-1}{w-1} = 0.$$

Σημείωση. Έχουμε $w - 1 \ne 0$.

2. Επειδή $|z| = 1$, έχουμε $\left|z^n\right| = 1$ για κάθε ακέραιο n. Άρα από την τριγωνική

ανισότητα παίρνουμε $\left|z^{n_1} + \ldots + z^{n_k}\right| \le \left|z^{n_1}\right| + \ldots + \left|z^{n_k}\right| = 1 + \ldots + 1 = k$.

Άσκηση 10

Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z τέτοιων ώστε $4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 4\,\mathrm{Im}(z) = 58$.

Λύση

Θέτοντας $z = x + yi$ έχουμε

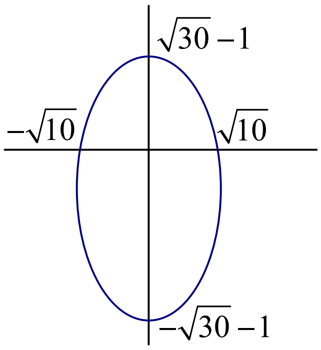
$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi, \quad \mathrm{Im}(z) = y.$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική ισότητα βρίσκουμε $6x^2+2y^2+4y=58$.

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$6x^2+2y^2+4y=58 \Leftrightarrow 6x^2+2(y^2+2y+1-1)=58 \Leftrightarrow$$
$$6x^2+2(y+1)^2=60 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10}+\frac{(y+1)^2}{30}=1.$$

Συνεπώς το ζητούμενο σύνολο είναι μια έλλειψη όπως φαίνεται στο σχήμα.



Άσκηση 11

Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)=x^4-6x^3-2x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$, *αν γνωρίζουμε ότι μια ρίζα του είναι ο μιγαδικός αριθμός* $2+i$

Λύση

Από την Πρόταση 16 συνάγουμε ότι και ο $2-i$ είναι ρίζα του $f(x)$. Από το Θεώρημα 15 έπεται ότι το πολυώνυμο $(x-(2+i))(x-(2-i))=x^2-4x+5$ διαιρεί το $f(x)$ επί του $\mathbb{C}$. Πραγματοποιώντας τη διαίρεση αυτή κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι $f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-2x-15)+(a-50)x+75+b.$ Επειδή το υπόλοιπο οφείλει να είναι μηδέν, έχουμε

$$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-2x-15).$$

Για να βρούμε τις άλλες ρίζες του $f(x)$ λύνουμε την εξίσωση $x^2-2x-15=0$ και βρίσκουμε $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(-15)}}{2}=5,-3.$

Τελικά οι ρίζες είναι οι $2+i, 2-i, 5, -3$.

Άσκηση 12

Αποδείξτε ότι το x^2-2x-1 *διαιρεί το* $f(x)=x^3+ax+b\in\mathbb{R}[x]$ *αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του f(x) με το* $x-1$ *(αντίστοιχα,* $x-2$*) είναι –6 (αντίστοιχα –4).*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 13 και την υπόθεση έχουμε τις σχέσεις

$f(1)=1+a+b=-6$

$f(2)=8+2a+b=-4.$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $a=-5, b=-2$, οπότε $f(x)=x^3-5x-2$. Κάνοντας τη διαίρεση του x^3-5x-2 με το x^2-2x-1 βρίσκουμε μηδενικό υπόλοιπο,

$x^3-5x-2=\left(x^2-2x-1\right)\left(x+2\right)$.

Άσκηση 13

Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ενός πολυωνύμου $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ με τα $x-2$ και $x-3$ είναι αντίστοιχα 4,5, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-2)(x-3)$.

Λύση

Από τον Αλγόριθμο Διαίρεσης έχουμε $f(x)=(x-2)(x-3)q(x)+r(x)$ και το ζητούμενο υπόλοιπο $r(x)$ έχει βαθμό το πολύ 1. Άρα είναι της μορφής $r(x)=ax+b$. Από την υπόθεση και την Πρόταση 13 έχουμε $f(2)=4, f(3)=5$. Θέτοντας διαδοχικά $x=2$ και $x=3$ στη σχέση $f(x)=(x-2)(x-3)+ax+b$ παίρνουμε το σύστημα

$$2a+b=4$$
$$3a+b=5.$$

Άρα $a=1, b=2$ και το ζητούμενο υπόλοιπο είναι $x+2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες;

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+6x$
2. $g:[-3,\infty)\to[-9,\infty), f(x)=x^2+6x$
3. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^6+6x^2-10$

Υπόδειξη Η f δεν είναι επί (βλ. Λυμένη Άσκηση 2), η g είναι αντιστρέψιμη (βλ. Λυμένη Άσκηση 2), και η h δεν είναι 1-1 αφού $h(1)=h(-1)$.

Άσκηση 2

Εξετάστε για ποια $k \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω απεικονίσεις είναι 1-1.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = kx + 3$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, kx + 10y).$

Υπόδειξη Για το 2 βλ. Λυμένη Άσκηση 5. **Απάντηση** 1. $k \neq 0$, 2. $k \neq 5$.

Άσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, x + y)$. Για τη σύνθεση $f^{(2006)}$ βρείτε έναν τύπο της μορφής $f^{(2006)}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ με συγκεκριμένα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη Για το ζητούμενο τύπο υπολογίστε τις συνθέσεις $f^{(2)}, f^{(3)}$. Τί παρατηρείτε; Αποδείξτε έναν γενικό τύπο με επαγωγή (βλέπε Λυμένη Άσκηση 5).

Άσκηση 4

Να λυθεί η εξίσωση $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ και να γίνει η γραφική παράσταση των λύσεων.

Υπόδειξη $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = \left(z^2\right)^3 + \left(z^2\right)^2 + z^2 + 1 = \dfrac{z^8 - 1}{z^2 - 1}$. Εφαρμόστε το Θεώρημα 10.

Απάντηση Οι λύσεις είναι $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, i, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -i, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις 6 κορυφές του κανονικού οκταγώνου που δεν βρίσκονται πάνω στον άξονα των x.

Άσκηση 5

Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z τέτοιων ώστε

1. $4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 = 60.$
2. $|z - \alpha| = |z - \beta|$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \beta.$

Υπόδειξη 1.Βλ. Λυμένη Άσκηση 10. **Απάντηση** 1. Πρόκειται για την έλλειψη $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{30} = 1$. 2. Από την υπόθεση έπεται ότι το σημείο $M(z)$ ισαπέχει από τα σημεία

$M(\alpha), M(\beta)$. Άρα το σύνολο των $M(z)$ είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $M(\alpha), M(\beta)$.

Άσκηση 6

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, τέτοια ώστε $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in \mathbb{R}$ έχουμε $|z_1 + rz_2| = |z_1 - rz_2|$.

Υπόδειξη Αποδείξτε ότι η αποδεικτέα σχέση ισοδυναμεί με την: για κάθε $r \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{z_1}{z_2} + r\right|^2 = \left|\frac{z_1}{z_2} - r\right|^2$, και αυτή ισοδυναμεί με τη $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι από την υπόθεση της άσκησης έπεται ότι $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η δύναμη $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2006}$.

Υπόδειξη $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2006} = \ldots$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του de Moivre. **Απάντηση** i.

Άσκηση 8

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ με το $x-1$ και $x-2$ είναι αντίστοιχα 2,3, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-1)(x-2)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 13. **Απάντηση** $x+1$

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = x^3 + ax^2 + 43x - 65$ είναι η $x = 5$. Να βρεθούν οι άλλες ρίζες.

Υπόδειξη Από τη σχέση $f(5) = 0$ παίρνουμε $a = -11$. Στη συνέχεια διαιρούμε το $f(x)$ με το $x - 5$. **Απάντηση** $3 \pm 2i$.

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)=x^4-8x^3+39x^2-62x+a$ αν γνωρίζουμε ότι μια από αυτές είναι η $3-4i$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 11. Απάντηση $1\pm i, 3\pm 4i$.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικά Συστήματα

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα υπενθυμίσουμε πως να λύνουμε γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο του Gauss. Η μέθοδος αυτή είναι από τους πιο σημαντικούς αλγορίθμους της Γραμμικής Άλγεβρας και βρίσκει εφαρμογή σε πολλά προβλήματα, όπως είναι ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα, ο υπολογισμός της τάξης πίνακα, η εύρεση βάσεων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ κλπ. Εδώ μας ενδιαφέρει περισσότερο η κατανόηση αυτής της μεθόδου μέσω παραδειγμάτων. Θα επιστρέψουμε στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα γίνει μια πιο συστηματική μελέτη του.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στα επόμενα με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 1 (γραμμικά συστήματα)

- *Μια εξίσωση λέγεται* ***γραμμική*** *υπεράνω του $\mathbb{F}$, αν είναι της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, όπου οι συντελεστές $a_1,\ldots,a_n$ και όρος b είναι στοιχεία του $\mathbb{F}$ και οι $x_1,\ldots,x_n$ είναι άγνωστοι.*

Στην περίπτωση που το πλήθος των αγνώστων είναι μικρό, χρησιμοποιούμε συχνά x, y, z στη θέση των x_1, x_2, x_3.

Παράδειγμα
Η εξίσωση $2x - y + \sqrt{3}z = 10$ είναι γραμμική. Οι εξισώσεις $2x^2 - y + \sqrt{3}z = 10,\ 2xy - y + \sqrt{3}z = 10$ δεν είναι γραμμικές.

Παρατηρούμε ότι σε μια γραμμική εξίσωση δεν υπάρχουν όροι της μορφής $x^2, x^3, \ldots$ ούτε της μορφής $xy, xy^2, x^4y^3z^5\ldots$.

- *Ένα* ***γραμμικό σύστημα*** *υπεράνω του $\mathbb{F}$ είναι ένα σύστημα εξισώσεων στο οποίο κάθε εξίσωση είναι γραμμική υπεράνω του $\mathbb{F}$.*

Συνεπώς κάθε γραμμικό σύστημα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

όπου οι m,n είναι θετικοί ακέραιοι. Βλέπουμε ότι το σύστημα αυτό έχει m εξισώσεις και n αγνώστους. Ένας σύντομος τρόπος γραφής του συστήματος αυτού είναι

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\ldots,m.$$

Οι αριθμοί a_{ij} λέγονται οι **συντελεστές** του συστήματος και οι αριθμοί b_j λέγονται οι **σταθεροί όροι** του συστήματος.

- *Μια **λύση** του παραπάνω συστήματος είναι μια διατεταγμένη n-άδα $\left(k_1,\ldots,k_n\right)\in\mathbb{F}^n$ τέτοια ώστε αν θέσουμε $x_1=k_1,\ldots,x_n=k_n$, τότε ικανοποιείται κάθε μια από τις εξισώσεις.*

Με άλλα λόγια μια λύση του συστήματος είναι μια διατεταγμένη n-άδα $\left(k_1,\ldots,k_n\right)\in\mathbb{F}^n$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1n}k_n&=b_1\\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2n}k_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\ldots+a_{mn}k_n&=b_m. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε ότι μια λύση είναι $(x_1,\ldots,x_n)=(k_1,\ldots,k_n)$.

Παράδειγμα

Μια λύση του γραμμικού συστήματος $\begin{matrix}6x-2y+5z=22\\2x+3y-z=11\end{matrix}$ είναι η

$(x,y,z)=(4,1,0)$ αφού έχουμε $\begin{matrix}6\cdot4-2\cdot1+5\cdot0=22\\2\cdot4+3\cdot1-0=11.\end{matrix}$

- *Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μια λύση. Διαφορετικά λέγεται **ασυμβίβαστο** ή **αδύνατο**.*

  Παράδειγμα

  Το γραμμικό σύστημα $\begin{matrix}6x-2y+5z=22\\2x+3y-z=11\end{matrix}$ είναι συμβιβαστό όπως είδαμε πριν.

  Το σύστημα $\begin{matrix}x+2y=0\\x+2y=1\end{matrix}$ είναι ασυμβίβαστο, γιατί διαφορετικά θα είχαμε 0 =1.

Ορισμός 2 (ομογενές γραμμικό σύστημα)

*Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται **ομογενές** αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι ίσοι με μηδέν.*

Συνεπώς κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό αφού μια λύση είναι η (0,0,...,0). Αυτή λέγεται η **μηδενική** ή **τετριμμένη** λύση.

Ορισμός 3 (ισοδύναμα συστήματα)

*Δυο γραμμικά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν τις ίδιες λύσεις.*

Παράδειγμα

Τα συστήματα

$$\begin{array}{l} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} 5x-7y=3 \\ 8x-10y=6 \\ 10x-3y=17 \end{array}$$

είναι ισοδύναμα αφού και τα δυο έχουν τη μοναδική λύση (2,1).

Τα συστήματα

$$\begin{array}{l} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-y=3 \end{array}$$

δεν είναι ισοδύναμα αφού το (2,1) που είναι λύση του πρώτου δεν είναι λύση του δεύτερου.

Ορισμός 4 (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί)

*Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα. Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός** του συστήματος.*

- *Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση του συστήματος με ένα μη μηδενικό αριθμό.*
- *Προσθέτουμε σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο άλλης εξίσωσης.*
- *Εναλλάσσουμε τη θέση δυο εξισώσεων.*

Έστω $r_1, r_2, \ldots$ η πρώτη, δεύτερη, ... εξίσωση του συστήματος. Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω διαδικασιών είναι

- $r_i \to ar_i$ *(πολλαπλασιάζουμε την r_i με το $a \neq 0$)*
- $r_i \to r_i + ar_j$ *(στην εξίσωση r_i προσθέτουμε a φορές την r_j)*
- $r_i \to r_j$ *(εναλλάσσουμε τις r_i, r_j).*

Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-2z=-1 \\ 2x-3y+3z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{r_2 \to r_2+2r_1} \left.\begin{array}{r} -x+2y-2z=-1 \\ 0+y-z=2 \end{array}\right\}$$

Στη δεύτερη εξίσωση του αρχικού συστήματος προσθέτουμε 2 φορές την πρώτη

Ορισμός 5 (τριγωνικό σύστημα)

Ένα σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*λέγεται **τριγωνικό** αν* $a_{ij} = 0$ *για κάθε* $i > j$.

Για παράδειγμα, τα επόμενα συστήματα είναι τριγωνικά.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z + 3w &= 2 \\ 5y + 4z - 2w &= 1 \\ 2z + 7w &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z + 3w &= 2 \\ 5y + 4z - 2w &= 1 \end{aligned}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πρόταση 1 (πλήθος λύσεων)

Κάθε γραμμικό σύστημα

- *ή δεν έχει λύση*
- *ή έχει μοναδική λύση*
- *ή έχει άπειρες λύσεις.*

Για παράδειγμα, δεν υπάρχει γραμμικό σύστημα με ακριβώς δυο λύσεις.

Πρόταση 2 (ισοδύναμα συστήματα)

Αν ένα σύστημα προκύπτει από άλλο με την εφαρμογή μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών μετασχηματισμών, τότε τα δυο συστήματα είναι ισοδύναμα.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Αποτελείται δε από μια συστηματική εφαρμογή στοιχειωδών μετασχηματισμών ώστε να προκύψει ένα νέο σύστημα του οποίου η επίλυση είναι πιο ‘εύκολη’ από το αρχικό. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, το νέο σύστημα είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Σημείωση Δεν έχουμε διευκρινίσει τι σημαίνει πιο ‘εύκολη’ επίλυση. Θα είμαστε πιο αυστηροί στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα δούμε πιο προσεκτικά τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Προς το παρόν ο σκοπός μας είναι να κατανοήσουμε σε ένα πρώτο – πρακτικό – επίπεδο τη μέθοδο του Gauss και αυτό επιτυγχάνεται με παραδείγματα.

Παραδείγματα

- Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=4\\ x+3y+z&=11\\ 2x+5y-4z&=13 \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με σκοπό να απαλείψουμε το x από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση. Επομένως θα αφαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε από την τρίτη δυο φορές την πρώτη. Αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ x+3y+z=11\\ 2x+5y-4z=13 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-r_1} \begin{cases} x+2y-3z=4\\ \quad\; y+4z=7\\ 2x+5y-4z=13 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ \quad\; y+4z=7\\ \quad\; y+2z=5. \end{cases}$$

Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε το x της πρώτης εξίσωσης για να απαλείψουμε τα x των επόμενων εξισώσεων. Τώρα θα συνεχίσουμε χρησιμοποιώντας το y της δεύτερης εξίσωσης για να απαλείψουμε τα y των επόμενων εξισώσεων. Άρα θα αφαιρέσουμε τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ \quad\; y+4z=7\\ \quad\; y+2z=5 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-r_2} \begin{cases} x+2y-3z=4\\ \quad\; y+4z=7\\ \quad\;\; -2z=-2. \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι προέκυψε ένα τριγωνικό σύστημα σαφώς απλούστερο από το αρχικό: Το νέο σύστημα μπορεί να λυθεί εύκολα. Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε z = 1, οπότε αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνουμε $y = 7 - 4z = 3$. Τέλος από την πρώτη βρίσκουμε $x = 4 - 2y + 3z = 1$. Άρα το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση, την $(1,3,1)$.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε, αντί να λύσουμε το σύστημα στο τελευταίο στάδιο, να συνεχίσουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς εργαζόμενοι από 'κάτω προς τα πάνω'με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα μετατρέπουμε το συντελεστή του z σε 1. Στη συνέχεια αφαιρούμε 4 φορές την τρίτη γραμμή από τη δεύτερη κλπ.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\ y + 4z = 7 \\ \quad -2z = -2 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{2} r_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\ y + 4z = 7 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 4r_3}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\ y \quad\quad = 3 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 3r_3} \begin{cases} x + 2y \quad\quad = 7 \\ \quad\ y \quad\quad = 3 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad = 1 \\ \quad\ y \quad\quad = 3 \\ \quad\quad z = 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα είναι ήδη λυμένο.

- Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} &x - 2y + z = 1 \\ &x - y + z = 2 \\ &2x - 3y + 2z = 5. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς όπως πριν. Έχουμε

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad\ y \quad\ = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad\ y \quad\ = 1 \\ \quad\ y \quad\ = 3 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ \quad\ y \quad\ = 1 \\ \quad\ 0 \quad\ = 2. \end{cases}$$

Εδώ σταματάμε γιατί παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα είναι αδύνατο αφού υπάρχει η ισότητα 0 = 2. Άρα το αρχικό σύστημα είναι επίσης αδύνατο.

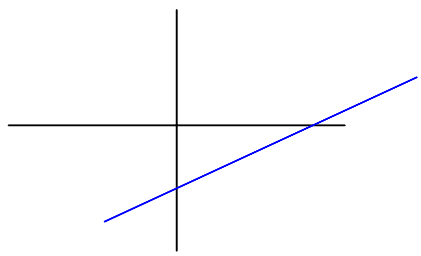
Στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss:

1. Μετατρέπουμε με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών το δοσμένο σύστημα σε ένα άλλο που έχει τριγωνική μορφή.
2. Αν προκύψει εξίσωση της μορφής 0 = c με $c \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο. Διαφορετικά, μπορούμε να λύσουμε το τριγωνικό σύστημα ή με διαδοχικές αντικαταστάσεις ή με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς εργαζόμενοι από κάτω προς τα πάνω.

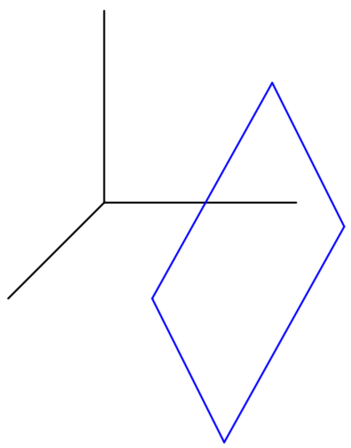
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πρόταση 3

1. Το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax+by=c$, όπου $a,b,c \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a,b δεν είναι μηδέν, είναι μια ευθεία.



2. Το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $ax+by+cz=d$, όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a,b,c δεν είναι μηδέν, είναι ένα επίπεδο.

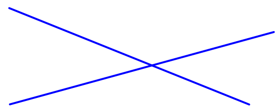
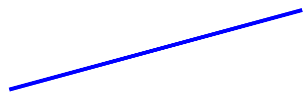
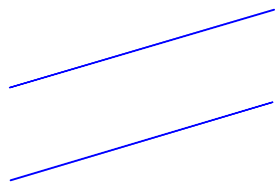


Πρόταση 4

1. Το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

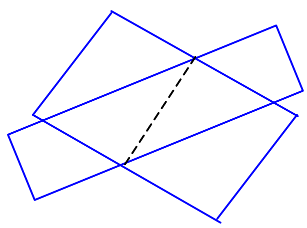
όπου $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a_{11}, a_{12} και τουλάχιστον ένας από τους a_{21}, a_{22} είναι μη μηδενικός, είναι

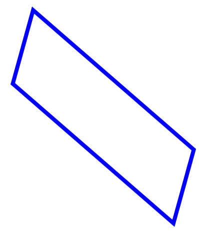
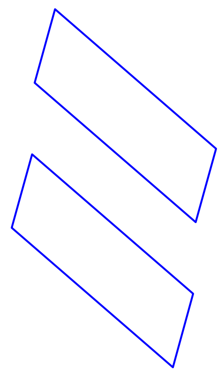
ή ένα σημείο (το σημείο τομής των ευθειών)	
ή μια ευθεία (οι δυο ευθείες συμπίπτουν)	
ή το κενό σύνολο (οι δυο ευθείες είναι παράλληλες)	

2. Το σύνολο των σημείων (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \end{aligned}$$

όπου $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένας από τους a_{11}, a_{12}, a_{13} και τουλάχιστον ένας από τους a_{21}, a_{22}, a_{23} είναι μη μηδενικός, είναι

ή μια ευθεία (η ευθεία τομής των επιπέδων)	

ή ένα επίπεδο (τα δυο επίπεδα συμπίπτουν)	
ή το κενό σύνολο (τα δυο επίπεδα είναι παράλληλα)	

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x-2y+z+w&=1\\ 2x+y+2z-w&=2\\ 3x+2y-z-w&=3. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss έχουμε

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ 2x+y+2z-w=2\\ 3x+2y-z-w=3 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad 5y \quad -3w=0\\ 3x+2y-z-w=3 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-3r_1}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad 5y \quad -3w=0\\ \quad 8y-4z-4w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to \frac{1}{5}r_2} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad 8y-4z-4w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-8r_2}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ y \qquad -\frac{3}{5}w=0 \\ \quad -4z+\frac{4}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to -\frac{1}{4}r_3} \begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ y \qquad -\frac{3}{5}w=0 \\ \qquad z-\frac{1}{5}w=0. \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι τριγωνικό. Συνεχίζουμε τώρα εργαζόμενοι προς τα πάνω. Χρησιμοποιώντας το y της δεύτερης εξίσωσης θα μηδενίσουμε το y της πρώτης, μετά χρησιμοποιώντας το z της τρίτης εξίσωσης θα μηδενίσουμε το z της πρώτης.

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ y \qquad -\frac{3}{5}w=0 \\ \qquad z-\frac{1}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1\to r_1+2r_2} \begin{cases} x \qquad +z-\frac{1}{5}w=1 \\ y \qquad -\frac{3}{5}w=0 \\ \qquad z-\frac{1}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1\to r_1-r_3}$$

$$\begin{cases} x \qquad\qquad =1 \\ y \qquad -\frac{3}{5}w=0 \\ \qquad z-\frac{1}{5}w=0. \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα λύνεται άμεσα: από την τρίτη εξίσωση έχουμε $z=\frac{1}{5}w$ και από τη δεύτερη $y=\frac{3}{5}w.$ Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(1,\frac{3}{5}w,\frac{1}{5}w),$ όπου το w διατρέχει το $\mathbb{R}$. Έχουμε δηλαδή άπειρες λύσεις.

Άσκηση 2

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 3y+2z&=1 \\ x+2y+z&=0 \\ 2x+7y+4z&=2. \end{aligned}$$

Λύση

Επειδή δεν υπάρχει x στην πρώτη εξίσωση, θα φέρουμε τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη θέση. Επειδή ο σκοπός είναι να φθάσουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα, θα φέρουμε την εξίσωση που δεν έχει x στην τελευταία θέση. Μετά εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

$$\begin{cases} 3y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+7y+4z=2 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_2} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=1 \\ 2x+7y+4z=2 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_3}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+7y+4z=2 \\ 3y+2z=1 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=2 \\ 3y+2z=1 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+2z=2 \\ 0=-1. \end{cases}$$

Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 3

Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, να λυθεί το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{aligned} x-2y+kz&=1 \\ 2x-y+2z&=2 \\ 3x-y+3kz&=3 \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς

$$r_2 \to r_2 - 2r_1,\, r_3 \to r_3 - 3r_1,\, r_2 \to \frac{1}{3}r_2,\, r_3 \to r_3 - 7r_2,\, r_3 \to \frac{3}{10}r_3$$

φθάνουμε στο τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad +kz \quad &=1 \\ y \quad +\frac{2-2k}{3}z &= 0 \\ (-1+k)z &= 0. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις βασιζόμενοι στην παράσταση $-1+k$ της τελευταίας εξίσωσης.

1. Έστω $k \neq 1$. Τότε από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z = 0$, από τη δεύτερη $y = 0$ και από την πρώτη $x = 1$. Άρα έχουμε μοναδική λύση, την (0,0,0).
2. Έστω $k = 1$. Τότε το τριγωνικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1 \\ y \quad &=0 \\ 0&=0. \end{aligned}$$

Άρα $y = 0$ και $x = 1 + 2y - z = 1 - z$, ενώ το z παίρνει αυθαίρετες τιμές.

Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, τις $(1 - z, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 4 \\ 2x & - & 6y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

(α) Θέσατε λ = 2 και μ = 4 και λύστε το σύστημα.

(β) Βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε το σύστημα αυτό

(i) να είναι αδύνατο

(ii) να έχει άπειρες λύσεις

(iii) να έχει ακριβώς μια λύση.

Λύση

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2 \to r_2 - 3r_1, r_3 \to r_3 - 2r_1, r_3 \to r_3 + 2r_2$, βρίσκουμε ότι το σύστημα παίρνει την τριγωνική μορφή

$$\begin{array}{l} x - 2y \quad + z \quad = 1 \\ \quad\; y \quad + 2z \quad = 1 \;. \\ \qquad (\lambda + 2)z = \mu \end{array}$$

Από αυτή συμπεραίνουμε τα εξής.

(α) Έστω $\lambda = 2, \mu = 4.$ Τότε από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $z = 1,$ από τη δεύτερη $y = 1 - 2z = -1$ και από την πρώτη $x = 1 + 2y - z = -2.$ Άρα υπάρχει μοναδική λύση, η $(-2, -1, 1)$.

(β)

(i) Παρατηρούμε από την τελευταία γραμμή ότι αν $\lambda = -2$ και $\mu \neq 0$, τότε δεν υπάρχουν λύσεις.

(ii) Αν $\lambda = -2$ και $\mu =$ 0, τότε το σύστημα είναι

$$\begin{array}{l} x - 2y \quad + z \quad = 1 \\ \quad\; y \quad + 2z \quad = 1 \\ \qquad\qquad 0 \quad = 0. \end{array}$$

Έχουμε $y = 1 - 2z, x = 1 + 2y - z = 1 + 2(1 - 2z) - z = 3 - 5z.$ Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις, οι $(3 - 5z, 1 - 2z, z), z \in \mathbb{R}$.

(iii) Έστω ότι $\lambda \neq -2$. Από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z=\dfrac{\mu}{\lambda+2}$, οπότε από τη δεύτερη παίρνουμε $y=1-2z=1-2\dfrac{\mu}{\lambda+2}=\dfrac{\lambda-2\mu+2}{\lambda+2}$ και από την πρώτη $x=1+2y-z=1+2\dfrac{\lambda-2\mu+2}{\lambda+2}-\dfrac{\mu}{\lambda+2}=\dfrac{3\lambda-5\mu+6}{\lambda+2}$. Δηλαδή υπάρχει μοναδική λύση, η $\left(\dfrac{3\lambda-5\mu+6}{\lambda+2},\dfrac{\lambda-2\mu+2}{\lambda+2},\dfrac{\mu}{\lambda+2}\right)$.

Άσκηση 5

Προσδιορίστε με γεωμετρικό τρόπο το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x-y+z&=1\\ 4x-ky+2z&=3 \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές του $k\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η γραφική παράσταση των λύσεων του συστήματος είναι η τομή δυο επιπέδων και συνεπώς θα είναι ή το κενό σύνολο ή μια ευθεία (βλ. Πρόταση 4). Δηλαδή, το σύστημα μπορεί να είναι ή αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις. Τα δυο επίπεδα είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει λ με $4 = 2\lambda$, $-k=-\lambda, 2=\lambda$, δηλαδή αν και μόνο αν $k = 2$. Για την τιμή αυτή του k τα δυο επίπεδα είναι διακεκριμένα. Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο αν $k = 2$ και για $k \neq 2$ έχει άπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Λύστε τα συστήματα

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=-7\\ 2x-y+z&=3\\ -x+y+z&=4 \end{aligned}\qquad \begin{aligned} x\quad\;+2z&=7\\ 2x-y+z&=3\\ -x+y+z&=4 \end{aligned}\qquad \begin{aligned} x\quad\;+2z&=6\\ 2x-y+z&=3\\ -x+y+z&=4 \end{aligned}$$

Απάντηση Το πρώτο έχει τη μοναδική λύση (1,2,3). Το δεύτερο έχει άπειρες λύσεις $(7-2z, 11-3z, z)$, $z\in\mathbb{R}$. Το τελευταίο είναι αδύνατο.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το επόμενο σύστημα να είναι συμβιβαστό.

$$\begin{aligned} &x + 2y + az = 1 \\ &2x - y - z = 3 \\ &-x + 2y + z = 2. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε την τριγωνική μορφή (βλ. Λυμένη Άσκηση 3).

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 1 \\ y + \frac{1+2a}{5}z &= \frac{-1}{5} \\ (-1+3a)z &= -19. \end{aligned}$$

Απάντηση $a \neq \frac{1}{3}$.

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να

- έχει μοναδική λύση
- είναι αδύνατο
- έχει άπειρες λύσεις

$$\begin{aligned} &x + 2y + az = b \\ &2x - y - z = 3 \\ &-x + 2y + z = 2. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε την τριγωνική μορφή (βλ. Λυμένη Άσκηση 4)

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= b \\ y + \frac{1+2a}{5}z &= \frac{-3+2b}{5} \\ (-1+3a)z &= -22+3b. \end{aligned}$$

Απάντηση Για $a \neq \frac{1}{3}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για $a = \frac{1}{3}$ και $b \neq \frac{22}{3}$ το σύστημα είναι αδύνατο. Για $a = \frac{1}{3}$ και $b = \frac{22}{3}$ έχουμε άπειρες λύσεις.

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα

$$x + 2y + az = 1$$
$$2x - y - z = 3$$
$$-x + ay + z = 2$$

- έχει μοναδική λύση
- είναι αδύνατο
- έχει άπειρες λύσεις

Στις περιπτώσεις που είναι συμβιβαστό, να βρεθούν οι λύσεις.

Απάντηση Για $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Για τις υπόλοιπες τιμές έχει μοναδική λύση, τη $\left(\frac{3a^2 + 3a - 11}{2a^2 - 3}, \frac{7a + 4}{2a^2 - 3}, \frac{-a - 17}{2a^2 - 3}\right)$. (Το σύστημα ποτέ δεν έχει άπειρες λύσεις).

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$x + 2y = -1$$
$$2x - y = b$$
$$ax - y = 1$$

να είναι συμβιβαστό.

Υπόδειξη Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε το τριγωνικό σύστημα

$$x + 2y = -1$$
$$-5y = b + 2$$
$$0 = 2ab - a + b - 3.$$

Απάντηση $0 = 2ab - a + b - 3$

Κεφάλαιο 3

Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με πράξεις πινάκων και την εφαρμογή τους στα γραμμικά συστήματα. Θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss που οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια του κλιμακωτού πίνακα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Υπενθυμίζουμε ορισμούς βασικών εννοιών που αναφέρονται στις πράξεις πινάκων και στα γραμμικά συστήματα.

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός 1 (πίνακας)

*Με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R},\mathbb{C}$. Ένας **πίνακας** A με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι μια διάταξη στοιχείων a_{ij} του $\mathbb{F}$ σε σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της μορφής*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Λέμε ότι το **μέγεθος** (ή ο **τύπος**) του παραπάνω πίνακα είναι $m\times n$ ή ότι ο πίνακας είναι ένας $m\times n$ πίνακας.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι ένας 1×3 πίνακας, ο $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι 2×1 και ο $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ είναι 3×2.

Ο πίνακας A που είδαμε πιο πάνω συμβολίζεται με $(a_{ij}), i=1,...,m, j=1,...,n.$ Πιο απλά χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $A=(a_{ij})$ όταν είναι σαφές ποια είναι τα $m,n.$

Ορισμός 2 (ισότητα πινάκων)

Έστω $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ *δυο* $m\times n$ *πίνακες με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$. *Θα λέμε ότι οι A, B είναι* ***ίσοι*** *και θα γράφουμε* $A=B$ *αν ισχύει* $a_{ij}=b_{ij}$ *για κάθε* $i=1,...,m$ *και για κάθε* $j=1,...,n.$

Για παράδειγμα, έχουμε $\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=2,\ y=4.$

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε διάφορα είδη πινάκων που θα χρειαστούμε αργότερα.

Ορισμοί 3 (είδη πινάκων)

- *Ένας* $m\times n$ *πίνακας λέγεται* ***τετραγωνικός*** *αν* $m=n$.

  Το σύνολο $M_{m\times m}(F)$ των τετραγωνικών $m\times m$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ συμβολίζεται πιο απλά με $M_m(F).$
- *Τα* ***διαγώνια στοιχεία*** *ενός* $m\times n$ *πίνακα* (a_{ij}) *είναι τα στοιχεία* $a_{11},a_{22},...,a_{kk}$, *όπου* $k=\min\{m,n\}$. *Λέμε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στη* ***διαγώνιο*** *του πίνακα.*
- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* $A=\left(a_{ij}\right)$ *λέγεται* ***άνω τριγωνικός*** *αν για κάθε* $i>j$ *έχουμε* $a_{ij}=0$.

  Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται άνω τριγωνικός, αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0. Για παράδειγμα, άνω τριγωνικοί είναι οι πίνακες

  $$\begin{pmatrix}1+2i & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+2i & -1 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$
- *Ένας τετραγωνικός πίνακας* $A=\left(a_{ij}\right)$ *λέγεται* ***κάτω τριγωνικός*** *αν για κάθε* $i<j$ *έχουμε* $a_{ij}=0$.

  Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται κάτω τριγωνικός, αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0. Για παράδειγμα, κάτω τριγωνικοί είναι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται* ***διαγώνιος*** *αν για κάθε $i \neq j$ έχουμε $a_{ij} = 0$.*

  Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας είναι διαγώνιος αν κάθε στοιχείο που δεν βρίσκεται στη διαγώνιο είναι ίσο με 0. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγώνιος αλλά ο $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ δεν είναι.

- *Έστω $A = \left(a_{ij}\right)$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $n \times m$ πίνακας $\left(a_{ji}\right)$ ονομάζεται ο* ***ανάστροφος*** *του A και συμβολίζεται με A^t.*

  Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}$, τότε $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται* ***συμμετρικός*** *αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$.*

  Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A = A^t$.

  Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικοί. Βλέπουμε ότι σε ένα συμμετρικό πίνακα, στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι ίσα.

- *Ένας τετραγωνικός πίνακας (a_{ij}) λέγεται* ***αντισυμμετρικός*** *αν για κάθε i, j ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}$.*

  Ισοδύναμα, ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A = -A^t$.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικοί. Βλέπουμε ότι σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα, στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο διαφέρουν ως προς τα πρόσημα ενώ αυτά που βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο είναι ίσα με μηδέν.

Υπενθυμίζουμε τώρα τις τρεις βασικές πράξεις των πινάκων.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 4 (άθροισμα)

*Έστω $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Το **άθροισμα**, A+B, των A και B είναι ο πίνακας* $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix}$, τότε

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 3 & x \\ 1 & y & 0 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 1+(-4) & 2+3 & 5+x \\ -1+1 & 3+y & 4+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 5+x \\ 0 & 3+y & 4 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 5 (γινόμενο πίνακα με αριθμό)

Έστω $A=(a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Το γινόμενο kA του k με τον A είναι ο πίνακας $kA=(ka_{ij})$.

Για παράδειγμα, αν $k=2$ και $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε

$$2A=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Συμβολισμός: Τον πίνακα $(-1)A$ συμβολίζουμε με $-A$. Όταν γράφουμε $A-B$ εννοούμε $A+(-B)$. Για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & x \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-3 & 5-x \\ 1-(-4) & -3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5-x \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 6 (γινόμενο πινάκων)

Έστω $A=\left(a_{ij}\right)\in M_{l\times m}(\mathbb{F})$ *και* $B=\left(b_{st}\right)\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε το* ***γινόμενο*** *των Α και Β, που συμβολίζεται με ΑΒ, είναι ο* $l\times n$ *πίνακας με στοιχεία από το* $\mathbb{F}$ *όπου στη θέση (i,j) υπάρχει το στοιχείο* $\sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}$.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&k\end{pmatrix}$, τότε το γινόμενο AB είναι ο

2×3 πίνακας

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3k\\4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6k\end{pmatrix}.$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c\\4a+5b+6c\end{pmatrix}.$$

Σχηματικά, το στοιχείο του γινομένου AB στη θέση (i,j) προκύπτει από τη γραμμή i του A και τη στήλη j του B όπως δείχνει το σχήμα

$$\begin{pmatrix} & \ldots & \\ \boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad \ldots \quad a_{im}} \\ & \ldots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ldots & \boxed{\begin{matrix}b_{1j}\\b_{2j}\\ \ldots\\ b_{mj}\end{matrix}} & \ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \boxed{a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}.$$

Για το γινόμενο πινάκων ξέρουμε ότι δεν αληθεύει πάντα η σχέση $AB=BA$. Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$, τότε $AB=\begin{pmatrix}7&4\\10&8\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}1&2\\-1&14\end{pmatrix}$

Ορισμός 7 (αντιμεταθετικοί πίνακες)

Δυο $n\times n$ *πίνακες* A, B *λέγονται* ***αντιμεταθετικοί*** *αν ισχύει* $AB=BA$.

Παρατηρούμε ότι αν οι A, B είναι αντιμεταθετικοί τότε έχουμε

$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2$, όπως επίσης $(AB)^n = A^nB^n$, $n = 1, 2, \ldots$

ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 8 (στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών)

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Καθεμιά από τις παρακάτω διαδικασίες ονομάζεται ένας* ***στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών*** *του πίνακα A*

- *πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή του A με ένα μη μηδενικό στοιχείο του* $\mathbb{F}$
- *προσθέτουμε σε μια γραμμή πολλαπλάσιο άλλης γραμμής*
- *εναλλάσσουμε δυο γραμμές.*

Έστω r_i η i γραμμή του A. Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί των παραπάνω διαδικασιών είναι

- $r_i \to ar_i$ (πολλαπλασιάζουμε την r_i με το $a \neq 0$)
- $r_i \to r_i + ar_j$ (στη γραμμή r_i προσθέτουμε a φορές την r_j)
- $r_i \to r_j$ (εναλλάσσουμε τις r_i, r_j).

Ορισμός 9 (γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες)

Έστω $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Θα λέμε ότι ο B είναι* ***γραμμοϊσοδύναμος*** *με τον A αν ο B προκύπτει από τον A μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.*

Για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 17 \end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ αφού

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 10 (κλιμακωτοί πίνακες)

a. *Ένας πίνακας A ονομάζεται* ***κλιμακωτός*** *αν*
   1. *το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το 1*
   2. *το πρώτο 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά του πρώτου 1 της προηγούμενης γραμμής*

3. *οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.*

b. *Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** αν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει .*

Παράδειγμα

Από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο πρώτος και τρίτος είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ ο δεύτερος είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.

Ορισμός 11 (πίνακες και γραμμικά συστήματα)

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m1}x_n = b_m \end{gathered}$$

m εξισώσεων και n αγνώστων. Ο $m \times n$ *πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*λέγεται ο **πίνακας των συντελεστών** του συστήματος. Ο πίνακας – στήλη* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

*λέγεται ο **πίνακας των σταθερών όρων** του συστήματος. Ο* $m \times (n+1)$ *πίνακας*

$$(A,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

που προκύπτει αν επισυνάψουμε στον πίνακα A *τη στήλη* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *λέγεται ο* ***επαυξημένος πίνακας*** *του συστήματος.*

Για παράδειγμα, αν το γραμμικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

τότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 12 (αντιστρέψιμος πίνακας)

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(F)$ *λέγεται* ***αντιστρέψιμος*** *αν υπάρχει πίνακας* $B \in M_n(F)$ *τέτοιος ώστε* $AB = BA = I$*.*

Παράδειγμα

- Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος γιατί αν $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

  τότε εύκολα επαληθεύεται ότι $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος γιατί αν υπήρχε πίνακας

  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ με $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $\begin{pmatrix} x+z & y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

  οπότε το $x+z$ είναι ίσο με 1 και 0, άτοπο.

Ορισμός 13

Ένας $n \times n$ *πίνακας λέγεται* ***στοιχειώδης*** *πίνακας αν προκύπτει από τον ταυτοτικό* $n \times n$ *πίνακα* I *με την εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{F}$, είναι στοιχειώδης αφού προκύπτει από τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ αν προσθέσουμε στην πρώτη γραμμή, a φορές τη δεύτερη.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε πριν. Επίσης θα ασχοληθούμε με ορισμένα θεμελιώδη αποτελέσματα σχετικά με τις λύσεις γραμμικών συστημάτων.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πρόταση 1

Έστω $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *και* $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$. *Τότε ισχύουν τα εξής.*

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A + 0_{m\times n} = A$
3. $A - A = 0_{m\times n}$
4. $A + B = B + A$
5. $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
8. $1A = A$ *και* $0A = 0_{m\times n}$.

Πρόταση 2 (ιδιότητες του γινομένου πινάκων)

Έστω $A \in M_{k\times l}(\mathbb{F}), B \in M_{l\times m}(\mathbb{F}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $(AB)C = A(BC)$.

Έστω $A \in M_{l\times m}(\mathbb{F}), B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $A(B+C) = AB + AC$.

Έστω $A, B \in M_{l\times m}(\mathbb{F}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $(A+B)C = AC + BC$.

Έστω $k \in \mathbb{F}, A \in M_{l\times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. *Τότε* $I_m A = AI_n = A$, $0_{l\times m}A = 0_{l\times n}$ *και* $A0_{n\times l} = 0_{m\times l}$.

Οι προηγούμενες δυο προτάσεις μας πληροφορούν ότι στις πράξεις πινάκων ισχύουν μερικοί νόμοι που είναι ανάλογοι των νόμων που ξέρουμε από τους πραγματικούς αριθμούς. Όμως υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ πράξεων πινάκων και πραγματικών αριθμών, τις οποίες επισημαίνουμε παρακάτω.

Πρόταση 3 (δυνάμεις διαγωνίων πινάκων)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Τότε για κάθε θετικό ακέραιο k έχουμε

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^{\ k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{\ k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{\ k} \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων διαφέρει ουσιαστικά από τον πολλαπλασιασμό πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Οι κύριες διαφορές είναι οι παρακάτω.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ δυο $n \times n$ πίνακες. Τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA. Τονίζουμε ότι είναι δυνατό να έχουμε $AB \neq BA$. Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Δεν αληθεύει γενικά ότι $(AB)^2 = A^2 B^2$. Πράγματι, με τους πίνακες του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, A^2 B^2 = \begin{pmatrix} 11 & 36 \\ 8 & 27. \end{pmatrix}$. Το σωστό είναι $(AB)^2 = ABAB$.
- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Είναι δυνατό να έχουμε $AB = 0_{l \times n}$ ακόμα και αν $A \neq 0_{l \times m}, B \neq 0_{m \times n}$. Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F}), B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Αν ισχύει $AB = AC$, τότε γενικά δεν έπεται ότι $B = C$. Πράγματι, αν οι A, B είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε $AB = A0_{2 \times 2}$, αλλά $B \neq 0_{2 \times 2}$.

Πρόταση 4 (διωνυμικό ανάπτυγμα για αντιμεταθετικούς πίνακες)

Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Αν αυτοί αντιμετατίθενται, δηλαδή αν ισχύει $AB = BA$, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k$.

Για παράδειγμα, αν $B = I$ τότε $AB = BA$ για κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$, οπότε από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε $(A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$. Για συγκεκριμένες εφαρμογές της Πρότασης 4 παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 4,5.

Πρόταση 5 (ανάστροφοι πίνακες)

1. *Για κάθε πίνακα A έχουμε $\left(A^t\right)^t$.*
2. *Έστω $A, B \in M_{m\times n}(F)$. Τότε $(A+B)^t = A^t + B^t$.*
3. *Έστω $A \in M_{l\times m}(F), B \in M_{m\times n}(F)$. Τότε $(AB)^t = B^t A^t$.*

ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό γιατί έχει χρήσιμες εφαρμογές.

Θεώρημα 6 (μετασχηματισμός σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα)

Κάθε $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $m \times n$ ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Αλγόριθμος

μετασχηματισμού της πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

Βήμα 1 Εντοπίζουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη και μεταφέρουμε στην πρώτη γραμμή τη γραμμή εκείνη που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Βήμα 2 Μετατρέπουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της πρώτης γραμμής σε 1.

Βήμα 3 Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη του πρώτου 1 της πρώτης γραμμής και κάτω από αυτό.

Βήμα 4	Στην συνέχεια αγνοούμε την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 – 3 για τις επόμενες γραμμές. (Αν οι επόμενες γραμμές είναι μηδενικές, τότε παραλείπουμε το βήμα 4 και πάμε στο επόμενο βήμα.)
Βήμα 5	Μετατρέπουμε σε 0 όλα τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη που περιέχει το πρώτο 1 μιας γραμμής

Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν το πρώτο 1 σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

Για παραδείγματα εφαρμογής του αλγορίθμου αυτού παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 7,8,9,10.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θεώρημα 7

Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Το προηγούμενο θεώρημα είναι σημαντικό γιατί η επίλυση γραμμικού συστήματος που είναι σε κλιμακωτή μορφή είναι εύκολη. Παραδείγματα υπάρχουν στις Λυμένες Ασκήσεις 7,8,9.

Θεώρημα 8

Έστω (A,b) ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος και Κ ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος[1] με τον (A,b). Τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο Κ δεν περιέχει γραμμή της μορφής 0 0 … 0 1.

Για παραδείγματα παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 8 και 9.

[1] Αποδεικνύεται ότι ο *Κ* είναι μοναδικός και άρα μπορούμε να λέμε *η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή* πίνακα

Θεώρημα 9 (ομογενή συστήματα)

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και n μεταβλητών με $m<n$ έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση.

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Πρόταση 10

1. *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.*
2. *Έστω $A,B \in M_n(\mathbb{F})$. Αν A,B είναι αντιστρέψιμοι τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.*

Με τον επόμενο αλγόριθμο μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα (εφόσον υπάρχει). *Συμβολισμός*: Αν A,B είναι δυο πίνακες με το αυτό πλήθος γραμμών, τότε με (A,B) παριστάνουμε τον πίνακα που προκύπτει αν γράψουμε τις στήλες του B στα δεξιά των στηλών του A. Για παράδειγμα, αν $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}x&a&0\\y&b&-1\end{pmatrix}$, τότε $(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&x&a&0\\4&5&y&b&-1\end{pmatrix}$. Για το A αυτό και το 2×2 ταυτοτικό πίνακα I έχουμε $(A,I)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&5&0&1\end{pmatrix}$

Αλγόριθμος Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα

Στον πίνακα (A,I) εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που μετατρέπουν τον A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα K. Τότε ο (A,I) έχει μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής (K,B).

- Αν $K=I$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=B$.
- Αν $K\neq I$, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παραδείγματα εφαρμογής του προηγούμενου αλγόριθμου υπάρχουν στη Λυμένη Άσκηση 10.

Θεώρημα 11

Ένας πίνακας B είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν πίνακα A, αν και μόνο αν υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1,\dots,E_k$ *(**βλ. Ορισμό 13**) τέτοιοι ώστε* $B = E_1 \dots E_k A$.

Πόρισμα 12

Ένας $n \times n$ *πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο* $n \times n$ *πίνακα.*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B, AB, BA, AA^t$ *έχουν νόημα, όπου*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Το $A+B$ δεν ορίζεται γιατί οι A,B δεν είναι του αυτού μεγέθους. Το AB δεν ορίζεται γιατί το πλήθος των στηλών του A (τρία) δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B (δύο). Το BA ορίζεται γιατί το πλήθος των στηλών του B είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του A. Έχουμε

$$BA=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot(-1) & 3\cdot 1+1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 0+0\cdot 3 & (-1)\cdot 2+0\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+0\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το AA^t ορίζεται για κάθε A, γιατί αν ο A έχει n στήλες, τότε ο ανάστροφος A^t έχει n γραμμές. Έχουμε

$$AA^t=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 0\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 3+2\cdot(-1)+1\cdot 4 \\ 3\cdot 0+(-1)\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+4\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 26 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες X *τέτοιοι ώστε* $AX = XA$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι για να ορίζονται τα γινόμενα AX, XA πρέπει ο X να είναι 2×2. Έστω $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε

$$\begin{aligned}
&AX = XA \Leftrightarrow AX - XA = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+z & 3y+w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+3y & 2x+y \\ z+3w & 2z+w \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{pmatrix} 2z-3y & 2w-2x \\ 3x-3w & 3y-2z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} 2z-3y=0 \\ 2w-2x=0 \\ 3x-3w=0 \\ 3y-2z=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = w, y = \frac{2}{3}z$ με $w, z \in \mathbb{R}$. Άρα οι ζητούμενοι πίνακες είναι οι $X = \begin{pmatrix} w & \frac{2}{3}z \\ z & w \end{pmatrix}, w, z \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ *για κάθε θετικό ακέραιο* n.

Λύση

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$, η σχέση αληθεύει. Έστω ότι η σχέση αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + \left(3^n - 2^n\right)3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2\cdot 2^n + 3^n \cdot 3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο πίνακας A^{2005}, *όπου*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

1. Έχουμε $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Άρα

$$A^{2005} = A^{2004}A = \left(A^2\right)^{1002} A = I^{1002}A = IA = A.$$

Σημείωση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$A^2 = I$$
$$A^3 = A^2 A = IA = A$$
$$A^4 = A^3 A = AA = A^2 = I$$
$$A^5 = A^4 A = IA = A.$$

Με βάση αυτά εικάζουμε ότι $A^n = \begin{cases} I, \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ A, \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$ Αυτό αποδεικνύεται

εύκολα με επαγωγή ή ως εξής. Αν *n* είναι άρτιος, *n*=2*k*, τότε

$A^n = A^{2k} = \left(A^2\right)^k = I^k = I.$ Αν n είναι περιττός, n=2k+1, τότε

$A^n = A^{2k+1} = \left(A^2\right)^k A = I^k A = IA = A.$

2. Με μερικούς υπολογισμούς βρίσκουμε

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Συνεπώς έχουμε $A^4 = A^5 = A^6 = \ldots = 0.$ Ειδικά $A^{2005} = 0.$

Σημείωση. Αν A είναι ένας $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας που όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 0, τότε αποδεικνύεται ότι $A^n = A^{n+1} = \ldots = 0.$

3. Γράφουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B.$ Επειδή ο I αντιμετατίθεται με τον B εφαρμόζεται το διωνυμικό ανάπτυγμα. Χρησιμοποιώντας ότι $B^4 = B^5 = B^6 = \ldots = 0$, που αποδείξαμε στο 2, έχουμε

$$A^n = I^n + \binom{n}{1} I^{n-1}B + \binom{n}{2} I^{n-2}B^2 + \ldots + B^n =$$

$$I + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2 + \binom{n}{3}B^3 =$$

$$I + \binom{n}{1}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1}a & \binom{n}{1}b + \binom{n}{2}ad & \binom{n}{1}c + \binom{n}{2}(ae+bf) + \binom{n}{3}adf \\ 0 & 1 & \binom{n}{1}d & \binom{n}{1}e + \binom{n}{2}df \\ 0 & 0 & 1 & \binom{n}{1}f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 5

Μια εταιρία παρασκευάζει δυο προϊόντα x,y. Έστω ότι το κόστος κατασκευής n τεμαχίων από το καθένα είναι x_n, y_n *αντίστοιχα και γνωρίζουμε ότι*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a y_n \\ y_{n+1} &= a x_n + y_n \end{aligned},$$

$n = 1, 2, \ldots,$ *όπου* a *είναι μια πραγματική σταθερά.*

1. *Να υπολογιστεί το* x_{n+1} *συναρτήσει του n και των* x_1, y_1.
2. *Έστω ότι* $x_1 = y_1$ *και* $a = 0.2$. *Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή πώλησης των πρώτων 10 τεμαχίων του προϊόντος x ώστε να μην προκύψει ζημία.*

Λύση

1. Θέτοντας $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ βλέπουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a y_n \\ y_{n+1} &= a x_n + y_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι για να βρούμε τη ζητούμενη παράσταση του x_{n+1}, αρκεί να υπολογίσουμε τη δύναμη A^n και για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα.

Γράφοντας $A = I + \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = I + B$, παρατηρούμε ότι $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 I$ και

επομένως για κάθε θετικό ακέραιο k έχουμε

$$B^{2k} = a^{2k} I = \begin{pmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{pmatrix}, B^{2k+1} = a^{2k} B = \begin{pmatrix} 0 & a^{2k+1} \\ a^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω ότι ο n είναι άρτιος $n = 2k$. Εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
&A^n = (I + B)^n = \\
&I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} B^{n-1} + B^n = \\
&I + \binom{n}{1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{2}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + \binom{n}{3}\begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix} + \ldots \\
&+ \binom{n}{n-1}\begin{pmatrix} 0 & a^{2k-1} \\ a^{2k-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} & \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \\ \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} & \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Στην παραπάνω παράσταση εννοείται ότι $\binom{n}{j} = 0$ αν $j > n$.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την ίδια σχέση για n περιττό.

Άρα για κάθε n

$$A^n = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} & \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \\ \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} & \sum\limits_{j \geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$x_{n+1} = \left(\sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} \right) x_1 + \left(\sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \right) y_1.$$

2. Για $x_1 = y_1$, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$x_{n+1} = \left(\sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j} a^{2j} + \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} a^{2j+1} \right) x_1 = (1+a)^n x_1.$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε $x_{10} = (1+0.2)^9 x_1 \approx 5.16 x_1$. Άρα καθένα από τα 10 πρώτα τεμάχια του *x* πρέπει να πωληθεί σε τιμή τουλάχιστον $0.516 x_1$.

Άσκηση 6

Έστω ότι ο Α είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 - A - I = 0$. *Απλοποιήστε τις παραστάσεις* $A^4 - 3A^3 - A^2 + 7A - I$ *και* $A^4 (A-I)^5 - I$.

Λύση

Από τον Αλγόριθμο Διαίρεσης πολυωνύμων (βλ. Κεφάλαιο 1) βρίσκουμε

$x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1 = (x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 2) + 3x - 3$ και άρα

$$A^4 - 3A^3 - A^2 + 7A - I = \underbrace{(A^2 - A - 1)}_{0}(A^2 - 2A - 2) + 3A - 3I = 3A - 3I.$$

Από την υπόθεση έχουμε τη σχέση $A(A-I) = I$. Άρα

$$A^4 (A-I)^5 - I = A^4 (A-I)^4 (A-I) - I = \underbrace{\big(A(A-I)\big)}_{I}{}^4 (A-I) - I = A - I - I = A - 2I.$$

Σημείωση. Έχουμε $A^4 (A-I)^4 = \big(A(A-I)\big)^4$ γιατί οι πίνακες *A* και $A - I$ αντιμετατίθενται.

Άσκηση 7

1. *Να βρεθεί ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Εξετάστε αν το παρακάτω σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις*

$$x + z = 0$$
$$3x + y + z = 0$$
$$2x + z = 0$$
$$-2x + y = 0$$

Λύση

1. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο μετασχηματισμού ενός πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to \frac{1}{3} r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και είναι βέβαια γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό.

2. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος που είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς που εφαρμόσαμε πριν (γιατί ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι αυτός στο υποερώτημα 1)

φθάνουμε στον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τα αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ και

άρα η μηδενική λύση είναι η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος.

Άσκηση 8

Να λυθεί το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

$2x - ay + z = 1$

$x - y + z = a$

$3x - y - z = 2.$

Λύση

Χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα.

$$\begin{pmatrix} 2 & -a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{2-3a}{2} \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + (a-2) r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{2-3a}{2} \\ 0 & 0 & -2a+3 & -\dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1 \end{pmatrix}.$$

1^{η} *περίπτωση*. Έστω $-2a+3 \neq 0$.

Λύνουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα. Από την τελευταία γραμμή έχουμε $z = \dfrac{-\frac{3}{2}a^2 + 2a - 1}{-2a+3} = \dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6}$.

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη γραμμή έχουμε

$y - 2z = \dfrac{2-3a}{2} \Rightarrow y - 2\dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} = \dfrac{2-3a}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5a-2}{4a-6}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση $x - y + z = a$ βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις $x = \dfrac{a^2 + 3a - 4}{4a-6}$.

Συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση $(x, y, z) = \left(\dfrac{a^2 + 3a - 4}{4a-6}, \dfrac{5a-2}{4a-6}, \dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} \right)$.

2η περίπτωση. Έστω $-2a+3=0$.

Τότε $-\frac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ (μάλιστα για κάθε πραγματικό a έχουμε $-\frac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική). Από την τρίτη γραμμή, που είναι της μορφής $0 \quad 0 \quad 0 \quad c$, όπου $c\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 9

Να εξεταστεί για ποιες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+az&=1\\ -2x-y+z&=b\\ x-y+2y&=a \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις, καμιά λύση.

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$r_2\to r_2+2r_1, r_3\to r_3-r_1, r_3\to r_3+2r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 2a+1 & b+2\\ 0 & 0 & 3a+4 & a+2b+3 \end{pmatrix}.$$

1η περίπτωση. Έστω $3a+4\neq 0$.

Τότε βλέπουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση.

2η περίπτωση. Έστω $3a+4=0$.

- Υποπερίπτωση α. Αν $a+2b+3\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Υποπερίπτωση β. Αν $a+2b+3=0$, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Συνοψίζοντας, το σύστημα

- έχει μοναδική λύση αν $a\neq -\frac{4}{3}$,
- έχει άπειρες λύσεις αν $a=-\frac{4}{3}, b=-\frac{5}{6}$
- είναι αδύνατο αν $a=-\frac{4}{3}, b\neq -\frac{5}{6}$.

Άσκηση 10

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$. *Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι όταν αυτοί υπάρχουν. Στη συνέχεια να λυθεί το σύστημα* $C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$.

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα.

Για τον A έχουμε: $\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 3 & 12 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί το αριστερό μισό, $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, του τελευταίου πίνακα είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας διάφορος του μοναδιαίου.

Για το B έχουμε: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & a & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a-6 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Αν $a=6,$ ο B δεν είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι $a\neq 6$. Τότε συνεχίζουμε και έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a-6 & -3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to\frac{1}{a-6}r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1-2r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{a}{a-6} & \dfrac{-2}{a-6}\\ 0 & 1 & \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6}\end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή Β είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο

$$\begin{pmatrix}\dfrac{a}{a-6} & \dfrac{-2}{a-6}\\ \dfrac{-3}{a-6} & \dfrac{1}{a-6}\end{pmatrix}.$$

Για τον C έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{-6} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 9r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

Άρα ο C είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $\begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Για να λύσουμε το σύστημα $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ μπορούμε φυσικά να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο C είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow C^{-1}C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&\frac{3}{2}\\-1&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Άσκηση 11

Έστω ότι ο A είναι ένας πραγματικός πίνακας τέτοιος ώστε $A^2-A-I=0$.

1. *Αποδείξτε ότι ο $A-I$ είναι αντιστρέψιμος.*
2. *Αποδείξτε ότι ο $A-kI$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε πραγματικό $k\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.*
3. *Αποδείξτε ότι ο $A-kI$ δεν είναι αντιστρέψιμος, αν $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.*

Λύση

1. Από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$A^2-A=I\Leftrightarrow A(A-I)=I\Leftrightarrow A(A-I)=(A-I)A=I.$$

Άρα ο $A-I$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με τον Ορισμό 12.

2. Έστω $B=A-kI$. Η ιδέα εδώ είναι να μετασχηματίσουμε τη δοσμένη πολυωνυμική παράσταση του A, δηλαδή την $A^2-A-I=0$, σε μια πολυωνυμική παράσταση του B και να χρησιμοποιήσουμε μια παραγοντοποίηση όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Έχουμε $A=B+kI$ και άρα

$$\begin{aligned}&A^2-A-I=0\Leftrightarrow\left(B+kI\right)^2-\left(B+kI\right)-I=0\Leftrightarrow\\&B^2+2kB+k^2I-B-kI-I=0\Leftrightarrow\\&B^2+\left(2k-1\right)B+\left(k^2-k-1\right)I=0\Leftrightarrow\\&B\left(B+(2k-1)I\right)=\left(-k^2+k+1\right)I.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε πραγματικό $k\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ έχουμε $-k^2+k+1\neq0$, αφού οι ρίζες του τριωνύμου είναι $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Άρα παίρνουμε

$$B\left(B+(2k-1)I\right)=\left(-k^2+k+1\right)I \Leftrightarrow$$
$$B\left(\frac{1}{-k^2+k+1}\left(B+(2k-1)I\right)\right)=I \Leftrightarrow$$
$$B\left(\frac{1}{-k^2+k+1}\left(B+(2k-1)I\right)\right)=\left(\frac{1}{-k^2+k+1}\left(B+(2k-1)I\right)\right)B=I$$

Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος.

3. Έστω $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Θα δείξουμε ότι ο $B=A-kI$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Θα φθάσουμε σε άτοπο. Αποδείξαμε πριν τη σχέση $B\left(B+(2k-1)I\right)=\left(-k^2+k+1\right)I$. Άρα $B\left(B+(2k-1)I\right)=0$. Πολλαπλασιάζοντας με B^{-1} παίρνουμε $B+(2k-1)I=0$. Άρα $B=-(2k-1)I$ και συνεπώς $A=B+kI=-(k-1)I$. Από τη σχέση $A^2-A-I=0$ παίρνουμε

$$\left(-(k-1)I\right)^2-\left(-(k-1)I\right)-I=0 \Rightarrow \left(k^2-2k+1\right)I+kI-I-I=0 \Rightarrow$$
$$\left(k^2-k-1\right)I=0 \Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

και αυτό είναι άτοπο.

Άσκηση 12

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+az&=a^2\\ x+ay+z&=a\\ ax+y+z&=1 \end{aligned}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$. Να λυθεί το σύστημα αυτό για τις διάφορες τιμές του a.

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2\\ 1 & a & 1 & a\\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2\to r_2-r_1, r_3\to r_3-ar_1, r_3\to r_3+r_2$, ο πίνακας παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & (1-a)(1+a)^2 \end{pmatrix}.$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad az = a^2 \\ \quad (a-1)y+ \quad (1-a)z = a-a^2 \\ \quad\quad (1-a)(2+a)z = (1-a)(1+a)^2. \end{cases}$$

- *Περίπτωση 1.* Έστω $(a-1)(a+2)\neq 0.$

  Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Λύνοντας την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις $y=\dfrac{1}{a+2}$, οπότε από την πρώτη βρίσκουμε τελικά $x=\dfrac{-(a+1)}{a+2}$.

- *Περίπτωση 2.* Έστω $a=-2$.

  Τότε από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

- *Περίπτωση 3.* Έστω $a=1.$

  Τότε το σύστημα είναι το

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0. \end{cases}$$

  Υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x,y,z)=(1-y-z,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}.$

Άσκηση 13

Εξετάστε για ποιες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ το επόμενο σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1 \\ x_1+ax_2+ax_3&=b \\ x_1+a^2x_2+2ax_3&=ab. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2\to r_2-r_1$, $r_3\to r_3-r_1$ και $r_3\to r_3-(-a-1)r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a-b \end{pmatrix}$$

οπότε το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 1 \\ (a-1)x_2 + (a-1)x_3 &= b-1 \\ a(2-a)x_3 &= a-b. \end{aligned}$$

Περίπτωση 1. Έστω $a(2-a)(1-a) \neq 0.$

Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Περίπτωση 2. Έστω $a = 0.$

- Αν $b \neq 0$, από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b = 0,$ υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Περίπτωση 3. Έστω $a = 2.$

- Αν $b \neq 2$, από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b = 2$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Περίπτωση 4. Έστω $a = 1.$

- Αν $b \neq 1$, από τη δεύτερη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b = 1$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

1. Να υπολογιστεί η παράσταση $A^2 - 3A + 2I$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$
2. Εξετάστε αν ισχύει $AB = BA.$
3. Εξετάστε αν ισχύει $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$

Απάντηση 1. $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $AB = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 3. Έχουμε

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \Leftrightarrow AB = BA$ και η τελευταία ισότητα δεν ισχύει.

Άσκηση 2

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε

   $$A^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 5^n & 2\cdot(5^n - 3^n) \\ 3^n - 5^n & -3^n + 2\cdot 5^n \end{pmatrix}.$$

2. Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον A^{-1}.
3. Στη συνέχεια αποδείξτε τη σχέση του υποερωτήματος 1 για κάθε ακέραιο n.

Υπόδειξη 1. Για n θετικό χρησιμοποιήστε επαγωγή. 2. Βλ. Λυμένη Άσκηση 10. 3. Ένας τρόπος να αποδειχτεί η σχέση $A^{-n} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{-n} - 5^{-n} & 2\cdot(5^{-n} - 3^{-n}) \\ 3^{-n} - 5^{-n} & -3^{-n} + 2\cdot 5^{-n} \end{pmatrix}$ είναι να χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήστε τη σχέση $A^{-n} = \left(A^n\right)^{-1}$.

Άσκηση 3

Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες X τέτοιοι ώστε $XA = AX$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση**: $X = \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix}$, $z, w \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4

Να υπολογιστούν οι πίνακες

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{2003}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2004}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2005}$ 4. $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{1003} & \sin\frac{2\pi}{1003} \\ -\sin\frac{2\pi}{1003} & \cos\frac{2\pi}{1003} \end{pmatrix}^{2006}$

Υπόδειξη Για τα 1,2 και 3 βλ. Λυμένη Άσκηση 4. Για το 4 αποδείξτε τη σχέση

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{1003} & \sin\frac{2\pi}{1003} \\ -\sin\frac{2\pi}{1003} & \cos\frac{2\pi}{1003} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{1003} & \sin\frac{2k\pi}{1003} \\ -\sin\frac{2k\pi}{1003} & \cos\frac{2k\pi}{1003} \end{pmatrix}$$

για κάθε θετικό ακέραιο k με επαγωγή χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες. Σημείωση: Οι ... παρατηρητικοί αναγνώστες ήδη έχουν επισημάνει την ομοιότητα της προηγούμενης σχέσης με το θεώρημα του De Moivre.

Άσκηση 5

Ένα αεροσκάφος ίπταται έτσι ώστε οι συντεταγμένες (x_n, y_n, z_n) του σημείου όπου βρίσκεται μετά από n λεπτά πτήσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n - z_n \\ y_{n+1} &= y_n + z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$, όπου $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c.$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του αεροσκάφους μετά από 5 ώρες πτήσης.

Υπόδειξη Έχουμε $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Άρα αρκεί να υπολογιστεί η δύναμη A^{300}. Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. Αποδεικνύεται ότι

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2 - 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: $(x_{300}, y_{300}, z_{300}) = \left(a + 600b + \left(299^2 - 1\right)c, b + 300c, c\right)$

Άσκηση 6

Έστω A ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 + 2A - 3I = 0$.

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^4 + 2A^3 - 4A^2 - A + I$.
2. Αποδείξτε ότι οι πίνακες $A, A + 2I$ είναι αντιστρέψιμοι.
3. Αποδείξτε ότι ο $B = A - kI$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $k \neq 1, -3$.

Υπόδειξη Για το 1 βλ. Λυμένη Άσκηση 6. Για τα 2 και 3 βλ. Λυμένη Άσκηση 11.

Άσκηση 7

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

$$\begin{array}{lll} x-y+z=1 & x-y+z=1 & x-y+z=1 \\ 3x-y-z=2 & 3x-y-z=2 & 3x-y-z=2 \\ 5x-3y+z=4 & 5x-3y+z=5 & 5x-3y+2z=4 \end{array}$$

Απάντηση Το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις (τις $(\frac{1}{2}+z,-\frac{1}{2}+2z,z)$, $z\in\mathbb{R}$), το δεύτερο είναι αδύνατο και το τρίτο έχει μοναδική λύση (τη $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$).

Άσκηση 8

Εξετάστε για ποια a το σύστημα $\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 3x-y-z=2 \\ 5x-3y+z=a \end{array}$ είναι συμβιβαστό.

Απάντηση $a = 4$. Βλ. Λυμένη Άσκηση 8.

Άσκηση 9

Για ποιες τιμές των a,b το σύστημα

$$\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 3x-y-z=a \\ 5x-3y+bz=4 \end{array}$$

έχει άπειρες λύσεις, έχει μοναδική λύση, είναι αδύνατο.

Απάντηση Για $b=1, a=2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, για $b=1, a\neq 2$ το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ για $b\neq 1$ (και κάθε a) το σύστημα έχει μοναδική λύση. Βλ. Λυμένη Άσκηση 9.

Άσκηση 10

Για ποιες τιμές των a,b το παρακάτω σύστημα είναι αδύνατο;

$$\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x-y+az=1 \\ 3x+y+bz=1 \\ 2x-y+z=4 \end{array}$$

Απάντηση Το σύστημα είναι αδύνατο αν και μόνο αν $a=1$ (με b αυθαίρετο) ή $5a-3b+1=0$.

Άσκηση 11

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, ο αντίστροφοι των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

Απάντηση $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Ο B είναι αντιστρέψιμος αν $a \neq \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ και στην περίπτωση αυτή έχουμε $B^{-1}=\frac{1}{a^2-a-3}\begin{pmatrix} 3 & -a & a^2-6 \\ a-1 & -1 & -a+2 \\ -3 & a & 3-a \end{pmatrix}$.

Άσκηση 12

Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε $f(1)=2, f(2)=9, f(3)=20.$

Υπόδειξη Αν $f(x)=ax^2+bx+c$, τότε οι υποθέσεις οδηγούν σε ένα 3×3 σύστημα με αγνώστους τους $a,b,c.$ **Απάντηση** $f(x)=2x^2+x-1.$

Κεφάλαιο 4
Ορίζουσες

Όταν λύνουμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

βλέπουμε ότι η ποσότητα $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ παίζει σημαντικό ρόλο. Πράγματι, αν αυτή είναι μη μηδενική, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $x = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, y = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D}$. Τον αριθμό $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ τον ονομάζουμε **ορίζουσα** του πίνακα $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Στο κεφάλαιο αυτό, αφού υπενθυμίσουμε πως αντιστοιχίζουμε σε κάθε τετραγωνικό πίνακα έναν αριθμό (την ορίζουσά του), θα δούμε τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών. Εδώ μας ενδιαφέρουν κυρίως ο υπολογισμός των οριζουσών και οι εφαρμογές τους στους αντίστροφους πίνακες και στα γραμμικά συστήματα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Όπως έχουμε καθιερώσει σε προηγούμενα κεφάλαια, με $\mathbb{F}$ παριστάνουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ και με $M_n(\mathbb{F})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1 (ορίζουσα 2x2 πίνακα)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$. *Η ορίζουσα του A είναι ο αριθμός*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Για παράδειγμα, $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\cdot 4 - (-1)\cdot 3 = 11$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\cdot 4 - 0\cdot 3 = 8$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την ορίζουσα $n \times n$ πίνακα και για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε την έννοια της μετάθεσης

Ορισμός 2 (μεταθέσεις)

Μια ***μετάθεση*** *n στοιχείων είναι μια 1-1 απεικόνιση από το σύνολο* $\{1,2,...,n\}$ *στο* $\{1,2,...,n\}$.

Βλέπουμε ότι κάθε μετάθεση είναι αναγκαστικά 1-1 και επί απεικόνιση. Για παράδειγμα, η απεικόνιση $\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}, \sigma(1)=2, \sigma(2)=3, \sigma(3)=1,$ είναι μια μετάθεση. Υπάρχει εδώ ένας χρήσιμος συμβολισμός. Κάθε μετάθεση παριστάνεται με έναν $2\times n$ πίνακα του οποίου η πρώτη γραμμή είναι η 1 2 … n και δεύτερη γραμμή είναι η $\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, δηλαδή $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{pmatrix}$. Κάτω από κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής βρίσκεται η εικόνα του. Συνεπώς η μετάθεση του παραδείγματος συμβολίζεται με $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Επίσης, αντί να γράφουμε $\sigma(i)$ συχνά γράφουμε σ_i. Στο παράδειγμα, $\sigma_1=2, \sigma_2=3, \sigma_3=1$.

Το σύνολο των μεταθέσεων n στοιχείων συμβολίζεται με S_n.

Έστω $\sigma\in S_n$. Το **πρόσημο**, $sign(\sigma)$, της σ ορίζεται ως εξής:

- $sign(\sigma)=1$ αν υπάρχει άρτιο πλήθος ζευγών δεικτών (i,j) τέτοιων ώστε $i<j$ και $\sigma_i>\sigma_j$
- $sign(\sigma)=-1$ αν υπάρχει περιττό πλήθος ζευγών δεικτών (i,j) τέτοιων ώστε $i<j$ και $\sigma_i>\sigma_j$.

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ έχει πρόσημο 1, $sign(\sigma)=1$, γιατί το πλήθος των ζευγών στον παραπάνω ορισμό είναι 2 (τα ζεύγη αυτά είναι (1,3), (2,3)). Η μετάθεση $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ έχει πρόσημο –1, $sign(\tau)=-1$, γιατί τα εν λόγω ζεύγη είναι 3 (και είναι τα (1,2),(1,3),(2,3)). Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ έχει πρόσημο –1 αφού υπάρχει μόνο 1 ζεύγος με τις ιδιότητες του ορισμού (και είναι το (3,4)).

Ορισμός 3 (ορίζουσα nxn πίνακα)

Έστω $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$. *Η* ***ορίζουσα*** *του* A *είναι ο αριθμός*

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}.$$

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό, η ορίζουσα $\det A$ είναι ένα άθροισμα προσημασμένων όρων και κάθε όρος $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$ είναι ένα γινόμενο n στοιχείων του πίνακα που προέρχονται από *διαφορετικές* γραμμές και στήλες. Με άλλα λόγια κάθε γραμμή (και κάθε στήλη) συνεισφέρει ακριβώς έναν παράγοντα στο γινόμενο $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$.

Παραδείγματα

- Έστω $n=1$, $A=(a)$. Τότε το S_1 έχει ένα στοιχείο και $\det A=a$.
- Έστω $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Επειδή το σύνολο S_2 έχει 2 στοιχεία,

  $S_2=\left\{e=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ και ισχύει $sign(e)=1, sign(\sigma)=-1$, παίρνουμε

  $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.
- Έστω $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Το S_3 έχει 6 στοιχεία.

  $$S_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

  και τα πρόσημα είναι $1,-1,-1,1,1,-1$ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τον ορισμό βρίσκουμε

  $\det A=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$.

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ορισμός 4 (προσαρτημένος πίνακας)

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$. *Για κάθε* $i,j\in\{1,...,n\}$, *συμβολίζουμε με* A_{ij} *τον* $(n-1)\times(n-1)$ *πίνακα που προκύπτει από τον* A *αν διαγράψουμε την* i *γραμμή και* j *στήλη. Ο*

προσαρτημένος πίνακας *$adjA$ του A είναι ο $n\times n$ πίνακας που στη θέση (i,j) έχει το στοιχείο* $(-1)^{i+j}\det A_{ji}$.

Προσοχή. Στη θέση (1,2) του $adjA$ υπάρχει το $-\det A_{21}$ και όχι το $-\det A_{12}$.

Παράδειγμα

Αν $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&3&4\end{pmatrix}$, τότε

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}\\\cancel{0}&2&-1\\\cancel{0}&3&4\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{11}=11$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&4\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}\\0&\cancel{2}&-1\\0&\cancel{3}&4\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{12}=0$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}\\0&2&\cancel{-1}\\0&3&\cancel{4}\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{13}=0$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\3&4\end{pmatrix}\quad\left(=\begin{pmatrix}\cancel{1}&0&1\\\cancel{0}&\cancel{2}&\cancel{-1}\\\cancel{0}&3&4\end{pmatrix}\right),\quad \det A_{21}=-3.$$

κλπ

Έχουμε $adjA=\begin{pmatrix}\det A_{11}&-\det A_{21}&\det A_{31}\\-\det A_{12}&\det A_{22}&-\det A_{32}\\\det A_{13}&-\det A_{23}&\det A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&3&-2\\0&4&1\\0&-3&2\end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα στον ορισμό του προσαρτημένου πίνακα εμφανίζονται εναλλάξ σύμφωνα με τη διάταξη σκακιέρας

$$\begin{matrix}+&-&+&\dots\\-&+&-&\dots\\+&-&+&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots\end{matrix}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στα παρακάτω, όλοι οι πίνακες είναι $n \times n$ εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι άλλο.

Πρόταση 1

Ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα, δηλαδή $\det A = \det A^t$ *για κάθε* $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Πρόταση 2

1. *Αν ο πίνακας A έχει μια μηδενική γραμμή (ή στήλη), τότε* $\det A = 0$.
2. *Αν ο πίνακας A έχει δυο ίσες γραμμές (ή στήλες), τότε* $\det A = 0$.
3. *Αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός), τότε η ορίζουσα του A είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων. Ιδιαίτερα η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με 1.*

Για παράδειγμα, $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$ γιατί υπάρχει μια μηδενική γραμμή. Έχουμε $\det\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & y & 3 \\ -1 & z & -1 \end{pmatrix} = 0$, γιατί δυο στήλες είναι ίδιες. Επίσης $\det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & y & 0 \\ -1 & 4 & z \end{pmatrix} = xyz$, γιατί ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός.

Πρόταση 3 (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί και ορίζουσες)

Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A με

- *πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (ή στήλης) με ένα k, τότε* $\det B = k \det A$.
- *εναλλαγή δυο γραμμών (ή στηλών), τότε* $\det B = -\det A$.
- *πρόσθεση σε μια γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασίου άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε* $\det B = \det A$.

Ειδικά, για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει $\det(kA) = k^n \det A$.

Για παράδειγμα, έχουμε $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ γιατί έχουμε εναλλαγή των δυο πρώτων γραμμών, και $\det\begin{pmatrix} a+kx & b+ky & c+kz \\ x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ αφού η πρώτη γραμμή του πρώτου πίνακα προκύπτει από το δεύτερο προσθέτοντας πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής στην πρώτη.

Τα επόμενα τρία αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Θεώρημα 4 (κριτήριο αντιστρέψιμου πίνακα)

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, γιατί $\det A = 0$.

Θεώρημα 5 (ορίζουσα γινομένου)

Για κάθε $A, B \in M_n(F)$ έχουμε $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Δηλαδή η ορίζουσα του γινομένου δυο πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων.

Θεώρημα 6 (ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς μια γραμμή ή στήλη)

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, τότε με A_{ij} συμβολίζουμε τον $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και j στήλη. Τότε για κάθε i έχουμε

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

και για κάθε j έχουμε

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det A_{nj}.$$

Σημείωση Η πρώτη από τις δυο προηγούμενες ταυτότητες λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας του A ως προς την i *γραμμή*. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $a_{i1},\ldots,a_{in}$ που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος είναι τα στοιχεία της i γραμμής. Όμοια η δεύτερη ταυτότητα λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη j *στήλη*.

Παράδειγμα

Ας δούμε αναλυτικά την 3×3 περίπτωση. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Αναπτύγματα ως προς τις γραμμές

Ας επιλέξουμε $i=1$ (δηλαδή την πρώτη γραμμή). Έχουμε

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right),$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \right),$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} \right) \quad \text{και}$$

$$\det A = (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \det A_{12} + (-1)^4 a_{13} \det A_{13} =$$
$$a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Επιλέγοντας $i=2$, βρίσκουμε

$$\det A = -a_{21} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{23} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

και επιλέγοντας $i=3$, βρίσκουμε

$$\det A = a_{31} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - a_{32} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} + a_{33} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Αναπτύγματα ως προς τις στήλες

Αν επιλέξουμε $j=1$ (δηλαδή την πρώτη στήλη) βρίσκουμε

$$\det A = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Για $j=2$ και $j=3$ βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\det A = -a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{32}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\det A = a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - a_{23}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + a_{33}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Για να δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Τότε το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την πρώτη γραμμή είναι

$$\det A = 1\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (3\cdot 6 - 0) - 2((-1)\cdot 6 - 4\cdot 5) + 0 = 70$$

και ως προς τη δεύτερη γραμμή είναι

$$\det A = -(-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= -(-1)(12-0) + 3(6-0) - 4(0-10) = 70.$$

Το ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη στήλη είναι

$$\det A = -2\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= (-2)(-26) + 3(6-0) - 0 = 70.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των οριζουσών σχετίζεται με τον υπολογισμό αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 7

Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας.

- *Τότε*

$$A(adjA) = (adjA)A = (\det A)I,$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος $n\times n$ πίνακας.

- *Αν έχουμε* $\det A \neq 0$, *τότε* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, τότε εύκολα επαληθεύεται ότι $\det A = 11$ και

$adjA = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Η ταυτότητα στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 7

είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 7 έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μια άλλη εφαρμογή των οριζουσών είναι η επίλυση τετραγωνικών γραμμικών συστημάτων που έχουν αντιστρέψιμο πίνακα συντελεστών.

Θεώρημα 8 (κανόνας του Cramer)

Θεωρούμε ένα τετραγωνικό γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_n \end{array},$$

δηλαδή ένα γραμμικό σύστημα όπου το πλήθος των αγνώστων και το πλήθος των εξισώσεων είναι το ίδιο. Υποθέτουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών δεν είναι μηδέν. Τότε η μοναδική λύση είναι η

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

όπου $D=\det(a_{ij})$ *είναι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών και* D_i *είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα των συντελεστών αν αντικαταστήσουμε την i στήλη με τη στήλη* $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *των σταθερών όρων.*

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{array}{l} x+3y+z=10 \\ 2x+2y-z=11 \\ x+3y+4z=12 \end{array}$.

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε

$$D=\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=-12$$

$$D_1=\det\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 12 & 3 & 4 \end{pmatrix}=-49$$

$$D_2=\det\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \\ 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}=-21$$

$$D_3=\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}=-8.$$

Άρα υπάρχει μοναδική λύση που δίνεται από

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-49}{-12}=\frac{49}{12},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{-12}=\frac{21}{12},\quad z=\frac{D_3}{D}=\frac{-8}{-12}=\frac{2}{3}.$$

Πόρισμα 9

Ένα ομογενές τετραγωνικό σύστημα έχει μοναδική λύση (τη μηδενική) αν και μόνο αν $\det A\neq 0$, *όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών.*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Υπολογίστε τις παρακάτω ορίζουσες

$$\det\begin{pmatrix} 2+3i & i \\ 4-i & -3 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Για την πρώτη ορίζουσα έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 2+3i & i \\ 4-i & -3 \end{pmatrix} = (2+3i)\cdot(-3) - i\cdot(4-i) = -6-9i-4i+i^2 = -7-13i.$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή, σύμφωνα με το Θεώρημα 6. Έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 1(2-15) - 2(-4-6) + 3(20+4) = 79.$$

Υπολογίζουμε την τρίτη ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη (γιατί περιέχει μηδενικά που απλουστεύουν τις πράξεις). Έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -20.$$

Για την τέταρτη ορίζουσα παρατηρούμε ότι δυο στήλες είναι ίσες. Άρα η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν σύμφωνα με την Πρόταση 2.

Άσκηση 2

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$

Λύση

Φυσικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα αναπτύσσοντάς την ως προς μια γραμμή ή στήλη σύμφωνα με το Θεώρημα 6, αλλά έτσι απαιτούνται πολλές πράξεις. Ένας πιο σύντομος και κομψός τρόπος είναι: Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από την δεύτερη οπότε παίρνουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. Στη συνέχεια αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από την τέταρτη και παίρνουμε τον $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Από το τρίτο μέρος της Πρότασης 3 έχουμε $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Ο τελευταίος πίνακας έχει δυο ίσες γραμμές και επομένως η ορίζουσά του είναι ίση με 0 (Πρόταση 2 2)). Τελικά $\det A = 0$.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *με δύο διαφορετικούς τρόπους.*

Λύση

τρόπος 1: ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες στο δεξιό μέλος είναι τριγωνικοί και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2 3). Έχουμε

$$2\det\begin{pmatrix}3&2&8\\0&-5&1\\0&0&2\end{pmatrix}-4\det\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-5&1\\0&0&2\end{pmatrix}=2\cdot3\cdot(-5)2-4\cdot1\cdot(-5)\cdot2=-20.$$

τρόπος 2: ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή

$\det\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\4&3&2&8\\0&0&-5&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}2&1&3\\4&3&2\\0&0&-5\end{pmatrix}$. Εφαρμόζουμε πάλι το ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή και βρίσκουμε $2\det\begin{pmatrix}2&1&3\\4&3&2\\0&0&-5\end{pmatrix}=2\cdot(-5)\cdot\det\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}=-20.$

Άσκηση 4

1) Αν $\det\begin{pmatrix}1&a&b\\2&0&c\\-1&d&3\end{pmatrix}=3$, *να υπολογιστεί η* $\det\begin{pmatrix}6&2a&2b\\6&0&c\\-3&d&3\end{pmatrix}$.

2) Να υπολογισθεί η $\det\begin{pmatrix}a&x&a+x\\b&y&b+y\\c&z&c+z\end{pmatrix}$.

Λύση

1) Χρησιμοποιώντας δύο φορές το πρώτο μέρος της Πρότασης 3 (στην πρώτη γραμμή και στη συνέχεια στην πρώτη στήλη) έχουμε

$$\det\begin{pmatrix}6&2a&2b\\6&0&c\\-3&d&3\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}3&a&b\\6&0&c\\-3&d&3\end{pmatrix}=2\cdot3\det\begin{pmatrix}1&a&b\\2&0&c\\-1&d&3\end{pmatrix}=2\cdot3\cdot3=18.$$

2)Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από την τρίτη παίρνουμε $\det\begin{pmatrix}a&x&a+x\\b&y&b+y\\c&z&c+z\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a&x&x\\b&y&y\\c&z&z\end{pmatrix}=0$, αφού ο πίνακας $\begin{pmatrix}a&x&x\\b&y&y\\c&z&z\end{pmatrix}$ έχει δύο ίσες στήλες.

Άσκηση 5

Να βρεθεί αν υπάρχει ο αντίστροφος του $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&3&4\end{pmatrix}$.

Λύση

Γνωρίζουμε μια μέθοδο επίλυσης από το Κεφάλαιο 3, τον Αλγόριθμο Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 7. Επειδή ισχύει $\det A=-2\neq 0,$ ο A είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με το Θεώρημα 4. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7. Έχουμε

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}, A_{13}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix},$$
$$A_{21}=\begin{pmatrix}0&-1\\3&4\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&4\end{pmatrix}, A_{23}=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},$$
$$A_{31}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, A_{32}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}, A_{33}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε

$$\det A_{11}=4, \det A_{12}=8, \det A_{13}=6,$$
$$\det A_{21}=3, \det A_{22}=4, \det A_{23}=3,$$
$$\det A_{31}=1, \det A_{32}=2, \det A_{33}=1.$$

Συνεπώς $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-3&1\\-8&4&-2\\6&-3&1\end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

1) Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\-1&2&3\\1&a&1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

2) Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&1&1\\-2&2&a&2\\3&-3&6&a\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

Λύση

1) Υπολογίζοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε $\det A = a(2-3a)-(-1-3) = -3a^2+2a+4$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $-3a^2+2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$.

2) Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία με το προηγούμενο ερώτημα. Επειδή οι πράξεις στον υπολογισμό της συγκεκριμένης ορίζουσας είναι πολλές, θα χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τρόπο που είναι ουσιαστικά δεν είναι άλλος από τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss:

Εφαρμόζουμε συστηματικά την Πρόταση 3, δηλαδή χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Όμως εδώ χρειάζεται προσοχή! Αν στην προηγούμενη διαδικασία πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή πίνακα με ένα μη μηδενικό k, θα πρέπει να διαιρέσουμε την τελική ορίζουσα με αυτό το k για να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης 3 1).

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Στην προηγούμενη διαδικασία δεν υπήρξαν πολλαπλασιασμοί γραμμών.

Συνεπώς $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix} = 3(a+4)(a-3).$

Άρα ο αρχικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a \neq -4, 3$.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3. Στα δεξιά περιγράφουμε τα βήματα.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_2 \to r_2 - r_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_3 \to r_3 - xr_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_4 \to r_4 - xr_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ 0 & x-x^2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη

$$\det\begin{pmatrix} 0 & x-y & x-1 \\ 1-x^2 & 0 & y-x \\ x-x^2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη στήλη

$$-(x-y)\det\begin{pmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x-x^2 & 1-x \end{pmatrix} =$$

παραγοντοποίηση στην πρώτη στήλη

$$-(x-y)\det\begin{pmatrix} (1-x)(1+x) & y-x \\ (1-x)x & 1-x \end{pmatrix} =$$

Πρόταση 3 1)

$$-(x-y)(1-x)\det\begin{pmatrix} 1+x & y-x \\ x & 1-x \end{pmatrix} =$$

πράξεις

$$-(x-y)(1-x)\big((1+x)(1-x)-(y-x)x\big) =$$

$$(x-1)(x-y)(1-xy).$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$ *(ο πίνακας είναι* $n \times n$*, όπου* $n > 1$*).*

Λύση

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$x\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} y \det\begin{pmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{pmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n,$$

γιατί οι δύο τελευταίοι πίνακες είναι $(n-1)\times(n-1)$ τριγωνικοί (βλ. Πρόταση 2).

Άσκηση 9

Έστω a,b,c διακεκριμένοι αριθμοί. Υπολογίστε την ορίζουσα και τον αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

Λύση

Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από τις άλλες δύο έχουμε

$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$. Από τη δεύτερη στήλη βγάζουμε κοινό παράγοντα το $b-a$ και από την τρίτη το $c-a$. Παίρνουμε

$\det A = (b-a)(c-a)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{pmatrix}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Επειδή οι a,b,c είναι διακεκριμένοι έχουμε $\det A \neq 0$ και συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος μπορεί να υπολογιστεί με τον προσαρτημένο πίνακα. Μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & c^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(c-a)(c-b)(b-a)}\begin{pmatrix} bc^2 - b^2c & b^2 - c^2 & c-b \\ a^2c - ac^2 & c^2 - a^2 & a-c \\ ab^2 - a^2b & -b^2 + a^2 & b-a \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 10

Υπολογίστε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ & & & \dots & & \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(*Το στοιχείο στη θέση* (i,j) *είναι* $|i-j|$).

Λύση

Θα φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Από την πρώτη στήλη αφαιρούμε τη δεύτερη, από τη δεύτερη αφαιρούμε την τρίτη, κλπ. Παίρνουμε

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Προσθέτουμε τώρα την πρώτη γραμμή κάθε μια από τις άλλες γραμμές. Παίρνουμε

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \\ 0 & -2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & -2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)\underbrace{(-2)\dots(-2)}_{n-2 \text{ φορες}}(n-1) =$$

$$= (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1),$$

όπου με * παριστάνουμε στοιχεία που δεν μας ενδιαφέρουν για τον υπολογισμό της ορίζουσας.

Άσκηση 11

Υπενθυμίζουμε ότι οι αριθμοί του Fibonacci, $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, *ορίζονται από τις σχέσεις* $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n > 2)$. *Έστω*

$$F_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ο πίνακας είναι $n \times n$, *τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι 1, στα δεξιά τους είναι 1 και στα αριστερά τους είναι – 1). Αποδείξτε ότι* $F_n = f_n,\ n = 1, 2, \dots$.

Λύση

Επειδή ισχύει

$$F_1 = \det(1) = 1 = f_1, \quad F_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = f_2$$

για να δείξουμε ότι $F_n = f_n,\ n = 1, 2, \dots$ αρκεί να δείξουμε ότι τα $f_1, f_2, \dots$ και $F_1, F_2, \dots$ ικανοποιούν την ίδια αναδρομική σχέση, δηλαδή $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3)$.

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη παίρνουμε

$$F_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = F_{n-1} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε τη δεξιά ορίζουσα (που είναι $(n-1)\times(n-1)$) ως προς την πρώτη γραμμή. Τότε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = F_{n-2}.$$

Άρα $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Άσκηση 12

Έστω A_n *ο* $n\times n$ *πίνακας* $(n \geq 2)$ $A_n = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. *Δείξτε ότι* $\det A_n = 0$, *όταν* $n = 3m-1$, m *ακέραιος*

b. *Να βρεθεί η* $\det A_n$, *όταν* $n = 3m$, m *ακέραιος*.

Λύση

Πρώτα θα βρούμε μια αναδρομική σχέση για τις $\det A_n$. Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη βρίσκουμε

$$\det A_n = -2\det A_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε

$$\det A_n = -2\det A_{n-1} - 4\det A_{n-2},\ n \geq 4. \qquad (*)$$

Οι αρχικές τιμές είναι $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0,\ \det A_3 = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 8.$

a. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο m. Για $m = 1$, $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0.$

   Έστω ότι $\det A_{3m-1} = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \det A_{3(m+1)-1} &= \det A_{3m+2} \overset{(*)}{=} -2\det A_{3m+1} - 4\det A_{3m} \\ &\overset{(*)}{=} -2(-2\det A_{3m} - 4\det A_{3m-1}) - 4\det A_{3m} \\ &= 8\det A_{3m-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

b. Θα αποδείξουμε ότι $\det A_{3m} = 8^m$. Σκεφθήκαμε τον τύπο αυτόν γιατί μετά από υπολογισμούς με βάση τη σχέση (*) βρήκαμε ότι
   $\det A_3 = 8,\ \det A_6 = 64$.

   Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο m. Για $m = 1$, $\det A_3 = 8$, όπως βρήκαμε πριν. Έστω $\det A_{3m} = 8^m$. Χρησιμοποιώντας το υποερώτημα a. έχουμε

$$\begin{aligned} \det A_{3(m+1)} &\overset{(*)}{=} -2\det A_{3(m+1)-1} - 4\det A_{3m+1} \\ &= 0 - 4\det A_{3m+1} \\ &= -4\det A_{3m+1} \\ &\overset{(*)}{=} 8\det A_{3m} + 16\det A_{3m-1} \\ &= 8\det A_{3m} \\ &= 8\cdot 8^m = 8^{m+1}. \end{aligned}$$

Άσκηση 13

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες $D_n = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *(Ο πίνακας είναι* $n\times n$*)*

Λύση

Έχουμε $D_1 = \det(2) = 2$, $D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$. Διατυπώνουμε την εικασία ότι

$$D_n = n+1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε

$$D_n = 2D_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τη πρώτη στήλη βρίσκουμε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} = D_{n-2}.$$

Άρα βρήκαμε την αναδρομική σχέση

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Με βάση αυτή, η εικασία μας αποδεικνύεται άμεσα με επαγωγή στο n.

Άσκηση 14

1) *Έστω Α ένας* $n\times n$ *πίνακας τέτοιος ώστε* $A^t = -A$. *Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος.*
2) *Έστω Α,Β δυο πίνακες τέτοιοι ώστε* $A^3 + 3AB + 2I = 0$. *Αποδείξτε ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος.*
3) *Αποδείξτε ότι για κάθε* $n\times n$ *πίνακα Α ισχύει* $\det(adjA) = (\det A)^{n-1}$.

Λύση

1) Από την Πρόταση 1 έχουμε $\det A^t = \det A$. Από την υπόθεση και την Πρόταση 3 έχουμε $\det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Άρα $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

2) Έχουμε $A^3 + 3AB + 2I = 0 \Rightarrow A\left(A^2 + 3B\right) = -2I$. Παίρνοντας ορίζουσες και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5 λαμβάνουμε

$$\det\left(A\left(A^2+3B\right)\right) = \det\left(-2I\right) \Rightarrow$$
$$\det A \cdot \det\left(A^2+3B\right) = \left(-2\right)^n \neq 0 \Rightarrow$$
$$\det A \neq 0.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

3) Από την ισότητα πινάκων $A(adjA) = (\det A)I$ του Θεωρήματος 7 παίρνουμε την ισότητα οριζουσών

$$\det\left(A\left(adjA\right)\right) = \det\left(\left(\det A\right)I\right) \Rightarrow$$
$$\det A \cdot \det\left(adjA\right) = \left(\det A\right)^n.$$

- Αν έχουμε $\det A \neq 0$, συμπεραίνουμε άμεσα το ζητούμενο.
- Έστω τώρα $\det A = 0$ και $A \neq 0$. Τότε $A(adjA) = 0$, οπότε αν ήταν ο $adjA$ αντιστρέψιμος θα παίρναμε $A = 0$, άτοπο. Άρα ο $adjA$ δεν είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\det(adjA) = 0$.
- Τέλος το ζητούμενο είναι προφανές αν $A = 0$.

Άσκηση 15

Υπολογίστε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Λύση

Στον πίνακα A αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές. Προκύπτει άνω τριγωνικός πίνακας και συνεπώς η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\gamma \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

Στον πίνακα B αφαιρούμε τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη και από την τρίτη. Τότε εμφανίζονται κοινοί παράγοντες. Έχουμε

$$\det B = \det\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$\alpha\beta\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Αφαιρώντας από τη δεύτερη στήλη την πρώτη και αναπτύσσοντας την νέα ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή της καταλήγουμε σε μια 3×3 ορίζουσα. Έτσι έχουμε:

$$\det B = \alpha\beta\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} = \alpha\beta\det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\beta \end{pmatrix} =$$

$$\alpha\beta(-\alpha)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\beta \end{pmatrix} = \alpha\beta(-\alpha)(1-\beta-1) = \alpha^2\beta^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι;

$$A = \begin{pmatrix} 2-3i & 4 \\ 6+4i & 8i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του $B^{2005}C^{2006}$;

Απάντηση Μόνο ο τρίτος είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$\det\left(B^{2005}C^{2006}\right) = \left(\det B\right)^{2005}\left(\det C\right)^{2006} = 0.$$

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $ad-bc\neq 0$,

οπότε $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Θεώρημα 4 και Θεώρημα 7.

Άσκηση 3

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 2 \\ x \qquad +z &= 3 \\ x+y-z &= 1 \end{aligned}$$

με τον κανόνα του Cramer.

Απάντηση $x=\dfrac{15}{6}, y=\dfrac{-6}{6}, z=\dfrac{3}{6}$.

Άσκηση 4

1)Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -10 & -6 \\ 3 & -2 & 10 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Αποδείξτε ότι $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & b & c & a+d \\ x & y & z & x+w \\ x+2a & y+2b & z+2c & x+w+2a+2d \end{pmatrix}=0.$

Υπόδειξη 1) Βλ. Λυμένη Άσκηση 6 2) και Λυμένη Άσκηση 7.

2) Αφαιρέστε από την τελευταία γραμμή το διπλάσιο της δεύτερης.

Απάντηση για το 1): 18.

Άσκηση 5

1) Να βρεθεί ο $adjA$, όπου $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

2) Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο A είναι αντιστρέψιμος.

3) Για τις τιμές που βρήκατε στο 2) να υπολογίστε τον αντίστροφο.

Απάντηση 1) $adjA = \begin{pmatrix} 2-3a & -2 & 6 \\ 1 & a & -3a \\ -a & -a^2 & 2a+2 \end{pmatrix}$. 2) $a \neq \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$.

3) $A^{-1} = \frac{1}{-3a^2+2a+2}\begin{pmatrix} 2-3a & -2 & 6 \\ 1 & a & -3a \\ -a & -a^2 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι $\det A_n = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$, *όπου,*

$$A_n = \begin{pmatrix} x^2+1 & x & 0 & \ldots & 0 \\ x & x^2+1 & x & \ldots & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x^2+1 \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη Εφαρμόστε επαγωγή και το ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή.

Άσκηση 7

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις άλλες και βγάλτε κοινό παράγοντα. Στη συνέχεια, μετατρέψτε τον πίνακα σε τριγωνικό. **Απάντηση** $1+a+b+c+d$.

Άσκηση 8

Αν $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, *τότε να εκφράσετε την* $\det\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix}^{-1}$ *συναρτήσει των* a,b,c,d.

Υπόδειξη Παρατηρήστε ότι $\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

Απάντηση $\det\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix}^{-1} = \det\begin{pmatrix} a-b & -a+2b \\ c-d & -c+2d \end{pmatrix}$.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι $\det A = \pm 1$ αν ο A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο A και ο A^{-1} έχουν στοιχεία ακεραίους αριθμούς .

Υπόδειξη $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$.

Άσκηση 10

Αποδείξτε ότι $\det\begin{pmatrix} x+y & x & x & \dots & x \\ x & x+y & x & \dots & x \\ x & x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+y \end{pmatrix} = (nx+y)y^{n-1}$, όπου ο πίνακας είναι $n \times n$.

Υπόδειξη Προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις άλλες και βγάλτε κοινό παράγοντα το $nx+y$. Στη συνέχεια, μετατρέψτε τον πίνακα σε τριγωνικό.

Άσκηση 11 (ορίζουσα Vandermonde)

Έστω $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$. Αποδείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j).$$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9.

Κεφάλαιο 5

Οι Χώροι $\mathbb{R}^n$

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα των χώρων $\mathbb{R}^n$ για να εισαγάγουμε μερικές θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Ιδιαίτερα θα μελετήσουμε την έννοια της βάσης του $\mathbb{R}^n$ και ιδιότητες του συνήθους εσωτερικού γινομένου στο $\mathbb{R}^n$. Με τον τρόπο αυτό διευκολύνεται η μετάβαση σε πιο γενικούς χώρους που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΒΑΣΕΙΣ

Ορισμός 1 (πράξεις στο $\mathbb{R}^n$)

Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το σύνολο των διατεταγμένων *n*-άδων $(u_1,\ldots,u_n)$, όπου $u_i \in \mathbb{R}$. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού μπορούν να θεωρηθούν σαν πίνακες μεγέθους $1\times n$, δηλαδή σαν πίνακες που έχουν μόνο μια γραμμή. Συνεπώς στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ έχουμε την ***πρόσθεση*** που ορίζεται από

$$(u_1,\ldots,u_n)+(v_1,\ldots,v_n)=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$$

και επίσης μπορούμε να ***πολλαπλασιάσουμε*** στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με αριθμούς σύμφωνα με τον κανόνα

$$a(u_1,\ldots,u_n)=(au_1,\ldots,au_n),\ a\in\mathbb{R}.$$

Για παράδειγμα, $(2,-1,3)+2(0,-3,7)=(2,-1,3)+(0,-6,14)=(2,-7,17)$.

Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ μαζί με τις προηγούμενες πράξεις θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ο **χώρος** $\mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα λέμε και **διανύσματα.**

Ορισμός 2 (γραμμικός συνδυασμός)

Έστω $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$.

1. *Ένας* ***γραμμικός συνδυασμός*** *των* $v_1,\ldots,v_m$ *είναι ένα στοιχείο του* $\mathbb{R}^n$ *της μορφής* $a_1v_1+\ldots+a_mv_m$, $a_i\in\mathbb{R}$.

2. *Θα λέμε ότι τα στοιχεία* $v_1,\ldots,v_m$ ***παράγουν*** *το χώρο* $\mathbb{R}^n$ *αν για κάθε* $v\in\mathbb{R}^n$ *υπάρχουν* $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $v=a_1v_1+\ldots+a_mv_m$.

Παραδείγματα

1. Εξετάζουμε αν το $(1,4,3)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,-1),(0,1,2)$, δηλαδή εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(1,4,3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2)$. Έχουμε

$$(1,4,3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}1=a\\4=2a+b\\3=-a+2b.\end{cases}$$

Βλέπουμε άμεσα ότι το τελευταίο σύστημα έχει λύση, τη $a=1,b=2$. Άρα το $(1,4,3)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,-1),(0,1,2)$ και έχουμε $(1,4,3)=(1,2,-1)+2(0,1,2)$.

2. Εξετάζουμε αν τα $(1,2,-1),(0,1,2)$ παράγουν το $\mathbb{R}^3$, δηλαδή αν για κάθε $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$ υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$(c_1,c_2,c_3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2).$$

Έχουμε

$$(c_1,c_2,c_3)=a(1,2,-1)+b(0,1,2)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}c_1=a\\c_2=2a+b\\c_3=-a+2b.\end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (με αγνώστους a,b) είναι

$$\begin{pmatrix}1&0&c_1\\2&1&c_2\\-1&2&c_3\end{pmatrix}.$$

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (βλ. Κεφάλαιο 3) βλέπουμε ότι αυτός είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$\begin{pmatrix}1&0&c_1\\0&1&c_2-2c_1\\0&0&c_3+5c_1-2c_2\end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία γραμμή βλέπουμε ότι αν $c_3 + 5c_1 - 2c_2 \neq 0$, τότε το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο. Άρα τα $(1,2,-1),(0,1,2)$ δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός 3 (γραμμική ανεξαρτησία)

*Έστω $v_1,...,v_m \in \mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία αυτά λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν από τη σχέση $a_1v_1 + ... + a_m v_m = 0, a_i \in \mathbb{R}$, έπεται αναγκαστικά ότι $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$. Διαφορετικά αυτά ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα**.*

Παραδείγματα

1. Τα $(1,2),(3,3) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί

$$\begin{aligned}
&a(1,2) + b(3,3) = 0 \Rightarrow \\
&(a+3b, 2a+3b) = 0 \Rightarrow \\
&\begin{cases} a+3b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow \\
&a = b = 0.
\end{aligned}$$

2. Ας εξετάσουμε αν τα $(1,2),(3,3),(1,3) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

   Έχουμε

$$\begin{aligned}
&a(1,2) + b(3,3) + c(1,3) = (0,0,0) \Rightarrow \\
&(a+3b+c, 2a+3b+3c) = (0,0,0) \Rightarrow \\
&\begin{cases} a+3b+c=0 \\ 2a+3b+c=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

   Το τελευταίο σύστημα έχει και άλλη λύση εκτός από τη μηδενική (αφού είναι ομογενές και οι άγνωστοι είναι περισσότεροι των εξισώσεων, βλ. Κεφ 3, Θεώρημα 9). Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ορισμός 4 (βάση του $\mathbb{R}^n$)

*Ένα σύνολο $\{v_1,...,v_m\}$ στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **βάση** του $\mathbb{R}^n$ αν έχει τις ιδιότητες*

1. *τα $v_1,...,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$*
2. *τα $v_1,...,v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα*

Παράδειγμα

Το σύνολο $\{(1,2),(3,3)\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι,

1. Τα $(1,2),(3,3)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$: Έστω $(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}&a(1,2)+b(3,3)=(c_1,c_2)\Leftrightarrow\\&(a+3b,2a+3b)=(c_1,c_2)\Leftrightarrow\\&\begin{cases}a+3b=c_1\\2a+3b=c_2\end{cases}.\end{aligned}$$

   Βλέπουμε ότι το σύστημα με αγνώστους τους a,b έχει λύση, αφού

   $\det\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}\neq 0$.

2. Είδαμε πριν στα Παραδείγματα του Ορισμού 3 ότι τα $(1,2),(3,3)\in\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Ορισμός 5 (το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο)

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n, u=(u_1,...,u_n), v=(v_1,...,v_n)$.

- *Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των u,v είναι ο πραγματικός αριθμός* $\langle u,v\rangle=u_1v_1+...+u_nv_n$.
- *Το μήκος (ή μέτρο) του u είναι ο πραγματικός αριθμός* $|u|=\sqrt{u_1{}^2+...+u_n{}^2}$.

Παρατηρούμε ότι

$$|u|=\sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

Για παράδειγμα, αν $u=(4,5,-1), v=(2,1,3)$, τότε έχουμε

$\langle u,v\rangle=4\cdot2+5\cdot1+(-1)\cdot3=10,\ |u|=\sqrt{4^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{42}.$

Ορισμός 6 (γωνία διανυσμάτων)

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός θ με $0\le\theta\le\pi$ τέτοιος ώστε

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}.$$

*Θα λέμε ότι η **γωνία** μεταξύ των u,v είναι θ. Στην ειδική περίπτωση $\theta=\frac{\pi}{2}$, θα λέμε ότι τα u,v είναι **κάθετα** μεταξύ τους.*

Ορισμός 7 (ορθοκανονική βάση)

Μια βάση $\{v_1,..,v_n\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *λέγεται ορθοκανονική αν* $\langle v_1,v_1\rangle = ... = \langle v_n,v_n\rangle = 1$ *και* $\langle v_i,v_j\rangle = 0$ *για κάθε* $i \neq j$.

Παράδειγμα

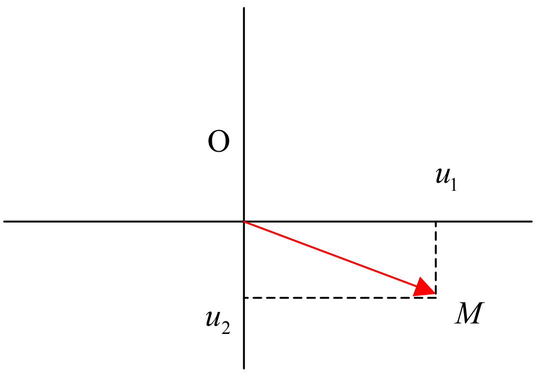
Η συνήθης βάση $\{e_1=(1,0,...,0), e_2=(0,1,0,...,0),...,e_n=(0,...,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθοκανονική.

Μιλώντας με κάποιο βαθμό ελευθερίας, μπορούμε να πούμε οι ορθοκανονικές βάσεις γενικεύουν την έννοια των κάθετων αξόνων που ξέρουμε στους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

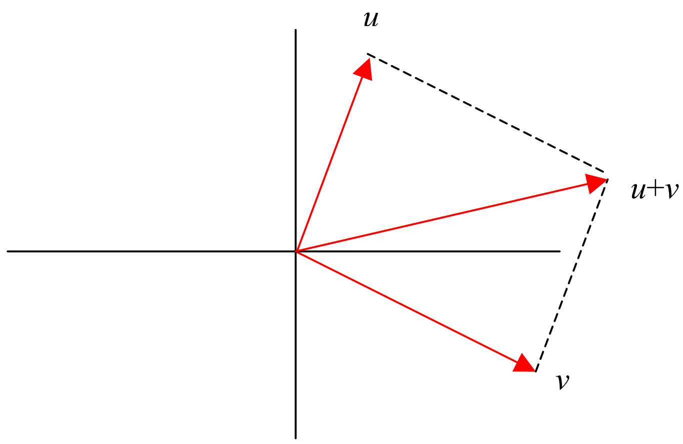
ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟ $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

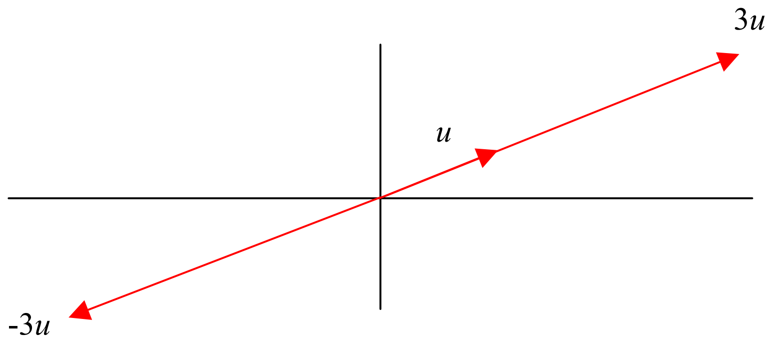
Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο (u_1,u_2) του $\mathbb{R}^2$ το διάνυσμα $\overline{OM}$ του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο O = (0,0) και πέρας το σημείο $M=(u_1,u_2)$, όπως φαίνεται στο σχήμα



Τότε για να προσθέσουμε τα στοιχεία $u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$ έχουμε τον *κανόνα του παραλληλογράμμου* που μας είναι γνωστός από το Κεφάλαιο 1.



Για το γινόμενο au, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R}^2$, παρατηρούμε ότι το au αντιστοιχεί σε διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα του u. Η δε φορά του εξαρτάται από το πρόσημο του a όπως φαίνεται το σχήμα



Οι πράξεις στο $\mathbb{R}^3$ επιδέχονται αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία.

Πρόταση 1 (ιδιότητες των πράξεων)

Έστω $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

$(u+v)+w = u+(v+w)$	$a(u+v) = au+av$
$u+0 = u$	$(a+b)u = au+bu$
$u+(-u) = 0$	$(ab)u = a(bu)$
$u+v = v+u$	$1u = u$

όπου με 0 συμβολίζουμε το $(0,\dots,0)$.

ΒΑΣΕΙΣ

Πρόταση 2

Έστω ότι τα διανύσματα $v_1,\ldots,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$. Αν το v_m είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\ldots,v_{m-1}$, τότε τα $v_1,\ldots,v_{m-1}$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3 (πληθάριθμος βάσης)

Έστω $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$.

1. *Αν τα $v_1,\ldots,v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε $m \le n$.*
2. *Αν τα $v_1,\ldots,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m \ge n$.*
3. *Αν τα $v_1,\ldots,v_m$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m = n$.*

Τονίζουμε ότι κάθε βάση του $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από n στοιχεία.

Πόρισμα 4

Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. *Το $\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$*
2. *Το $\{v_1,\ldots,v_n\}$ παράγει το $\mathbb{R}^n$*
3. *Το $\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Σύμφωνα με το Πόρισμα αυτό, αν έχουμε n στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ και θέλουμε να ελέγξουμε αν αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε αρκεί να ελέγξουμε μόνο μία από τις δυο συνθήκες που υπάρχουν στον ορισμό της βάσης.

Πόρισμα 5 (βάσεις και ορίζουσες)

Έστω $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω A ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το v_i, $i = 1,\ldots,n$. Τότε τα $v_1,\ldots,v_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Παράδειγμα

Τα διανύσματα $(1,2,1),(1,4,0),(2,-1,5)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, γιατί

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Σημείωση Στο Πόρισμα 5 θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε τον πίνακα με γραμμές τα v_i, γιατί ανάστροφοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα (βλ. Κεφάλαιο 4)

Πρόταση 6 (μοναδικότητα συντελεστών ως προς μια βάση)

Έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $v\in\mathbb{R}^n$, υπάρχουν μοναδικά $a_i\in\mathbb{R}$ με $v=a_1v_1+\ldots+a_nv_n$.

ΤΟ ΣΥΝΗΘΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Πρόταση 7 (ιδιότητες)

Έστω $u,v,w\in\mathbb{R}^n, a\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε

1. $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$
2. $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$
3. $\langle au,v\rangle=a\langle u,v\rangle=\langle u,av\rangle$
4. $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$
5. $\langle u,u\rangle\geq 0$
6. $\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=0.$

Παράδειγμα

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$ με $\langle u,u\rangle=1,\langle v,v\rangle=2,\langle u,v\rangle=-1$. Να υπολογιστούν

- το $\langle 4u+5v,2u-v\rangle$
- το μήκος του $2u-v$.

Λύση

- Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
&\langle 4u+5v,2u-v\rangle\overset{1}{=}\langle 4u,2u-v\rangle+\langle 5v,2u-v\rangle\overset{2}{=}\\
&=\langle 4u,2u\rangle-\langle 4u,v\rangle+\langle 5v,2u\rangle-\langle 5v,v\rangle\overset{3}{=}\\
&=8\langle u,u\rangle-4\langle u,v\rangle+10\langle v,u\rangle-5\langle v,v\rangle\overset{4}{=}\\
&=8\langle u,u\rangle+6\langle u,v\rangle-5\langle v,v\rangle=\\
&=8\cdot 1+6(-1)-5\cdot 2=-8.
\end{aligned}$$

- $|2u-v|=\sqrt{\langle 2u-v,2u-v\rangle}$ και

$$\begin{aligned}\langle 2u-v,2u-v\rangle &= \langle 2u,2u-v\rangle - \langle v,2u-v\rangle = \\ &= \langle 2u,2u\rangle - \langle 2u,v\rangle - \langle v,2u\rangle + \langle v,v\rangle = \\ &= 4\langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 4+4+2=10.\end{aligned}$$

Άρα $|2u-v| = \sqrt{10}$.

Θεώρημα 8 (δυο σημαντικές ανισότητες)

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. Τότε

1. *(ανισότητα Cauchy - Schwarz)* $|\langle u,v\rangle| \le |u||v|$
2. *(τριγωνική ανισότητα)* $|u+v| \le |u|+|v|$.

Πρόταση 9 (κριτήριο καθετότητας)

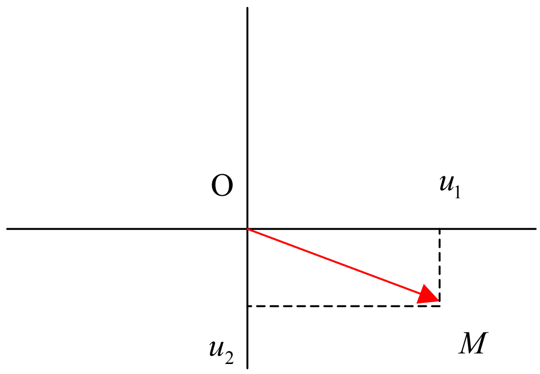
Δυο διανύσματα $u,v\in\mathbb{R}^n$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν $\langle u,v\rangle = 0$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Για να εξηγήσουμε το κίνητρο του ορισμού του συνήθους εσωτερικού γινομένου στο $\mathbb{R}^n$, ας θυμηθούμε τις έννοιες του μήκους και της γωνίας στο επίπεδο και στο χώρο.

- *Στο Επίπεδο*

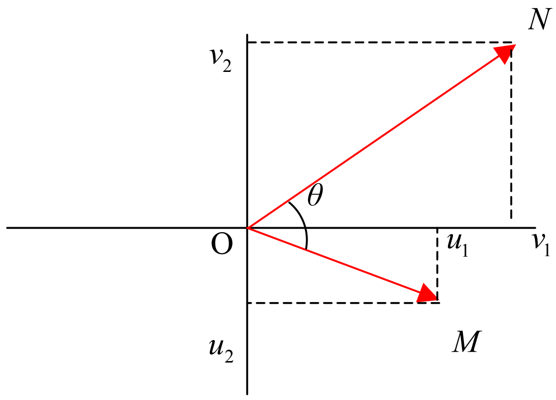
  Έστω $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. Το **μήκος** $|u|$ του u ορίζεται να είναι το μήκος $|OM|$ του ευθυγράμμου τμήματος OM όπως φαίνεται στο σχήμα



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$|u| = |OM| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}.$$

Έστω ότι έχουμε δυο μη μηδενικά στοιχεία $u,v\in\mathbb{R}^2, u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$.



Τότε σχηματίζονται δυο γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$. Μια από αυτές παίρνει τιμές στο διάστημα [0,π]. Στο σχήμα η εν λόγω γωνία συμβολίζεται με θ. Τη γωνία αυτή ονομάζουμε **γωνία** των u,v.

Υπενθυμίζουμε ότι μια διασύνδεση μεταξύ των εννοιών του μήκους και της γωνίας δίνεται από το νόμο των συνημιτόνων: Στο τρίγωνο OMN έχουμε

$$|MN|^2 = |OM|^2 + |ON|^2 - 2|OM||ON|\cos\theta .$$

Αντικαθιστώντας τα μήκη και κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$u_1v_1 + u_2v_2 = |u||v|\cos\theta.$$

Αυτή η σχέση είναι σημαντική γιατί μας πληροφορεί ότι το $\cos\theta$ καθορίζεται από τα μήκη $|u|,|v|$ και την ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2$.

Αν στην ποσότητα $u_1v_1 + u_2v_2$ θέσουμε $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ τότε προκύπτει το $u_1^2 + u_2^2 = |u|^2$. Άρα βλέπουμε ότι το μήκος είναι μια ποσότητα της μορφής $u_1v_1 + u_2v_2$.

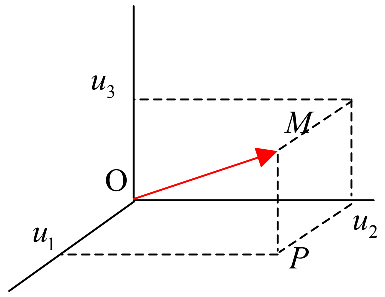
Συμπέρασμα Ορίζοντας την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto u_1v_1 + u_2v_2,$$

βλέπουμε ότι μέσω αυτής εκφράζεται και η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας στο επίπεδο.

- *Στο Χώρο*

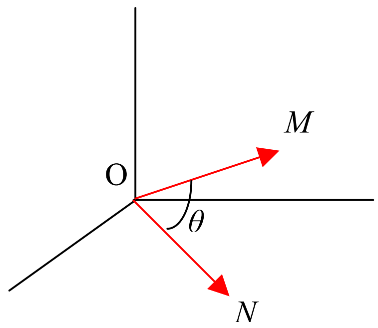
Έστω $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το **μήκος** του u να είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OM, όπου M είναι το σημείο (u_1,u_2,u_3), βλ σχήμα.



Αν P είναι η προβολή του M στο xy επίπεδο, τότε εφαρμόζοντας δυο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$|u| = |OM| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Η **γωνία** μεταξύ δυο μη μηδενικών στοιχείων $u, v \in \mathbb{R}^3$ ορίζεται με τρόπο εντελώς ανάλογο με την περίπτωση του επιπέδου



Όπως και πριν, από το νόμο των συνημιτόνων συμπεραίνουμε ότι

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |u||v|\cos\theta.$$

Εδώ βλέπουμε ότι το $\cos\theta$ καθορίζεται από τα (μη μηδενικά) μήκη $|u|, |v|$ και την ποσότητα $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Αν στην ποσότητα $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ θέσουμε $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$ τότε προκύπτει το $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |u|^2$.

Συμπέρασμα Ορίζοντας την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

βλέπουμε ότι μέσω αυτής εκφράζεται και η έννοια του μήκους και η έννοια της γωνίας στο χώρο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν το $(1,2,-1)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός*

1. *των* $(3,0,4),(5,4,2)$

2. *των* $(3,0,4),(5,4,1)$

Λύση

1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2, εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b \in \mathbb{R}$ με $(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,2)$. Έχουμε διαδοχικά

$$(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,2) \Leftrightarrow$$
$$(1,2,-1)=(3a+5b,4b,4a+2b) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 1=3a+5b \\ 2=4b \\ -1=4a+2b. \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βλέπουμε ότι υπάρχει λύση. (Μάλιστα, η λύση είναι μοναδική $a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$, αλλά αυτό δεν μας απασχολεί εδώ. Μας ενδιαφέρει η *ύπαρξη* τουλάχιστον μιας λύσης). Άρα το $(1,2,-1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,0,4),(5,4,2)$.

2. Εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b \in \mathbb{R}$ με $(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,1)$. Έχουμε διαδοχικά

$$(1,2,-1)=a(3,0,4)+b(5,4,1) \Leftrightarrow$$
$$(1,2,-1)=(3a+5b,4b,4a+b) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 1=3a+5b \\ 2=4b \\ -1=4a+b. \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση. Άρα το $(1,2,-1)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,0,4),(5,4,1)$.

Άσκηση 2

1. *Εξετάστε αν το σύνολο* $\{(1,2,-1),(0,3,4),(0,2,1)\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}^3$.

2. *Να βρεθούν οι τιμές του x τέτοιες ώστε το* $\{(1,2,-1),(0,3,4),(0,2,x)\}$ *είναι βάση του* $\mathbb{R}^3$.

Λύση

1. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5, έχουμε $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$ και άρα το δοσμένο σύνολο είναι βάση.

2. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix} = 3x-8$ και άρα το δοσμένο σύνολο είναι βάση αν και μόνο αν $3x-8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{8}{3}$.

Άσκηση 3

Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

1. $(1,1,-1,2),(0,1,1,2),(2,3,0,1)$
2. $(1,1,-1,2),(0,1,1,2),(2,3,0,1),(2,4,5,1),(0,-1,-1,2)$.

Λύση

1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3, έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$a(1,1,-1,2)+b(0,1,1,2)+c(2,3,0,1)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$$
$$(a+2c, a+b+3c, -a+b, 2a+2b+c)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a+2c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a+b=0 \\ 2a+2b+c=0. \end{cases}$$

Μας ενδιαφέρει αν υπάρχει μη μηδενική λύση του παραπάνω συστήματος. Για το σκοπό αυτό ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στον επαυξημένο πίνακα όπως μάθαμε στο Κεφάλαιο 3. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τον τελευταίο πίνακα βλέπουμε άμεσα ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Φυσικά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και εδώ την προηγούμενη μέθοδο αλλά απαιτούνται αρκετές πράξεις. Ένας πιο σύντομος και κομψός τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι έχουμε 5 διανύσματα στο $\mathbb{R}^4$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 3 1) αυτά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σημείωση Στο πρώτο υποερώτημα της άσκησης αυτής είδαμε ότι για να αποφανθούμε αν διανύσματα $v_1,\ldots,v_m$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, μπορούμε να σχηματίζουμε τον $n\times m$ πίνακα με στήλες τα v_i και να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Από αυτή εύκολα συμπεραίνουμε αν υπάρχει μη μηδενική λύση. Στο δεύτερο υποερώτημα είδαμε ότι ο προηγούμενος αλγόριθμος δεν είναι πάντα ο οικονομικότερος τρόπος επίλυσης.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

1. $(1,2,-1),(3,4,0),(5,8,-2),(8,12,-2)$

2. $(1,1,3),(2,0,1)$.

Λύση

1. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2 έστω $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$a(1,2,-1)+b(3,4,0)+c(5,8,-2)+d(8,12,-2)=\left(c_1,c_2,c_3\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} a+3b+5c+8d=c_1 \\ 2a+4b+8c+12d=c_2 \\ -a-2c-2d=c_3. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & c_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & c_2 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & c_3 \end{pmatrix}$$

και εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε, μετά από αρκετούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία γραμμή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο, άρα τα δοσμένα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

2. Έχουμε 2 διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 3 2) αυτά δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 5

Εξετάστε για ποια k τα $(1,2,-1),(3,4,0),(5,8,-2),(8,12,k)$ *παράγουν το* $\mathbb{R}^3$.

Λύση

1^{ος} τρόπος. Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στο πρώτο μέρος της προηγούμενης άσκησης φθάνουμε στο σύστημα

$$\begin{cases} a+3b+5c+8d=c_1 \\ 2a+4b+8c+12d=c_2 \\ -a-2c+kd=c_3. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & c_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & c_2 \\ -1 & 0 & -2 & k & c_3 \end{pmatrix}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την τριγωνική μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & c_1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & c_2 - 2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2k-4 & -2c_3 + 4c_1 - 3c_2 \end{pmatrix}.$$

Τα δοσμένα διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν το σύστημα που αντιστοιχεί στο τελευταίο πίνακα έχει λύση για κάθε c_i. Από την τελευταία γραμμή βλέπουμε ότι αν $-2k-4=0$, δηλαδή αν $k=-2$, το σύστημα είναι αδύνατο στην περίπτωση που $-2c_3+4c_1-3c_2 \neq 0$. Άρα τα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^3$. Αντίθετα, για κάθε $k \neq -2$, το σύστημα είναι συμβιβαστό για κάθε c_i και τα διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^3$.

2ος τρόπος. Εύκολα επαληθεύουμε ότι τα πρώτα τρία διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε $(5,8,-2) = 2(1,2,-1) + (3,4,0)$. Άρα το ερώτημα της άσκησης ισοδυναμεί με το να βρούμε τις τιμές του k για τις οποίες τα διανύσματα

$$(1,2,-1),(3,4,0),(8,12,k)$$

παράγουν το $\mathbb{R}^3$. Επειδή αυτά είναι 3 διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, έχουμε στη διάθεσή μας το Πόρισμα 5. Αυτά σχηματίζουν έναν πίνακα που έχει ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 12 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix} = -2k-4$ και αυτή είναι διάφορη του μηδενός αν και μόνο αν $k \neq -2$.

Άσκηση 6

Εξετάστε αν τα διανύσματα

$$\begin{aligned} v_1 &= (2,1,0,\ldots,0) \\ v_2 &= (1,2,1,0,\ldots,0) \\ v_3 &= (0,1,2,1,0,\ldots,0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-1} &= (0,\ldots,0,1,2,1) \\ v_n &= (0,\ldots,0,1,2) \end{aligned}$$

αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

Λύση

Έστω D_n η ορίζουσα του πίνακα με στήλες τα διανύσματα αυτά. Στη Λυμένη Άσκηση 13 του Κεφαλαίου 4 είδαμε ότι $D_n = n+1 \neq 0$. Άρα αυτά συγκροτούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$ σύμφωνα με το Πόρισμα 5.

Άσκηση 7

Έστω ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

1. *Αποδείξτε ότι το $B = \{2v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, 2v_3 + v_1\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.*
2. *Παραστήστε το $v_1 - v_2 + 3v_3$ σαν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης B.*

Λύση

1. Επειδή το B αποτελείται από 3 στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, αρκεί να δείξουμε ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πόρισμα 5). Έχουμε

$$\begin{aligned}&a(2v_1 + v_2) + b(2v_2 + v_3) + c(2v_3 + v_1) = 0 \Rightarrow \\ &(2a + c)v_1 + (a + 2b)v_2 + (b + 2c)v_3 = 0.\end{aligned}$$

   Από την υπόθεση τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς από την τελευταία σχέση παίρνουμε $2a + c = a + 2b = b + 2c = 0$. Λύνοντας το σύστημα αυτό βλέπουμε ότι $a = b = c = 0$. Άρα τα στοιχεία του B είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Έχουμε

$$\begin{aligned}&v_1 - v_2 + 3v_3 = a(2v_1 + v_2) + b(2v_2 + v_3) + c(2v_3 + v_1) \Leftrightarrow \\ &v_1 - v_2 + 3v_3 = (2a + c)v_1 + (a + 2b)v_2 + (b + 2c)v_3.\end{aligned}$$

   Από την τελευταία ισότητα και τη μοναδικότητα των συντελεστών (Πρόταση 6) παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 1 = 2a + c \\ -1 = a + 2b \\ 3 = b + 2c \end{cases}$$

   Λύνοντάς το βρίσκουμε $a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{5}{3}$. Άρα ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $v_1 - v_2 + 3v_3 = -\frac{1}{3}(2v_1 + v_2) - \frac{1}{3}(2v_2 + v_3) + \frac{5}{3}(2v_3 + v_1)$.

Άσκηση 8

Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες το $(k,2,1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,1,1),(2,1,-1)$. Για τις τιμές αυτές να παραστήσετε το $(k,2,1)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $(1,1,1),(2,1,-1)$.

Λύση

Αναζητάμε τα k για τα οποία υπάρχουν a,b τέτοια ώστε

$(k,2,1)=a(1,1,1)+b(2,1,-1)$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} k=a+2b \\ 2=a+b \\ 1=a-b \end{cases}$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε $a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$. Τότε η πρώτη δίνει $k=\frac{5}{2}$.

Ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός είναι $(k,2,1)=a(1,1,1)+b(2,1,-1)$, δηλαδή

$(\frac{5}{2},2,1)=\frac{3}{2}(1,1,1)+\frac{1}{2}(2,1,-1)$.

Άσκηση 9

Έστω $u=(1,2,4), v=(2,-3,5)$. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$$\langle u,v\rangle, |u|, |v|, |2u-v|, \cos\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των u,v.

Λύση

Σύμφωνα με τον Ορισμό 5 έχουμε

$$\begin{aligned} &\langle u,v\rangle = 1\cdot 2+2\cdot(-3)+4\cdot 5=16 \\ &|u|^2=\langle u,u\rangle = 1^2+2^2+4^2=21 \Rightarrow |u|=\sqrt{21} \\ &|v|^2=\langle v,v\rangle = 2^2+(-3)^2+5^2=38 \Rightarrow |v|=\sqrt{38}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7 έχουμε

$$\begin{aligned} |2u-v|^2 &= \langle 2u-v,2u-v\rangle = 4\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle - 2\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \\ &= 4\langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 84-64+38=58. \end{aligned}$$

Για τη γωνία θ έχουμε (βλ Ορισμός 6) $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} = \frac{16}{\sqrt{21}\sqrt{38}}$.

Άσκηση 10

1. *Να βρεθούν οι τιμές του k τέτοιες ώστε τα διανύσματα $u=(2,k,3), v=(1,2,k)$ είναι κάθετα.*
2. *Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $w_1=(1,2,3), w_2=(-1,0,2)$.*

Λύση

1. Σύμφωνα με την Πρόταση 9, τα u,v είναι κάθετα αν και μόνο αν $\langle u,v\rangle=0 \Leftrightarrow 2+2k+3k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{2}{5}.$
2. Αρκεί να βρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $a=(x,y,z)$ κάθετο και στο w_1 και στο w_2, δηλαδή αρκεί $\langle a,w_1\rangle=\langle a,w_2\rangle=0,$ όπου $a\neq 0.$ Έχουμε $\langle a,w_1\rangle=\langle a,w_2\rangle=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=-x+2z=0.$ Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι $(x,y,z)=(2z,-\frac{5}{2}z,z),\ z\in\mathbb{R}.$ Συνεπώς κάθε διάνυσμα της μορφής $(2z,-\frac{5}{2}z,z),\ z\neq 0,$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Άσκηση 11

Έστω $u,v\in\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow$ τα u,v είναι κάθετα.

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 9 θα δείξουμε ότι $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow \langle u,v\rangle=0.$

Έστω $|u+v|=|u-v|$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&|u+v|=|u-v| \Rightarrow |u+v|^2=|u-v|^2 \Leftrightarrow\\
&\langle u+v,u+v\rangle=\langle u-v,u-v\rangle \Leftrightarrow\\
&\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle \Leftrightarrow\\
&4\langle u,v\rangle=0 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle=0.
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν $\langle u,v\rangle=0,$ τότε όπως είδαμε πριν ισχύει $|u+v|^2=|u-v|^2$. Επειδή οι ποσότητες $|u+v|,|u-v|$ είναι μη αρνητικές, παίρνουμε $|u+v|=|u-v|.$

Άσκηση 12

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $|u| = |v| = 1$ και η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{3}$. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των

1. $u+v,\ u-v.$
2. $u+v,\ u-2v$

Λύση

1. Αν θ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε (Ορισμός 6)

$$\cos\theta = \frac{\langle u+v, u-v\rangle}{|u+v||u-v|}.$$

Για τον αριθμητή έχουμε

$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle =$$
$$= \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle = |u|^2 - |v|^2 = 1-1=0.$$

Άρα $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Αν θ είναι η ζητούμενη γωνία, τότε

$$\cos\theta = \frac{\langle u+v, u-2v\rangle}{|u+v||u-2v|}.$$

Έχουμε $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Για τον αριθμητή έχουμε

$$\langle u+v, u-2v\rangle = \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - 2\langle v,v\rangle =$$
$$= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - 2\langle v,v\rangle = |u|^2 - \langle u,v\rangle - 2|v|^2 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}.$$

Στον παρονομαστή έχουμε

$$\begin{aligned}
&|u+v| = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} = \\
&\sqrt{\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle} = \\
&\sqrt{|u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2} = \sqrt{1+2\frac{1}{2}+1} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&|u-2v| = \sqrt{\langle u-2v, u-2v\rangle} = \\
&\sqrt{\langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + 4\langle v,v\rangle} = \\
&\sqrt{|u|^2 - 4\langle u,v\rangle + 4|v|^2} \sqrt{1-4\frac{1}{2}+4} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση βρίσκουμε τελικά ότι

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Άρα $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Άσκηση 13

Έστω $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $(a_1+\dots+a_n)^2 \le n\left(a_1{}^2+\dots+a_n{}^2\right)$

Λύση

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στα διανύσματα

$u=(a_1,\dots,a_n)$, $v=(1,\dots,1)$. Έχουμε $\langle u,v\rangle = a_1+\dots+a_n$ και $|v| = \sqrt{1^2+\dots+1^2} = \sqrt{n}$.

Άρα

$$\begin{aligned}
&|\langle u,v\rangle| \le |u||v| \Rightarrow |\langle u,v\rangle|^2 \le |u|^2|v|^2 \Rightarrow \\
&(a_1+\dots+a_n)^2 \le n\left(a_1{}^2+\dots+a_n{}^2\right).
\end{aligned}$$

Άσκηση 14

Να βρεθούν οι $a,b,c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε τα διανύσματα

$(1+a,1,1,1,1,1)$
$(1,1-a,1,1,1,1)$
$(1,1,1+b,1,1,1)$
$(1,1,1,1-b,1,1)$
$(1,1,1,1,1+c,1)$
$(1,1,1,1,1,1-c)$

να αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^6$.

Λύση

Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στη Λυμένη Άσκηση 15 του Κεφαλαίου 4, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα που σχηματίζουν τα δοσμένα διανύσματα είναι ίση με $-a^2b^2c^2$. Άρα τα ζητούμενα a,b,c είναι τα $a,b,c \in \mathbb{R}-\{0\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποια από τα σύνολα

$\{(1,2,1),(0,1,2)\}$,

$\{(1,2,1),(0,1,2),(1,3,3)\}$,

$\{(1,2,1),(0,1,2),(1,0,2)\}$,

$\{(1,2,1),(0,1,2),(1,0,2),(1,1,1)\}$

είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$;

Υπόδειξη Το πρώτο και τέταρτο απορρίπτονται άμεσα σύμφωνα με το Θεώρημα 3. Για τα άλλα δυο μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 5. **Απάντηση** Μόνο το τρίτο είναι βάση.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν το $(1,3,-1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός

1. των $(3,0,4),(5,6,2)$
2. των $(3,0,4),(5,6,1)$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. **Απάντηση** 1. ναι, 2. όχι.

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι τιμές του x τέτοιες ώστε το $\{(1,2,0),(0,2,4),(0,2,x)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση** $x \neq 4$.

Άσκηση 4

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα παράγουν το $\mathbb{R}^2$.

1. $\{(1,2),(-2,-4),(3,6)\}$
2. $\{(1,2),(-2,-4),(3,7)\}$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 4. **Απάντηση** Μόνο το δεύτερο παράγει το $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5

Έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα διανύσματα $(a,a^2,a^3),(b,b^2,b^3),(c,c^2,c^3)$ να αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Υπόδειξη Εφαρμόστε το Πόρισμα 5 και τη Λυμένη Άσκηση 9 του Κεφαλαίου 4.

Απάντηση $abc(a-b)(b-c)(a-c) \neq 0$.

Άσκηση 6

Εξετάστε για ποια k το $(1,1,k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(k,1,1),(1,k,-1)$. Για τις τιμές αυτές να βρεθούν οι σχετικοί γραμμικοί συνδυασμοί.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 8. **Απάντηση** $k = 0,1$. Οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι αντίστοιχα $(1,1,0) = (0,1,1) + (1,0,-1)$, $(1,1,1) = (1,1,1)$.

Άσκηση 7

Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Αφού αποδείξτε ότι το σύνολο $B = \{3v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$, παραστήστε το $8v_1 + v_2 + 3v_3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του B.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 7.

Απάντηση $8v_1 + v_2 + 3v_3 = (3v_1 - v_2) + 2(v_1 + v_2) + 3(v_1 + v_3)$

Άσκηση 8

Έστω $\{u, v\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^2$ και $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $au + cv, bu + dv$ συγκροτούν βάση του $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Υπόδειξη Εξετάστε τη γραμμική ανεξαρτησία. Από τη σχέση $x(au + cv) + y(bu + dv) = 0$ προκύπτει ένα ομογενές 2×2 σύστημα με πίνακα συντελεστών το $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Εφαρμόστε το Πόρισμα 9 του Κεφαλαίου 4.

Άσκηση 9

Έστω ότι u, v, w είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι ανά δύο κάθετα.

Αποδείξτε ότι αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Υπόδειξη Εξετάστε τη γραμμικά ανεξαρτησία. Αν $xu + yv + zw = 0$, τότε $\langle xu + yv + zw, u \rangle = \langle 0, u \rangle = 0$. Αναπτύξτε το αριστερό μέλος και συμπεράνατε ότι $x = 0$. Μετά δείξτε με παρόμοιο τρόπο ότι $y = z = 0$.

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι τιμές του k τέτοιες ώστε η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $u = (0,1,1),\ v = (k,1,k)$ είναι $\frac{\pi}{4}$.

Υπόδειξη Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Απάντηση** $k = 0, 2$.

Κεφάλαιο 6

Διανυσματικοί Χώροι

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τους χώρους $\mathbb{R}^n$. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με πιο γενικούς χώρους που έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τον $\mathbb{R}^n$ και ο σκοπό μας είναι να κατανοήσουμε τις ιδιότητες αυτές στο γενικό πλαίσιο. Θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια του συνόλου γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στα επόμενα με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ μαζί με την πρόσθεση διανυσμάτων και το γινόμενο αριθμού με διάνυσμα αποτελεί ένα ‘πρότυπο’ για τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1 (διανυσματικός χώρος)

*Ένας $\mathbb{F}$ – **διανυσματικός χώρος** είναι ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με δύο απεικονίσεις*

$$V \times V \ni (v, v') \mapsto v + v' \in V \quad \text{('πρόσθεση')}$$
$$K \times V \ni (a, v) \mapsto av \in V \quad \text{('αριθμητικός πολλαπλασιασμός')}$$

που ικανοποιούν τις ιδιότητες

1. $(v+v')+v'' = v+(v'+v'')$ για κάθε $v, v', v'' \in V$.
2. $v+v' = v'+v$ για κάθε $v, v' \in V$.
3. *Υπάρχει στοιχείο $0_V \in V$ που έχει την ιδιότητα $0_V + v = v + 0_V = v$ για κάθε $v \in V$. Το 0_V ονομάζεται ‘μηδενικό στοιχείο’ του V.*
4. *Για κάθε $v \in V$ υπάρχει στοιχείο $-v \in V$ με την ιδιότητα $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$.*
5. *$1v = v$ για κάθε $v \in V$.*
6. $a(v+v') = av + av'$ για κάθε $a \in \mathbb{F}, v \in V, v' \in V$.
7. $(a+b)v = av + bv$ *για κάθε* $a, b \in \mathbb{F}, v \in V$.
8. $(ab)v = (a(bv))$ *για κάθε* $a, b \in \mathbb{F}, v \in V$.

Σημείωση Αποδεικνύεται ότι το 0_V της ιδιότητας 3 είναι μοναδικό. Ονομάζεται δε το '**μηδενικό στοιχείο**' του V. Επίσης, για κάθε $v \in V$, το $-v$ της ιδιότητας 4 είναι μοναδικό και ονομάζεται το **αντίθετο** του v.

Παραδείγματα

1. Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διατεταγμένων n – άδων πραγματικών αριθμών με πρόσθεση που ορίζεται από $(u_1,\dots,u_n)+(v_1,\dots,v_n)=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$ και αριθμητικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από $a(u_1,\dots,u_n)=(au_1,\dots,au_n)$ είναι ένας $\mathbb{R}$ – διανυσματικός χώρος. Το μηδενικό στοιχείο είναι το $0_{\mathbb{R}^n}=(0,\dots,0)$ και το αντίθετο του $(u_1,\dots,u_n)$ είναι το $-(u_1,\dots,u_n)=(-u_1,\dots,-u_n)$.
2. Κατά παρόμοιο τρόπο το $\mathbb{C}^n$ καθίσταται $\mathbb{C}$ - διανυσματικός χώρος.
3. Το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ των $m\times n$ πραγματικών πινάκων είναι ένας $\mathbb{R}$ - διανυσματικός χώρος με πρόσθεση τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και αριθμητικό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό πίνακα με αριθμό. Το μηδενικό στοιχείο είναι ο μηδενικός πίνακας και το αντίθετο του $A=(a_{ij})$ είναι το $-A=(-a_{ij})$.
4. Κατά ανάλογο τρόπο, το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ των $m\times n$ μιγαδικών πινάκων είναι ένας $\mathbb{C}$ - διανυσματικός χώρος.
5. Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX=0$ είναι ένας $\mathbb{R}$ - διανυσματικός χώρος ως προς την πρόσθεση και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό του Παραδείγματος 3.
6. Το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές είναι ένας $\mathbb{R}$ - διανυσματικός χώρος ως προς τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης πολυωνύμων και του πολλαπλασιασμού πολυωνύμου με αριθμό.

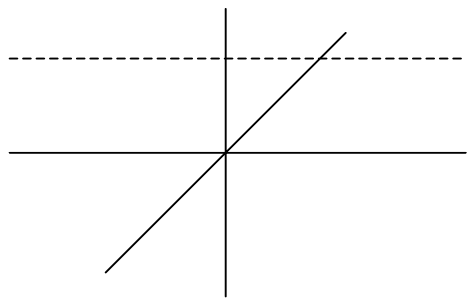
Ορισμός 2 (υπόχωρος)

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$. Θα λέμε ότι το U είναι ένας $\mathbb{F}-$**υπόχωρος** του V αν το U είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος ως προς την ίδια πρόσθεση και τον ίδιο αριθμητικό πολλαπλασιασμό του V.*

Σημείωση Συχνά λέμε απλά υπόχωρος αντί $\mathbb{F}-$υπόχωρος, όπως και διανυσματικός χώρος (δ.χ.) αντί $\mathbb{F}-$ διανυσματικός χώρος, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης σχετικά με το $\mathbb{F}$.

Παραδείγματα

1. Τα σύνολα $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\}$, $\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\}$, $\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο $U=\{(x,1)\in\mathbb{R}^2\}$ *δεν* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν προσθέσουμε δυο στοιχεία του $(x,1)+(x',1)=(x+x',2)$ βρίσκουμε ένα στοιχείο που *δεν* ανήκει στο U. Δηλαδή η πρόσθεση διανυσμάτων δεν μας δίνει μια απεικόνιση της μορφής $U\times U\to U$. Γεωμετρικά, οι προηγούμενοι υπόχωροι του επιπέδου παρίστανται από τον άξονα των x, στον άξονα των y, και την ευθεία $y = x$ αντίστοιχα. Η διακεκομμένη ευθεία αντιστοιχεί στο σύνολο U.



2. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Το σύνολο $\mathbb{R}_n[x]$ των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων.
3. Το σύνολο $D_n(\mathbb{R})$ των $n\times n$ πραγματικών διαγωνίων πινάκων είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{R})$.

Ορισμός 3 (άθροισμα και τομή υποχώρων)

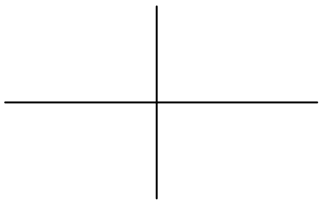
Έστω U,W δυό υπόχωροι ενός δ.χ. V. Τότε τα σύνολα

$$U+W=\{u+w\in V \mid u\in U, w\in W\}$$
$$U\cap W=\{v\in V \mid v\in U \text{ και } v\in W\}$$

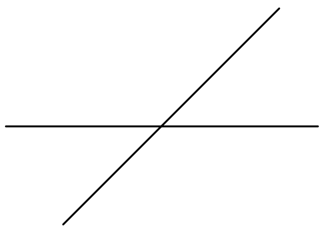
*είναι υπόχωροι του V, που ονομάζονται αντίστοιχα το **άθροισμα** και η **τομή** των U και W. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $U\cap W=\{0_V\}$, τότε το άθροισμα $U+W$ λέγεται **ευθύ άθροισμα** και συμβολίζεται με $U\oplus W$.*

Παράδειγμα

Έστω $V = \mathbb{R}^2$, και οι υπόχωροι $U=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\}$, $W=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Τότε $U+W=\mathbb{R}^2$. Πράγματι, είναι σαφές ότι $U+W\subseteq\mathbb{R}^2$. Το τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ γράφεται $(x,y)=(x,0)+(0,y)\in U+W$. Άρα ισχύει και $\mathbb{R}^2 \subseteq U+W$. Συνεπώς έχουμε $U+W=\mathbb{R}^2$. Επειδή έχουμε τη σχέση $U\cap W=\{(0,0)\}$, το άθροισμα $U+W$ είναι ευθύ. Τελικά έχουμε $\mathbb{R}^2=U\oplus W$. Γεωμετρικά, το $\mathbb{R}^2$ είναι το ευθύ άθροισμα των δυο συνήθων αξόνων.



Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\mathbb{R}^2=U\oplus W'$, όπου $W'=\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\right\}$.



Γεωμετρικά, το $\mathbb{R}^2$ είναι το ευθύ άθροισμα των δύο εικονιζόμενων ευθειών.

Προσοχή Παρατηρούμε ότι έχουμε $U\oplus W=U\oplus W'$, αλλά $W\neq W'$.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Αν $v_1,\dots,v_n$ είναι στοιχεία ενός $\mathbb{F}-$δ.χ. V, τότε όλα τα στοιχεία της μορφής $a_1v_1+\dots+a_nv_n$, όπου $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$, περιέχονται στο V. Δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4 (γραμμικός συνδυασμός στοιχείων)

Έστω X ένα υποσύνολο ενός $\mathbb{F}-$*διανυσματικού χώρου V. Κάθε στοιχείο του V της μορφής* $a_1x_1+...+a_nx_n$, *όπου* $a_1,...,a_n \in \mathbb{F}, x_1,...,x_n \in X$ *λέγεται ένας* $\mathbb{F}-$***γραμμικός συνδυασμός*** *των στοιχείων του X. Το σύνολο των* $\mathbb{F}-$*γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του X ονομάζεται* $\mathbb{F}-$*γραμμική θήκη του X και συμβολίζεται με* $\langle X \rangle$ *ή* $L(X)$. *Στην ειδική περίπτωση που το X είναι κενό, δεχόμαστε ότι* $L(X)=\{0_V\}$.

Παράδειγμα

Έστω $V = \mathbb{R}^3$ και $X=\{(2,1,1),(1,-1,1)\}$. Τότε το $\langle \mathrm{X} \rangle$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $a(2,1,1)+b(1,-1,1)$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Ας εξετάσουμε αν το (3,3,1) ανήκει στο $\langle X \rangle$. Ερωτάμε, δηλαδή, αν υπάρχουν a,b τέτοια ώστε

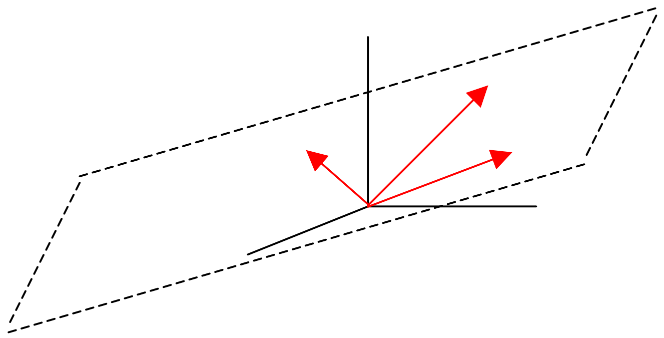
$$a(2,1,1)+b(1,-1,1)=(3,3,1)$$

Η εξίσωση αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα

$$2a+b=3$$
$$a-b=3$$
$$a+b=1.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση ($a=2,b=-1$) και κατά συνέπεια αληθεύει ότι το (3,3,1) ανήκει στο $\langle \mathrm{X} \rangle$.

Γεωμετρικά, το παράδειγμα αυτό λέει ότι το διάνυσμα (3,3,1) ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα $(2,1,1),(1,-1,1)$.



Ορισμός 5 (διανυσματικός χώρος που παράγεται από ένα σύνολο)

*Έστω X ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Θα λέμε ότι το X **παράγει** το V πάνω από το $\mathbb{F}$ (ή ότι το V **παράγεται** από ο X πάνω από το $\mathbb{F}$ ή ότι το X είναι **σύνολο γεννητόρων** του V πάνω από το $\mathbb{F}$) αν ισχύει $V=\langle X\rangle$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο του V είναι $\mathbb{F}-$γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του X.*

Συχνά παραλείπουμε την αναφορά στο $\mathbb{F}$ από τον παραπάνω ορισμό και μιλάμε, για παράδειγμα, για σύνολο γεννητόρων του V όταν είναι σαφές ποιο είναι το $\mathbb{F}$.

Παραδείγματα

- Από το Κεφάλαιο 5 θυμόμαστε ότι κάθε βάση του $\mathbb{R}^n$ παράγει το $\mathbb{R}^n$.
- Ο διανυσματικός χώρος $U=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2\}$ παράγεται από το $X=\{(1,1)\}$. Επίσης το U παράγεται από κάθε σύνολο της μορφής $\{(a,a)\}$, όπου $a\neq 0$.
- Ο δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$ παράγεται από τα $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ αφού το τυχαίο στοιχείο $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ του $M_2(\mathbb{R})$ γράφεται

  $$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
- Επειδή κάθε πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 γράφεται στη μορφή ax^2+bx+c, συμπεραίνουμε ότι ο δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$ παράγεται από τα $1,x,x^2$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο μέσω του οποίου εκφράζονται οι γεωμετρικές έννοιες του μήκους και της καθετότητας.

Ορισμός 6 (χώρος με εσωτερικό γινόμενο)

*Έστω V ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\langle\ \rangle: V\times V\to\mathbb{F}$ λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** στο V αν ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.*

1. $\langle au_1+bu_2,v\rangle=a\langle u_1,v\rangle+b\langle u_2,v\rangle$
2. $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

3. $\langle u,u\rangle \geq 0$
4. $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

για κάθε $a,b \in \mathbb{F}, u, u_1, u_2, v \in V$.

Παραδείγματα

- Στο $\mathbb{R}^n$, το $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, όπου $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.
- Στο $\mathbb{C}^n$, το $\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$, όπου $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.
- Έστω V ο $\mathbb{R}-$δ.χ. των συνεχών απεικονίσεων $[0,1] \to \mathbb{R}$. Θέτοντας $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ παίρνουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στο V.

Ορισμός 7

Έστω V ένας δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ \rangle$.

- *Το **μήκος** ενός $v \in V$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{\langle v,v\rangle}$ και συμβολίζεται με $|v|$. Ένα $v \in V$ λέγεται **μοναδιαίο** αν $|v| = 1$.*
- *Δυο στοιχεία $u,v \in V$ λέγονται **κάθετα** αν $\langle u,v\rangle = 0$.*

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Πρόταση 1

Έστω V ένας $\mathbb{F}-$δ.χ. και $v \in V, a \in \mathbb{F}$. Τότε ισχύουν τα εξής

1. $a0_V = 0_V$
2. $0v = 0_V$
3. *αν* $av = 0_V$, *τότε* $a = 0$ *ή* $v = 0_V$
4. $(-a)v = a(-v) = -(av)$.

Πρόταση 2 (κριτήριο υποχώρου)

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και U ένα υποσύνολο του V. Τότε το U είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν ισχύουν τα κάτωθι.

1. $U \neq \varnothing$
2. $u, u' \in U \Rightarrow u + u' \in U$ *(το U είναι 'κλειστό ως προς την πρόσθεση')*
3. $a \in \mathbb{F}, u \in U \Rightarrow au \in U$ *(το U είναι 'κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό')*

Επισήμανση

Τονίζουμε ότι κάθε υπόχωρος του *V* περιέχει το μηδενικό στοιχείο 0_V του *V*.

Παράδειγμα

Το $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι,

1. το *U* είναι μη κενό
2. αν $(x, y, z), (x', y', z') \in U$, τότε

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ 2x' - y' + 3z' &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(x + x') - (y + y') + 3(z + z') = 0 \Rightarrow$$

$$(x + x', y + y', z + z') \in U$$

3. αν $(x, y, z) \in U$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$2x - y + 3z = 0 \Rightarrow 2(ax) - (ay) + 3(az) = 0 \Rightarrow$$
$$(ax, ay, az) \in U.$$

Αντίθετα, το $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 1\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν περιέχει το (0,0,0).

Γεωμετρικά, οι υπόχωροι του

- $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}$ και το $\{0\}$
- $\mathbb{R}^2$ είναι το $\mathbb{R}^2$, το $\{(0, 0)\}$ και κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων
- $\mathbb{R}^3$ είναι το $\mathbb{R}^3$, το $\{(0, 0, 0)\}$, κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και κάθε επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.

Πρόταση 3 (τομή και άθροισμα υποχώρων)

Έστω U,W δυο υπόχωροι του V. Τότε τα σύνολα

$$U+W=\{u+w\in V \mid u\in U, w\in W\}$$
$$U\cap W=\{v\in V \mid v\in U \text{ και } v\in W\}$$

είναι υπόχωροι του V.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Πρόταση 4 (γραμμική θήκη συνόλου)

Έστω X ένα υποσύνολο ενός δ.χ. V. Τότε η γραμμική θήκη $\langle X\rangle$ είναι ένας υπόχωρος του V.

Πρόταση 5

Έστω V ένας δ.χ., U ένας υπόχωρος του V και X ένα υποσύνολο του V. Τότε έχουμε $\langle X\rangle\subseteq U \Leftrightarrow X\subseteq U$.

Πρόταση 6

Έστω U,W δυο υπόχωροι του δ.χ. V. Τότε το άθροισμα $U+W$ είναι ευθύ αν και μόνο αν κάθε $v\in U+W$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $v=u+w$, όπου $u\in U, w\in W$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Θεώρημα 7

Έστω V ένας δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ \rangle$ και $u,v\in V, a\in\mathbb{F}$. Τότε

1. $|av|=|a||v|$
2. $|v|>0$ *αν* $v\neq 0$.
3. $|\langle u,v\rangle|\leq|u||v|$ *(ανισότητα Cauchy-Schwarz)*
4. $|u+v|\leq|u|+|v|$ *(τριγωνική ανισότητα).*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

1) $\{(x,y,z)\,|\,2x+3y+z=1\}$

2) $\{(x,y,z)\,|\,x\geq 0\}$

3) $\{(x,y,z)\,|\,2x+3y+z=0\}$

4) $\{(x,y,z)\,|\,2x+5y+z=-3x+2y+z=0\}$

Λύση

1) Το $\{(x,y,z)\,|\,2x+3y+z=1\}$ δεν περιέχει το (0,0,0) και συνεπώς δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ σύμφωνα με την επισήμανση.

2) Ενώ $(1,0,0)\in\{(x,y,z)\,|\,x\geq 0\}$, έχουμε $-(1,0,0)=(-1,0,0)\notin\{(x,y,z)\,|\,x\geq 0\}$. Δηλαδή το $\{(x,y,z)\,|\,x\geq 0\}$ δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και άρα δεν είναι υπόχωρος σύμφωνα με την Πρόταση 2.

3) Το $U=\{(x,y,z)\,|\,2x+3y+z=0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ σύμφωνα με την Πρόταση 2. Πράγματι, είναι σαφές ότι $U\neq\varnothing$ και επιπλέον αν $(x,y,z),(x',y',z')\in U$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε

   - $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\in U$

   αφού

   $2(x+x')+3(y+y')+(z+z')=(2x+3y+z)+(2x'+3y'+z')=0+0=0,$

   και

   - $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in U$

   αφού

   $2(\lambda x)+3(\lambda y)+\lambda z=\lambda(2x+3y+z)=0.$

4) Το $\{(x,y,z)\,|\,2x+5y+z=-3x+2y+z=0\}$ είναι υπόχωρος και η απόδειξη είναι όπως στο 3).

Άσκηση 2

Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $M_2(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$;

1) $U=\{A\,|\,\det A=1\}$

2) $V=\{A\,|\,\det A=0\}$

3) $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\,|\,a+d=0\right\}$

Λύση

1) Το U δεν είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ γιατί δεν περιέχει το μηδενικό πίνακα.

2) Το V δεν είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$. Πράγματι, ενώ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$,

   παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin V$, γιατί $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

   Δηλαδή το V δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση .

3) Το W είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ γιατί είναι βέβαια μη κενό και

   1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{pmatrix} \in W$,

   αφού $(a+x)+(d+w) = (a+d)+(x+w) = 0+0 = 0$, και

   2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \in W$,

   αφού $\lambda a + \lambda d = \lambda(a+d) = 0$.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τον υπόχωρο $U = \langle (1,1,2),(2,1,1) \rangle$ *του* $\mathbb{R}^3$. *Να βρεθούν τα α ώστε* $(1,-1,a) \in U$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον Ορισμό 5. Έχουμε

$$(1,-1,a) \in \langle (1,1,2),(2,1,1) \rangle \Leftrightarrow$$

$$\text{υπάρχουν } \lambda,\mu \text{ με } (1,-1,a) = \lambda(1,1,2) + \mu(2,1,1) \Leftrightarrow$$

$$(1,-1,a) = (\lambda+2\mu, \lambda+\mu, 2\lambda+\mu) \Leftrightarrow$$

$$\text{το σύστημα } \begin{matrix} \lambda+2\mu = 1 \\ \lambda+\mu = -1 \\ 2\lambda+\mu = a \end{matrix} \text{ έχει λύση .}$$

Μετά από τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος αυτού παίρνει τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$. Συμπεραίνουμε ότι για $a \neq -4$ δεν υπάρχει λύση, ενώ για $a = -4$ υπάρχει λύση. Συνεπώς το ζητούμενο είναι $a = -4$.

Άσκηση 4

1) *Εξετάστε αν το* $(3,9,-4,-2)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $(1,-2,0,3),(2,3,0,-1),(2,-1,2,1)$.

2) *Εξετάστε αν ισχύει* $\langle(1,2,-1),(2,4,1)\rangle=\langle(3,6,0),(-1,-2,2)\rangle$.

Λύση

1) Εξετάζουμε αν υπάρχουν $x,y,z\in\mathbb{R}$ με

$$(3,9,-4,-2)=\lambda(1,-2,0,3)+\mu(2,3,0,-1)+\nu(2,-1,2,1).$$

Το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned}&\lambda+2\mu+2\nu=3\\&-2\lambda+3\mu-\nu=9\\&2\nu=-4\\&3\lambda-\mu+\nu=-2.\end{aligned}$$

Λύνοντάς το κατά τα γνωστά βλέπουμε ότι έχει λύση (και μάλιστα μοναδική $\lambda=1,\mu=3,\nu=-2$).

2) Για συντομία έστω $U=\langle(1,2,-1),(2,4,1)\rangle$, $V=\langle(3,6,0),(-1,-2,2)\rangle$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$U\subseteq V \quad \text{και} \quad V\subseteq U.$$

Εφαρμόζοντας δυο φορές την Πρόταση 5, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(1,2,-1),(2,4,1)\in V$$
και
$$(3,6,0),(-1,-2,2)\in U$$

Θα πρέπει να εξετάσουμε αν καθένα από τα $(1,2,-1),(2,4,1)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(3,6,0),(-1,-2,-2)$ και αν καθένα από τα $(3,6,0),(-1,-2,2)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,2,-1),(2,4,1)$. Με τη διαδικασία του προηγούμενου υποερωτήματος βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}&(1,2,-1)=\frac{1}{6}(3,6,0)-\frac{1}{2}(-1,-2,2)\\&(2,4,1)=\frac{5}{6}(3,6,0)+\frac{1}{2}(-1,-2,2)\\&(3,6,0)=(1,2,-1)+(2,4,1)\\&(-1,-2,2)=-\frac{5}{3}(1,2,-1)+\frac{1}{3}(2,4,1).\end{aligned}$$

Άρα $\langle (1,2,-1),(2,4,1)\rangle = \langle (3,6,0),(-1,-2,2)\rangle$.

Σημείωση: Δεν ήταν απαραίτητο να βρούμε τους συγκεκριμένους γραμμικούς συνδυασμούς, αλλά μόνο ότι υπάρχουν, ή ισοδύναμα ότι καθένα από τα 4 συστήματα έχει λύση.

Άσκηση 5

Για ποια a το $(a,2,-1)$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $u=(1,3,1), v=(2,1,1)$;

Λύση

Είναι σαφές ότι τα u και v είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Συνεπώς το $(a,2,-1)$ ανήκει στον εν λόγω υπόχωρο αν και μόνο αν τα διανύσματα $(a,2,-1)$, u, v είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

απ' όπου βρίσκουμε $a=-\frac{7}{2}$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε την Πρόταση 3.

Λύση

Ας δείξουμε πρώτα ότι το $U+W$ είναι υπόχωρος του V.

- Από τον ορισμό έχουμε $U+W \neq \varnothing$ (αφού $0_V = 0_V + 0_V \in U+W$).
- Έστω $u_1+w_1, u_2+w_2 \in U+W$ με $u_i \in U, w_i \in W$. Τότε $(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=(u_1+u_2)+(w_1+w_2) \in U+W$. Δηλαδή το $U+W$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
- Έστω $a \in \mathbb{F}$. Τότε $a(u_1+w_1)=(au_1)+(aw_1) \in U+W$. Δηλαδή το $U+W$ είναι κλειστό ως προς τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό. Άρα το $U+W$ είναι υπόχωρος του V.

Ας δούμε τώρα την τομή.

- Έχουμε $0_V \in U, 0_V \in W$ και άρα $0_V \in U \cap W$, δηλαδή το $U \cap W$ είναι μη κενό.

- Έστω $x, y \in U \cap W$. Τότε $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ γιατί το U είναι υπόχωρος. Όμοια $x + y \in W$. Άρα $x + y \in U \cap W$.
- Έστω $a \in \mathbb{F}$. Επειδή το U είναι υπόχωρος και $x \in U$, έχουμε $ax \in U$. Όμοια $ax \in W$. Άρα τελικά $ax \in U \cap W$. Άρα το $U \cap W$ είναι υπόχωρος του V.

Άσκηση 7

Θεωρούμε το σύνολο των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων $S = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A^t = A\}$ και το σύνολο των $n \times n$ αντισυμμετρικών πινάκων $T = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A^t = -A\}$. Αποδείξτε ότι τα S,T είναι υπόχωροι του $M_n(\mathbb{F})$ και ότι $S \oplus T = M_n(\mathbb{F})$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $0 \in S$ και άρα το S είναι μη κενό. Έστω $A, B \in S$. Τότε $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, δηλαδή $A + B \in S$. Έστω $a \in \mathbb{F}$. Τότε $(aA)^t = aA^t = aA$, δηλαδή $aA \in S$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, το S είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το T είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$.

Για να δείξουμε ότι $S \oplus T = M_n(\mathbb{F})$, αρκεί να δείξουμε (βλ. Ορισμό 3) ότι

1. $S + T = M_n(\mathbb{F})$ και
2. $S \cap T = \{0\}$.

1. Επειδή $S + T \subseteq M_n(\mathbb{F})$, αρκεί να δείξουμε ότι $M_n(\mathbb{F}) \subseteq S + T$. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πίνακας είναι άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Έχουμε $A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$.

   Παρατηρούμε ότι $\frac{A + A^t}{2} \in S$, αφού $\left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t = \frac{A^t + (A^t)^t}{2} = \frac{A + A^t}{2}$. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε $\frac{A - A^t}{2} \in T$. Άρα $A \in S + T$ οπότε $M_n(\mathbb{F}) \subseteq S + T$.

2. Έστω $A \in S \cap T$. Τότε $A \in S, A \in T \Rightarrow A^t = A, A^t = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$. Άρα $S \cap T = \{0\}$.

Άσκηση 8

Αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενικός πίνακας του υπόχωρου $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ *του*

$M_2(\mathbb{R})$ *είναι αντιστρέψιμος.*

Λύση

Κάθε στοιχείο του U είναι της μορφής $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$ και $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι ο δ.χ. $\mathbb{R}_3[x]$ *των πολυωνύμων βαθμού* ≤ 3 *παράγεται από το σύνολο* $\left\{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\right\}$.

Λύση

Έχουμε $\mathbb{R}_3[x] = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$$

και για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε τις δυο σχέσεις

1) $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

2) $1, x, x^2, x^3 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$

Έχουμε

$1 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

$1 + x \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \in \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$

και άρα ισχύει η σχέση 1). Επίσης ισχύει και η σχέση 2) γιατί

$$1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$
$$x = (1+x) - 1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$
$$x^2 = (1+x)^2 - 2x - 1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle$$
$$x^3 = (1+x)^3 - 3x^2 - 3x - 1 \in \left\langle 1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3 \right\rangle.$$

Άσκηση 10

Να βρεθεί ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του δ.χ. των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 0 \\ 4x + y - 6z &= 0. \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$r_2 \to r_2 - 2r_1, r_3 \to r_3 - 4r_1, r_3 \to r_3 - r_2, r_2 \to \frac{-1}{7} r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του

συστήματος παίρνει τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι

$(z, 2z, z),\ z \in \mathbb{R}$. Συνεπώς κάθε λύση είναι της μορφής $z(1,2,1),\ z \in \mathbb{R}$ και ένα

πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του δ.χ. των λύσεων είναι το $\{(1,2,1)\}$.

Άσκηση 11

Έστω $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), v_1 = (2,1,1), v_2 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *και*

$U = \langle u_1, u_2 \rangle, V = \langle v_1, v_2 \rangle$. *Εξετάστε αν ισχύει* $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι $U \cap V \neq \{0\}$, οπότε το άθροισμα $U + V$ *δεν* είναι ευθύ σύμφωνα με

τον Ορισμό 3 και άρα δεν έχουμε $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (βλ. Κεφάλαιο5):

$$\lambda u_1 + \mu u_2 = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda,\lambda,0)+(0,\mu,\mu)=(0,0,0) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \\ \mu = 0 \end{cases}$$
$$\lambda = \mu = 0.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $U \cap V$ είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2 και γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2$, όπου ένας τουλάχιστον από τους a,b είναι μη μηδενικός. Τότε το $w = au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2$ είναι ένα στοιχείο του $U \cap V$ και επιπλέον είναι μη μηδενικό γιατί τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έχουμε

$$\begin{aligned} & au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2 \Leftrightarrow \\ & a(1,1,0) + b(0,1,1) = c(2,1,1) + d(1,1,1) \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} a - 2c - d = 0 \\ a + b - c - d = 0 \\ b - c - d = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, βρίσκουμε ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς οι λύσεις είναι $(a,b,c,d) = (0, \frac{1}{2}d, -\frac{1}{2}d, d), d \in \mathbb{R}.$ Επιλέγοντας $d = 2$, έχουμε $a = 0, b = 1, c = -1, d = 2.$

Σημείωση Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι με τη χρήση της έννοιας της βάσης, απλουστεύονται αρκετές από τις λύσεις των προηγούμενων ασκήσεων.

Άσκηση 12

Για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση

$$\langle\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle x, y \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + kx_2y_2,$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο; Για τις τιμές αυτές να βρεθούν τα μήκη των διανυσμάτων $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ *και να εξεταστεί αν αυτά είναι κάθετα.*

Λύση

Εύκολα επαληθεύεται ότι οι ιδιότητες 1 και 2 στον Ορισμό 6 αληθεύουν για κάθε *k*. Για την ιδιότητα 3 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\langle x,x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \\
&{x_1}^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + k{x_2}^2 = {x_1}^2 - 4x_1x_2 + k{x_2}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\left({x_1}^2 - 4x_1x_2 + (2x_2)^2\right) + k{x_2}^2 - (2x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\left(x_1 - 2x_2\right)^2 + k{x_2}^2 - (2x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&k{x_2}^2 - (2x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&k \geq 4.
\end{aligned}$$

Έστω $k \geq 4$. Εξετάζουμε την ιδιότητα 4. Είδαμε πριν ότι

$$\langle x,x\rangle = \left(x_1 - 2x_2\right)^2 + k{x_2}^2 - (2x_2)^2.$$

Το δεξιό μέλος είναι μη μηδενικό για κάθε $x \neq (0,0)$ αν και μόνο αν $k > 4$. Τελικά οι ζητούμενες τιμές του *k* είναι $k > 4$.

Για τα ζητούμενα μήκη έχουμε σύμφωνα με τον Ορισμό 7

$$\begin{aligned}
|e_1| &= \sqrt{\langle e_1,e_1\rangle} = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 + k\cdot 0\cdot 0} = 1, \\
|e_2| &= \sqrt{\langle e_2,e_2\rangle} = \sqrt{0^2 - 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 + k\cdot 1\cdot 1} = \sqrt{k}.
\end{aligned}$$

Επειδή $\langle e_1,e_2\rangle = 1\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 0 + k\cdot 0\cdot 1 = -2 \neq 0$ τα e_1, e_2 δεν είναι κάθετα ως προς το δοσμένο εσωτερικό γινόμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποια από τα επόμενα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$;

1. $\{(x,y,z) | z = 1\}$
2. $\{(x,y,z) | z = 0\}$
3. $\{(x,y,z) | xy = 0\}$

Υπόδειξη Το πρώτο δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο. Το τρίτο δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση (πχ εξετάστε το $(1,0,0)+(0,1,0)$). Για το δεύτερο εφαρμόστε την Πρόταση 2.

Άσκηση 2

Εξετάστε ποια από τα επόμενα υποσύνολα του $M_2(\mathbb{R})$ είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a=1 \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a \geq 0 \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| 2a+b-c=0 \right\}$

Υπόδειξη Το πρώτο δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο, το δεύτερο δεν είναι κλειστό ως προς τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό και το τρίτο είναι υπόχωρος.

Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι

1. το $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-2y+z=0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$
2. το $V=\left\{ f(x)\in\mathbb{R}[x] \middle| f(0)=0 \right\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}[x]$
3. το $W=\left\{ A\in M_n(\mathbb{F}) \middle| AC=CA \right\}$, όπου $C\in M_n(\mathbb{F})$, είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{F})$.

Υπόδειξη Εφαρμόστε το κριτήριο υποχώρου και στις τρεις περιπτώσεις. Βλ. Λυμένη Άσκηση 1 3) και Λυμένη Άσκηση 2 3).

Άσκηση 4

Έστω $u=(1,1,2), v=(2,1,1)\in\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν οι τιμές του $a\in\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $(4,a,5)\in\langle u,v\rangle$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 3. **Απάντηση** $a=3$.

Άσκηση 5

Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}^3$ έχουμε $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle=\langle(1,0,-1),(4,1,-1),(5,2,1)\rangle$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 4.

Άσκηση 6

Έστω $u, v, w \in V$, όπου V είναι ένας δ.χ. Αποδείξτε ότι $\langle u, v\rangle = \langle u, v, w\rangle \Leftrightarrow w \in \langle u, v\rangle$.

Υπόδειξη Βλ. Ορισμό 4 και Πρόταση 5 .

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του δ.χ. των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 10. **Απάντηση** $\{(1,2,1)\}$. Επίσης και κάθε $\{(a, 2a, a)\}, a \neq 0,$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων των λύσεων του συστήματος.

Άσκηση 8

Έστω $U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = f(x)\}, \quad W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = -f(x)\}$.

Αποδείξτε ότι τα σύνολα αυτά είναι υπόχωροι του $V = \mathbb{R}[x]$ και ότι $V = U \oplus W$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 7. Για να αποδείξετε ότι $V = U + W$, μπορείτε να χρησιμοποιήστε τη σχέση $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Άσκηση 9

Έστω V ένας δ.χ. και $X, Y \subseteq V$.

1. Αποδείξτε ότι $\langle X \cup Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$.
2. Δείξτε με παράδειγμα ότι είναι δυνατό να έχουμε $\langle X \cap Y\rangle \neq \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle$.

Υπόδειξη Για το 2. έστω $X = \{(1,1)\}, Y = \{(2,2\}$. Τότε $\langle X \cap Y\rangle = \{(0,0)\}$.

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα $U + V$ να είναι ευθύ όπου

$U = \langle (1,1,1), (1,0,-1)\rangle, V = \langle (5,3,a)\rangle$

Υπόδειξη Ισοδύναμα, θέλουμε το $(5,3,a)$ να μην είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,1,1),(1,0,-1)$. Συνεχίστε τώρα όπως στη Λυμένη Άσκηση 5. Απάντηση $a \neq 1$.

Κεφάλαιο 7

Βάσεις και Διάσταση

Στο Κεφάλαιο 5 είδαμε την έννοια της βάσης στο $\mathbb{R}^n$ και στο Κεφάλαιο 6 μελετήσαμε διανυσματικούς χώρους. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε βάσεις σε τυχαίους πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους. Το κύριο θεωρητικό αποτέλεσμα είναι ότι κάθε δυο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Το πλήθος αυτό ονομάζεται διάσταση του διανυσματικού χώρου. Θα μελετήσουμε πολλά σχετικά παραδείγματα και στη συνέχεια θα δούμε την έννοια της τάξης πίνακα και μια σημαντική εφαρμογή στα γραμμικά συστήματα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στα παρακάτω, με V θα συμβολίζουμε ένα $\mathbb{F}-$διανυσματικό χώρο.

ΒΑΣΕΙΣ

Ορισμός 1 (γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία)

*Έστω $v_1,\ldots,v_m \in V$. Τα στοιχεία αυτά λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** πάνω από το $\mathbb{F}$ αν από τη σχέση $a_1v_1+\ldots+a_mv_m=0$, όπου $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{F}$, έπεται ότι $a_1=\ldots=a_m=0$. Σε διαφορετική περίπτωση θα λέμε ότι τα $v_1,\ldots,v_m$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα** πάνω από το $\mathbb{F}$.*

Παραδείγματα

1. Στο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ τα
   a. $v_1=(1,1,1), v_2=(1,1,0), v_3=(1,0,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Rightarrow$$
$$a_1(1,1,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

b. $(1,1,1),(1,1,0),(5,5,2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα γιατί

$2(1,1,1)+3(1,1,0)-(5,5,2)=(0,0,0).$

2. Στο δ.χ. $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$:

a. Τα στοιχεία

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί

$$a_1v_1 + \dots + a_6v_6 = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$a_1 = \dots = a_6 = 0.$$

b. Τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά

εξαρτημένα γιατί

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Τα στοιχεία $1,i$ του $\mathbb{C}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα υπεράνω του $\mathbb{R}$ αφού $a1+bi=0, a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow a=b=0$, αλλά είναι γραμμικά εξαρτημένα υπεράνω του $\mathbb{C}$ αφού $i1+(-1)i=0$.

4. Αν κάποιο από τα $v_1,\dots,v_m$ είναι το μηδενικό στοιχείο, τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν $v_1=0$, τότε έχουμε το γραμμικό συνδυασμό $1v_1+0v_2+\dots+0v_m=0$.

Ορισμός 1Α

Επειδή θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας σε άπειρα σύνολα δίνουμε τους εξής ορισμούς.

- *Ένα πεπερασμένο υποσύνολο* $\{v_1,...,v_m\}$ *του V λέγεται **γραμμικά ανεξάρτητο** αν τα στοιχεία* $v_1,...,v_m$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ένα άπειρο υποσύνολο του V λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
- *Ένα πεπερασμένο υποσύνολο* $\{v_1,...,v_m\}$ *του V λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν τα στοιχεία* $v_1,...,v_m$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ένα άπειρο υποσύνολο του V λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Δηλαδή αν υπάρχει πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο που είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
- *Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Ορισμός 2 (βάση)

*Μια **βάση** του* $\mathbb{F}-$*δ.χ. V είναι ένα σύνολο στοιχείων του V που είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω από το* $\mathbb{F}$ *και παράγει το V πάνω από το* $\mathbb{F}$.

Σημείωση Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό ενδέχεται να έχουμε άπειρες βάσεις. Πράγματι μια βάση του δ.χ. $\mathbb{R}[x]$ των πραγματικών πολυωνύμων είναι ο σύνολο $\{1, x, x^2, ...\}$. Όμως εδώ θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά οι δ.χ. που έχουν πεπερασμένες βάσεις.

Παραδείγματα

1. Μια βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η συνήθης βάση $\{e_1,...,e_n\}$, όπου $e_1=(1,0,...,0),...,e_n=(0,0,...,1)$.
2. Μια βάση του $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τα στοιχεία
$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
3. Μια βάση του $M_{n\times m}(\mathbb{F})$ είναι το σύνολο $\{E_{ij}\,|1\le i\le n, 1\le j\le m\}$ όπου σε κάθε θέση του $n\times m$ πίνακα E_{ij} υπάρχει το 0 εκτός από τη θέση (i,j) όπου υπάρχει το 1.

4. Μια βάση του $\mathbb{R}_n[x]$ είναι το $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$.

Ορισμός 3 (διάσταση)

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος $\mathbb{F}-$δ.χ.. Αποδεικνύεται ότι ο V έχει βάση και κάθε βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων. Ο αριθμός αυτός λέγεται η ***διάσταση*** *του V και συμβολίζεται με $\dim_{\mathbb{F}} V$ ή απλά $\dim V$.*

Παραδείγματα

- Σχετικά με τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε
  $\dim \mathbb{R}^n = n, \dim M_{2\times 3}\left(\mathbb{R}\right) = 6, \dim M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right) = nm, \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1.$
- Στο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τον υπόχωρο $\left\langle (1,-1,2),(2,-2,4)\right\rangle$. Επειδή μια βάση αυτού είναι το $\left\{(1,-1,2)\right\}$ έχουμε $\dim\left\langle (1,-1,2),(2,-2,4)\right\rangle = 1$.

ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 4 (χώρος γραμμών, χώρος στηλών, τάξη)

Έστω $A \in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right)$.

- *Κάθε γραμμή του A είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}^m$. Ο* ***χώρος γραμμών*** *του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^m$ που παράγουν οι γραμμές του A και συμβολίζεται με $R(A)$. Η* ***τάξη γραμμών*** *του A είναι ο ακέραιος $\dim_{\mathbb{F}} R(A)$.*
- *Κάθε στήλη του A είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{F}^n$. Ο* ***χώρος στηλών*** *του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$ που παράγουν οι στήλες του A και συμβολίζεται με $C(A)$. Η* ***τάξη στηλών*** *του A είναι ο ακέραιος $\dim_{\mathbb{F}} C(A)$.*
- *Αποδεικνύεται ότι $\dim_{\mathbb{F}} R(A) = \dim_{\mathbb{F}} C(A)$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται η* ***τάξη*** *του πίνακα A και συμβολίζεται με $r(A)$.*

Παράδειγμα

Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ έχουμε $r(A) = 1$, γιατί όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα $\dim\left\langle (1,-1,2),(2,-2,4)\right\rangle = 1$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΒΑΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο 5, Θεώρημα 3, είδαμε ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει το πολύ n στοιχεία. Πιο γενικά έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1 (μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων)

Έστω V ένας δ.χ. που παράγεται από m στοιχεία, όπου m είναι ένας ακέραιος. Τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V είναι πεπερασμένο και έχει το πολύ m στοιχεία.

Ξέρουμε ότι κάθε δυο βάσεις του $\mathbb{R}^n$ έχουν το αυτό πλήθος στοιχείων. Γενικά ισχύει το εξής.

Θεώρημα 2 (πληθάριθμος βάσης)

Έστω V ένας δ.χ.. Αν υπάρχει μια πεπερασμένη βάση του V που έχει n στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του V έχει n στοιχεία.

Θεώρημα 3 (επέκταση γραμμικώς ανεξάρτητου συνόλου σε βάση)

Έστω V ένας πεπερασμένα παραγόμενος δ.χ. και S ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Τότε υπάρχει βάση του V που περιέχει το S.

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση[1].

Παράδειγμα

Εύκολα επαληθεύεται ότι τα $(1,2,0,-1),(1,2,0,1),(0,1,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^4$. Το σύνολο αυτών μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$ με την προσθήκη του $(0,0,1,0)$. Πράγματι, έχουμε

[1] Επισημαίνουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα αληθεύει για όλους τους δ.χ. αλλά εδώ θα ασχοληθούμε με τους πεπερασμένα παραγόμενους δ.χ..

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$ Συνεπώς τα στοιχεία $(1,2,0,-1),(1,2,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$ σύμφωνα με το Πόρισμα 5 του Κεφαλαίου 5.

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει το Πόρισμα 4 του Κεφαλαίου 5 σε τυχαίο πεπερασμένα παραγόμενο διανυσματικό χώρο.

Πρόταση 4

Έστω V ένας δ.χ. με $\dim V = n$. *Τότε*

1. *Αν ένα σύνολο* $\{v_1,\dots,v_n\}$ *με n στοιχεία παράγει το V, τότε αυτό είναι βάση του V.*
2. *Αν ένα σύνολο* $\{v_1,\dots,v_n\}$ *με n στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτό είναι βάση του V.*

Θεώρημα 5 (διαστάσεις υποχώρων)

Έστω V ένας δ.χ. με $\dim V = n$ *και U ένας υπόχωρος του V. Τότε*

1. $\dim U \leq \dim V$.
2. *Αν* $\dim U = n$, *τότε* $U = V$.

Θεώρημα 6 (διάσταση αθροίσματος υποχώρων)

Έστω U, W *δυο υπόχωροι ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου. Τότε* $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Παράδειγμα

Έστω $U = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3\}, W = \{(a,0,b) \in \mathbb{R}^3\}$. Τότε μια βάση του U είναι το $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ και άρα $\dim U = 2$. Μια βάση του W είναι το $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ και συνεπώς $\dim W = 2$. Το $U+W$ παράγεται από την ένωση των δυο προηγούμενων βάσεων η οποία τυχαίνει να είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα $U+W = \mathbb{R}^3$ και $\dim(U+W) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Από τη σχέση

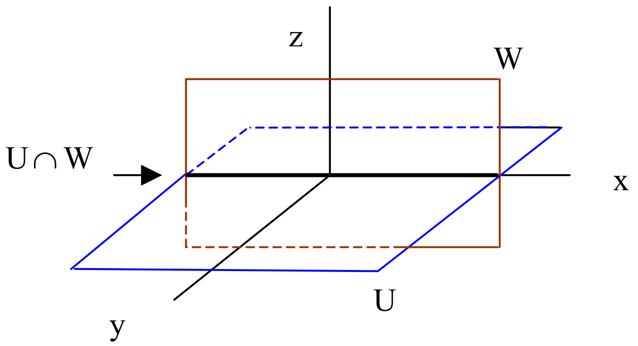
$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim U\cap W$$

έχουμε

$$3=2+2-\dim U\cap W\ ,$$

οπότε $\dim U\cap W=1$.

Γεωμετρικά, το U είναι το xy επίπεδο, το W είναι το xz επίπεδο και η τομή τους είναι ο άξονας των x, όπως φαίνεται στο σχήμα.



ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Πρόταση 7

- Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.
- Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.
- Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.

Παράδειγμα

- Η τάξη του $A=\begin{pmatrix}1&1&9\\0&1&8\\0&0&1\end{pmatrix}$ είναι $r(A)=3$ γιατί ο πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή και υπάρχουν 3 μη μηδενικές γραμμές.
- Για να βρούμε την τάξη του $B=\begin{pmatrix}1&1&9\\1&2&17\\0&0&11\end{pmatrix}$ χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή.

Αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη βρίσκουμε τον A. Άρα $r(B) = r(A) = 3$.

Τα επόμενα δυο αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Θεώρημα 8 (κριτήριο συμβιβαστού γραμμικού συστήματος)

Ένα γραμμικό σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν η τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος ισούται με την τάξη του πίνακα των συντελεστών.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το επόμενο σύστημα είναι συμβιβαστό

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ 2x-y+z&=2 \\ 3x+y-z&=a \\ 4x+y-2z&=a \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από αρκετούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, ο επαυξημένος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & a \\ 4 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3a+24 \\ 0 & 0 & 0 & -7a+61 \end{pmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η τάξη του πίνακα των *συντελεστών* είναι 3. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8 το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν η τάξη του B είναι 3, δηλαδή αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή του B είναι μηδενική, δηλαδή $a = \frac{61}{7}$.

Θεώρημα 9 (διάσταση λύσεων ομογενούς γραμμικού συστήματος)

Η διάσταση του δ.χ. των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος ισούται με τη διαφορά $m-r$, όπου m είναι το πλήθος των αγνώστων και r είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών.

Παράδειγμα

Η διάσταση του δ.χ. των λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x+2y-4z+3w&=0\\ x+2y-2z+2w&=0\\ 2x+4y-2z+3w&=0 \end{aligned}$$

υπολογίζεται ως εξής. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών φέρουμε τον πίνακα των συντελεστών σε κλιμακωτή μορφή. Βρίσκουμε τον πίνακα

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Αυτός έχει τάξη $r=2$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9 η ζητούμενη διάσταση είναι $m-r=4-2=2$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο. (βλ. Κεφάλαιο 6, Ορισμός 6). Μια βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$ του V λέγεται **ορθοκανονική** αν $\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$.

Θεώρημα 10 (ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων)

Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση.

Μια αποτελεσματική μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών βάσεων είναι η μέθοδος Gram-Schmidt.

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram - Schmidt

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ *μια βάση του V. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1\\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1\\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3,u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2 - \frac{\langle v_3,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1\\
&\vdots\\
u_n &= v_n - \frac{\langle v_n,u_{n-1}\rangle}{|u_{n-1}|^2}u_{n-1} - \dots - \frac{\langle v_n,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $w_1 = \frac{1}{|u_1|}u_1,\dots,w_n = \frac{1}{|u_n|}u_n$. *Τότε τα στοιχεία* $w_1,\dots,w_n$ *αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του V.*

Παράδειγμα

Ας εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο στη βάση $\{v_1,v_2,v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $v_1=(1,0,1), v_2=(1,0,-1), v_3=(0,3,4)$. Το εσωτερικό γινόμενο που θεωρούμε εδώ είναι το σύνηθες. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (1,0,1)\\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 = v_2 = (1,0,-1)\\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3,u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2 - \frac{\langle v_3,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 = (0,3,4) - \frac{-4}{2}(1,0,-1) - \frac{4}{2}(1,0,1) = (0,3,0).
\end{aligned}$$

Τα μήκη των u_1,u_2,u_3 είναι αντίστοιχα $\sqrt{2},\sqrt{2},3$. Διαιρώντας με αυτά βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), (0,1,0)\right\}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

1. $(1,1,-1,1),(2,1,0,1),(4,3,-2,2)$

2. $(1,1,-1,1),(2,1,0,1),(4,3,-2,3)$

Λύση

1. *Α τρόπος.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1 εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ από τα οποία ένα τουλάχιστον να είναι μη μηδενικό τέτοια ώστε

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,2)=(0,0,0,0).$$

Έχουμε

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,2)=(0,0,0,0) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a-2c=0 \\ a+b+2c=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη). Άρα $a=b=c=0$ και τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Β τρόπος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επειδή δεν υπάρχει μηδενική γραμμή στον τελευταίο πίνακα, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. *Α τρόπος.*

Όπως στον Α τρόπο του 1, από τη σχέση

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,3)=(0,0,0,0)$$

βρίσκουμε το σύστημα

$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a-2c=0 \\ a+b+3c=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει και άλλη λύση πέρα από την τετριμμένη. Δηλαδή υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλα μηδέν τέτοια ώστε $a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,3)=(0,0,0,0)$. Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Β τρόπος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή υπάρχει μηδενική γραμμή στον τελευταίο πίνακα, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν τα επόμενα στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ από τα οποία ένα τουλάχιστον να είναι μη μηδενικό και να ικανοποιούν την ισότητα

$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$a\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & -5\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}a+3b+c & 2a-b-5c\\ 3a+2b-4c & a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}a+3b+c=0\\ 2a-b-5c=0\\ 3a+2b-4c=0\\ a+2b=0.\end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του τελευταίου συστήματος, φτάνουμε στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Άμεσα συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική λύση, οπότε τα δοσμένα στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση 3

Εξετάστε αν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο δ.χ. $\mathbb{R}_2[x]$ *των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.*

1. $x^2+x+1,\ x^2-x+2,\ x^2+1,\ 2x^2-3x+2$
2. $x^2+x+1,\ x^2-x+2,\ x^2+1$

Λύση

1. Ξέρουμε ότι $\dim\mathbb{R}_2[x]=2+1=3$. Το πλήθος των δοσμένων στοιχείων είναι 4 και άρα από το Θεώρημα 1 αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$a\left(x^2+x+1\right)+b\left(x^2-x+2\right)+c\left(x^2+1\right)=0\Rightarrow$$
$$\left(a+b+c\right)x^2+\left(a-b\right)x+\left(a+2b+c\right)=0\Rightarrow$$
$$\begin{cases}a+b+c=0\\ a-b=0\\ a+2b+c=0.\end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι ομογενές, τετραγωνικό και η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. Συνεπώς η μηδενική λύση $a = b = c = 0$ είναι μοναδική. Άρα τα δοσμένα στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4

Αν u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός $\mathbb{F}-$δ.χ., τότε αποδείξτε ότι και τα $u+2v+4w, 2v+5u+w, 3u+w$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση

Έστω $a, b, c \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $a(u+2v+4w)+b(2u+5v+w)+c(3u+w)=0$. Τότε παίρνουμε $(a+2b+3c)u+(2a+5b)v+(4a+b+c)w=0$. Επειδή τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλοι οι συντελεστές της τελευταίας σχέσης οφείλουν να είναι μηδέν, οπότε

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a+5b=0 \\ 4a+b+c=0. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι ομογενές και τετραγωνικό. Επειδή η ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -53$ είναι μη μηδενική, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση που είναι βέβαια η μηδενική $a = b = c = 0$. Άρα τα $u+2v+4w, 2v+5u+w, 3u+w$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

(α) Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα διανύσματα $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$ *αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{R}^3$.

(β) Για τις τιμές του a που βρήκατε πριν, να εκφράστε το $(1,0,0)$ *ως γραμμικό συνδυασμό των* $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές του b για τις οποίες έχουμε $(1,2,b) \in \langle (1,1,1), (3,2,1) \rangle$.

Λύση

(α) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, το δοσμένο ερώτημα ισοδυναμεί με το να βρεθούν τα a τέτοια ώστε $\det A \neq 0,$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (βλ. Πόρισμα 5 του Κεφαλαίου 5). Υπολογίζοντας βρίσκουμε ότι $\det A = 2 - 2a$, οπότε $a \neq 1$.

(β) Για $a \neq 1$, τα δοσμένα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν μια βάση. Ζητάμε να βρεθούν τα x, y, z τέτοια ώστε

$$(1,0,0) = x(1,1,a) + y(2,0,1) + z(3,-1,1).$$

Το σύστημα που προκύπτει είναι

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - z = 0 \\ ax + y + z = 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών είναι ο A. Λύνοντάς το σύστημα με μια από τις γνωστές μεθόδους, π.χ. τον κανόνα του Cramer, βρίσκουμε ότι

$$x = \frac{1}{2(1-a)}, \quad y = \frac{a+1}{2(a-1)}, \quad z = \frac{1}{2(1-a)}.$$

(γ) Ζητάμε τα b τέτοια ώστε να υπάρχουν x, y ώστε να έχουμε

$(1,2,b) = x(1,1,1) + y(3,2,1).$ Το σύστημα που προκύπτει είναι το

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x + y = b \end{cases}$$

δηλαδή είναι το $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$, όπου $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Από το Θεώρημα 8, το σύστημα αυτό έχει λύση αν και μόνο αν η τάξη του B ισούται με την τάξη του επαυξημένου πίνακα $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Η τάξη του B είναι 2, γιατί ο B είναι 3×2 και υπάρχουν 2 γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Συνεπώς ζητάμε τα b ώστε $r(C) = 2$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε ότι ο C είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$. Από τις γραμμές αυτού του πίνακα βλέπουμε ότι η τάξη του είναι 2 αν και μόνο αν η τελευταία γραμμή είναι μηδενική δηλαδή αν και μόνο αν $b=3$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ *που παράγεται από τα διανύσματα* $u=(1,-2,5,-3), v=(2,3,1,-4), w=(3,8,-3,-5)$.

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα.

Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα u,v,w είναι ο χώρος γραμμών του A. Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε τον πίνακα

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την Πρόταση 7, ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται με τον χώρο γραμμών του B και μια βάση του τελευταίου είναι $\{(1,-2,5,-3),(0,7,-9,2)\}$. Η ζητούμενη διάσταση είναι 2.

Άσκηση 7

Έστω $\mathbb{R}_2[x]$ *ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 2. Αποδείξτε ότι μια βάση του* $\mathbb{R}_2[x]$ *είναι το σύνολο* $\{1,\ x-1,(x-1)^2\}$ *και βρείτε την παράσταση του* $5x^2+3x+2$ *ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της παραπάνω βάσης.*

Λύση

Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}_2[x]$ είναι 3, αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{1,\ x-1,(x-1)^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (βλ. Πρόταση 4). Έχουμε

$$\begin{aligned}&a1+b(x-1)+c(x-1)^2=0\Rightarrow\\&cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)=0\Rightarrow\\&\begin{cases}c=0\\b-2c=0\\a-b+c=0\end{cases}\Rightarrow a=b=c=0.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, λύνουμε την εξίσωση

$$a1+b(x-1)+c(x-1)^2=2+3x+5x^2$$

ως προς τα a,b,c, δηλαδή την

$$cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)=5x^2+3x+2.$$

Αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{cases}c=5\\b-2c=3\\a-b+c=2.\end{cases}$$

Άρα $a=10, b=13, c=5$. Τελικά $2+3x+5x^2=10+13(x-1)+5(x-1)^2$.

Άσκηση 8

Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του υπόχωρου

$U=\left\{X\in M_2(\mathbb{R})\mid X\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}X\right\}$ του $M_2(\mathbb{R})$.

Λύση

Πρώτα θα βρούμε τη γενική μορφή των πινάκων X. Έστω $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Τότε

$X\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b&2a+b\\c-d&2c+d\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\-a+c&-b+d\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$X\in U$ αν και μόνο αν

$$\begin{pmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-b=a+2c \\ 2a+b=b+2d \\ c-d=-a+c \\ 2c+d=-b+d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b+2c=0 \\ a-d=0 \\ a-d=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b+2c=0 \\ a-d=0. \end{cases}$$

Οι λύσεις του τελευταίου συστήματος είναι οι $(a,b,c,d)=(d,-2c,c,d),\ c,d\in\mathbb{R}$. Άρα $X=\begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$. Δηλαδή

$$U=\left\{\begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι μια βάση του U είναι το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Πράγματι, αυτό παράγει το U γιατί $\begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Επίσης τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί αν έχουμε $\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $\begin{pmatrix} \lambda & -2\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, οπότε $\lambda=\mu=0$. Η διάσταση του U είναι 2.

Άσκηση 9

Έστω $U=\left\{A\in M_3(\mathbb{R}) \middle| A^t=-A\right\}$ το υποσύνολο του $M_3(\mathbb{R})$ που αποτελείται από τους αντισυμμετρικούς πίνακες. Αποδείξτε ότι το U είναι υπόχωρος του $M_3(\mathbb{R})$. Επιπλέον να βρεθεί μια βάση και η διάστασή του.

Λύση

Το σύνολο U είναι βέβαια μη κενό. Έστω $A,B\in U$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U,$$
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -(\lambda A) \Rightarrow \lambda A \in U.$$

Συνεπώς το U είναι υπόχωρος του $M_3(\mathbb{R})$ σύμφωνα με την Πρόταση 2 του Κεφαλαίου 5.

Επειδή το τυχαίο στοιχείο A του U ικανοποιεί $A^t = -A$, βρίσκουμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του U.

Είναι σαφές ότι τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Επίσης αυτά παράγουν το U γιατί

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τελικά, $\dim U = 3$.

Άσκηση 10

Έστω $\{u_1, \ldots u_m, w_1, \ldots, w_n\}$ *μια βάση του διανυσματικού χώρου* V. *Θέτουμε* $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle, W = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$. *Αποδείξτε ότι* $V = U \oplus W$.

Λύση

Επειδή κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ είναι σαφές από τους ορισμούς ότι $V = U + W$. Για να αποδείξουμε ότι $V = U \oplus W$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $U \cap W = \langle 0 \rangle$. Για τον σκοπό αυτό, έστω $v \in U \cap W$. Τότε $v \in U$ που σημαίνει ότι το v είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1,...,u_m$, δηλαδή

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m \,,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Κατά παρόμοιο τρόπο

$$v = \mu_1 w_1 + ... + \mu_n w_n \,,\ \mu_i \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m - \mu_1 w_1 - ... - \mu_n w_n = 0,$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_1 = ... = \lambda_m = \mu_1 = ... = \mu_n = 0,$$

γιατί το $\{u_1,...u_m, w_1,..., w_n\}$ είναι βάση. Άρα $v = 0,$ συνεπώς $U \cap W = \langle 0 \rangle$.

Άσκηση 11

Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ *που παράγεται από τα (1,3,2,1), (0,2,1,0). Να βρεθεί ένας υπόχωρος W του* $\mathbb{R}^4$ *ώστε* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Λύση

Θα βρούμε δύο στοιχεία $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ ώστε το $\{(1,3,2,1),(0,2,1,0), w_1, w_2\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^4$. Τότε το $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ θα έχει τη ζητούμενη ιδιότητα, λόγω της προηγούμενης Λυμένης Άσκησης. Θα επιλέξουμε (στην τύχη) δύο στοιχεία της συνήθους βάσης $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^4$. Αν η επιλογή μας δεν οδηγεί σε βάση, θα ξαναδοκιμάσουμε. Έστω $w_1 = (1,0,0,0), w_2 = (0,1,0,0)$. Τότε

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Άρα το $\{(1,3,2,1),(0,2,1,0), w_1, w_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 12

Έστω οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1) \rangle,$$
$$W = \langle (1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3) \rangle.$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις $\dim(U+W), \dim U \cap W$.

Λύση

Επειδή ο χώρος $U+W$ παράγεται και από τα έξι δοσμένα στοιχεία, θα εξετάσουμε την κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Μετά από πολλούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή υπάρχουν 3 μη μηδενικές γραμμές, συμπεραίνουμε ότι $\dim(U+W)=3$.

Για την τομή θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Θεωρήματος 6 και για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τις διαστάσεις $\dim U, \dim W$. Όπως και πριν θα μετασχηματίσουμε τους πίνακες των γεννητόρων σε κλιμακωτή μορφή. Για το U βλέπουμε ότι η κλιμακωτή μορφή του $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ είναι $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και άρα $\dim U = 2$.

Όμοια, $\dim W = 2$. Τέλος $\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3=1$.

Άσκηση 13

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$

$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=2x-y-z=0.\}$

Λύση

Ο U είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$$

Αυτό ισοδυναμεί με το $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ του οποίου οι λύσεις είναι

$(x,y,z)=(0,-z,z),\ z\in\mathbb{R}$. Άρα μια βάση του U είναι το $\{(0,-1,1)\}$ και $\dim U=1$.

Άσκηση 14

Έστω οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, $U=\{(x,y,z)\mathbb{R}^3 \,|\, 2x-y-z=0\}$ *και* $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$. *Βρείτε τη διάσταση και μια βάση για καθέναν από τους χώρους U, V,* $U\cap V$ *και U+V***.**

Λύση

Θα μπορούσαμε να βρούμε τις διαστάσεις των *U,V* με τον τρόπο που είδαμε στην προηγούμενη Λυμένη Άσκηση. Ας δούμε εδώ μια άλλη μέθοδο.

Επειδή έχουμε $U\subseteq\mathbb{R}^3$ και $U\neq\mathbb{R}^3$ ισχύει $\dim U\le 2$ σύμφωνα με το Θεώρημα 5. Δύο διανύσματα που ανήκουν στο *U* είναι τα (1,2,0) και (1,0,2). Παρατηρούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα dim*U* = 2 και τα προηγούμενα διανύσματα αποτελούν βάση του *U*.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε, για παράδειγμα, τη βάση του *V* αποτελούμενη από τα διανύσματα $(1,-1,0),(0,1,-1)$.

Από τα προηγούμενα τέσσερα διανύσματα, τα πρώτα τρία είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\neq 0$) και ανήκουν στο *U*+*V*. Επειδή ο *U*+*V* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ έχουμε dim(U+V) ≤ 3. Συνεπώς dim(*U*+*V*) = 3, και τα προαναφερθέντα τρία διανύσματα αποτελούν βάση.

Από τη σχέση $\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim(U+V)$ ου Θεωρήματος 6 παίρνουμε $\dim U\cap V=1$. Μένει να βρεθεί μια βάση του $U\cap V$ και προς τούτο αρκεί να βρούμε ένα μη μηδενικό στοιχείο του. Λύνοντας το σύστημα $2x-y-z=0,\ x+y+z=0$ βρίσκουμε *x* = 0, και *y*+*z* = 0, οπότε ένα μη μηδενικό στοιχείο της τομής είναι για παράδειγμα το $(0,1,-1)$.

Άσκηση 15

Αφού λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-4z+3w&=0\\ x+2y-2z+2w&=0\\ 2x+4y-2z+3w&=0 \end{aligned}$$

να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου των λύσεων.

Λύση

Μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε ότι η κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα βρίσκουμε τις λύσεις $(x,y,z,w)=(-2y-w,y,\frac{w}{2},w),y,w\in\mathbb{R}$. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι $m-r=4-2=2,$ όπου m = πλήθος αγνώστων και r = τάξη του πίνακα των συντελεστών. Για να βρούμε μία βάση, επιλέγουμε συγκεκριμένες τιμές για τις ελεύθερες μεταβλητές y,w ώστε οι δύο λύσεις να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία. Για παράδειγμα από $y=0,w=2$ και $y=1,w=2$ παίρνουμε τη βάση $\{(-2,0,1,2),(-4,1,1,2)\}$

Άσκηση 16

Θεωρούμε τους υπόχωρους $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+b=0\right\}, V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a+c=0\right\}$ *του* $M_2(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων* $U, V, U+V, U\cap V$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του U είναι της μορφής

$\begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Συνεπώς τα στοιχεία

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ παράγουν το U. Εύκολα επαληθεύεται ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=0\\ \mu=0\\ \nu=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\lambda=\mu=\nu=0.$$

Συνεπώς μια βάση του U αποτελούν τα στοιχεία $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ και έχουμε $\dim U=3$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\dim V=3$.

Από τους ορισμούς προκύπτει ότι $U\cap V=\left\{\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\right\}$. Όπως πριν αποδεικνύεται εύκολα ότι μια βάση του $U\cap V$ είναι το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Άρα $\dim U\cap V=2$.

Από τον τύπο $\dim U+\dim V=\dim(U+V)-\dim U\cap V$ του Θεωρήματος 6 παίρνουμε $\dim(U+V)=4$.

Άσκηση 17

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,2,4,5), v_3=(1,-3,-4,-2)$.

Λύση

Σύμφωνα με τη μέθοδο των Gram-Schmidt θέτουμε

$$u_1=v_1=(1,1,1,1)$$

$$u_2=v_2-\frac{\langle v_2,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1=(1,2,4,5)-\frac{12}{4}(1,1,1,1)=(-2,-1,1,2)$$

$$u_3=v_3-\frac{\langle v_3,u_2\rangle}{|u_2|^2}u_2-\frac{\langle v_3,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1=$$

$$(1,-3,-4,-2)-\frac{-7}{10}(-2,-1,1,2)-\frac{-8}{4}(1,1,1,1)=(\frac{8}{5},\frac{-17}{10},\frac{-13}{10},\frac{7}{5}).$$

Διαιρώντας τα u_1, u_2, u_3 με τα μήκη τους βρίσκουμε τη ζητούμενη ορθοκανονική βάση $\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,-1,1,2), \frac{10}{\sqrt{910}}(\frac{8}{5}, \frac{-17}{10}, \frac{-13}{10}, \frac{7}{5})\right\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν τα παρακάτω στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα

1. $(1,2,1,0), (1,2,-1,0), (0,0,2,0)$ στο $\mathbb{R}^4$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ στο $M_2(\mathbb{R})$

Υπόδειξη 1. Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. 2. Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση** 1. Είναι γραμμικά εξαρτημένα. 2. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν τα πολυώνυμα $x^2+x+1, x^2+2x+1, x^2+x+2$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 3 και Πρόταση 4. **Απάντηση** Είναι βάση.

Άσκηση 3

Έστω u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου.

1. Δείξτε ότι τα $2u-w, u+v+w, 3u-v-w$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Δείξτε ότι $\langle u,v,w \rangle = \langle 2u-w, u+v+w, 3u-v-w \rangle$

Υπόδειξη 1. Βλ. Λυμένη Άσκηση 4. 2. Επειδή ισχύει $\langle 2u-w, u+v+w, 3u-v-w \rangle \subseteq \langle u,v,w \rangle$ αρκεί να αποδειχτεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 5, ότι $\dim\langle u,v,w \rangle = \dim\langle 2u-w, u+v+w, 3u-v-w \rangle$.

Άσκηση 4

1. Να βρεθούν οι τιμές του a τέτοιες ώστε στο $\mathbb{R}^3$ $(1,2,1) \in \langle (1,1,1), (0,a,1) \rangle$.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a τέτοιες ώστε στο $\mathbb{R}^3$ $(1,2,2) \in \langle (1,1,1), (0,a,1) \rangle$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. **Απάντηση** 1. Δεν υπάρχει τέτοια τιμή του a. 2. $a=1$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** Η διάσταση είναι 3.

Άσκηση 6

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=0\\ x+5y+z&=0\\ 3x+5y+8z&=0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 14. **Απάντηση** Μια βάση είναι το $\{(7,-1,-2)\}$ και η διάσταση είναι 1.

Άσκηση 7

Έστω $W=\left\{A\in M_3(\mathbb{R})\,\middle|\,A^t=A\right\}$ το υποσύνολο του $M_3(\mathbb{R})$ που αποτελείται από τους συμμετρικούς πίνακες. Αποδείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $M_3(\mathbb{R})$. Επιπλέον να βρεθεί μια βάση και η διάστασή του.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9. **Απάντηση** $\dim W=6$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε τους υπόχωρους

$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,y+z+w=0\right\}, W=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,x+y=z-2w=0\right\}$. Να βρεθούν οι διαστάσεις των $U,W,U\cap W,U+W$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 14.

Απάντηση $\dim U=3, \dim W=2, \dim U\cap W=1, \dim(U+W)=4$.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τους υπόχωρους $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a-b=0\right\}, V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a-c=0\right\}$ του $M_2(\mathbb{R})$. Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων $U, V, U+V, U\cap V$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 16.

Απάντηση $\dim U=\dim V=3, \dim U\cap V=2, \dim(U+V)=4$.

Άσκηση 10

Αφού αποδείξτε ότι μια βάση του $M_2(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ως προς τη βάση αυτή.

Υπόδειξη Από την Πρόταση 4 αρκεί να δείξετε ότι το δοσμένο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. **Απάντηση** Οι συντεταγμένες είναι $(3,-2,5,4)$, δηλαδή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 11

Έστω $U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \middle| y+z+w=0\right\}$. Να βρεθεί μια βάση ενός υπόχωρου W του $\mathbb{R}^4$ τέτοιου ώστε $U\oplus W=\mathbb{R}^4$.

Υπόδειξη Βρείτε μια βάση του U και επεκτείνατε την σε βάση του $\mathbb{R}^4$. Βλ. Λυμένη Άσκηση 11.

Άσκηση 12

Να βρεθούν οι τάξεις των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη Μετασχηματίστε τους πίνακες σε κλιμακωτή μορφή και εφαρμόστε την Πρόταση 7. **Απάντηση** $r(A)=1, r(B)=2, r(C)=2$.

Άσκηση 13

Αποδείξτε ότι ένας $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η τάξη του είναι ίση με n.

Υπόδειξη Βλ. Θεώρημα 12 του Κεφαλαίου 3. Άλλος τρόπος: Βλ. Πόρισμα 5 Κεφάλαιο 5.

Άσκηση 14

Έστω $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Έστω ότι ο πίνακας $A-B$ έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο. Αποδείξτε ότι $|r(A)-r(B)| \le 1$.

Υπόδειξη Εξετάστε τη διάσταση των χώρων γραμμών.

Άσκηση 15

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα (1,0,1),(1,1,0).

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 17. **Απάντηση** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$

Κεφάλαιο 8

Γραμμικές Απεικονίσεις

Στα προηγούμενα δυο κεφάλαια ασχοληθήκαμε με διανυσματικούς χώρους. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων που διατηρούν τη 'δομή' τους. Οι απεικονίσεις αυτές που μας διευκολύνουν να 'συγκρίνουμε' διανυσματικούς χώρους λέγονται γραμμικές. Θα δούμε ότι η μελέτη γραμμικών απεικονίσεων ανάγεται στη μελέτη πινάκων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός 1 (γραμμική απεικόνιση)

*Έστω V, W δύο $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f:V\to W$ λέγεται **γραμμική απεικόνιση** αν*

1. $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$ *για κάθε* $v_1,v_2\in V$, *και*
2. $f(av)=af(v)$ *για κάθε* $a\in\mathbb{F}, v\in V$.

*Μια γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ ονομάζεται **ισομορφισμός** αν αυτή είναι ένα προς ένα και επί. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι χώροι V,W είναι **ισόμορφοι**.*

Σημείωση

- Οι συνθήκες 1 και 2 του παραπάνω ορισμού μπορούν να ενοποιηθούν σε μια:
$$f(av_1+bv_2)=af(v_1)+bf(v_2) \text{ για κάθε } a,b\in\mathbb{F}, v_1,v_2\in V.$$
- Αν $f:V\to W$ είναι γραμμική απεικόνιση τότε $f(0_V)=0_W$.

Παραδείγματα

1. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x$ είναι γραμμική. Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ και $a\in\mathbb{F}$. Τότε

   1. $f(x_1+x_2)=5(x_1+x_2)=5x_1+5x_2=f(x_1)+f(x_2)$
   2. $f(ax_1)=5ax_1=a(5x_1)=af(x_1)$.

   Με παρόμοιο τρόπο κάθε απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax$ είναι γραμμική

2. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+2$ *δεν* είναι γραμμική αφού, για παράδειγμα, $3f(1)\neq f(3)$. (Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι η f δεν είναι γραμμική παρατηρώντας ότι $f(0)=2\neq 0$).

3. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\left(2x-3y,x+5y\right)$ είναι γραμμική. Πράγματι, έστω $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ και $a\in\mathbb{F}$. Τότε

$$\begin{aligned}
&1.\ f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=\\
&f(x_1+x_2,y_1+y_2)=\\
&(2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2),(x_1+x_2)+5(y_1+y_2))=\\
&((2x_1-3y_1)+(2x_2-3y_2),(x_1+5y_1)+(x_2+5y_2))=\\
&(2x_1-3y_1,x_1+5y_1)+(2x_2-3y_2,x_2+5y_2)=\\
&f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2.\ f(a(x_1,y_1))=\\
&f(ax_1,ay_1)=\\
&(2ax_1-3ay_1,ax_1+5ay_1)=\\
&a(2x_1-3y_1,x_1+5y_1)=\\
&af(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται κάθε απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ της μορφής $f(x,y)=\left(ax+by,cx+dy\right)$, είναι γραμμική.

4. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\left(2x-3y+1,x+5y+z\right)$ *δεν* είναι γραμμική. Πράγματι, έχουμε $f(0,0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.

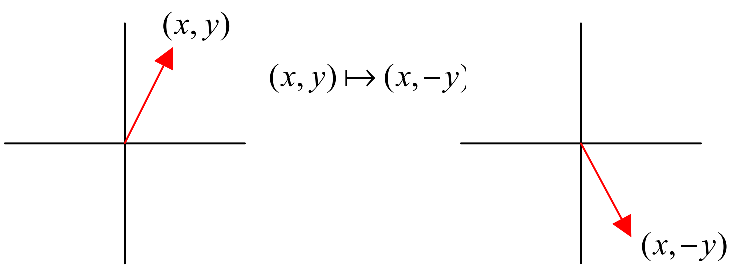
5. Εύκολα επαληθεύεται ότι η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\left(2x-3y,x+5y+z\right)$ είναι γραμμική.

6. Έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$. Η απεικόνιση $f:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}),\ f(X)=AX$ είναι γραμμική αφού

$$\begin{aligned}
&1.\ f(X+Y)=A(X+Y)=AX+AY=f(X)+f(Y)\\
&2.\ af(X)=aAX=A(aX)=f(aX)
\end{aligned}$$

για κάθε $X,Y\in M_n(\mathbb{R}),\ a\in\mathbb{R}$.

7. Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x,-y)$, είναι γραμμική. Γεωμετρικά πρόκειται για την ανάκλαση του επιπέδου ως προς τον άξονα των x, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

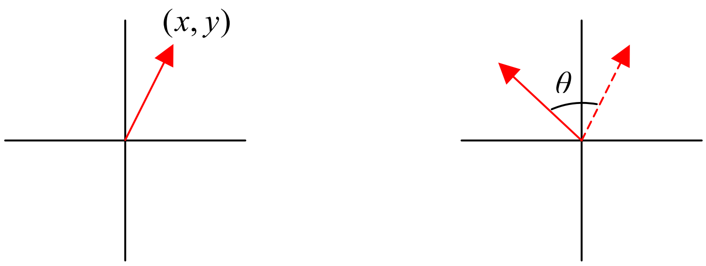


8. Έστω $\theta \in \mathbb{R}$. Η απεικόνιση

   $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta),$

   είναι γραμμική. Γεωμετρικά πρόκειται για τη στροφή του επιπέδου κατά γωνία θ στην αντίθετη φορά με την κίνηση δεικτών του ρολογιού όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα

   $$(x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$



9. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραγώγων βλέπουμε ότι η απεικόνιση $\Phi:\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \Phi(p(x)) = (p(x))'$ είναι γραμμική.

Ορισμός 2 (πυρήνας και εικόνα)

Έστω $f:V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση.

- *Ο **πυρήνας** της f είναι το σύνολο $\{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$. Συμβολίζεται δε με $\ker f$ και είναι ένας υπόχωρος του V.*
- *Η **εικόνα** imf της απεικόνισης f είναι το σύνολο $\{f(v) \in W \mid v \in V\}$ και είναι ένας υπόχωρος του W.*

Παραδείγματα

1. Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y$. Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική. Για τον πυρήνα έχουμε

$$\begin{aligned}&(x,y)\in\ker f \Leftrightarrow\\ &f(x,y)=0 \Leftrightarrow\\ &x+y=0 \Leftrightarrow\\ &y=-x.\end{aligned}$$

Άρα $\ker f=\{(x,-x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.

2. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(10x+5y,2x+y)$. Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική. Ένα στοιχείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ανήκει στον πυρήνα της f αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}&f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\\ &(10x+5y,2x+y)=(0,0)\Leftrightarrow\\ &\begin{cases}10x+5y=0\\ 2x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\\ &2x+y=0\Leftrightarrow\\ &(x,y)=(x,-2x),\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Άρα ο πυρήνας της f είναι το σύνολο $\ker f=\{(x,-2x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.

3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(9x+5y,2x+y)$. Ένα στοιχείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ανήκει στον πυρήνα της f αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}&f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\\ &(9x+5y,2x+y)=(0,0)\Leftrightarrow\\ &\begin{cases}9x+5y=0\\ 2x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\\ &x=y=0.\end{aligned}$$

Άρα ο πυρήνας της f είναι το σύνολο $\ker f=\{(0,0)\}$, δηλαδή ο τετριμμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα

Επειδή το παράδειγμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό το ξεχωρίζουμε.

Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $f:M_{n\times 1}(\mathbb{R})\to M_{m\times 1}(\mathbb{R}),\ f(X)=AX$, είναι το σύνολο των $X\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ τέτοιων ώστε $AX=0$, δηλαδή είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης f είναι το σύνολο όλων των $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ για τα οποία το σύστημα $AX = b$ έχει λύση.

Ορισμός 3 (πίνακας γραμμικής απεικόνισης)

Έστω $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση όπου V, W είναι δύο $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Έστω $\widehat{\alpha} = \{v_1, ..., v_n\}$ μια διατεταγμένη[1] βάση του V και $\widehat{\beta} = \{w_1, ..., w_m\}$ μια διατεταγμένη βάση του W. Θεωρούμε τα στοιχεία $f(v_1), ..., f(v_n)$ του W. Επειδή το $\{w_1, ..., w_m\}$ είναι βάση του W, ξέρουμε ότι κάθε $f(v_i)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $w_1, ..., w_m$. Δηλαδή υπάρχουν μοναδικά $a_{ij} \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε

$$\begin{array}{c} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\ .... \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{array}.$$

Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Ο πίνακας αυτός ονομάζεται ο **πίνακας της f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις** $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ και συμβολίζεται με $(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$. Επίσης λέμε ότι η f **αναπαρίσταται** από τον πίνακα $(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$*

[1] Λέγοντας ότι η βάση $\{v_1, ..., v_n\}$ είναι διατεταγμένη, εννοούμε ότι θεωρούμε τη βάση $\{v_1, ..., v_n\}$ *μαζί με τη διάταξη* σύμφωνα με την οποία το πρώτο στοιχείο είναι το v_1, το δεύτερο είναι το v_2, κλπ. Για παράδειγμα, έστω $n = 2$. Ενώ οι βάσεις $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_1\}$ είναι ίσες, οι διατεταγμένες βάσεις $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_1\}$ δεν είναι ίσες.

Προσοχή

1. Η πρώτη *στήλη* του $(f:\widehat{\alpha},\widehat{\beta})$ σχηματίζεται από τις συντεταγμένες του $f(v_1)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\widehat{\beta}$, η δεύτερη *στήλη* από τις συντεταγμένες του $f(v_2)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\widehat{\beta}$ κοκ.
2. Τονίζουμε ότι για δοσμένη f ο πίνακας $(f:\widehat{\alpha},\widehat{\beta})$ εξαρτάται από τις διατεταγμένες βάσεις $\widehat{\alpha},\widehat{\beta}$. Σχετικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y)=(2x-y,x+y,x).$$

Θεωρούμε τη συνήθη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^2$, $\widehat{\alpha}=\{(1,0),(0,1)\}$ και τη συνήθη διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$, $\hat{\beta}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} f(1,0)&=(2,1,1)=2(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)\\ f(0,1)&=(-1,1,0)=-1(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1). \end{aligned}$$

Άρα $(f:\widehat{\alpha},\widehat{\beta})=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Επιλέγουμε τώρα τη διατεταγμένη βάση $\widehat{\alpha}_1=\{(1,1),(2,1)\}$ του $\mathbb{R}^2$ και τη συνήθη διατεταγμένη βάση $\hat{\beta}$ του $\mathbb{R}^3$. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(1,1)&=(1,2,1)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)\\ f(2,1)&=(3,3,2)=3(1,0,0)+3(0,1,0)+2(0,0,1). \end{aligned}$$

Άρα $(f:\hat{\alpha}_1,\widehat{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Θα εξηγήσουμε στη συνέχεια πως μπορούμε *να ανακτήσουμε μια γραμμική απεικόνιση αν γνωρίζουμε έναν πίνακά της*. Με άλλα λόγια θα δούμε έναν τύπο που καθορίζει μια γραμμική απεικόνιση μέσω ενός πίνακά της.

Συμβολισμός Έστω $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση όπου V, W είναι δύο $\mathbb{F}-$ διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Έστω $\widehat{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\widehat{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ μια διατεταγμένη βάση του W. Αν $v \in V$, τότε με $[v]_{\widehat{\alpha}}$ συμβολίζουμε τον πίνακα στήλη $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ όπου $v = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_m\alpha_m$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Δηλαδή ο $[v]_{\widehat{\alpha}}$ είναι ο πίνακας – στήλη που σχηματίζεται από τις συντεταγμένες του v ως προς τη βάση $\widehat{\alpha}$.

Παρατήρηση 4

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε

$$[f(v)]_{\widehat{\beta}} = \left(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right)[v]_{\widehat{\alpha}}.$$

Δηλαδή ο πίνακας – στήλη $[f(v)]_{\widehat{\beta}}$ είναι το γινόμενο των πινάκων $\left(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right), [v]_{\widehat{\alpha}}$. Αυτό σημαίνει ότι αν ξέρουμε τον πίνακα $\left(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right)$ και φυσικά τις βάσεις $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$, τότε ξέρουμε την f. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση με $(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, όπου $\widehat{\alpha} = \{(1,1),(0,1)\}$, $\widehat{\beta} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$. Θα υπολογίσουμε το $f(v)$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$.

Αν $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε $v = x(1,1) + (y - x)(0,1)$, οπότε παίρνουμε $[v]_{\widehat{\alpha}} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \end{pmatrix}$. Από την Παρατήρηση 4 έχουμε

$$[f(v)]_{\widehat{\beta}} = \left(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\right)[v]_{\widehat{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$f(v) = (3x - y)(1,1,0) + y(0,1,1) + x(0,0,1) = (3x - y, 3x, x + y).$$

Ορισμός 5 (όμοιοι πίνακες)

Δύο $n\times n$ *πίνακες* $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ *λέγονται* ***όμοιοι*** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* $P\in M_n(\mathbb{F})$ *τέτοιος ώστε* $A=P^{-1}BP$.

Παραδείγματα

- Οι πίνακες $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ είναι όμοιοι γιατί $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P$, όπου $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, όπως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε με έναν υπολογισμό.
- Θα δούμε εδώ ότι οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ *δεν* είναι όμοιοι. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P με $A=P^{-1}BP$, δηλαδή με $PA=BA$. Αν $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, τότε

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$a=c,\, d=0,\, c=0\Rightarrow$$
$$P=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι ο P δεν είναι αντιστρέψιμος. Αυτό είναι άτοπο.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕ1Σ ΓΝΩΣΕΙΣ

Πρόταση 1 (γραμμική απεικόνιση ορίζεται μέσω βάσης)

Έστω $f:V\to W$ *μια γραμμική απεικόνιση* $\mathbb{F}-$*διανυσματικών χώρων,* $\{v_1,\dots,v_n\}$ *μια βάση του* V *και* $w_1,\dots,w_n$ *στοιχεία του* W*. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f:V\to W$ *τέτοια ώστε* $f(v_1)=w_1,\dots,f(v_n)=w_n$.

Για παράδειγμα, έστω $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $f(1,0)=w_1, f(0,1)=w_2$.

Η Πρόταση 1 λέει μεταξύ των άλλων ότι για να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση σε ένα διανυσματικό χώρο *V*, αρκεί να ορίσουμε τις τιμές της στα στοιχεία μιας βάσης του *V*.

Θεώρημα 2 (σχέση διαστάσεων πυρήνα και εικόνας)

Έστω $f:V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση όπου V, W είναι δύο $\mathbb{F}-$ διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε

$$\dim V = \dim \ker f + \dim imf.$$

Παράδειγμα

Είδαμε σε προηγούμενο Παράδειγμα ότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y)=(10x+5y, 2x+y)$, είναι $\ker f = \{(x,-2x) | x \in \mathbb{R}\}$. Άρα $\dim \ker f = 1$. Από τον τύπο του προηγούμενου Θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι $2 = 1 + \dim imf$, δηλαδή $\dim imf = 1$.

Πρόταση 3 (1-1 γραμμική απεικόνιση)

Μια γραμμική απεικόνιση $f:V \to W$ είναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f = \{0\}$.

Δηλαδή, μια γραμμική απεικόνιση $f:V \to W$ είναι 1-1 αν και μόνο αν $\dim \ker f = 0$.

Παράδειγμα

Είδαμε σε προηγούμενο Παράδειγμα ότι η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y)=(9x+5y, 2x+y)$ έχει πυρήνα $\ker f = \{(0,0)\}$. Άρα η f είναι 1-1.

Πρόταση 4 (ισόμορφοι χώροι και διαστάσεις)

Έστω V, W δυο $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι που έχουν πεπερασμένες διαστάσεις. Τότε οι χώροι αυτοί είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν $\dim V = \dim W$.

Για παράδειγμα, ο υπόχωρος $U = \{(x,y,z) | z=0\}$ του $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 2 και άρα είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$. Γεωμετρικά το *U* είναι το *xy* επίπεδο.

Πόρισμα 5

Έστω V, W δυο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης τέτοιοι ώστε $\dim V = \dim W$ και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- *η f είναι 1-1*
- *η f είναι επί*
- $\ker f = \{0\}$
- *η f είναι ισομορφισμός.*

Παράδειγμα

Είδαμε σε προηγούμενο Παράδειγμα ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (9x + 5y, 2x + y)$ είναι 1-1. Συνεπώς η f είναι και επί.

Πριν διατυπώσουμε το επόμενο Θεώρημα, ας υπενθυμίσουμε ότι με γραμμικές απεικονίσεις έχουμε τις ακόλουθες πράξεις.

- (*άθροισμα*) Έστω ότι $f, g : V \to W$ είναι δυο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε η απεικόνιση $f + g : V \to W$ που ορίζεται από τη σχέση $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ είναι γραμμική.
- (*αριθμητικό γινόμενο*) Έστω ότι $f : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{F}$, η απεικόνιση $af : V \to W$ που ορίζεται από $(af)(v) = af(v)$ είναι γραμμική.
- (*σύνθεση*) Έστω ότι $f : U \to V,\ g : V \to W$ είναι δυο γραμμικές απεικονίσεις $\mathbb{F}-$διανυσματικών χώρων. Τότε η σύνθεση $g \circ f : U \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Θεώρημα 6 (πράξεις και πίνακες γραμμικών απεικονίσεων)

Έστω U, V, W τρεις πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{F}-$διανυσματικοί χώροι με αντίστοιχες διατεταγμένες βάσεις $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$.

1. *Αν $f, g : V \to W$ είναι δυο γραμμικές απεικονίσεις, τότε*

$$\left(f+g:\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\right)=\left(f:\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\right)+\left(g:\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\right) \text{ και } \left(af:\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\right)=a\left(f:\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\right)$$

για κάθε $a\in\mathbb{F}$.

2. *Αν* $f:U\to V$, $g:V\to W$ *είναι δυο γραμμικές απεικονίσεις, τότε*

$$\left(g\circ f:\widehat{\alpha},\widehat{\gamma}\right)=\left(g:\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\right)\left(f:\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right).$$

3. *Αν* $f:U\to V$ *είναι μια αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση, τότε η απεικόνιση* $f^{-1}:V\to U$ *είναι γραμμική και* $\left(f^{-1}:\widehat{\beta},\widehat{\alpha}\right)=\left(f:\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)^{-1}$.

Το προηγούμενο Θεώρημα μας λέει μεταξύ των άλλων ότι

- ο πίνακας του αθροίσματος δυο γραμμικών απεικονίσεων είναι το άθροισμα των αντίστοιχων πινάκων
- ο πίνακας της σύνθεσης δυο γραμμικών απεικονίσεων είναι το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων.

Η πρακτική σημασία του Θεωρήματος 6 είναι ότι μέσω αυτού πολλά προβλήματα γραμμικών απεικονίσεων ανάγονται σε προβλήματα πινάκων.

Πρόταση 7

Έστω $f:V\to W$ *μια γραμμική απεικόνιση όπου οι* V,W *είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε για κάθε επιλογή διατεταγμένων βάσεων* $\widehat{\alpha},\widehat{\beta}$ *των* V,W *αντίστοιχα, έχουμε ότι η διάσταση* $\dim imf$ *ισούται με την τάξη του πίνακα* $\left(f:\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right)$.

Για μια τυπική εφαρμογή της προηγούμενης Πρότασης παραπέμπουμε στη Λυμένη Άσκηση 19.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές.

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z)=(2x+xy, x-3y-z)$
$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g(x,y,z)=(2x+1, x-3y-z)$
$h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, h(x,y,z)=(2x+|z|, x-3y-z)$
$k:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, k(x,y,z)=(2x+z, x-3y-z)$
$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \det A$

Λύση
Η f δεν είναι γραμμική γιατί $f(2,2,2)=(8,-6)$ και $2f(1,1,1)=(6,-6)$, δηλαδή $f(2,2,2)\neq 2f(1,1,1)$.

Η g δεν είναι γραμμική αφού $g(0,0,0)=(1,0)\neq(0,0)$. (Βλ. Σημείωση μετά τον Ορισμό 1).

Η h δεν είναι γραμμική αφού $h(0,0,-1)=(1,1)$ και $h(0,0,1)=(1,-1)$, δηλαδή $h(0,0,-1)\neq -h(0,0,1)$.

Η k είναι γραμμική. Πράγματι, έστω $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$, $a\in\mathbb{R}$. Τότε

1. $k\big((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big)=k\left(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right)=$
   $\big(2(x_1+x_2)+(z_1+z_2),(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)-(z_1+z_2)\big)=$
   $\left(2x_1+z_1,x_1-3y_1-z_1\right)+\left(2x_2+z_2,x_2-3y_2-z_2\right)=$
   $k\left(x_1,y_1,z_1\right)+k\left(x_2,y_2,z_2\right).$
2. $k\big(a(x_1,y_1,z_1)\big)=k(ax_1,ay_1,az_1)=$
   $(2ax_1+az_1,ax_1-3ay_1-az_1)=$
   $a(2x_1+z_1,x_1-3y_1-z_1)=$
   $ak(x_1,y_1,z_1).$

Η det δεν είναι γραμμική αν $n\geq 2$. Πράγματι, έστω $A=I$, ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας. Τότε $\det(2I)=2^n\det I=2^n\neq 2=2\det I$. Για $n=1$, η απεικόνιση det είναι γραμμική αφού στην περίπτωση αυτή είναι η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbb{R}\to\mathbb{R}, a\mapsto a$.

Άσκηση 2

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε*
$f(1,1)=(2,3), f(0,1)=(-1,1)$. *Να βρεθεί το διάνυσμα* $f(x,y)$.

Λύση
Πρώτα παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $(1,1),(0,1)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$ αφού 1) αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και 2) το πλήθος τους είναι $2=\dim\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια θα παραστήσουμε το (x,y) σαν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της

βάσης αυτής. Λύνοντας ως προς a,b το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση $(x,y)=a(1,1)+b(0,1)$ βρίσκουμε $a=x, b=y-x$. Άρα

$$(x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1).$$

Τέλος, επειδή η f είναι γραμμική, από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}&f(x,y)=f\left(x(1,1)+(y-x)(0,1)\right)=\\&f\left(x(1,1)\right)+f\left((y-x)(0,1)\right)=\\&xf(1,1)+(y-x)f(0,1).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}&xf(1,1)+(y-x)f(0,1)=\\&x(2,3)+(y-x)(-1,1)=\\&\left(2x-y+x,3x+(y-x)\right)=\\&\left(3x-y,2x+y\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς $f(x,y)=\left(3x-y,2x+y\right)$.

Άσκηση 3

Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις εξετάστε αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με τις δοσμένες ιδιότητες.

1. $f(1,1,1)=(2,3,4), f(1,1,2)=(3,-2,3), f(0,1,1)=(1,-5,0)$
2. $f(1,1,1)=(2,3,4), f(1,1,2)=(3,-2,3), f(0,0,1)=(1,-5,0)$.

Λύση

1. Θα εξετάσουμε αν τα στοιχεία $(1,1,1),(1,1,2),(0,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Χρησιμοποιώντας μια από τις μεθόδους που ξέρουμε από προηγούμενα κεφάλαια, πχ $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}=-1\neq 0$, βλέπουμε ότι τα στοιχεία αυτά είναι πράγματι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Από την Πρόταση 1 υπάρχει γραμμική απεικόνιση f με τις δοσμένες ιδιότητες.
2. Θα εξετάσουμε αν τα στοιχεία $(1,1,1),(1,1,2),(0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση $a(1,1,1)+b(1,1,2)+c(0,0,1)=(0,0,0)$, βλέπουμε ότι υπάρχει μη μηδενική λύση $a=1, b=-1, c=1$. Άρα έχουμε τη σχέση

$$(1,1,1)-(1,1,2)+(0,0,1)=(0,0,0).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση f με τις δοσμένες ιδιότητες, τότε από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned}&f(1,1,1)-f(1,1,2)+f(0,0,1)=(0,0,0)\Rightarrow\\&(2,3,4)-(3,-2,3)+(1,-5,0)=(0,0,0)\Rightarrow\\&(0,0,1)=(0,0,0),\end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Άρα τέτοια f δεν υπάρχει.

Άσκηση 4

Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε ο πυρήνας της να παράγεται από τα διανύσματα $(1,2,1),(1,3,3)$ και η εικόνα της να παράγεται από το $(1,2,3,4)$.

Λύση

Επειδή τα διανύσματα $(1,2,1),(1,3,3)$ δεν είναι συγγραμμικά, αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από το Θεώρημα 3 του Κεφαλαίου 7 αυτά μπορούν να επεκταθούν σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή υπάρχει $v\in\mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε τα $(1,2,1),(1,3,3),v$ να αποτελούν βάση. Μπορούμε να βρούμε ένα συγκεκριμένο v με τη μέθοδο της Λυμένης Άσκησης 11 του Κεφαλαίου 7. Ένα τέτοιο v είναι το $v=(1,0,0)$. Από την Πρόταση 1 υπάρχει γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις $f(1,2,1)=(0,0,0,0), f(1,3,3)=(0,0,0,0), f(1,0,0)=(1,2,3,4)$.

Θα δούμε τώρα ότι η f έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Είναι σαφές ότι έχουμε $\langle(1,2,1),(1,3,3)\rangle\subseteq\ker f$, $\langle(1,2,3,4)\rangle=imf$. Από το Θεώρημα 2 έχουμε

$$\dim\ker f=3-\dim imf=3-1=2=\dim\langle(1,2,1),(1,3,3)\rangle.$$

Αφού $\langle(1,2,1),(1,3,3)\rangle\subseteq\ker f$ συμπεραίνουμε ότι $\langle(1,2,1),(1,3,3)\rangle=\ker f$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την f που ορίσαμε πριν εφαρμόζοντας τη μέθοδο της Λυμένης Άσκησης 2. Έστω $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Λύνοντας ως προς a,b,c το σύστημα που προκύπτει από τη σχέση $(x,y,z)=a(1,2,1)+b(1,3,3)+c(1,0,0)$ βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις

$$(x,y,z)=(y-z)(1,2,1)+\frac{-y+2z}{3}(1,3,3)+\frac{3x-2y+z}{3}(1,0,0).$$

Άρα

$$f(x,y,z)=(y-z)f(1,2,1)+\frac{-y+2z}{3}f(1,3,3)+\frac{3x-2y+z}{3}f(1,0,0)=$$
$$0+0+\frac{3x-2y+z}{3}(1,2,3,4)=$$
$$\left(\frac{3x-2y+z}{3},2\frac{3x-2y+z}{3},3x-2y+z,4\frac{3x-2y+z}{3}\right).$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ *τέτοια ώστε η εικόνα της να παράγεται από τα διανύσματα* $(1,1,1,1),(1,1,2,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνήθη βάση $\{e_1,e_2,e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$. Από την Πρόταση 1 υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε

$$f(e_1)=(1,1,1,1), f(e_2)=(1,1,2,2), f(e_3)=(0,0,0,0).$$

Είναι σαφές ότι η εικόνα της f παράγεται από τα $(1,1,1,1),(1,1,2,2)$. Για να βρούμε έναν 'τύπο' για την *f* εργαζόμαστε ως εξής.

$$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)=$$
$$xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=$$
$$x(1,1,1,1)+y(1,1,2,2)+z(0,0,0,0)=$$
$$(x+y,x+y,x+2y,x+2y).$$

Άσκηση 6

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση για καθέναν από τους χώρους $\ker f, imf$ *όπου* f *είναι η γραμμική απεικόνιση* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$.

Λύση

Για τον πυρήνα έχουμε εξ ορισμού

$$(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow$$
$$f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow$$
$$(x+2y-z,y+z,x+y-2z)=(0,0,0)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ y+z=0\\ x+y-2z=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y,z)=z(3,-1,1), z\in\mathbb{R}$. Άρα μια βάση του πυρήνα είναι το στοιχείο $(3,-1,1)$ και η διάσταση του πυρήνα είναι 1.

Από το Θεώρημα 2 έχουμε $\dim imf = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$. Ξέρουμε ότι η εικόνα imf παράγεται από τις εικόνες των στοιχείων κάθε βάσης του πεδίου ορισμού. Θεωρώντας τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$, έχουμε ότι η imf παράγεται από τα

$$f(1,0,0) = (1,0,1)$$
$$f(0,1,0) = (2,1,1)$$
$$f(0,0,1) = (-1,1,-2).$$

Επειδή τα $(1,0,1),(2,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία της imf και το πλήθος τους είναι ίσο με $\dim imf$ συμπεραίνουμε ότι αυτά αποτελούν βάση της imf.

2^{ος} τρόπος για την εικόνα.

Δίνουμε εδώ μια λύση για την εικόνα που είναι ανεξάρτητη από τον πυρήνα. Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$, δηλαδή τον

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή υπάρχουν 2 μη μηδενικές γραμμές συμπεραίνουμε ότι $\dim imf = 2$ και μια βάση της imf αποτελείται από τις γραμμές αυτές, δηλαδή μια βάση της imf είναι το $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$.

Άσκηση 7

Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ *υπολογίστε τις διαστάσεις* $\dim imf, \dim \ker f$, *όπου* f *είναι η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+y, x+z, 3x+2y+kz).$$

Λύση

Ξέρουμε ότι η εικόνα της f παράγεται από τα $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$. Έχουμε $f(1,0,0) = (1,2,1,3), f(0,1,0) = (1,1,0,2), f(0,0,1) = (-1,0,1,k)$. Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα διανύσματα αυτά

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών φτάνουμε στον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

- Αν $k+1=0$, τότε ο A είναι σε κλιμακωτή μορφή και υπάρχουν 2 μη μηδενικές γραμμές. Άρα $\dim imf = 2$. Από το Θεώρημα 2 βρίσκουμε $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim imf = 3-2=1$.
- Αν $k+1 \neq 0$, τότε με έναν ακόμη στοιχειώδη μετασχηματισμό στον A καταλήγουμε στην κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα $\dim imf = 3$. Από το Θεώρημα 2, $\dim \ker f = 3-3=0$.

Άσκηση 8

Έστω $f: V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση.

1. *Αν τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_m \in V$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
2. *Αν τα στοιχεία $v_1, \ldots, v_m \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και η f είναι 1-1, τότε και τα $f(v_1), \ldots, f(v_m) \in W$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Λύση

1. Έστω ότι τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$. Άρα

$$f\left(a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m\right) = f(0) = 0 \Rightarrow a_1 f(v_1) + \ldots + a_m f(v_m) = 0.$$

Αφού ένα τουλάχιστον από τα a_i είναι μη μηδενικό, από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι τα $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Έστω $a_1 f(v_1) + \ldots + a_m f(v_m) = 0$, όπου $a_i \in \mathbb{F}$. Τότε $f(a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m) = 0 = f(0)$. Επειδή η f είναι 1-1 παίρνουμε $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$. Αφού τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά

ανεξάρτητα έχουμε $a_1 = ... = a_m = 0$. Συνεπώς τα $f(v_1), ..., f(v_m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 9

Έστω $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση για καθέναν από τους χώρους* $\ker f, imf$ *όπου f είναι η γραμμική απεικόνιση*

$$f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), f(A) = AX - XA.$$

Λύση

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} & f(A) = AX - XA = \\ & \begin{pmatrix} a & 2a+2b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Για τον πυρήνα της f έχουμε

$$\begin{aligned} & A \in \ker f \Leftrightarrow \\ & \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} 2a+2b-2d = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} a+b-d = 0 \\ c = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι οι λύσεις του τελευταίου συστήματος είναι $(-b+d, b, 0, d), b, d \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $b=-1, d=0$ παίρνουμε τη λύση $(1,-1,0,0)$ και θέτοντας $b=0, d=1$ παίρνουμε τη λύση $(1,0,0,1)$. Μια βάση των λύσεων είναι το $\{(1,-1,0,0),(1,0,0,1)\}$. Τελικά μια βάση του πυρήνα είναι το $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ και $\dim \ker f = 2$.

Για την εικόνα έχουμε $\dim imf = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \ker f = 4-2-2$. Επομένως για να βρούμε μια βάση της εικόνας αρκεί να βρούμε 2 γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία της.

Είναι εύλογο να αναζητήσουμε αυτά τα στοιχεία στις εικόνες της συνήθους βάσης $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ του $M_2(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Μια βάση της εικόνας είναι το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}\right\}$

Άσκηση 10

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση $\{e_1,e_2,e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε την εικόνα $f(2,-1,2)$. Βρείτε έναν 'τύπο' για την f.

(β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση για καθέναν από τους υπόχωρους $\ker f$ και imf .

(γ) Είναι η απεικόνιση f 1-1 ή επί;

Λύση

α) Χρησιμοποιώντας ότι η f είναι γραμμική και τον Ορισμό 3, έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(2,-1,2)=f(2e_1-e_2+2e_3)=\\
&2f(e_1)-1f(e_2)+2f(e_3)=\\
&2(e_1+3e_2+5e_3)-(2e_1-e_2+3e_3)+2(2e_1+e_2+5e_3)=\\
&4e_1+9e_2+17e_3=\\
&(4,9,17).
\end{aligned}$$

Όπως πριν έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)=\\
&xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=\\
&x(e_1+3e_2+5e_3)+y(2e_1-e_2+3e_3)+z(2e_1+e_2+5e_3)=\\
&(x+2y+2z)e_1+(3x-y+z)e_2+(5x+3y+5z)e_3=\\
&(x+2y+2z,3x-y+z,5x+3y+5z).
\end{aligned}$$

Σημείωση Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την Παρατήρηση 4 και το γεγονός ότι έχουμε εδώ τις συνήθεις βάσεις για να συμπεράνουμε ότι

$$f(x,y,z)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 3x-y+z \\ 5x+3y+5z \end{pmatrix}.$$

β) Για τον πυρήνα της f λύνουμε το σύστημα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss βρίσκουμε ότι οι λύσεις είναι $(x,y,z) = \left(\frac{-4}{7}z, \frac{-5}{7}z, z\right)$, όπου $z \in \mathbb{R}$. Άρα μια βάση του πυρήνα αποτελεί το $\left(\frac{-4}{7}, \frac{-5}{7}, 1\right)$ και η διάσταση είναι 1.

Η διάσταση της εικόνας είναι $\dim imf = \dim \mathbb{R}^3 - \dim\ker f = 3-1 = 2$. Μια βάση αποτελούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα της f, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, π.χ. οι πρώτες δύο.

γ) Σύμφωνα με την Πρόταση 3, η δοσμένη απεικόνιση δεν είναι 1-1 αφού ο πυρήνας της δεν περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο, (0,0,0), όπως είδαμε πριν. Επίσης δεν είναι επί αφού είδαμε ότι $\dim imf = 2 \neq 3$ και άρα η εικόνα imf είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 11

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2x+8y, kx+4y)$*, όπου* $k \in \mathbb{R}$*.*
Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες η f *είναι αντιστρέψιμη και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί η αντίστροφη συνάρτηση.*

Λύση

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 3, βλέπουμε ότι ο πίνακας $\left(f:\hat{e},\hat{e}\right)$ της f ως προς τη συνήθη διατεταγμένη βάση $\hat{e}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι $\left(f:\hat{e},\hat{e}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ k & 4 \end{pmatrix}$. Αυτός είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ k & 4 \end{pmatrix} = 8-8k \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $k \neq 1$.

Έστω ότι $k \neq 1$. Θα βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση με δυο τρόπους.

1ος τρόπος

Από το Θεώρημα 6 3), έχουμε $\left(f^{-1} : \hat{e}, \hat{e}\right) = \left(f : \hat{e}, \hat{e}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ k & 4 \end{pmatrix}^{-1}$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ k & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8-8k}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -k & 2 \end{pmatrix}$. Συνεπώς ξέρουμε τον πίνακα της f^{-1} ως προς κάποιες βάσεις. Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1}, εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 4. Από τη σχέση $\left[f^{-1}(x,y)\right]_{\hat{e}} = \left(f^{-1} : \hat{e}, \hat{e}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ βρίσκουμε

$$\left[f^{-1}(x,y)\right]_{\hat{e}} = \frac{1}{8-8k}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -k & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4x-8y}{8-8k} \\ \dfrac{-kx+2y}{8-8k} \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{4x-8y}{8-8k}, \frac{-kx+2y}{8-8k}\right).$$

2ος τρόπος

Έστω $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Έχουμε $f(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow (x,y) = f^{-1}(X,Y)$. Θα λύσουμε ως προς x, y το σύστημα $f(x,y) = (X,Y)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = (X,Y) \Rightarrow \\
&(2x+8y, kx+4y) = (X,Y) \Rightarrow \\
&\begin{cases} 2x+8y = X \\ kx+4y = Y \end{cases} \Rightarrow \\
&\begin{cases} x = \dfrac{4X-8Y}{8-8k} \\ y = \dfrac{-kX+2Y}{8-8k}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(X,Y) = \left(\dfrac{4X-8Y}{8-8k}, \dfrac{-kX+2Y}{8-8k}\right)$.

Άσκηση 12

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(x+2y+kz, x+y+3z, y+z),$ *όπου* $k\in\mathbb{R}$. *Εξετάστε για ποιες τιμές του k έχουμε*

1. $(1,0,0)\in imf$.
2. $(7,3,4)\in imf$
3. $\dim imf = 3$
4. $\dim imf = 2$
5. $\dim imf = 1$

Λύση

1. και 2. Έστω $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Θα απαντήσουμε στα 1 και 2 μαζί εξετάζοντας για ποια k έχουμε $(a,b,c)\in imf$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)=(a,b,c)\Leftrightarrow\\&(x+2y+kz, x+y+3z, y+z)=(a,b,c)\Leftrightarrow\\&\begin{cases}x+2y+kz=a\\x+y+3z=b\\y+z=c.\end{cases}\end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix}1&2&k&a\\1&1&3&b\\0&1&1&c\end{pmatrix}.$$

Μετά από δυο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε τη μορφή

$$\begin{pmatrix}1&2&k&a\\0&-1&3-k&b-a\\0&0&4-k&c+b-a\end{pmatrix}$$

- Αν έχουμε $4-k=0$ και $c+b-a\neq 0$, τότε από την τελευταία γραμμή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Επομένως $(a,b,c)\notin imf$.
- Αν έχουμε $4-k=0$ και $c+b-a=0$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό. Επομένως $(a,b,c)\in imf$.
- Αν έχουμε $4-k\neq 0$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό για κάθε a,b,c. Επομένως $(a,b,c)\in imf$.

Συνεπώς για το $(a,b,c)=(1,0,0)$ ισχύει ότι

$$(1,0,0)\in imf \Leftrightarrow k\neq 4$$

και για το $(a,b,c)=(7,3,4)$ ισχύει ότι

$$(7,3,4)\in imf \text{ για κάθε } k.$$

3. Από τη διερεύνηση του συστήματος που πραγματοποιήσαμε πριν, συμπεραίνουμε ότι η f είναι επί αν και μόνο αν $k\neq 4$. Άρα $\dim imf=3\Leftrightarrow k\neq 4$.

4. Έστω $k=4$. Ισχυριζόμαστε ότι $\dim\ker f=2$. Πράγματι έχουμε $\dim imf<3$, αφού $imf\subseteq\mathbb{R}^3, imf\neq\mathbb{R}^3$. Επίσης τα στοιχεία $f(1,0,0)=(1,1,0), f(0,1,0)=(2,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία της εικόνας. Άρα $\dim imf\geq 2$. Συνεπώς $\dim imf=2$.

5. Από τις περιπτώσεις 3 και 4 βλέπουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του k τέτοια ώστε $\dim imf=1$.

Άσκηση 13

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V=3$ και $\{v_1,v_2,v_3\}$ μια βάση του. Έστω $f:V\to V$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις $f(v_1)=v_1-v_2, f(v_2)=v_1+v_3, f(v_3)=v_2+v_3$. Να βρεθούν οι διαστάσεις των $imf,\ker f$.

Λύση

Για την εικόνα θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 7. Εύκολα επαληθεύουμε ότι ο πίνακας της f ως προς τη δοσμένη βάση είναι ο $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. Για να βρούμε την τάξη του, τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή. Μετά από δυο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Άρα η τάξη του A είναι 2 και $\dim imf=2$.

Για τον πυρήνα έχουμε σύμφωνα με το Θεώρημα 2

$$\dim\ker f=3-\dim imf=3-2=1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικές.

$f(x,y) = x^2 + y^2$
$g(x,y) = x + y + 1$
$h(x,y) = 2x - 3y.$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. **Απάντηση** Μόνο η h είναι γραμμική.

Άσκηση 2

Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε

$f(2,1) = (1,2,1), f(1,1) = (-1,0,1)$. Να υπολογιστεί η τιμή $f(x,y)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 2. **Απάντηση** $f(x,y) = (2x - 3y, 2x - 2y, y)$

Άσκηση 3

- Εξετάστε αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f(1,3) = (1,1), f(2,5) = (3,3)$.
- Εξετάστε αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $g(1,3) = (1,1), g(2,6) = (3,3)$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 3. **Απάντηση** Ναι για την *f*, όχι για τη g.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$. Για καθέναν από τους διανυσματικούς χώρους $\ker f, imf$ να βρεθεί η διάσταση και μια βάση του.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** $\dim\ker f = 1, \dim imf = 2$ και βάσεις είναι τα σύνολα $\{2,-1,-1\}$, $\{(1,0,1),(0,1,-2)\}$. αντίστοιχα.

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$\ker f = \langle (1,1,1),(2,1,1) \rangle, imf = \langle (1,1) \rangle$.

Υπόδειξη Επεκτείνατε το σύνολο $\{(1,1,1),(2,1,1)\}$ σε μια βάση $\{(1,1,1),(2,1,1),v_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ για κατάλληλο v_3 και μετά ορίσατε την f από τις σχέσεις

$f(1,1,1)=(0,0), f(2,1,1)=(0,0), f(v_3)=(1,1)$. Βλ. Λυμένη Άσκηση 4.

Άσκηση 6

Όλες οι επόμενες προτάσεις δεν αληθεύουν. Εξηγήστε γιατί.

1. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε
   $\ker f = \langle (1,2) \rangle, imf = \langle (1,2),(2,1) \rangle$.
2. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, η οποία είναι επί.
3. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, η οποία είναι 1-1.
4. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, η οποία είναι επί και όχι 1-1.

Υπόδειξη Βλ. Θεώρημα 2. Ειδικά για το 4 βλ. Πόρισμα 5.

Άσκηση 7

Έστω $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), f(A) = XA.$$

Για καθέναν από τους διανυσματικούς χώρους $\ker f, imf$ να βρεθεί η διάσταση και μια βάση τους.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9. **Απάντηση** $\dim\ker f = \dim imf = 2$ και βάσεις είναι $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 8

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (2x+3y, kx+6y)$, όπου $k \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες η f είναι αντιστρέψιμη και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί η αντίστροφη συνάρτηση.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 11. **Απάντηση** $k \neq 4$.

$$f^{-1}(x,y)=\left(\frac{6x-3y}{12-3k},\frac{-kx+2y}{12-3k}\right)$$

Άσκηση 9

1. Εξετάστε αν οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι.
2. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ με τον A πίνακα αντιστρέψιμο. Αποδείξτε ότι αν ο B είναι όμοιος με τον A τότε ο B είναι αντιστρέψιμος.
3. Εξετάστε αν αληθεύει το αντίστροφο του 2.

Υπόδειξη 1. Βλ το παράδειγμα μετά τον Ορισμό 4. 2. Γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας. 3. Αν το 3 ήταν σωστό, τότε όλοι οι αντιστρέψιμοι πίνακες θα ήταν όμοιοι με τον ταυτοτικό.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(x+2y+kz, x+y+3z, y+z),$$

όπου $k \in \mathbb{R}$. Εξετάστε για ποιες τιμές του k έχουμε

- $(1,0,1) \in imf$.
- $\dim imf \neq 3$
- $\dim imf = 1$

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 12. **Απάντηση** $(1,0,1) \in imf$ για κάθε k.

$\dim imf \neq 3 \Leftrightarrow k=4$. Δεν υπάρχει k με $\dim imf = 1$.

Κεφάλαιο 9

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Έστω $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση όπου ο V είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$ του V τέτοια ώστε υπάρχουν $\lambda_i\in\mathbb{F}$ με $f(v_i)=\lambda_i v_i$. Τότε ο αντίστοιχος πίνακας της f είναι διαγώνιος $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. Από αυτόν μπορούμε να συνάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την f, όπως για παράδειγμα, ότι η διάσταση του πυρήνα της είναι το πλήθος των λ_i που είναι ίσα με μηδέν. Επιπλέον ξέρουμε ότι οι πράξεις με διαγώνιους πίνακες είναι απλές και επομένως έχουμε ένα εύχρηστο εργαλείο για τη μελέτη της f.

Όμως δεν αληθεύει ότι για κάθε f υπάρχει μια βάση με τις παραπάνω ιδιότητες. Στην περίπτωση που υπάρχει $v\in V, v\neq 0$, τέτοιο ώστε $f(v)=\lambda v$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{F}$, θα λέμε ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή της f και v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα και στο επόμενο θα εξετάσουμε πότε υπάρχει μια βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στα παρακάτω, με V θα συμβολίζουμε ένα $\mathbb{F}-$ διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης n.

Ορισμός 1 (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα)

- *Έστω $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν υπάρχει μη μηδενικό $v\in V$ τέτοιο ώστε $f(v)=\lambda v$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{F}$, θα λέμε ότι το λ είναι μια **ιδιοτιμή** της f και το v είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** της f που αντιστοιχεί στη λ.*
- *Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$. Αν υπάρχει μη μηδενικό $X\in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε $AX=\lambda X$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{F}$, θα λέμε ότι το λ είναι μια **ιδιοτιμή** του πίνακα A και το X είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στη λ.*

Παραδείγματα

1. Για τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+2y,3x+2y)$ εύκολα επαληθεύεται ότι $f(2,3)=4(2,3)$. Άρα μια ιδιοτιμή της f είναι το 4 και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $(2,3)$. Επίσης κάθε μη μηδενικό διάνυσμα της μορφής $(2x,3x)$, όπου $x\in\mathbb{R}$, είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=4$.
2. Για τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ εύκολα επαληθεύεται ότι $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$. Άρα μια ιδιοτιμή του A είναι το -1 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $X=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$.
3. Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y)=(-y,x)$, δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα. Πράγματι, αν $f(x,y)=\lambda(x,y)$, τότε $(-y,x)=\lambda(x,y)$, οπότε έχουμε το σύστημα $\begin{cases}\lambda x+y=0\\ -x+\lambda y=0.\end{cases}$ Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι $\det\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1\neq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση $(x,y)=(0,0)$. Αλλά από τον ορισμό, ιδιοδιανύσματα είναι μη μηδενικά διανύσματα. Άρα η f δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα.
4. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(x,y)=(-y,x)$. Παρατηρούμε ότι ο ‘τύπος’ $f(x,y)=(-y,x)$ συμπίπτει με το προηγούμενο παράδειγμα. Θα αναζητήσουμε μιγαδικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Όπως πριν έχουμε
$$f(x,y)=\lambda(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda x+y=0\\ -x+\lambda y=0.\end{cases}$$
Το σύστημα αυτό έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν
$\det\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1=0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda=\pm i$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι $\pm i$.

Για $\lambda = i$, το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ -x + \lambda y = 0 \end{cases}$ έχει λύσεις $(x, y) = (iy, y),\ y \in \mathbb{C}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = i$ είναι τα (iy, y), όπου $y \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $(-iy, y)$, όπου $y \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Ορισμός 2 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

- *Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A είναι το πολυώνυμο* $\chi_A(x) = \det(xI - A)$.
- *Έστω $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της f είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\alpha})$, όπου $\widehat{\alpha}$ είναι μια διατεταγμένη βάση[1] του V.*

Παράδειγμα

1. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} =$$
$$(x-2)(x-1) - (-3)(-1) = x^2 - 3x - 1.$$

2. Για τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$ εύκολα επαληθεύεται ότι $(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, όπου $\widehat{\alpha}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$.

   Είδαμε πριν ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτού του πίνακα είναι το $x^2 - 3x - 1$. Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι το $\chi_f(x) = x^2 - 3x - 1$.

Συμβολισμός: Έστω ότι $g(x) = g_m x^m + \ldots g_1 x + g_0 \in \mathbb{F}[x]$ είναι ένα πολυώνυμο.

[1] Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή της διατεταγμένης βάσης. Δηλαδή, αποδεικνύεται ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

- Αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας πίνακας, τότε με $g(A)$ συμβολίζουμε τον πίνακα $g_m A^m + ... g_1 A + g_0 I$.
- Αν $f : V \to V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε με $g(f)$ συμβολίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $g_m f^m + ... g_1 f + g_0 I_V$.

Ορισμός 3 (ελάχιστο πολυώνυμο)

*Το **ελάχιστο πολυώνυμο** ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ (αντίστοιχα μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$) είναι το ελαχίστου βαθμού μονικό[2] πολυώνυμο[3] $g(x)$ με συντελεστές από το $\mathbb{F}$, τέτοιο ώστε $g(A) = 0$ (αντίστοιχα $g(f) = 0$). Συμβολίζεται δε με $m_A(x)$ (αντίστοιχα $m_f(x)$).*

Παραδείγματα

1. Αν $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $m_I(x) = x - 1$.
2. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, τότε $m_A(x) = (x-1)(x-2)$. Πράγματι,
   - εύκολα επαληθεύουμε ότι $(A - I)(A - 2I) = 0$. Άρα ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου του A είναι το πολύ 2.
   - Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $g(x) = ax + b$, τέτοιο ώστε $g(A) = 0$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $$aA + bI = 0 \Rightarrow A = -\frac{b}{a} I = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 1, -\frac{b}{a} = 2,$$ που είναι άτοπο.
   - Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μονικό, συμπεραίνουμε ότι αυτό είναι το $(x-1)(x-2)$.

---

[2] Ένα πολυώνυμο λέγεται μονικό αν ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του είναι το 1.

[3] Αποδεικνύεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο πίνακα ή γραμμικής απεικόνισης υπάρχει και είναι μοναδικό.

Ορισμός 4 (ιδιόχωρος που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή)

- *Έστω* $f:V\to V$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν το* λ *είναι μια ιδιοτιμή της f, τότε το σύνολο* $V(\lambda)=\ker\left(f-1_V\right)=\left\{v\in V \middle| f(v)=\lambda v\right\}$ *είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του V που λέγεται ο **ιδιόχωρος** της* f *που αντιστοιχεί στη λ.*
- *Έστω* $A\in M_n(\mathbb{F})$. *Αν το* λ *είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε το σύνολο* $V(\lambda)=\left\{X\in M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \middle| AX=\lambda X\right\}$ *είναι ένας μη τετριμμένος υπόχωρος του* $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ *που λέγεται ο **ιδιόχωρος** που αντιστοιχεί στη λ.*

Σημείωση Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα

Είδαμε πριν ότι μια ιδιοτιμή του $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ είναι το -1. Λύνοντας το σύστημα $AX=-X$, δηλαδή το $(A+I)X=0$ βρίσκουμε ότι $X=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

Άρα $V(-1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Πρόταση 1

- *Έστω* $f:V\to V$ *μια γραμμική απεικόνιση και* $\lambda\in\mathbb{F}$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*
  - *Το λ είναι ιδιοτιμή της f*
  - $\ker\left(f-\lambda 1_V\right)\neq 0$.
- *Έστω* $A\in M_n(\mathbb{F})$ *και* $\lambda\in\mathbb{F}$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*
  - *Το λ είναι ιδιοτιμή του A*

- *Το σύστημα* $(A-\lambda I)X=0$ *έχει μη μηδενική λύση*
- $\det(A-\lambda I)=0$.

Παρατήρηση Στην προηγούμενη πρόταση η συνθήκη ‘*Το σύστημα* $(A-\lambda I)X=0$ *έχει μη μηδενική λύση’* είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ‘*Το σύστημα* $(\lambda I-A)X=0$ *έχει μη μηδενική λύση’* γιατί $A-\lambda I=-(\lambda I-A)$. Άρα στον προσδιορισμό ιδιοδιανυσμάτων δεν έχει σημασία ποιο από τα δυο συστήματα χρησιμοποιούμε. Επίσης, επειδή $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det(\lambda I-A)=0$, στον προσδιορισμό ιδιοτιμών δεν έχει σημασία ποια από τα δυο εξισώσεις χρησιμοποιούμε.

Παράδειγμα

Από την προηγούμενη Πρόταση, βλέπουμε ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πίνακα ή μιας γραμμικής απεικόνισης είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα ή της γραμμικής απεικόνισης. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ λύνουμε την εξίσωση $\det(A-\lambda I)=0$. Έχουμε

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}=$$
$$(2-\lambda)\big((1-\lambda)(4-\lambda)+2\big)=(2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι 2,3.

Πρόταση 2

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (και τις ίδιες ιδιοτιμές).

Πρόταση 3

Οι ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $f:V\to V$ *είναι οι ιδιοτιμές κάθε πίνακα που την αναπαριστά, δηλαδή κάθε πίνακα της μορφής* $\left(f:\hat{\alpha},\hat{\alpha}\right)$, *όπου* $\hat{\alpha}$ *είναι μια διατεταγμένη βάση του V.*

Πρόταση 4 (πολυώνυμα πινάκων και ιδιοτιμές)

- *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A και X είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε το* $f(\lambda)$ *είναι μια ιδιοτιμή του* $f(A)$ *και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το X.*
- *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *και* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Αν* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές του A (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες) , τότε οι ιδιοτιμές του* $f(A)$ *είναι οι* $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

Για παράδειγμα, αν ξέρουμε ότι οι $\lambda = 2, 3$ είναι δυο από τις ιδιοτιμές ενός πίνακα A, τότε οι $2^m, 3^m$ είναι ιδιοτιμές του A^m, m θετικός ακέραιος.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Πρόταση 5 (ανάστροφοι πίνακαες)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A^t.

Πρόταση 6 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο τριγωνικού πίνακα)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Τότε*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι* $\chi_A(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x_n - \lambda_n)$
2. *οι ιδιοτιμές του A είναι οι* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Μια χρήσιμη γενίκευση της προηγούμενης Πρότασης είναι η εξής.

Πρόταση 7

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & * & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

όπου $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}), n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. *Τότε* $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x) \ldots \chi_{A_k}(x)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & b \\ 1 & 2 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Έστω $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε $A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Άρα $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\chi_{A_1}(x) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3),$$

$$\chi_{A_2}(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x-4 \end{pmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Άρα $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1,2,3.

Πρόταση 8 (χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ορίζουσα και ίχνος)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Τότε

$$a_0 = (-1)^n \det A \quad \text{και} \quad a_{n-1} = -TrA$$

όπου TrA είναι το ίχνος του Α, δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του Α.

Πόρισμα 9 (ιδιοτιμές, ορίζουσα και ίχνος)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Τότε

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \quad \text{και} \quad TrA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in M_4(\mathbb{C})$ αν γνωρίζουμε ότι το $\chi_A(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, μια ιδιοτιμή είναι το $\lambda_1 = 2-3i$, $\det A = -13$ και $TrA = 4$.

Λύση

Αφού το $2-3i$ είναι μια ιδιοτιμή και το $\chi_A(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε και το $\lambda_2 = 2+3i$ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$. Έστω λ_3, λ_4 οι άλλες ιδιοτιμές του Α. Τότε από το προηγούμενο Πόρισμα έχουμε τις σχέσεις

$$-13 = (2-3i)(2+3i)\lambda_3\lambda_4, \quad 4 = (2-3i) + (2+3i) + \lambda_3 + \lambda_4.$$

δηλαδή $\lambda_3\lambda_4 = -1, \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Άρα $\lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$ (ή $\lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1$).

Πόρισμα 10 (αντιστρέψιμοι πίνακες)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Ο Α είναι αντιστρέψιμος.*
2. *Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του Α είναι μη μηδενικός.*
3. *Το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του Α.*

Πρόταση 11

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι είναι δυνατό δυο πίνακες να έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο χωρίς να είναι όμοιοι. Για παράδειγμα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και του $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι το x^2 και οι πίνακες αυτοί δεν είναι όμοιοι.

Θεώρημα 12 (Cayley-Hamilton)

- *Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή αν* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, *τότε*

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0.$$

- *Κάθε γραμμική απεικόνιση* $f: V \to V$ *μηδενίζει το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο.*

ΙΔΙΟΧΩΡΟΙ

Θεώρημα 13

Έστω ότι το λ *είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα ή μιας γραμμικής απεικόνισης και έστω* $m(\lambda)$ *ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε το* $(x-\lambda)^{m(\lambda)}$ *διαιρεί το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Τότε* $\dim V(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Για παράδειγμα αν $\chi_A(x) = (x-1)^3(x-2)^5$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A, τότε $\dim V(1) \leq 3, \dim V(2) \leq 5$

Πρόταση 14 (διαστάσεις ιδιόχωρων)

- *Έστω* $f: V \to V$ *μια γραμμική απεικόνιση. Αν το* $\lambda \in \mathbb{F}$ *είναι ιδιοτιμή της f τότε* $\dim V(\lambda) = \dim \ker(f - \lambda 1_V)$.
- *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Αν το λ είναι ιδιοτιμή του Α τότε* $\dim V(\lambda) = n - r(A - \lambda I)$, *όπου* $r(A-\lambda I)$ *είναι η τάξη του πίνακα* $A - \lambda I$.

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Θεώρημα 15 (ιδιότητες του ελάχιστου πολυώνυμου)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $m_A(x)$ *το ελάχιστο πολυώνυμο του Α. Τότε ισχύουν τα εξής.*

1. *Το* $m_A(x)$ *διαιρεί κάθε πολυώνυμο του* $\mathbb{F}[x]$ *που μηδενίζεται από τον Α.*
2. *Το* $m_A(x)$ *διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α.*
3. *Το* $m_A(x)$ *έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α.*

Για παράδειγμα, αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα είναι το $(x-1)^2(x-3)$ τότε οι δυνατές περιπτώσεις για το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $(x-1)^2(x-3), (x-1)(x-3)$ γιατί αυτό πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ισχύουν ανάλογες προτάσεις και για το ελάχιστο πολυώνυμο γραμμικής απεικόνισης.

Η επόμενη πρόταση είναι το ανάλογο της Πρότασης 7 για ελάχιστα πολυώνυμα.

Πρόταση 16

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & * & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},$$

όπου $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}), n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. *Τότε το* $m_A(x)$ *είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων* $m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \ldots, m_{A_k}(x)$.

Πρόταση 17

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

1. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}).$$

2. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x+2y,3x+2y).$$

Λύση

1. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A,

$$\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-1 & -2\\ -3 & x-2\end{pmatrix}=(x-1)(x-2)-(-2)(-3)=(x-4)(x+1).$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(x)$, βρίσκουμε ότι αυτές είναι $\lambda_1=4,\lambda_2=-1$. Για κάθε μια από αυτές θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνοντας το σύστημα $(A-\lambda I)X=0$ σύμφωνα με τον Ορισμό 1.

Για $\lambda_1=4$:

$$(A-\lambda I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-4 & 2\\ 3 & 2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-3x+2y\\ 3x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x+2y=0\\ 3x-2y=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y)=(x,\frac{3}{2}x),x\in\mathbb{R}.$ Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_1=4$ είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix},x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Για $\lambda_2=-1$:

$$(A-\lambda I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-(-1) & 2\\ 3 & 2-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2x+2y\\ 3x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\ 3x+3y=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y)=(x,-x),x\in\mathbb{R}.$ Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2=-1$ είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix},x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

2. Εύκολα βλέπουμε ότι ο πίνακας της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο A του προηγούμενου ερωτήματος. Συνεπώς οι ιδιοτιμές της f είναι οι ιδιοτιμές του A (βλ. Πρόταση 3), δηλαδή οι $4,-1$. Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα της f προσδιορίζοντας τα μη μηδενικά v από τη σχέση $f(v)=\lambda v$. Έστω $v=(x,y)$.

Για $\lambda_1=4$:

$$f(v)=\lambda v \Rightarrow (x+2y,3x+2y)=4(x,y)\Rightarrow$$
$$\left(-3x+2y,3x-2y\right)=(0,0)\Rightarrow$$
$$\begin{cases}-3x+2y=0\\ 3x-2y=0.\end{cases}$$

Το σύστημα αυτό προέκυψε και πριν, οπότε $(x,y)=(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_1=4$ είναι τα $(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Για $\lambda_2=-1$:

$$f(v)=\lambda v \Rightarrow (x+2y,3x+2y)=-(x,y)\Rightarrow$$
$$\left(2x+2y,3x+3y\right)=(0,0)\Rightarrow$$
$$\begin{cases}2x+2y=0\\ 3x+3y=0.\end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2=-1$ είναι τα $(x,-x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Προσοχή Στην άσκηση αυτή είδαμε ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4 είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$, και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι τα $(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Δηλαδή έχουμε ουσιαστικά **τα ίδια ιδιοδιανύσματα** μιας γραμμικής απεικόνισης f και ενός πίνακα $(f:\widehat{\alpha},\widehat{\alpha})$ που την αναπαριστά. Αυτό το φαινόμενο **δεν** είναι γενικό. Συγκεκριμένα, αν είχαμε μια διατεταγμένη βάση $\widehat{\beta}$ του $\mathbb{R}^n$ διαφορετική από τη συνήθη, τότε τα ιδιοδιανύσματα του νέου πίνακα $(f:\widehat{\beta},\widehat{\beta})$ θα ήταν γενικά διαφορετικά από αυτά της f. Βλ. Λυμένη Άσκηση 5. Από την άλλη μεριά οι ιδιοτιμές παραμένουν ίδιες σύμφωνα με την Πρόταση 3.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ *και*

$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *όταν αυτοί θεωρηθούν στοιχεία του*

1. $M_2(\mathbb{R})$
2. $M_2(\mathbb{C})$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}=x^2+1$ και

αυτό του B είναι $\det(xI-B)=\det\begin{pmatrix}x & 0 & -1\\ 1 & x & 1\\ 0 & -1 & x-1\end{pmatrix}=(x-1)(x^2+1).$

1. Θεωρούμε τα A και B ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$. Δηλαδή θα αναζητήσουμε πραγματικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

   Επειδή το x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες, ο A δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα.

   Επειδή το $(x-1)(x^2+1)$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ο B έχει μόνο μια ιδιοτιμή, τη $\lambda=1$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε το σύστημα $(B-I)X=0$ και παίρνουμε τις μη μηδενικές λύσεις. Έχουμε

$$(A-I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=0\\ x-y-z=0\\ y=0.\end{cases}$$

   Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(y,0,y),$ όπου $y\in\mathbb{R}$, και άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $X=\begin{pmatrix}y\\ 0\\ y\end{pmatrix}$, όπου $y\in\mathbb{R}-\{0\}$.

2. Θεωρούμε τα A και B ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{C})$. Δηλαδή θα αναζητήσουμε μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

   Οι ιδιοτιμές του A είναι οι μιγαδικές ρίζες του x^2+1, δηλαδή $\pm i$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε τα δυο συστήματα

$(A-iI)X=0, (A+iI)X=0$ και παίρνουμε τις μη μηδενικές λύσεις. Για το πρώτο σύστημα έχουμε

$$(A-iI)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -ix+y \\ -x-iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix+y=0 \\ -x-iy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y)=(x,ix), x\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή i είναι τα

$X=\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}-\{0\}$.

Για το δεύτερο σύστημα έχουμε

$$(A+iI)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ix+y \\ -x+iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ix+y=0 \\ -x+iy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y)=(x,-ix), x\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $-i$ είναι τα

$X=\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}-\{0\}$.

Για τον πίνακα *B*, οι ιδιοτιμές είναι οι μιγαδικές ρίζες του $(x-1)(x^2+1)$, δηλαδή είναι οι $1, i, -i$. Λύνοντας όπως πριν τα αντίστοιχα συστήματα

$$(A-I)X=0,\ (A-iI)X=0,\ (A+iI)=0,$$

βρίσκουμε ότι: στην ιδιοτιμή $\lambda=1$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $X=\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$,

όπου $y\in\mathbb{C}-\{0\}$, στη $\lambda=i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $X=\begin{pmatrix} -z \\ (1+i)z \\ -iz \end{pmatrix}$, όπου $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, και στη $\lambda = -i$ αντιστοιχούν τα $X = \begin{pmatrix} -z \\ (1-i)z \\ iz \end{pmatrix}$, όπου $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι δυνατές ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις

1. $f^2 = 1_V$
2. $f^2 = f$
3. $f^2 = 0$

Λύση

Έστω ότι υπάρχει μια ιδιοτιμή λ της f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v. Τότε $f(v) = \lambda v, v \neq 0$. Επομένως $f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$.

1. $f^2 = 1_V \Rightarrow f^2(v) = v \Rightarrow \lambda^2 v = v$. Αφού $v \neq 0$, έχουμε $\lambda^2 = 1$, οπότε $\lambda = \pm 1$.
2. $f^2 = f \Rightarrow f^2(v) = f(v) = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 v = \lambda v$. Αφού $v \neq 0$, έχουμε $\lambda^2 = \lambda$, οπότε $\lambda = 0,1$.
3. $f^2 = 0 \Rightarrow f^2(v) = 0 \Rightarrow \lambda^2 v = 0$. Αφού $v \neq 0$, παίρνουμε $\lambda = 0$.

Άσκηση 4

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A*
2. *το ελάχιστο πολυώνυμο του A*
3. *οι ιδιοτιμές του A*
4. *τα ιδιοδιανύσματα του A*
5. *μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.*

Λύση

1. $\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{pmatrix}$. Θα είναι χρήσιμο για τα επόμενα υποερωτήματα να ξέρουμε τις ρίζες του $\chi_A(x)$. Για το λόγο αυτό αντί να υπολογίσουμε την ορίζουσα μηχανικά, επιδιώκουμε πρώτα κάποια παραγοντοποίηση. Προσθέτοντας τη δεύτερη στήλη στην τρίτη, παίρνουμε

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & x+2 \\ -6 & 6 & x+2 \end{pmatrix} =$$
$$(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για να είναι οι πράξεις πιο απλές, αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από τη δεύτερη και αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την τρίτη στήλη.

$$(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ 3 & x-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$(x+2)((x-1)^2 - 9) = (x+2)(x^2 - 2x - 8) =$$
$$(x+2)^2(x-4).$$

Άρα $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-4)$.

2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 15 ξέρουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ και έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Επειδή $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-4)$, συνάγουμε ότι υπάρχουν δυο δυνατές περιπτώσεις: είτε $m_A(x) = (x+2)(x-4)$ είτε $m_A(x) = (x+2)^2(x-4)$. Με πράξεις πινάκων επαληθεύεται ότι $(A+2I)(A-4I) = 0$. Άρα $m_A(x) = (x+2)(x-4)$.

3. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-4)$, δηλαδή οι $-2, 4$.

4. Για $\lambda = -2$: Το σύστημα $(\lambda I - A)X = 0$ είναι το

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+3y-3z=0 \\ -3x+3y-3z=0 \\ -6x+6y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y + z = 0.$$

Οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -2, είναι $V(-2)=\left\{\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, όπου τουλάχιστον ένα από τα y,z είναι μη μηδενικό.

Για $\lambda=4$: Το σύστημα $(\lambda I-A)X=0$ είναι το

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+3y-3z=0 \\ -3x+9y-3z=0 \\ -6x+6y \qquad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-z=0. \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4, είναι $V(4)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}$, όπου το z είναι μη μηδενικό.

5. Είδαμε πριν ότι $V(-2)=\left\{\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Δυο στοιχεία αυτού του χώρου είναι τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το $V(-2)$, επειδή $\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα αυτά συγκροτούν μια βάση του $V(-2)$.

Επειδή $V(4)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$, μια βάση αυτού αποτελεί το στοιχείο $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 5

1. *Αποδείξτε την [Πρόταση 2](#) δηλαδή ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές.*
2. *Στη συνέχεια δώστε ένα παράδειγμα δυο όμοιων πινάκων που έχουν διαφορετικά ιδιοδιανύσματα.*

Λύση

1. Έστω ότι $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in M_n(\mathbb{F})$ με $A = P^{-1}BP$. Θα δείξουμε ότι $\chi_A(x) = \chi_B(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det(xI - P^{-1}BP) = \\
&\det(xP^{-1}P - P^{-1}BP) = \det\left(P^{-1}(xI - B)P\right) = \\
&\det(P^{-1})\det(xI - B)\det P = (\det P)^{-1}\det(xI - B)\det P = \\
&\det(xI - B) = \chi_B(x).
\end{aligned}$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και έχουμε $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, οι A,B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

2. Από την ισότητα πινάκων $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ έχουμε ότι οι $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι. Το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πρώτου γιατί $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, αλλά δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του δεύτερου αφού $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ δεν είναι πολλαπλάσιο του $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

1. *Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A.*
2. *Για τις τιμές του a που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίστε τη διάσταση του ιδιόχωρου που περιέχει το X.*

Λύση

1. Το X είναι ιδιοδιάνυσμα του A αν και μόνο αν $AX = \lambda X$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+2a \\ 0 \end{pmatrix}$. Το X είναι ιδιοδιάνυσμα αν και μόνο αν

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1+2a \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \\ 1+2a = 2\lambda \end{cases}$. Άρα έχουμε ότι $a = \frac{5}{2}$.

2. Έστω $a = \frac{5}{2}$. Είδαμε πριν ότι το X αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3. Ο ιδιόχωρος που περιέχει το X είναι ο $V(3)$. Από την Πρόταση 14 ξέρουμε ότι $\dim V(3) = 3 - r(A-3I)$. Έχουμε $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ξέρουμε ότι η τάξη ενός πίνακα αυτού με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην κλιμακωτή του μορφή. Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε τη κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και συνεπώς $r(A-3I) = 2$. Άρα έχουμε $\dim V(3) = 3 - 2 = 1$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Λύση

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών και στηλών. Έχουμε

$$\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{pmatrix} \overset{r_3\to r_3-2r_2}{=} \det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -2(x+1) & x+1 \end{pmatrix}=$$

$$(x+1)\det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_2\to c_2+2c_1}{=} (x+1)\det\begin{pmatrix} x-3 & -10 & -4 \\ -2 & x-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$(x+1)\big((x-3)(x-4)-20\big)=(x+1)^2(x-8).$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $-1,8$.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο -1: Το σύστημα $(A-(-1)I)X=0$ είναι το

$$\begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+2y+4z=0. \end{cases}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι αυτό ισοδυναμεί με την εξίσωση $2x+y+2z=0$. Άρα

$V(-1)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{-y-2z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Θέτοντας $y=1,z=0$ και $y=0,z=1$ παίρνουμε τα

στοιχεία $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Αυτά αποτελούν μια βάση του $V(-1)$, γιατί είναι γραμμικά

ανεξάρτητα και παράγουν το $V(-1)$ καθώς $\begin{pmatrix} \frac{-y-2z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 8: Το σύστημα $(A-8I)X=0$ είναι το

$$\begin{cases} -5x+2y+4z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \\ 4x+2y-5z=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} 5x-2y-4z=0 \\ \quad\quad 2y-z=0 \end{cases}.$$

Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(z,\frac{z}{2},z)$, $z\in\mathbb{R}$. Άρα $V(8)=\left\{\begin{pmatrix} z \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$. Μια βάση αποτελεί το στοιχείο $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 8

Υπολογίστε τις ιδιοτιμές των εξής πινάκων

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$

2. $B=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$.

Λύση

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε

$$xI-A=\begin{pmatrix} x-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & x-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & x-1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη του τελευταίου πίνακα κάθε άλλη στήλη, οπότε προκύπτει ο

$$-\begin{pmatrix} n-x & 1 & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\det(xI-A)=\det\left(-\begin{pmatrix} n-x & 1 & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}\right)=$$

$$(-1)^n(n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}.$$

Στον τελευταίο πίνακα αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από κάθε άλλη. Έτσι παίρνουμε

$$\det(xI-A)=(-1)^n(n-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{pmatrix}=(-1)^n(n-x)(-x)^{n-1},$$ γιατί ο

τελευταίος πίνακας είναι τριγωνικός. Τελικά $\det(xI-A)=-(n-x)x^{n-1}$ και οι ιδιοτιμές είναι $0,n.$ (Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή 0 έχει πολλαπλότητα $n-1$).

2. Μπορούμε να εφαρμόσουμε και εδώ τη μέθοδο που είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x)=bx+a-b$ και παρατηρούμε ότι $B=f(A)$. Από την Πρόταση 4, οι ιδιοτιμές του B είναι $f(0)=a-b, f(n)=bn+a-b=a+b(n-1)$.

Άσκηση 9

Να βρεθεί η διάσταση του (μοναδικού) ιδιόχωρου του

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F}).$$

Λύση

Ο A είναι άνω τριγωνικός και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι 1. Από την Πρόταση 6 υπάρχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda=1$ και το ζητούμενο είναι η διάσταση του $V(1)$. Από την Πρόταση 14 έχουμε $\dim V(1)=n-r(A-I)$. Παρατηρούμε ότι

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Αν $a=0$, τότε $r(A-I)=0$ και $\dim V(1)=n$.
- Αν $a\neq 0$, τότε $r(A-I)=n-1$ και $\dim V(1)=1$.

Άσκηση 10

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε $AX=X$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A. Στην πρώτη στήλη του πίνακα $A-I$ προσθέτουμε κάθε άλλη στήλη. Τότε προκύπτει ένας πίνακας του οποίου η πρώτη στήλη είναι μηδενική. Άρα $\det(A-I)=0$ και το 1 είναι ιδιοτιμή του A.

Άσκηση 11

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο για καθέναν από τους επόμενους πραγματικούς πίνακες

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Λύση

Έχουμε

$$\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x-4 & -2 \\ -1 & x-3 \end{pmatrix}=(x-2)(x-5)$$

$$\chi_B(x)=(x-1)(x-2)$$

γιατί ο B είναι τριγωνικός. Ο πίνακας C είναι της μορφής $C=\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Από την Πρόταση 7 συμπεραίνουμε ότι $\chi_C(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)=(x-1)(x-2)^2(x-5)$.

Για τα ελάχιστα πολυώνυμα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 15 που μας λέει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το χαρακτηριστικό και έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Άρα $m_A(x)=(x-2)(x-5), m_B(x)=(x-1)(x-2)$. Για το C εφαρμόζουμε την Πρόταση 16, οπότε $m_C(x)=\varepsilon\kappa\pi\{(x-2)(x-5),(x-1)(x-2)\}=(x-1)(x-2)(x-5)$.

Άσκηση 12

Έστω $A=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 1\\ -6 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. *Να υπολογιστεί ο πίνακας* $A^{2005}+A^{2006}$.

Λύση

Έχουμε $\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x+5 & -4 & -1\\ 6 & x-5 & -1\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}=x((x+5)(x-5)+24)=x^3-x$.

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^3-A=0$. Άρα

$$A^4=AA^3=AA=A^2,$$
$$A^5=AA^4=AA^2=A^3=A$$
$$A^6=AA^5=AA=A^2.$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $A^{2n}=A^2, A^{2n+1}=A$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Πράγματι, η πρώτη σχέση αληθεύει για $n=1$. Έστω ότι αυτή αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Τότε $A^{2(n+1)}=A^{2n}A^2=A^2A^2=AA^3=AA=A^2$. Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Έχουμε $A^{2005}+A^{2006}=A+A^2$. Με υπολογισμούς βρίσκουμε $A+A^2=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0\\ -6 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Άσκηση 13

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

1. *Απλοποιήστε την παράσταση* A^5-2A^4+3I.
2. *Εκφράστε τους πίνακες* A^{-1}, A^{-2} *ως πολυώνυμα του* A.
3. *Αποδείξτε ότι* $A^{2006}-2A^{2005}=A^2-2A$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & -3 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$(x-2)\big((x+2)(x-2)+3\big) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton έχουμε

$$\chi_A(A) = A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0\,.$$

1. Διαιρώντας το πολυώνυμο $x^5 - 2x^4 + 3$ με το $\chi_A(x)$ βρίσκουμε

   $x^5 - 2x^4 + 3 = \chi_A(x)(x^2+1) + x + 1$. Άρα

   $A^5 - 2A^4 + 3I = \chi_A(A)(A^2+1) + A + I = A + I.$

2. Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι μηδέν, ο A είναι αντιστρέψιμος (βλ. Πόρισμα 10). Πολλαπλασιάζοντας με τον A^{-1} παίρνουμε

$$A^2 - 2A - I + 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right).$$

   Πολλαπλασιάζοντας πάλι με τον A^{-1} παίρνουμε $A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + A^{-1}\right)$. Άρα

$$A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right)\right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I.$$

3. Η σχέση $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ γράφεται $A^3 - 2A^2 = A - 2I$, οπότε

$$\begin{aligned} &A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A \\ &A^5 - 2A^4 = A^3 - 2A^2 = A - 2I \\ &A^6 - 2A^5 = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A \\ &\text{κλπ} \end{aligned}$$

   Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο n ότι

$$A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A\,,\ n \geq 2.$$

   Πράγματι, η σχέση αληθεύει για $n = 2$. Έστω ότι αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Τότε

$$A^{2(n+1)} - 2A^{2(n+1)-1} = A^2\left(A^{2n} - 2A^{2n-1}\right) =$$

$$A^2\left(A^2 - 2A\right) = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A.$$

   Επομένως $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A$.

Άσκηση 14

Έστω $A \in M_3(\mathbb{C})$. *Αποδείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

1. $A^3 = 0.$
2. $\chi_A(x) = x^3$
3. $TrA = TrA^2 = TrA^3 = 0.$

Λύση

$1 \Rightarrow 2.$ Αν ισχύει $A^3 = 0$ και λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε το λ^3 είναι ιδιοτιμή του A^3 σύμφωνα με την Πρόταση 4. Αφού $A^3 = 0$, έχουμε $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$ δηλαδή κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με μηδέν. Άρα $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = x^3.$

$2 \Rightarrow 3.$ Από τη σχέση $\chi_A(x) = x^3$ συμπεραίνουμε ότι κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με μηδέν. Άρα κάθε ιδιοτιμή του A^m, m θετικός ακέραιος, είναι ίση με μηδέν. Τότε από την Πρόταση 9 έχουμε $TrA^m = 0, m = 1, 2, \ldots$

$3 \Rightarrow 1.$ Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του A. Θα δείξουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Από την υπόθεση και την Πρόταση 9 έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 0. \end{cases}$$

Έστω ότι κάποιο από τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι διάφορο του 0. Θα φτάσουμε σε άτοπο. Από τις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= 0 \\ \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \lambda_3^2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη μηδενική λύση. Άρα η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = 0.$ Αυτή είναι η γνωστή ορίζουσα Vandermonde για την οποία είδαμε στο Κεφάλαιο 4 ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Συνεπώς $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)=0,$ δηλαδή τα λ_i δεν είναι ανά δύο διάφορα. Αυτό είναι άτοπο. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_2=\lambda_3$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1{}^2+2\lambda_2{}^2=0\\ \lambda_1{}^3+2\lambda_2{}^3=0.\end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\lambda_1=-2\lambda_2$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνουμε $\left(-2\lambda_2\right)^2+2\lambda_2{}^2=0\Rightarrow 6\lambda_2^2=0\Rightarrow\lambda_2=0$. Άρα $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Αφού $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,$ παίρνουμε $\chi_A(x)=x^3$. Από το Θεώρημα των Cayley – Hamilton έχουμε $A^3=0$.

Άσκηση 15

Εξετάστε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις.

1. *Αν για ένα 3×3 πίνακα A ισχύει $A^4=0$, τότε $A^3=0$.*
2. *Αν για ένα 3×3 πίνακα A ισχύει $A^3=0$, τότε $A^2=0$.*
3. *Υπάρχει πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $(x-2)^2(x-5)$ και ελάχιστο το $(x-2)^2$.*
4. *Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το x^3-2x^2+x.*

Λύση

1. Αυτή αληθεύει, γιατί αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε από τη υπόθεση έχουμε $\lambda^4=0\Rightarrow\lambda=0$. Άρα κάθε ιδιοτιμή του A είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς $\chi_A(x)=x^3$. Τότε από το Θεώρημα των Cayley – Hamilton παίρνουμε $A^3=0$.
2. Αυτή δεν αληθεύει. Ένα αντιπαράδειγμα είναι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

   Έχουμε $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0, A^3=0$
3. Αυτή δεν αληθεύει λόγω του Θεωρήματος 15 3).
4. Αυτή δεν αληθεύει γιατί ο σταθερός όρος του δοσμένου πολυωνύμου είναι ίσος με 0 (βλ. Πόρισμα 10).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα

1. του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
2. της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y)=(4x+2y,3x+3y)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 1. **Απάντηση** 1. Οι ιδιοτιμές του A είναι 1,4 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(2x,-x), x\in\mathbb{R}-\{0\}, (x,x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. 2. Οι ιδιοτιμές της f είναι 1,6 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(2x,-3x), x\in\mathbb{R}-\{0\}, (x,x), x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Άσκηση 2

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των εξής πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), B=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Απάντηση $\chi_A(x)=x^2-8x+23,\ \chi_B(x)=x^3-3x^2+2x,\ \chi_C(x)=x^3-6x^2+5x-12$

Άσκηση 3

Έστω $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A
2. *το ελάχιστο πολυώνυμο του* A
3. *οι ιδιοτιμές του* A
4. *τα ιδιοδιανύσματα του* A
5. *μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του* A.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 4.

Απάντηση $\chi_A(x)=(x-2)^2(x-6),\ m_A(x)=(x-2)(x-6),\ \lambda=2,6,$ οι ιδιόχωροι είναι

$$V(2)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}, V(6)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$$ και αντίστοιχες βάσεις είναι

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και μια βάση για κάθε ιδιόχωρο της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(x-y,2x+3y+2z,x+y+2z).$

Υπόδειξη Οι ιδιοτιμές είναι $1,2,3.$ Βάσεις των $V(1),V(2),V(3)$ είναι αντίστοιχα τα $\{(1,0,-1)\},\{(2,-2,-1)\},\{(1,-2,-2)\}$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του

$$A=\begin{pmatrix}2&5&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&4&2&0\\0&0&3&5&0\\0&0&0&0&7\end{pmatrix}\in M_5(\mathbb{R}).$$

Υπόδειξη Εφαρμόστε την Πρόταση 7 και την Πρόταση 16.

Απάντηση $\chi_A(x)=(x-2)^3(x-7)^2, m_A(x)=(x-2)^2(x-7).$

Άσκηση 6

Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\a&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$ Να βρεθεί η διάσταση του ιδιόχωρου του A που περιέχει το X.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** $a=5, \dim V(-1)=1$.

Άσκηση 7

Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $A^{2005}-4A+I$.

Υπόδειξη Αφού υπολογίστε τις ιδιοτιμές του A, εφαρμόστε την Πρόταση 4.

Απάντηση $4, 5^{2005}-19$.

Άσκηση 8

Υπολογίστε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και τις διαστάσεις των ιδιόχωρων των πινάκων $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2-i & -3+i & 0 \\ 2+i & 3-i & 0 \\ -3+i & 5+5i & 6+8i \end{pmatrix}$

Απάντηση Οι ιδιοτιμές του A είναι 0, 6 και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $V(0)=\left\{x\begin{pmatrix} -1-2i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C}\right\}, V(6)=\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C}\right\}$. Οι ιδιοτμές του B είναι $0, 1-2i, 6+8i$ και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι

$$V(0)=\left\{x\begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C}\right\}, V(1-2i)=\left\{x\begin{pmatrix} 4+3i \\ -4-3i \\ 4 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C}\right\}, V(6+8i)=\left\{x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{C}\right\}.$$

Άσκηση 9

Ορίζουμε μια συνάρτηση $h: M_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}, h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a^2+d^2+2bc$. Αποδείξτε ότι αν οι πίνακες $A,B\in M_2(\mathbb{F})$ είναι όμοιοι, τότε $h(A)=h(B)$.

Υπόδειξη Παρατηρήστε ότι $h(A)=(TrA)^2-2\det A$. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2 και το Πόρισμα 9. (Σημείωση: Μια άλλη λύση πηγάζει από τη σχέση $h(A)=Tr(A^2)$).

Άσκηση 10

Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A^5 - 3A^4 - 2A^3 + 2A^2 + 4I$
2. Να βρεθεί ένα πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού 2 τέτοιο ώστε $A^{-1} = f(A)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 13. **Απάντηση** 1. $3A - I$ 2. $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$.

Κεφάλαιο 10
Διαγωνοποίηση

Μια από τις πιο απλές μορφές πινάκων είναι οι διαγώνιοι πίνακες. Θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό διάφορα κριτήρια που μας πληροφορούν αν ένας πίνακας ανάγεται σε διαγώνια μορφή και πως επιτυγχάνεται η αναγωγή αυτή. Επίσης θα ασχοληθούμε με εφαρμογές και με τη διαγωνοποίηση ειδικών κατηγοριών πινάκων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός 1 (διαγωνοποιήσιμος πίνακας)

*Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** υπεράνω του $\mathbb{F}$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.*

Παραδείγματα

1. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$, επειδή υπάρχει ο αντιστρέψιμος πίνακας $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{F}$.

Πράγματι, αν $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} cd & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο αν $d = c = 0$. Αλλά τότε $\det P = 0$, που είναι άτοπο αφού ο P είναι αντιστρέψιμος.

3. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Αυτός διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{C}$. Πράγματι εύκολα επαληθεύεται η σχέση $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, όπου $P = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - Ο A δε διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$. Πράγματι δεν υπάρχει πραγματικός πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
     (Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του παραδείγματος 2).

Ορισμός 2 (διαγωνοποιήσιμη γραμμική απεικόνιση)

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμη** αν για μια επιλογή μιας διατεταγμένης βάσης $\widehat{\alpha}$ του V ο αντίστοιχος πίνακας $\left(f : \widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}\right)$ της απεικόνισης είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (y, 0)$. Ως προς τη συνήθη βάση στον $\mathbb{R}^2$, ο αντίστοιχος πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Στο προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος και συνεπώς η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση f δεν είναι διαγωνοποιήσιμη.
2. Αν εξετάσουμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (4x - y, 2x + y)$, διαπιστώνουμε πως είναι διαγωνοποιήσιμη. Πράγματι, θεωρώντας την κανονική βάση στον $\mathbb{R}^2$, ο αντίστοιχος πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Για τον A υπάρχει κατάλληλος αντιστρέψιμος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ έτσι ώστε } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Σημείωση Στο εύλογο ερώτημα πως σκεφτήκαμε το συγκεκριμένο P θα απαντήσουμε παρακάτω.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗΣ

Συμβολισμός Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Τα ιδιοδιανύσματα του A είναι στοιχεία του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ δηλαδή είναι στοιχεία της μορφής $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Για συντομία θα γράφουμε $\mathbb{F}^{n\times 1}$ στη θέση του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Παρατηρούμε ότι ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ουσιαστικά ο $\mathbb{F}^n$ με τη μόνη διαφορά στο $\mathbb{F}^{n\times 1}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία με στήλες $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ενώ στο $\mathbb{F}^n$ χρησιμοποιούμε γραμμές $(x_1,\dots,x_n)$. Ακριβέστερα η απεικόνιση $f:\mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^n, f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1,\dots,x_n)$ είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Μέσω αυτού πολλές φορές θα ταυτίζουμε το $\mathbb{F}^{n\times 1}$ με το $\mathbb{F}^n$.

Θεώρημα 1 (κριτήριο διαγωνοποίησης μέσω ιδιοδιανυσμάτων)

Ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται αν και μόνο αν ο χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$ έχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Ισοδύναμα, ένας $n\times n$ πίνακας A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα Δ αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Στην πράξη μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο Θεώρημα με τον ακόλουθο τρόπο.

Αλγόριθμος διαγωνοποίησης του $A \in M_n(F)$

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και υπολογίζουμε τις ρίζες του, οπότε έχουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

2. Για κάθε ιδιοτιμή που υπολογίσαμε λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda I - A)X = 0$. Βρίσκουμε μία βάση του χώρου των λύσεων.
3. Θεωρούμε το σύνολο $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, το οποίο έχει για στοιχεία τα στοιχεία των βάσεων που υπολογίστηκαν στο βήμα 2.
   - Αν $m \neq n$, τότε ο A δε διαγωνοποιείται.
   - Αν $m = n$, τότε ο A διαγωνοποιείται. Ορίζοντας P να είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2, \dots, p_n$, έχουμε

$$\varDelta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_\nu \end{pmatrix},$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το p_i, $1 \leq i \leq n$.

Για συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής του αλγορίθμου αυτού παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 1, 2, 3.

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι να αποφανθούμε αν ένας πίνακας διαγωνοποιείται. Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το Θεώρημα 3 παρακάτω.

Πρόταση 2

Αν ένας $n \times n$ πίνακας A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Θεώρημα 3 (κριτήριο διαγωνοποίησης μέσω του ελαχίστου πολυωνύμου)

Ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ του πίνακα A είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_k)$$

όπου οι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ είναι ανά δυο διάφοροι.

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda)=\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-2&\lambda-2\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\0&-(\lambda-1)&\lambda-1\end{pmatrix}=(\lambda-1)\det\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=$$

$(\lambda-1)^2(\lambda-5)$.

και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_2=5$.

Στο Θεώρημα 15 του Κεφαλαίου 9 είδαμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Άρα οι πιθανές εκφράσεις του ελαχίστου πολυωνύμου είναι

$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5),\qquad m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=\chi_A(\lambda).$$

Ελέγχουμε αν ο $(A-I)(A-5I)$ είναι ίσος με 0. Έχουμε

$$(A-I)(A-5I)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2&1\\1&-2&1\\1&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Έτσι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)$, το οποίο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

Για άλλα παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 3 παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 4,5,6.

Το ανάλογο αποτέλεσμα της Πρότασης 2 για γραμμικές απεικονίσεις είναι το εξής.

Πρόταση 4

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε η f είναι διαγωνοποιήσιμη.

Παράδειγμα

Η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με

$f(x,y,z)=\left(2x+z,-x+4y-z,-x+2y\right)$, ως προς τη συνήθη βάση στον $\mathbb{R}^3$,

έχει αντίστοιχο πίνακα τον $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}=$$
$$(\lambda-2)((\lambda-4)\lambda+2)-(-2-\lambda+4)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

και έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ και $\lambda_3=3$. Επειδή αυτές είναι διακεκριμένες και το πλήθος τους είναι 3, η γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνοποιήσιμη.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το ανάλογο του Θεωρήματος 3 για γραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα 5

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n και $f:V\to V$ μια γραμμική απεικόνιση. Η f είναι διαγωνοποιήσιμη αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο της f είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Ας δούμε μερικές τυπικές εφαρμογές της διαγωνοποίησης πινάκων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1: Δυνάμεις πινάκων

Υποθέτουμε πως ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, συνεπώς μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $A=P\Delta P^{-1}$, με $\Delta=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ και $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ιδιοτιμές του πίνακα A. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A^k=\left(P\Delta P^{-1}\right)^k=\left(P\Delta P^{-1}\right)\left(P\Delta P^{-1}\right)\ldots\left(P\Delta P^{-1}\right)=$$
$$P\Delta^k P^{-1}=Pdiag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k)P^{-1}$$

δηλαδή,

$$A^k=Pdiag(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k)P^{-1} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον A^{2004}, όταν $A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$, σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{C}$. Έτσι από την (1) παίρνουμε $A^k=P\begin{pmatrix}(-i)^k & 0\\ 0 & i^k\end{pmatrix}P^{-1}$, οπότε με αντικατάσταση $k=2004$ έχουμε $A^{2004}=P\begin{pmatrix}(-i)^{2004} & 0\\ 0 & i^{2004}\end{pmatrix}P^{-1}=PIP^{-1}=I$.

Εφαρμογή 2: Ρίζες πινάκων

Ένας πίνακας $B\in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται *τετραγωνική ρίζα* του $A\in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει $B^2=A$.

Στην περίπτωση όπου ο πίνακας A διαγωνοποιείται και τα στοιχεία $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ του διαγώνιου πίνακα Δ είναι πραγματικοί αριθμοί και μη αρνητικοί, τότε οι πίνακες

$$B=Pdiag\left(\pm\sqrt{\lambda_1},\pm\sqrt{\lambda_2},\ldots,\pm\sqrt{\lambda_n}\right)P^{-1} \qquad (2)$$

είναι πραγματικοί και είναι τετραγωνικές ρίζες του A. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η (2) δίνει κάποιες τετραγωνικές ρίζες του A, όχι αναγκαστικά όλες.

Παράδειγμα

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τετραγωνικές ρίζες του πίνακα $A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A και να βρούμε τους B από την (2). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-10\lambda+9=(\lambda-1)(\lambda-9)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=9$.

Ο πίνακας A διαγωνοποιείται, (βλ. Πρόταση 2) και εύκολα επαληθεύουμε ότι οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι $V(1)=\left\{x\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$, $V(9)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$.

Συνεπώς οι πίνακες P, P^{-1} είναι $P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$ και $P^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, οπότε από την (2) οι τέσσερις πίνακες είναι $B_1=Pdiag(1,3)P^{-1}$, $B_2=Pdiag(1,-3)P^{-1}$, $B_3=Pdiag(-1,3)P^{-1}$, $B_4=Pdiag(-1,-3)P^{-1}$.

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται όχι μόνο για τετραγωνικές ρίζες πινάκων αλλά πιο γενικά για εξισώσεις της μορφής $B^m = A$, όπου ο A διαγωνοποιείται.

Εφαρμογή 3: Αναδρομικές ακολουθίες

Θεωρούμε την ακολουθία (a_n), $n = 1, 2, \ldots$, η οποία ορίζεται από τους όρους $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ και τον αναδρομικό τύπο $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n = 3, 4, \ldots$. Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n.

Προφανώς έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_{n-1} = a_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Αν εφαρμόσουμε την (3) διαδοχικά, για τις διάφορες τιμές των n, έχουμε

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-4} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία σχέση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον A^{n-2}, γιατί λόγω της ισότητας των πινάκων θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τον όρο a_n συναρτήσει των a_1, a_2 και n. Με βάση την προηγούμενη διαδικασία (δυνάμεις πινάκων) και τη σχέση (1), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, βρίσκουμε τις μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης $(\lambda_1 I - A)X = 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_2 = -x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2 = 3$, από την εξίσωση $(\lambda_2 I - A)X = 0$ έχουμε :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = 3x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ο πίνακας A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ οπότε $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Έτσι από την (1) έχουμε

$$A^{n-2} = P\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} + 3^{n-1} & -3(-1)^{n-2} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-2} & 3(-1)^{n-2} + 3^{n-2} \end{pmatrix},$$

οπότε από την ισότητα πινάκων της (3) προκύπτει

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{\left((-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_2 + \left(-3(-1)^{n-2} + 3^{n-1}\right)a_1\right\}.$$

Με αντικατάσταση των όρων $a_1 = 1$ και $a_2 = 4$, έχουμε $a_n = \dfrac{1}{4}\left((-1)^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-1}\right)$, $n \geq 3$.

Εφαρμογή 4: Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Αν συμβολίσουμε $x_i = x_i(t)$ τις παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις, $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και με $x_i' = x_i'(t)$ τις παραγώγους τους, είναι γνωστό ότι για $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $i \in \mathbb{N}$ η διαφορική εξίσωση $x_i' = \lambda_i x_i$ έχει λύσεις τις $x_i = ce^{\lambda_i t}$, $c \in \mathbb{R}$ (*).

Για $i = 1, 2, \ldots, n$ θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{matrix} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{matrix},$$

του οποίου μια λύση είναι η μηδενική. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα.

Προφανώς μπορούμε να γράψουμε το σύστημα με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση που ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, αν θεωρήσουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P, που κατασκευάζεται όπως ο αλγόριθμος διαγωνοποίησης περιγράφει, τότε έχουμε $A = P\Delta P^{-1}$, με $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω σύστημα

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P\Delta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \Delta P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

θέτοντας

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{**}$$

η (4) μετασχηματίζεται

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία ισότητα των πινάκων δίνει τις λύσεις των y_i για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, αφού από (*) έχουμε $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$, όπου $c_i \in \mathbb{R}$ σταθερές. Έτσι η γενική λύση του διαφορικού συστήματος, από τη σχέση της αντικατάστασης (**), είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1 + x_2 - 6x_3 \\ x_2' &= 2x_2 \\ x_3' &= 8x_1 - 7x_3 \end{aligned}$$

που με την «γλώσσα» των πινάκων γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 2$, οι οποίες είναι διακεκριμένες επομένως ο A διαγωνοποιείται (δες Πρόταση 2).

Εύκολα επαληθεύεται ότι: Για $\lambda_1 = -1$, ο ιδιόχωρος είναι $V(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$, για $\lambda_2 = 1$, ο ιδιόχωρος είναι $V(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ και για $\lambda_3 = 2$, ο ιδιόχωρος είναι $V(2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Ο αντιστρέψιμος πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ με αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα τον $P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Από την (5) έχουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + 9c_3 e^{2t} \\ 3c_3 e^{2t} \\ 4c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + 8c_3 e^{2t} \end{pmatrix},$$

όπου οι σταθερές $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ

Ορισμός 6

*Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** υπεράνω του $\mathbb{F}$ αν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $S^{-1}AS$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$, επειδή για τον αντιστρέψιμο πίνακα $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ισχύει

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπάρχουν πίνακες που δεν είναι τριγωνοποιήσιμοι υπεράνω του $\mathbb{R}$, όπως για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, όπως θα δούμε παρακάτω. Όμως υπεράνω του $\mathbb{C}$ κάθε $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι τριγωνοποιήσιμος σύμφωνα με το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7 (τριγωνοποίηση)

1. *Ένας $A \in M_n(\mathbb{F})$ τριγωνοποιείται αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.*
2. *Κάθε $A \in M_n(\mathbb{C})$ τριγωνοποιείται.*

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Αν αναφερόμαστε στο σύνολο $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν ιδιοτιμές, άρα ο A δεν τριγωνοποιείται, ενώ αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 7, ο A τριγωνοποιείται. Επιπλέον επειδή υπάρχουν δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, από την Πρόταση 2 έπεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΡΜΙΤΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Υπενθυμίζουμε τους εξής ορισμούς.

- Ένας πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **μοναδιαίος** αν ισχύει $UU^* = U^*U = I$, όπου $U^* = \overline{U^t}$, δηλαδή αν $U^{-1} = U^*$. Για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος .
- Ένας **ορθογώνιος** πίνακας είναι ένας μοναδιαίος πίνακας που έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή ένας P είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν $P^{-1} = P^t$. Για παράδειγμα ο $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος για κάθε πραγματικό θ.
- Ένας πίνακας $H \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **Ερμιτιανός** αν $H = H^*$. Για παράδειγμα, ο $\begin{pmatrix} 2 & 4-5i \\ 4+5i & 3 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός. Στην ειδική περίπτωση που $H \in M_n(\mathbb{R})$, τότε ο H είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν είναι συμμετρικός.

Τα επόμενο αποτέλεσμα μας πληροφορεί ότι κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου

Θεώρημα 8

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικός πίνακας. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι (πραγματικός) διαγώνιος.

Για μιγαδικούς πίνακες υπάρχει ανάλογο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 9

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας. Τότε υπάρχει μοναδιαίος πίνακας $U \in M_n(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε ο $U^{-1}AU$ είναι (πραγματικός) διαγώνιος.

Πρόταση 10

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές συμμετρικού (ή Ερμιτιανού) πίνακα είναι μεταξύ τους κάθετα.

Σχόλιο Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 8 και 9, στην περίπτωση ενός συμμετρικού (ή Ερμιτιανού) πίνακα A, μπορούμε να επιλέξουμε τον P (αντίστοιχα τον U) να είναι *ορθογώνιος* (αντίστοιχα, *μοναδιαίος)* πίνακας. Στην πράξη συνήθως κατασκευάζουμε ένα τέτοιο P (ή U) με τη μέθοδο Gram-Schmidt. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές ήδη είναι ανά δύο κάθετα (δες Πρόταση 10), εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt μόνο ανάμεσα στα ιδιοδανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=3$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $p_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}^t$, για την $\lambda_2=1$ ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $p_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}^t$ και για $\lambda_3=3$ ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $p_3=\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}^t$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 10 τα προηγούμενα τρία ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Συνεπώς αυτά θα μετατραπούν σε ορθοκανονικά αν διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του. Έτσι παίρνουμε $\hat{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}p_1$, $\hat{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}p_2$ και $\hat{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}p_3$. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Ένας ορθογώνιος πίνακας P που υλοποιεί τη διαγωνοποίηση του A είναι

$$P=\begin{pmatrix}\hat{p}_1&\hat{p}_2&\hat{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$ και ισχύει $P^tAP=diag(0,1,3)$.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας $A\in M_n(\mathbb{C})$ διαγωνοποιείται αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του χώρου $\mathbb{C}^{n\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Επειδή υπάρχουν πίνακες που δε διαγωνοποιούνται, ξέρουμε ότι υπάρχουν πίνακες A έτσι ώστε είναι αδύνατο ο χώρος $\mathbb{C}^{n\times 1}$ να παράγεται από ιδιοδιανύσματα του A. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα 'γενικευμένα ιδιοδιανύσματα' του A, που έχουν την ιδιότητα να παράγουν το $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *για κάθε* A.

Ορισμός 11

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Ένα μη μηδενικό* $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ *λέγεται* ***γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα*** *του* A *αν υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{C}$ *τέτοιο ώστε* $(A-\lambda I)^m X = 0$ *για κάποιο θετικό ακέραιο* m. *Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το* X *αντιστοιχεί στο* λ.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα δεν είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα. Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Τότε για $\lambda = 3$ εύκολα επαληθεύεται ότι $(A-\lambda I)^2 = 0$ και συνεπώς κάθε μη μηδενικό $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A. Από αυτά, μόνο τα $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.

Επισημαίνουμε ότι τα λ που εμφανίζονται στον Ορισμό 11 είναι οι ιδιοτιμές του A.

Θεώρημα 12

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Υπάρχει μια βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}^{n\times 1}$ *που αποτελείται από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του* A

Στην πράξη, για να υπολογίσουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ενός μιγαδικού πίνακα A μπορούμε να εργαστούμε ως εξής.

Τρόπος υπολογισμού γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A και τις πολλαπλότητές τους, δηλαδή παραγοντοποιούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων $(x-\lambda_1)^{m_1}...(x-\lambda_k)^{m_k}$. Στη συνέχεια επιλύουμε όλα τα συστήματα $\left(A-\lambda_i I\right)^{m_i} X=0$, για $i=1,...,k$.

Παράδειγμα

Έστω $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Υπολογίζοντας κατά τα γνωστά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο βρίσκουμε $\det(xI-A)=(x-2)^2(x-3)$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=2, \lambda_2=3$ και οι αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1=2, m_2=1$.

α) Λύνοντας το σύστημα $\left(A-\lambda_1 I\right)^{m_1} X=0$ βρίσκουμε $X=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{C}$. Τα $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, όπου τουλάχιστον ένας από τους a,b δεν είναι μηδέν, είναι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=2$.

β) Λύνοντας το $\left(A-\lambda_2 I\right)^{m_2} X=0$ βρίσκουμε $X=c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}$. Τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=3$ είναι τα $c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, όπου ο c δεν είναι μηδέν.

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ συγκροτούν μια βάση του $\mathbb{C}^{3\times 1}$ όπως είναι αναμενόμενο από το Θεώρημα 12, αλλά μόνο τα $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανύσματα του A.

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι από το Θεώρημα 12 έπεται μια πολύ χρήσιμη κανονική μορφή πινάκων, η λεγόμενη μορφή Jordan, με την οποία δεν θα ασχοληθούμε στο υλικό αυτό.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}-2&5&1&2\\-1&4&6&-1\\0&0&5&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ *διαγωνοποιείται*

Λύση

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-5&-1&-2\\1&\lambda-4&-6&1\\0&0&\lambda-5&0\\0&0&-1&\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-5\\1&\lambda-4\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\lambda-5&0\\-1&\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda^2-2\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-1)=(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $-1,1,3,5$. Οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες και σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 2

Εξετάστε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος. Να βρεθεί ένας πίνακας* $P\in M_2(\mathbb{R})$*, τέτοιος ώστε ο* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος.*

Λύση

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=4$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης $(\lambda_1 I-A)X=0$ δίνουν αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}-2x_1-2x_2=0\\ -3x_1-3x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$x_2=-x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=4$, από την εξίσωση $(\lambda_2 I-A)X=0$ έχουμε :

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}3x_1-2x_2=0\\ -3x_1+2x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{3}{2}x_1\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \frac{3}{2}x_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}x_1\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},\quad x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=4$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ και έχουμε $P^{-1}AP=\Delta=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Άσκηση 3

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε τη διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

i) $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ ii) $B=\begin{pmatrix}-2&5&2\\-1&4&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ iii) $\Gamma=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$

Λύση

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-4\\-3&\lambda-2&1\\-2&-1&\lambda+1\end{pmatrix}=$$
$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

(Σημειώνουμε ότι η παραγοντοποίηση στην τελευταία ισότητα δεν είναι τελείως προφανής. Πρώτα παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα του $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ και στη συνέχεια διαιρούμε το $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ με το $\lambda-1$ για να βρούμε το πηλίκο $(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)$).

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Στη $\lambda_1=-2$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_1 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&1&-4\\-3&-4&1\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned}-3x_1+x_2-4x_3&=0\\x_1+x_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_2&=-x_1\\x_3&=-x_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\\-x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}^t$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_2 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&-4\\-3&-1&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned}x_2-4x_3&=0\\-3x_1-x_2+x_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_2&=4x_3\\x_1&=-x_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3\\4x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Στην $\lambda_2=1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2=\begin{pmatrix}-1&4&1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_3=3$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$$(\lambda_3 I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ είναι,}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα p_1, p_2, p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. (Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα που αυτά σχηματίζουν).

Σύμφωνα με τον [αλγόριθμο διαγωνοποίησης](), θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και έχουμε

$$P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$\chi_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2 & -5 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)((\lambda+2)(\lambda-4)+5) = (\lambda-3)(\lambda+1)^2,$$

επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$ (διπλή ρίζα).

Στη $\lambda_1 = 3$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του

συστήματος $(\lambda_1 I - B)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$ Για τη $\lambda_1 = 3$

επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Η $\lambda_2 = -1$ έχει ιδιοδιάνυσμα τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$(\lambda_2 I - B)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ είναι λιγότερα από τη διάσταση του $\mathbb{R}^3$, άρα με βάση τον αλγόριθμο διαγωνοποίησης βήμα 3i) ο B **δε** διαγωνοποιείται.

Προσοχή Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε και το Θεώρημα 3. Πράγματι, υπολογίζοντας το ελάχιστο πολυώνυμο του B, διαπιστώνουμε ότι είναι το $m_B(\lambda) = \chi_B(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$, που δεν έχει πρωτοβάθμιους διακεκριμένους παράγοντες. Άρα ο B **δε** διαγωνοποιείται.

iii) Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Γ με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών (αφαιρούμε την δεύτερη από την πρώτη)

$$\chi_\Gamma(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -(\lambda - 2) & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 6).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_2 = 6$.

Η $\lambda_1 = 2$ έχει ιδιοδιανύσματα τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_1 I - \Gamma)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Η λύση του συστήματος υπολογίζεται από την εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 - x_2 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για $\lambda_1 = 2$ ο ιδιόχωρος $V(2)$ παράγεται από τα $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$, $p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2 = 6$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$(\lambda_2 I - \Gamma)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ δίνουν τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Συνεπώς επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα p_1, p_2, p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (έχουν μη μηδενική ορίζουσα), άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 1 ο Γ διαγωνοποιείται. Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

ο οποίος μετά από τις πράξεις δίνει το διαγώνιο πίνακα $P^{-1}\Gamma P = \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι τριγωνικός και επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^4$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό, οι πιθανές εκφράσεις του ελαχίστου πολυωνύμου είναι

$$\lambda - a\,,\ (\lambda - a)^2,\ (\lambda - a)^3 \ \text{ ή } (\lambda - a)^4 = \chi_A(\lambda)$$

Προφανώς ισχύει $A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Επομένως το $m_A(\lambda)$ δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων και με βάση το Θεώρημα 3 ο πίνακας **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 5

Εξετάστε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & -4 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 6 & -6 & -3 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\det\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)^2$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ και $\lambda_3 = -2$ (διπλή ρίζα). Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ πρέπει να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό, οι πιθανές εκφράσεις του ελαχίστου πολυωνύμου είναι

$$(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2) \quad \text{ή} \quad (\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)^2 = \chi_A(\lambda).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(A-4I)(A+I)(A+2I) =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & -1 \\ -7 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+2)^2$, οπότε με βάση το Θεώρημα 3 ο πίνακας A **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 6

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τις τιμές του $a\in\mathbb{R}$ *για τις οποίες ο πίνακας* A *διαγωνοποιείται.*

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix} \lambda-(2-a) & -a & -(a-3) \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}=\lambda^3+(a-1)\lambda^2-\lambda+1-a$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+a-1)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=1-a$.

Στην περίπτωση όπου $a\neq 0$ και $a\neq 2$ οι ιδιοτιμές είναι όλες διακεκριμένες, επομένως ο πίνακας A διαγωνοποιείται (Πρόταση 2).

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $a=0$, οπότε ο πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. Επειδή συμβαίνει $(A+I)(A-I)\neq 0$, είναι φανερό πως το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=\chi_A(\lambda)$, άρα για $a=0$ ο πίνακας **δε** διαγωνοποιείται, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.

Όμοια εξετάζουμε και την περίπτωση όπου $a=2$, οπότε ο πίνακας είναι $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Και στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_A(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-1)=\chi_A(\lambda)$, άρα για $a=2$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3 ο πίνακας **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 7

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *με*

$f(x,y,z)=\left(4x+z,\quad 4y+z,\quad -x+y+4z\right)$. *Εξετάστε αν η* f *διαγωνοποιείται.*

Λύση

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του είναι

$\chi_A(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} = (\lambda-4)^3$, επομένως η μοναδική

ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ είναι τριπλή ρίζα του. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(\lambda)$, της γραμμικής απεικόνισης f είναι το ίδιο με αυτό του πίνακα A, αρκεί να υπολογίσουμε το $m_A(\lambda)$. Τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα μπορεί να είναι

$$\lambda-4, \quad (\lambda-4)^2 \text{ ή } (\lambda-4)^3 = \chi_A(\lambda)$$

Παρατηρούμε ότι $A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Άρα το $m_A(\lambda)$ δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων παραγόντων πρώτου βαθμού και σύμφωνα με την Θεώρημα 3 η γραμμική απεικόνιση **δε** διαγωνοποιείται.

Άσκηση 8

Για κάθε θετικό ακέραιο k υπολογίστε τον A^k, όταν $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Λύση

Έχουμε $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 1$ (διπλή ρίζα).

Για $\lambda_1 = -2$, οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$(\lambda_1 I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, που είναι

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 2x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

αποτελούν τον ιδιόχωρο $V(-2)$ της $\lambda_1=-2$. Επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=1$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & 6 & -6\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$3x_2-3x_3=0 \Rightarrow x_2=x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\\ x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ x_1,x_3\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Επομένως για $\lambda_2=1$ ο ιδιόχωρος $V(1)$ παράγεται από τα $p_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t$, $p_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$. Τα ιδιοδιανύσματα p_1,p_2,p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επειδή $\det\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=-1\neq 0$, άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 ο A διαγωνοποιείται, οπότε θέτοντας $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ έχουμε $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ και ισχύει

$P^{-1}AP=\Delta=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Από την τελευταία σχέση και την (1) έχουμε :

$$A^k=P\Delta^kP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1 & (-2)^k-1 & -(-2)^k+1\\ 0 & 2(-2)^k-1 & -2(-2)^k+2\\ 0 & (-2)^k-1 & -(-2)^k+2\end{pmatrix}.$$

Άσκηση 9

Να βρεθούν 8 διαφορετικοί πίνακες B, τέτοιοι ώστε $B^2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -6 & 5 & 2\\ -7 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

Λύση

Αν συμβολίσουμε με A τον πίνακα στο δεύτερο μέλος της δοθείσης εξίσωσης βρίσκουμε ότι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Για $\lambda_1=1$, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(\lambda_1 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -2 \\ 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ δίνουν τον ιδιόχωρο

$$V(1)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\},$$ οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=2$, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(\lambda_2 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 7 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ δίνουν τον ιδιόχωρο

$$V(2)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 3x_1/2 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\},$$ οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το

$p_2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_3=3$, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(\lambda_3 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ δίνουν τον ιδιόχωρο

$$V(3)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_1/3 \\ 5x_1/3 \end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\},$$ οπότε επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το

$p_3=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Ο P είναι αντιστρέψιμος γιατί τα ιδιοδιανύσματα p_1,p_2,p_3 αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές και υπολογίζουμε ότι $P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Επειδή έχουμε $B^2=A$, η σχέση (2) δίνει $B=Pdiag\left(\pm1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}\right)P^{-1}$, από όπου προκύπτουν $8=2^3$ διαφορετικοί πίνακες-λύσεις της εξίσωσης.

Άσκηση 10

Έστω οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$ *και* $Z_n=\begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix}$ *με* $w_n+y_n=1$, *για κάθε* $n=1,2,\ldots,$ *οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση* $Z_n=AZ_{n-1}$. *Αν* $w_1=0,2$, *να εκφράσετε τους όρους* w_n,y_n *συναρτήσει του* n.

Λύση

Η δοθείσα ισότητα πινάκων γράφεται και

$$\begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη ισότητα διαδοχικά για τις διάφορες τιμές των n θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} w_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix} w_{n-3} \\ y_{n-3} \end{pmatrix}=\ldots=A^{n-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{*}$$

Από την τελευταία σχέση είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον A^{n-1}, γιατί λόγω της ισότητας των πινάκων θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τον $Z_n=\begin{pmatrix} w_n & y_n \end{pmatrix}^t$ συναρτήσει των w_1,y_1 και n. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-1,1\lambda+0,1=(\lambda-0,1)(\lambda-1)$ και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=0,1$ και $\lambda_2=1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0,1$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$(\lambda_1 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix} -0,3 & -0,3 \\ -0,6 & -0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ δίνουν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Έτσι έχουμε

$\left.\begin{matrix} -0,3x_1 - 0,3x_2 = 0 \\ -0,6x_1 - 0,6x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0,1$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2 = 1$, από το σύστημα $(\lambda_2 I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε

$0,6x_1 - 0,3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Ο πίνακας A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ έχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^t$.

Οι πίνακες P, P^{-1} είναι $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Έτσι από την (1) έχουμε

$$A^{n-1} = P\begin{pmatrix} 0,1^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \cdot 0,1^{n-1} + 1 & 1 - 0,1^{n-1} \\ 2 - 2 \cdot 0,1^{n-1} & 2 + 0,1^{n-1} \end{pmatrix},$$

και από την (*) προκύπτει

$$Z_n = \begin{pmatrix} w_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(1 + 2 \cdot 0,1^{n-1}\right) w_1 + \left(1 - 0,1^{n-1}\right) y_1 \\ \left(2 - 2 \cdot 0,1^{n-1}\right) w_1 + \left(2 + 0,1^{n-1}\right) y_1 \end{pmatrix} \overset{(w_1 + y_1 = 1)}{=} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + (2w_1 - y_1) \cdot 0,1^{n-1} \\ 2 + (-2w_1 + y_1) \cdot 0,1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Με αντικατάσταση των $w_1 = 0,2$ και $y_1 = 0,8$, έχουμε τελικά

$$w_n = \frac{1}{3}\left(1 - 0,4 \cdot 0,1^{n-1}\right), \quad y_n = \frac{1}{3}\left(2 + 0,4 \cdot 0,1^{n-1}\right), \quad n \geq 1.$$

Άσκηση 11

Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. *Εξετάστε αν ο Α τριγωνοποιείται.*
2. *Εξετάστε αν ο Α διαγωνοποιείται.*
3. *Στην περίπτωση που η απάντηση στο 1 είναι θετική, να βρεθεί ένας πραγματικός αντιστρέψιμος πίνακας* S *τέτοιος ώστε* $S^{-1}AS$ *είναι άνω τριγωνικός.*

Λύση

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A(x)=\det\begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ 4 & x-2 \end{pmatrix}=x^2$ που είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7, ο πίνακας A τριγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$.
2. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του A οφείλει να διαιρεί το x^2 και να έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Άρα το $m_A(x)$ είναι είτε το x είτε το x^2. Προφανώς δεν είναι το x αφού $A \neq 0$. Άρα το $m_A(x)$ δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων και συνεπώς ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.
3. Ένα ιδιοδιάνυσμα του A είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Επεκτείνουμε το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$, έστω την $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Θέτουμε $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε διαπιστώνουμε ότι $S^{-1}AS=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 12

Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας* P *έτσι ώστε ο* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος.*

Λύση

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός με βάση το Θεώρημα 8 αυτός διαγωνοποιείται και μάλιστα τα ιδιοδιανύσματα των διακεκριμένων ιδιοτιμών είναι μεταξύ τους κάθετα (Πρόταση 10). Ωστόσο για να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο το οποίο είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$, οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1=4$ και $\lambda_2=1$ (διπλή ρίζα).

Υπολογίζοντας κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι για $\lambda_1=4$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο $V(4)=\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$ και για $\lambda_2=1$ ο ιδιόχωρος είναι

$V(1)=\left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Τα ιδιοδιανύσματα $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (πχ η αντίστοιχη ορίζουσα είναι μη μηδενική) και άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον τα p_1, p_2 και p_1, p_3 είναι κάθετα (Πρόταση 10). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt στο $\{p_1, p_2, p_3\}$. Βρίσκουμε

$$\hat{p}_1=\frac{1}{|p_1|}p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \hat{p}_2=\frac{1}{|p_2|}p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \hat{p}_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Ο ορθογώνιος πίνακας P είναι $P=\begin{pmatrix}\hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \hat{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Ξέρουμε ότι $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Άσκηση 13

Έστω $A, B\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιοι ώστε $AB=BA$. Αποδείξτε ότι αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο B διαγωνοποιείται.

Λύση

Έστω ότι $X_1,\dots,X_n$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ του A. Τότε αυτά είναι μια βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ γιατί τα $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι διακεκριμένα. Θα δείξουμε ότι τα $X_1,\dots,X_n$ είναι ιδιοδιανύσματα του B. Τότε από το Πρόταση 2 ο B διαγωνοποιείται.

Από τη σχέση $AB=BA$ παίρνουμε

$$(AB)X_i=(BA)X_i\Rightarrow A(BX_i)=B(AX_i)=B(\lambda_i X_i)=\lambda_i BX_i.$$

Άρα το BX_i είναι στοιχείο του ιδιόχωρου $V(\lambda_i)$ του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι διακεκριμένες η πολλαπλότητα κάθε μιας ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι ίση με 1. Από το Θεώρημα 13 του Κεφαλαίου 9 έπεται ότι $\dim V(\lambda_i) \leq 1$ και άρα $\dim V(\lambda_i) = 1$. Συνεπώς $V(\lambda_i) = \langle X_i \rangle$. Από τις σχέσεις $BX_i \in \langle X_i \rangle$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\mu_i \in \mathbb{F}$ με

$$BX_i = \mu_i X_i.$$

Τα X_i είναι μη μηδενικά και άρα είναι ιδιοδιανύσματα του *B*.

Άσκηση 14

Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε $A^m = I$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και $TrA = n$. Αποδείξτε ότι $A = I$.

Λύση

Από την υπόθεση $A^m = I$ συνάγουμε ότι

- Ο *A* διαγωνοποιείται. Πράγματι, το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του *A* διαιρεί το $x^m - 1$ και επειδή το $x^m - 1$ έχει διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{C}$, το ίδιο συμβαίνει με το $m_A(x)$. Από το Θεώρημα 3 ο *A* διαγωνοποιείται.
- Κάθε ιδιοτιμή του *A* ικανοποιεί τη σχέση $\lambda^m = 1$.

Έστω $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) οι ιδιοτιμές του *A*. Από το Κεφάλαιο 9 ξέρουμε ότι $TrA = \lambda_1 + ... + \lambda_n$. Από την τριγωνική ανισότητα για μέτρα μιγαδικών παίρνουμε

$$n = TrA = \lambda_1 + ... + \lambda_n \Rightarrow n = |\lambda_1 + ... + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| = 1 + ... + 1 = n.$$

Άρα η ανισότητα είναι ισότητα και επομένως $\lambda_1 = ... = \lambda_n$. Συνεπώς $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1$. Άρα η διαγώνια μορφή του *A* είναι ο ταυτοτικός πίνακας *I*, οπότε $A = PIP^{-1}$ για κάποιον αντιστρέψιμο *P*. Επομένως $A = I$.

Άσκηση 15

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F})$. Αποδείξτε ότι ο A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν $a = f = 0$.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $(x-1)^2(x-2)^2$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 15 του Κεφαλαίου 9, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα από τα

$$(x-1)(x-2),\quad (x-1)^2(x-2),\quad (x-1)(x-2)^2,\quad (x-1)^2(x-2)^2.$$

Από το Θεώρημα 3 συνάγουμε ότι ο A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(x-1)(x-2)$. Είναι σαφές ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(x-1)(x-2)$ αν και μόνο αν $(A-I)(A-2I)=0$. Υπολογίζοντας βρίσκουμε

$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ ad & 0 & 0 & 0 \\ ae+bf & df & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως $(A-I)(A-2I)=0 \Leftrightarrow a=f=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Εξετάστε αν οι επόμενοι πίνακες διαγωνοποιούνται

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{iv) } \Delta=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη Βλ Λυμένες Ασκήσεις 1,3,4,5 . **Απάντηση** Οι πίνακες A και B διαγωνοποιούνται και οι πίνακες Γ και Δ δε διαγωνοποιούνται

Άσκηση 2

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε τη διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{v) } \Delta=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη Βλ Λυμένες Ασκήσεις 1,3,4,5. **Απάντηση** Οι πίνακες A και Δ δε διαγωνοποιούνται, οι B και Γ διαγωνοποιούνται.

Άσκηση 3

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 6. **Απάντηση** Για $a \neq -1$ ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν διαγωνοποιείται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z)=\left(-3x+y-z,\quad 2x+y,\quad -3x+z\right)$. Αν διαγωνοποιείται, να γράψετε την απεικόνιση που αντιστοιχεί στη διαγώνια μορφή.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 7. Υπολογίστε το διαγώνιο πίνακα και από αυτόν γράψτε την απεικόνιση που του αντιστοιχεί ως προς τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων που βρήκατε. **Απάντηση** Οι ιδιοτιμές είναι $-4,1,2$, $f(x,y,z)=(-4x,y,2x)$

Άσκηση 5

Έστω $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, να υπολογίστε τον A^n, για κάθε θετικό ακέραιο n.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 8. **Απάντηση** Ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$A^n = Pdiag(2^n,1,1)P^{-1} = \begin{pmatrix} -3\cdot 2^n+4 & -3\cdot 2^n+3 & -3\cdot 2^n+3 \\ -2^n+1 & -2^n+2 & -2^n+1 \\ 5\cdot 2^n-5 & 5\cdot 2^n-5 & 5\cdot 2^n-4 \end{pmatrix}, \text{ με } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

P πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A.

Άσκηση 6

Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, να βρεθούν τέσσερις διαφορετικοί πίνακες B, τέτοιοι ώστε $B^2 = A$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 9 **. Απάντηση** Οι πίνακες είναι

$B_1 = Pdiag\left(1,\sqrt{5}\right)P^{-1}$ $B_2 = Pdiag\left(1,-\sqrt{5}\right)P^{-1}$, $B_3 = Pdiag\left(-1,\sqrt{5}\right)P^{-1}$,

$B_4 = Pdiag\left(-1,-\sqrt{5}\right)P^{-1}$, όπου $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A.

Άσκηση 7

Έστω η ακολουθία (a_n), $n = 1,2,\dots$, η οποία ορίζεται από τους όρους $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ και τον αναδρομικό τύπο $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $n = 3,4,\dots$. Να βρεθεί ο γενικός όρος a_n συναρτήσει του n.

Υπόδειξη Βλ. Αναδρομικές ακολουθίες και Λυμένη Άσκηση 10.

Απάντηση $a_n = \frac{1}{5}\left((-1)^{n-2} + 4^{n-1}\right)$.

Άσκηση 8

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{F}^{4\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Προσδιορίστε τα ιδιοδιανύσματα του A. Με κατάλληλες επιλογές βάσεων δεν θα χρειαστεί να εφαρμόσετε τη μέθοδο Gram – Schmidt.

Απάντηση $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0)^t$.

Άσκηση 9

Εξετάστε αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P, τέτοιος ώστε ο $P^t AP$ να είναι διαγώνιος, όταν $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Στην περίπτωση που υπάρχει να βρεθεί ένας τέτοιος P.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 12. **Απάντηση** $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και ο

$P^t AP = diag(2,4,4)$.

Άσκηση 10

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας διαγωνοποιήσιμος πίνακας. Αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματικός πίνακας B με $B^3 = A$. Βρείτε έναν B αν $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$.

Υπόδειξη Βλ. Ρίζες Πινάκων. **Απάντηση** $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Κεφάλαιο 11

Πραγματικές Τετραγωνικές Κορφές

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις τετραγωνικές μορφές, που είναι μια εφαρμογή της Γραμμικής Άλγεβρας στη μελέτη των μη γραμμικών εξισώσεων. Ιδιαίτερα ο μετασχηματισμός μιας εξίσωσης, δευτέρου βαθμού, των σημείων του επιπέδου ή του χώρου, σε σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους άξονες συμμετρίας της γραμμής ή της επιφάνειας, είναι η σημαντικότερη εφαρμογή των τετραγωνικών μορφών στη Γεωμετρία.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ορισμός 1

Μια απεικόνιση $q(x):\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R}$ *με*

$$q(x)=\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j\ ,$$

όπου $a_{ij}\in\mathbb{R}$ *με* $i\le j=1,2,\ldots,n$ *και* $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ *ονομάζεται* ***τετραγωνική μορφή*** *του* $\mathbb{R}^n$.

Για παράδειγμα η απεικόνιση $q_1(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 4x_2^2 + 14x_2x_3$ είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$, η $q_2(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$ είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$, ενώ η $q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 3x_1$ δεν είναι γιατί περιέχει τον όρο $3x_1$.

Αν θεωρήσουμε τον τετραγωνικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ παρατηρούμε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας και αν θεωρήσουμε μία τετραγωνική μορφή $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$, εύκολα επαληθεύουμε ότι ισχύει $q(x) = x^t Ax$, όπου $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Ο A ονομάζεται ο ***αντίστοιχος πίνακας*** της $q(x)$.

Έτσι, για τα παραδείγματα των παραπάνω τετραγωνικών μορφών οι αντίστοιχοι πίνακες είναι $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ και $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας τότε ορίζεται μια τετραγωνική μορφή $q(x) = a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1x_3 + ... + a_{nn}x_n{}^2$ της οποίας ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο A.

Ορισμός 2

*Μια τετραγωνική μορφή $q(x): \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ με $i = 1, 2, \ldots, n$ και $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ονομάζεται **διαγώνια** τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^n$.*

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το διαγώνιο πραγματικό πίνακα $\Delta = diag(1,6)$, και υπολογίσουμε την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^2$ έχουμε $q(x) = x^t \Delta x = x_1^2 + 6x_2^2$, η οποία είναι διαγώνια.

<u>Υπενθυμίζουμε</u> ότι στο Κεφάλαιο 10, Προτάσεις 8 και 10, είχαμε αναφέρει ότι οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα. Επίσης είχαμε παρατηρήσει ότι για κάθε τετραγωνικό συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P για τον οποίο ισχύει $P^t AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Συνεπώς αν έχουμε την τετραγωνική μορφή $q(x) = x^t Ax$ ο αντίστοιχος πίνακάς της διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου πίνακα $P \in M_n(\mathbb{R})$ και αν θέσουμε $x = Pz$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} x^t Ax &= (Pz)^t A(Pz) = z^t (P^t AP)z \\ &= z^t diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Πρόταση 1

Έστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε

i) υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$, για τον οποίο ισχύει $P^t AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A,

ii) η τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την $q(x) = x^t Ax$ του $\mathbb{R}^n$ με την αλλαγή μεταβλητών $x = Pz$ είναι η διαγώνια τετραγωνική μορφή

$$q(z) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2.$$

Για την τετραγωνική μορφή $q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$ ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 3$. Για $\lambda_1 = -2$, ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ και για την $\lambda_2 = 3$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες, τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας που μπορεί να κατασκευαστεί είναι αυτός που προκύπτει αν θέσουμε ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της Πρότασης 1ii) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q(x)$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} z = -2z_1^2 + 3z_2^2 .$$

Σχόλιο: Σε κάθε τετραγωνική μορφή $q(x) = x^t Ax$ του $\mathbb{R}^n$ δεν υπάρχει μόνο μια διαγώνια τετραγωνική μορφή, αυτή εξαρτάται από το πώς θα κατασκευάσει κάποιος τον πίνακα P. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε μια άλλη διαγώνια μορφή της προηγούμενης τετραγωνικής μορφής $q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$, αν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $P=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι για $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ έχουμε

$$z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} z = -40z_1^2 + 240z_2^2 ,$$

δηλαδή η διαγώνια μορφή που προκύπτει δεν έχει ως συντελεστές τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Ορισμός 3

Μια τετραγωνική μορφή $q(x)$ του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται

- ***θετικά ορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ισχύει* $q(x) = x^t Ax > 0$
- ***θετικά ημιορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ισχύει* $q(x) = x^t Ax \geq 0$
- ***αρνητικά ορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *η* $-q(x) > 0$
- ***αρνητικά ημιορισμένη*** *αν για κάθε μη μηδενικό* $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *η* $-q(x) \geq 0$
- ***αόριστη*** *αν δεν ισχύει καμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις.*

Παραδείγματα

- Η τετραγωνική μορφή $q_1(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$ είναι θετικά ορισμένη, αφού $q_1(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$ για κάθε μη μηδενικό $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Η $q_2(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά ημιορισμένη, γιατί $q_2(x) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2 \geq 0$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Η τετραγωνική μορφή $q_3(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$ είναι αόριστη, γιατί αν θέσουμε $x_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ έχουμε $q_3(x_0) < 0$, ενώ αν θέσουμε $x_a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ έχουμε $q_3(x_a) \geq 0$.

Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας λέγεται ***θετικά ορισμένος*** αν η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Ανάλογα ορίζονται και οι έννοιες του θετικά ημιορισμένου πραγματικού συμμετρικού πίνακα κλπ.

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ημιορισμένος, επειδή η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του *A*, $q(x) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 5x_3^2 = -(x_1 - 3x_2)^2 - 5x_3^2 \leq 0$ είναι αρνητικά ημιορισμένη.

Έστω *A* ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας και $q(x) = x^t Ax$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Αν το x είναι ένα ιδοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ, τότε έχουμε $q(x) = x^t Ax = x^t \lambda x = \lambda |x|^2$. Επειδή το μέτρο είναι πάντα θετικό, αναμένουμε το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής να έχει σχέση με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα *A*. Σχετικά ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε ο A είναι

i) θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές

ii) θετικά ημιορισμένος, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές

iii) αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι αρνητικές

iv) *αόριστος αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία θετική και τουλάχιστον μία αρνητική ιδιοτιμή.*

Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ είναι αόριστος, γιατί οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1=-\sqrt{5}$, $\lambda_2=-2$ και $\lambda_3=\sqrt{5}$.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Το γεγονός ότι κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να αναχθεί σε διαγώνια μορφή μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα έχει μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική εφαρμογή, την ταξινόμηση στο $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ των καμπυλών και επιφανειών που ορίζονται από μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Ας δούμε την ταξινόμηση αυτή συνοπτικά στην περίπτωση του επιπέδου.

Καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο

Η γενική μορφή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού σε 2 μεταβλητές είναι $a_{11}x_1^{\,2}+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^{\,2}+b_1x_1+b_2x_2+c=0$. Αυτή γράφεται στη μορφή

$$x^tAx+b^tx+c=0,$$

όπου $A\in M_2(\mathbb{R})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, $b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times 1}$ και $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times 1}$. Από την Πρόταση 1 υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^tAP=diag(\lambda_1,\lambda_2)$, λ_1,λ_2 ιδιοτιμές του A. Αν κάνουμε την αντικατάσταση στην παραπάνω παράσταση $x=Pz$, $z=\begin{pmatrix}z_1 & z_2\end{pmatrix}^t\in\mathbb{R}^{2\times 1}$, βρίσκουμε μετά από πράξεις ότι

$$\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\beta_1z_1+\beta_2z_2+c=0 \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

- Αν $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$, ο μετασχηματισμός $w_i=z_i+\dfrac{\beta_i}{2\lambda_i}$, $i=1,2$ μετατρέπει τη σχέση $x^tAx+b^tx+c=0$ σε

$$\lambda_1w_1^2+\lambda_2w_2^2=k \qquad (2)$$

όπου $k=\frac{\beta_1^2}{4\lambda_1}+\frac{\beta_2^2}{4\lambda_2}-c$. Αν ο k είναι μη μηδενικός και ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών λ_1,λ_2, η (2) έχει μία από τις εξής μορφές.

Έστω $k\neq 0$.

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}+\frac{w_2^2}{a_2^2}=1 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2>0 \quad \text{(έλλειψη)}$$

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}-\frac{w_2^2}{a_2^2}=1 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2<0 \quad \text{(υπερβολή)}$$

$$-\frac{w_1^2}{a_1^2}-\frac{w_2^2}{a_2^2}=1 \quad \text{αν } \lambda_1<0,\lambda_2<0 \quad \text{(κενό σύνολο)}$$

Έστω $k=0$.

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}+\frac{w_2^2}{a_2^2}=0 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2>0 \text{ ή αν } \lambda_1<0,\lambda_2<0 \quad \text{(το σημείο (0,0))}$$

$$\frac{w_1^2}{a_1^2}-\frac{w_2^2}{a_2^2}=0 \quad \text{αν } \lambda_1>0,\lambda_2<0 \quad \text{(ζευγάρι τεμνόμενων ευθειών)}$$

- Αν μία ιδιοτιμή είναι μηδέν, έστω $\lambda_2=0$ και $\lambda_1\neq 0$ ο μετασχηματισμός $w_1=z_1+\frac{\beta_1}{2\lambda_1}$ και $w_2=\frac{\beta_1^2}{4\lambda_1}-c-\beta_2 z_2$ δίνουν $\lambda_1 w_1^2=w_2$, η οποία είναι η εξίσωση παραβολής.
- Αν $\lambda_1=\lambda_2=0$, η (1) παριστάνει ευθεία.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές να βρείτε μια αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή.

1. $q_1(x)=2x_1^2-2\sqrt{2}x_1x_2+3x_2^2$ *του* $\mathbb{R}^2$
2. $q_2(x)=4x_1^2-8x_1x_3+4x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2$ *του* $\mathbb{R}^3$

Λύση

1. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1, πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$, άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=4$.

Με $\lambda_1=1$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_1 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

οπότε βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_1 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_2\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

Με $\lambda_2=4$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_2 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_2 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}\right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συγκεκριμένου συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^t AP = diag(1, \quad 4)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της Πρότασης 1 ii) $x=Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική μορφή $q(x)=x^t Ax$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}z = z_1^2+4z_2^2.$$

2. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1 πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-9)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=4$ και $\lambda_3=9$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ είναι $\left\{x_3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$, αυτός που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι $\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$, τέλος ο ιδιόχωρος

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 9$ είναι $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα από αυτά με το μέτρο του,

δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{50} & 3/5 & -4/\sqrt{50} \\ -3/\sqrt{50} & 4/5 & 3/\sqrt{50} \\ 5/\sqrt{50} & 0 & 5/\sqrt{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} & 3/5 & -4/5\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} & 4/5 & 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^t AP = diag\left(-1,4,9\right)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό

της Πρότασης 1 ii) $x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5\sqrt{2} & 3/5 & -4/5\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} & 4/5 & 3/5\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, η τετραγωνική

μορφή $q(x) = x^t Ax$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} z = -z_1^2 + 4z_2^2 + 9z_3^2 .$$

Άσκηση 2

Για το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα* P *τέτοιο ώστε ο* $P^t AP$ *να είναι διαγώνιος και να γράψετε την αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή.*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 1 για να υπολογίσουμε τον P χρειάζεται να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-7)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=7$.

Με $\lambda_1=1$ λύνουμε το ομογενές σύστημα

$(\lambda_1 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -5 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_1 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ x_2\in\mathbb{R}\right\}$

Με $\lambda_2=2$ λύνουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_2 I-A)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, βρίσκουμε τον ιδιόχωρο της λ_2 ιδιοτιμής, ο οποίος είναι $\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$ και για την ιδιοτιμή $\lambda_3=7$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{x_3\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού έχουμε διαιρέσει το καθένα από αυτά με το μέτρο του, δηλαδή $P=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30}\end{pmatrix}$. Εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση $P^t AP=diag(1,2,7)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της Πρότασης 1 ii)

$$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$, η τετραγωνική μορφή $q(x) = x^t Ax$ μετά από πράξεις μετατρέπεται στην αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή που είναι

$$x^t Ax = z^t P^t APz = z^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} z = z_1^2 + 2z_2^2 + 7z_3^2 .$$

Άσκηση 3

Να εξετασθούν αν οι επόμενες τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες, ημιθετικά ορισμένες κλπ.

1. $q_1(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$
2. $q_2(x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$
3. $q_3(x) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$
4. $q_4(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 - 4x_2x_4 + 3x_3^2 + 3x_4^2$ του $\mathbb{R}^4$

Λύση

1. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(x) = x^t Ax$ είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Το κριτήριο που υπολογίζει το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής, το οποίο είναι το ίδιο με το πρόσημο του αντίστοιχου πίνακα, συνδέεται με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2. Έτσι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 4)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4 - 2\sqrt{3} > 0$ και $\lambda_3 = 4 + 2\sqrt{3}$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικοί αριθμοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος, άρα και η τετραγωνική μορφή $q_1(x)$ είναι θετικά ορισμένη.

2. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(x) = x^t Ax$ είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Όπως και προηγούμενα υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα που είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda - 8)$. Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{17} < 0$ και $\lambda_3 = 3 + \sqrt{17}$. Επειδή υπάρχει τουλάχιστον μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο πίνακας είναι αόριστος, άρα και η τετραγωνική μορφή $q_2(x)$ είναι αόριστη.

3. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(x) = x^t Ax$ είναι $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 5)^2$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -5$ (διπλή ρίζα). Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 2iii) ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, άρα και η τετραγωνική μορφή $q_3(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη.

4. Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2(\lambda - 6)$, επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ (διπλή ρίζα) και $\lambda_3 = 6$. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, ο πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος, άρα και η τετραγωνική μορφή είναι $q_4(x) \geq 0$.

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$*, ώστε ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *να είναι θετικά ορισμένος.*

Λύση

Η ορίζουσα του πίνακα είναι $\det A = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \leq 0$, η οποία όπως είναι γνωστό ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του πίνακα *A*. Είναι φανερό ότι οι ιδιοτιμές δεν μπορεί να είναι όλες θετικές για να είναι ο συμμετρικός πίνακας *A* θετικά ορισμένος, κατά συνέπεια δεν υπάρχουν τιμές του *α*, ώστε να ισχύει το Θεώρημα 2i).

Άσκηση 5

Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ορισμένος, δείξτε ότι το ίχνος και η ορίζουσα του πίνακα είναι θετικοί αριθμοί.

Λύση

Επειδή ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος έχει όλες τις ιδιοτιμές $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, (δες Θεώρημα 2). Επιπλέον είναι γνωστό από το Κεφάλαιο 9 ότι το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του, άρα $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n > 0$. Επίσης ξέρουμε ότι $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n > 0$.

Άσκηση 6

Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι θετικά ημιορισμένος, δείξτε ότι ο πίνακας A^k, για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Λύση

Έστω ότι ο πίνακας *A* έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, οι οποίες σύμφωνα με το Θεώρημα 2ii) είναι όλες μη αρνητικοί αριθμοί. Επειδή $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^k ισχύει και γι΄αυτές $\lambda_i^k \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε ο πίνακας A^k είναι επίσης θετικά ημιορισμένος.

Άσκηση 7

Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων

1. $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 14x_1 + 2x_2 + 5 = 0$

2. $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 14x_2 + 19 = 0$

3. $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 = 10$

Λύση

1. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t Ax + b^t x + 5 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_1(x) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} -14 & 2 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 8$. Της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ δε της $\lambda_2 = 8$ ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t Ax = z^t P^t APz = z^t diag(2,8)z$ και

$b^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -14 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{\sqrt{2}} & \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{-12}{\sqrt{2}} & \frac{-16}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} z + 5 = 0 \Rightarrow 2z_1^2 + 8z_2^2 - \frac{12}{\sqrt{2}} z_1 - \frac{16}{\sqrt{2}} z_2 + 5 = 0 \ (**).$$

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \frac{-12/\sqrt{2}}{4} \\ w_2 - \frac{-16/\sqrt{2}}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ w_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της έλλειψης

$$2w_1^2 + 8w_2^2 = 8 \Rightarrow \frac{w_1^2}{4} + \frac{w_2^2}{1} = 1.$$

2. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t Ax + b^t x + 19 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_2(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα P. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 2$. Της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ δε της $\lambda_2 = 2$ ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας P είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t Ax = z^t P^t APz = z^t diag(0,2) z$ και

$b^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -6 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{-20}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} z + 19 = 0 \Rightarrow 2z_2^2 - \frac{20}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{8}{\sqrt{2}} z_2 + 19 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς $z_2 = w_2 - \frac{8/\sqrt{2}}{4} = w_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$ και $w_1 = \frac{20}{\sqrt{2}} z_1 - 15$ και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της παραβολής $2w_2^2 = w_1 \Rightarrow \frac{w_2^2}{(1/2)} = w_1$.

3. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x^t Ax + b^t x - 10 = 0$ (*), όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο συμμετρικός πίνακας της τετραγωνικής μορφής $q_3(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$, για κάθε $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ και $b = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}^t$. Για τον μετασχηματισμό της (*) χρειάζεται να

υπολογίσουμε τον ορθογώνιο πίνακα *P*. Οι ιδιοτιμές του *A* είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 4$.

Της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ και της $\lambda_2 = 4$ ο ιδιόχωρος είναι $\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα είναι διακεκριμένες τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα, άρα ο ορθογώνιος πίνακας *P* είναι αυτός που έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του *A* αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Για κάθε $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$x = Pz \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, οπότε ισχύει $x^t Ax = z^t P^t APz = z^t diag(-2,4)z$ και

$b^t P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, άρα η (*) καταλήγει στην

$$z^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}z + \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}z - 10 = 0 \Rightarrow -2z_1^2 + 4z_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}z_2 - 10 = 0 \quad (**).$$

Στη συνέχεια, επειδή οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 - \frac{0}{-4} \\ w_2 - \frac{8/\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και αντικαταστήσουμε στην (**) καταλήγουμε στην εξίσωση της υπερβολής $-2w_1^2 + 4w_2^2 = 12 \Rightarrow \frac{w_2^2}{3} - \frac{w_1^2}{6} = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Σε κάθε μία από τις επόμενες τετραγωνικές μορφές να βρείτε την αντίστοιχη διαγώνια τετραγωνική μορφή της.

1. $q_1(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ του $\mathbb{R}^2$

2. $q_2(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

3. $q_3(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

Υπόδειξη
Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση έναν ορθογώνιο πίνακα P και κατόπιν να γίνει η διαγώνια τετραγωνική μορφή. Βλ. Λυμένες Ασκήσεις 1,2

Απάντηση 1. $-z_1^2 + 3z_2^2$, 2. $-4z_1^2 + z_2^2 + 6z_3^2$ 3. $6z_3^2$

Άσκηση 2

Να εξετασθούν αν οι επόμενες τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες, ημιθετικά ορισμένες κλπ.

1. $q_1(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

2. $q_2(x) = 6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2 + 5x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

3. $q_3(x) = 8x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

4. $q_4(x) = -x_1^2 + 8x_1x_2 - 16x_2^2 - 4x_3^2$ του $\mathbb{R}^3$

Στη συνέχεια να βρείτε μια διαγώνια τετραγωνική μορφή για καθεμιά.

Υπόδειξη
Βλ. Λυμένη Άσκηση 3.

Απάντηση 1. θετικά ημιορισμένη 2.αόριστη 3. θετικά ημιορισμένη 4. αρνητικά ημιορισμένη

Άσκηση 3

Να βρείτε το είδος των επόμενων καμπύλων.

1. $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 18$

2. $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 = 4$

Υπόδειξη
Βλ. Λυμένη Άσκηση 7

Απάντηση 1. $\frac{w_1^2}{20} + \frac{w_2^2}{4} = 1$ 2. $\frac{w_2^2}{\left(9/10\right)} - \frac{w_1^2}{\left(9/2\right)} = 1$.