<u>Ιδιοτιμές – ιδιοδιανύσματα Πινάκων</u>

Εισαγωγή

<u>Με τι πίνακες ασχολούμαστε;</u>

Με τετραγωνικούς ! Δηλαδή με πίνακες που το πλήθος γραμμών τους είναι ίσο με το πλήθος στηλών του .

Π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 10 \\ -1 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$	← 1η γραμμή ← 2η γραμμή ← 3η γραμμή
↑ 1η στήλη ↑ 2η στήλη ↑ 3η στήλη	Ο Α είναι ένας πίνακας 3 x 3 πλήθος γραμμών πλήθος στηλών

<u>Ποιοι άλλοι πίνακες εμπλέκονται ;</u>

α) Οι μοναδιαίοι πίνακες .

π.χ.

Ο 2 x 2 μοναδιαίος που συμβολίζεται $\mathbf{I_2}$ και είναι ο πίνακας

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο 3 x 3 μοναδιαίος που συμβολίζεται $\mathbf{I_3}$ και είναι ο πίνακας

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

....

Ο n x n μοναδιαίος που συμβολίζεται $\mathbf{I_n}$ και είναι ο πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση : στους τετραγωνικούς πίνακες ονομάζουμε κύρια διαγώνιο εκείνη την διαγώνιο του νοητού τετραγώνου που ξεκινά από πάνω αριστερά και καταλήγει κάτω δεξιά . Ο μοναδιαίος πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που στην κύρια διαγώνιο έχει **1**(μονάδες) ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι **0**

Β) πίνακας γραμμή : είναι ο πίνακας που έχει μια μόνο γραμμή . π.χ.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ο Γ είναι ένας πίνακας γραμμή 1 x 6 (1 γραμμή , 6 στήλες)

Γ) πίνακας στήλη : είναι ο πίνακας που έχει μια μόνο στήλη . π.χ.

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ο Κ είναι ένας πίνακας στήλη 5 x 1 (5 γραμμή , 1 στήλη)

Δ) μηδενικός πίνακας είναι ο πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 0

π.χ.

$$O_{2x2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad ,\ O_{3x3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ,$$

$$O_{3x2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ O_{3x2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,$$

$$O_{1x3}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix},\quad O_{3x1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

<u>Λίγη θεωρία</u>

Ονομάζω ιδιοτιμή ενός τετραγωνικού πίνακα **A** (που είναι n x n) τον κατάλληλο αριθμό λ ώστε να υπάρχουν άπειροι πίνακες στήλη **X**(που είναι n x 1) ώστε να ισχύει: **$(A-\lambda I_n)X=o_{nx1}$**

Μέθοδος για να βρω την ιδιοτιμή του A λύνω την εξίσωση :

$$\left|A-\lambda I_n\right|=0_{nx1}$$

(Το παραπάνω σύμβολο είναι η ορίζουσα που έχει ως στοιχεία της τα στοιχεία του πίνακα **$A-\lambda I_n$** μπορεί να γραφεί και ως det(**$A-\lambda I_n$**))

1. Παράδειγμα Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Λύση

$$A-\lambda I_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 0\\ 0 & 3\text{-}\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda I_2\right|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 0 & 3\text{-}\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2-\lambda)(3-\lambda)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda=2\\ \text{ή}\\ \lambda=3\end{matrix}\right\}\leftarrow \text{ιδιοτιμές του πίνακα } A$$

Για να βρω τα ιδιοδιανύσματα του A , για κάθε ιδιοτιμή
που βρήκα λύνω το σύστημα

$\mathbf{(A\text{-}\lambda I_2)X=0_{2x1}}$

Για λ=2 έχω:

Έστω $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ώστε

$$(A-\lambda_2 I)X=0 \Leftrightarrow (A-2I_2)X=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ x\in R \end{Bmatrix}$$

επομένως:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A

για την ιδιοτιμή λ=2

Για λ=3 έχω:

Έστω $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ώστε

$$(A-\lambda I_2)X=0 \Leftrightarrow (A-3I_2)X=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ y\in R \end{Bmatrix}$$

επομένως:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

το $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A

για την ιδιοτιμή λ=3

2. Παράδειγμα Να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Λύση

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 3\text{-}\lambda & -1\\ -1 & 1 & 1\text{-}\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I_3|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 3\text{-}\lambda & -1\\ -1 & 1 & 1\text{-}\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)\begin{vmatrix}3\text{-}\lambda & -1\\ 1 & 1\text{-}\lambda\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\text{-}\lambda\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\text{-}\lambda\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]-1\cdot[(\lambda-1)-1]-1\cdot(-1+3-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)-(\lambda-2)-(2-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)(\lambda-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda=2(\text{διπλή})\\ \text{ή}\\ \lambda=1\end{matrix}\right\}\leftarrow \text{ιδιοτιμές του πίνακα A}$$

Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

Για λ=1

Έστω $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ώστε

$$(A-\lambda I_3)X=0 \Leftrightarrow (A-I_3)X=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y-z \\ -x+2y-z \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x+y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \{x=y=z\}$$

επομένως:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A

για την ιδιοτιμή λ=1

Για λ=2

Έστω $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ώστε

$$(A-\lambda I_3)X=0 \Leftrightarrow (A-2I_3)X=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x+y-z \\ -x+y-z \\ -x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\{-x+y-z=0\} \Leftrightarrow \{x+z=y\}$$

επομένως:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

τα: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι τα ιδιοδιάνυσματα του πίνακα Α

για την ιδιοτιμή λ=2

Για όποιον θέλει να κάνει ένα έλεγχο στις γνώσεις του

Βρείτε (όπως παραπάνω) ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Διανυσματικοί υπόχωροι</u>

Α. Διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα (γ.α.) ή γραμμικώς εξαρτημένα (γ.ε.)

(Μια πρώτη συμβουλή :μην είστε κολλημένοι στην γεωμετρική εικόνα του διανύσματος)

Έστω τα διανύσματα *(δηλαδή στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου)*

$\mathbf{\alpha_1, \alpha_2 , \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu}$ *και οι πραγματικοί αριθμοί*

$\mathbf{\lambda_1, \lambda_2 , \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu}$ Αν η σχέση :

$$\mathbf{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \ldots + \lambda_\nu\alpha_\nu = 0}$$

*(**το** **0** είναι το μηδενικό διάνισμα και όχι ο αριθμός 0)*

ισχύει μόνο αν $\mathbf{\lambda_1=\lambda_2 = \lambda_3=\ldots=\lambda_\nu} = 0$

τότε τα διανύσματα $\mathbf{\alpha_1, \alpha_2 , \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γ.α.) . Αν όμως υπάρχουν* $\mathbf{\lambda_1, \lambda_2 , \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu}$ *που δεν είναι όλοι 0 ώστε να ισχύει η σχέση*

$$\mathbf{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \ldots + \lambda_\nu\alpha_\nu = 0}$$

τότε τα διανύσματα $\mathbf{\alpha_1, \alpha_2 , \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu}$ *είναι γραμμικώς εξαρτημένα (γ.ε.)*

1. **Παράδειγμα** να εξετάσετε αν τα :
   a=(1,1,0), b=(1,0,1), c=(0,1,1) είναι γ.α.
   Λύση
   Έστω κ, λ, μ ∈ **R** ώστε:
   κ **a**+ λ **b**+ μ **c=0** ⇔

κ (1,1,0)+ λ(1,0,1)+ μ (0,1,1) =(0,0,0) $\Leftrightarrow$
(κ,κ,0)+ (λ,0,λ)+ (0,μ,μ) =(0,0,0) $\Leftrightarrow$
(κ+λ , κ+μ , λ+μ)=(0,0,0) $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \kappa+\lambda=0 \\ \lambda+\mu=0 \\ \mu+\kappa=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-\lambda \\ \lambda+\mu=0 \\ \mu-\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-\lambda \\ \lambda=0 \\ \mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa=\lambda=\mu=0$$

Επομένως τα διανύσματα a, b, c είναι γ.α.

Προσοχή
α) Παρατηρήστε ότι στην αρχική σχέση :
κ **a**+ λ **b**+ μ **c=0**
Αν θέσω κ=λ=μ=0 αυτή επαληθεύεται . Όμως για να είναι τα διανίσματα a, b, c γ.α. πρέπει να προκύπτει <u>**ΜΟΝΟ**</u> κ=λ=μ=0
β) Στην σχέση μας το μηδενικό διάνυσμα είναι το **0**=(0,0,0)

2. **Παράδειγμα** να εξετάσετε αν τα :
a=(1,2,0), b=(1,1,1), c=(3,4,2) είναι γ.α.
Λύση
Έστω κ, λ, μ ∈ **R** ώστε:
κ **a**+ λ **b**+ μ **c=0** $\Leftrightarrow$
κ **(1,2,0)**+ λ**(1,1,1)**+ μ **(3,4,2) =(0,0,0)** $\Leftrightarrow$
(κ,2κ,0)+ (λ,λ,λ)+ (3μ,4μ,2μ) =(0,0,0) $\Leftrightarrow$
(κ+λ +3μ, 2κ+λ+4μ , λ+2μ)=(0,0,0) $\Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \kappa+\lambda+3\mu=0 \\ 2\kappa+\lambda+4\mu=0 \\ \lambda+2\mu=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \kappa+\mu=0 \\ 2\kappa+2\mu=0 \\ \lambda=-2\mu \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \kappa=-\mu \\ \lambda=-2\mu \end{Bmatrix}$$

Δηλαδή υπάρχουν άπειρα κ,λ,μ όχι υποχρεωτικά 0
π.χ. μ=1, λ=-2 , κ=-1
Επομένως τα διανύσματα a, b, c είναι γ.ε.

3. **Παράδειγμα** Δείξτε ότι τα διανύσματα :
$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γ.α.

Θα τρελαθούμε !!!!! Ποια διανύσματα;

και όμως είναι διανύσματα διότι ανήκουν στον διανυσματικό χώρο των πινάκων που είναι 2x2 (αν βρούμε χρόνο θα το αποδείξουμε)

Λύση ***(όπως και προηγούμενα παραδείγματα)***

Έστω κ, λ ∈ **R** ώστε:

κ **A**+ λ **B=0** ⇔

$$\kappa\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-\kappa & 3\lambda\\ 2\lambda & 2\kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\kappa=0\\ \kappa\alpha\iota\\ \lambda=0\end{matrix}\right\}$$

Επομένως Α, Β είναι γ. α.

Υ.Γ. παρατηρήστε ότι εδώ τον ρόλο του μηδενικού διανύσματος τον αναλαμβάνει ο μηδενικός πίνακας $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4. **Παράδειγμα** Δείξτε ότι τα διανύσματα : **α=x³ , b= x² , c=x** είναι γ.α.

Τώρα το τερματίσαμε. Είναι και αυτά διανύσματα;;;;;; !!!!!
Θα το ρίξω στα λατινικά

Λύση ***(όπως και προηγούμενα παραδείγματα)***

Έστω κ, λ, μ ∈ **R** ώστε:

κ **a**+ λ **b**+ μ **c=o** $\Leftrightarrow \kappa x^3+\lambda x^2+\mu x=0$ (1)

(Στην περίπτωση αυτή πιο είναι το μηδενικό διάνυσμα ;

Μα το μηδενικό πολυώνυμο Βεβαίως)

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \kappa = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \lambda = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mu = 0 \end{matrix}\right\} \text{ επομένως a, b, c γ.α.}$$

B. Διανύσματα που παράγουν ένα χώρο

Έστω τα διανύσματα *(δηλαδή στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου)*

$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu}$ *ενός διανυσματικού χώρου* **V**

θα λέμε ότι τα $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu}$
παράγουν τον δ.χ. **V** *αν και μόνο αν για το τυχαίο διάνυσμα* **W** *του* **V** *υπάρχουν κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί ώστε* :

$$\boldsymbol{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \ldots + \lambda_\nu\alpha_\nu = w}$$

1. **Παράδειγμα** Βρες ποια διανύσματα παράγουν τον χώρο V={(x,y,z) με x,y,z $\in$ **R** με x+y-z}=0}

Λύση

Έστω w τυχαίο διάνυσμα του V

τότε: V= (x,y,z)= (x,y,-x-y)=(x,0,-x)+(0,y,-y)=

x(1,0,-1)+y(0,1,-1)

2. **Παράδειγμα** Δείξε ότι τα διανύσματα
a=(1,1,0) , b=(0,1,1) , c=(1,0,1)
παράγουν το δ.χ. R^3

(R^3={(x,y,z) με x,y,z ∈ R })

Λύση

Έστω w=(x,y,z) τυχαίο διάνυσμα του R^3 (τα x,y,z θεωρούνται δοσμένα δηλαδή γνωστοί)

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχουν κατάλληλοι κ, λ ,μ ∈ **R**:

κa+λb+μc=w⇔

κ **(1,1,0)+** λ **(0,1,1) +μ(1,0,1) =(x,y,z)** ⇔

(κ+μ , κ+λ , λ+μ)=(x,y,z)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \kappa+\mu=x \\ \kappa+\lambda=y \\ \lambda+\mu=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(\kappa+\lambda+\mu)=x+y+z \Leftrightarrow$$

$$\kappa+\lambda+\mu=\frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+\lambda=\frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow \lambda=\frac{-x+y+z}{2} \\ y+\mu=\frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow \mu=\frac{x-y+z}{2} \\ z+\kappa=\frac{x+y+z}{2} \Leftrightarrow \kappa=\frac{x+y-z}{2} \end{matrix}\right\}$$

Τελικά τα διανύσματα a, b, c παράγουν τον R^3 .