Χαράλαμπος Στεργίου

Μαθηματικά Ο.Π.

Β' Λυκείου

Εκδόσεις Σαββάλας

21.06.19

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικός λογισμός

① Έννοια του διανύσματος

Ορισμός 1: Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται προσανατολισμένο αν έχει καθοριστεί ποιο από τα άκρα του είναι πρώτο και ποιο δεύτερο. Δηλαδή, ένα ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται προσανατολισμένο αν θεωρείται διαφορετικό από το ευθύγραμμο τμήμα BA.

Ορισμός 2: Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται διάνυσμα με αρχή το σημείο A και πέρας (τέλος) το σημείο B.

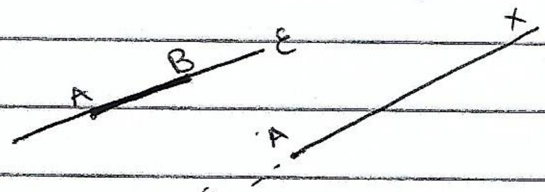
Συμβολισμός $\vec{AB}$.

$AB \neq BA$

Παρατήρηση: Συμβολίζουμε τα διανύσματα και με τα πεζά γράμματα της αλφαβήτου, μόνο που στην περίπτωση αυτή δεν γνωρίζουμε την αρχή και το τέλος του διανύσματος.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$$

Ορισμός 3: Την ευθεία ε που περιέχει ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα AB ή μια δοσμένη ημιευθεία Ax την ονομάζουμε φορέα του ευθύγραμμου τμήματος AB ή της δοσμένης ημιευθείας Ax.



② Χαρακτηριστικά διανύσματος

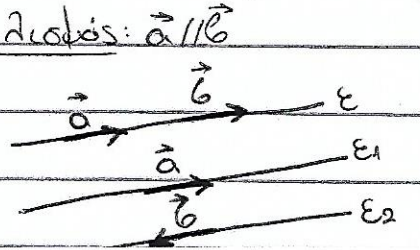
α) διεύθυνση: Η διεύθυνση του φορέα

β) φορά: Η φορά της ~~ευθείας~~ ημιευθείας AB

γ) μέτρο: Το μήκος (AB) του ευθύγραμμου τμήματος AB

Ορισμός 4: Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά αν έχουν τον ίδιο φορέα ή διαφορετικούς παράλληλους φορείς

Συμβολισμός: $\vec{a} \parallel \vec{b}$



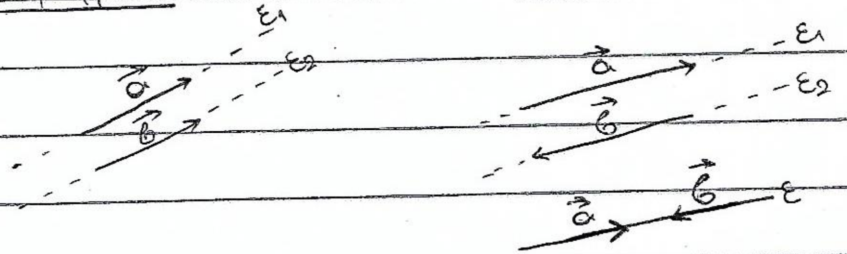
Ορισμός 5: Δύο διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ λέγονται ομόρροπα αν είναι παράλληλα και έχουν την ίδια φορά.

Συμβολισμός: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

Ορισμός 6: Δύο διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ λέγονται αντίρροπα όταν είναι παράλληλα αλλά δεν έχουν την ίδια φορά.

Συμβολισμός: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Ομόρροπα   Αντίρροπα



Παρατήρηση

Αν $\vec{a}//\vec{b}$ τότε λέμε ότι τα $\vec{a},\vec{b}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

Ορισμός 7: Δύο διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ λέγονται ίσα αν έχουν

i) την ίδια διεύθυνση

ii) την ίδια φορά

iii) το ίδιο μέτρο

Συμβολισμός: $\vec{a}=\vec{b}$

Ορισμός 8: Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ λέγονται αντίθετα αν έχουν:

i) την ίδια διεύθυνση

ii) αντίθετη φορά

iii) το ίδιο μέτρο

Συμβολισμός: $\vec{b} = -\vec{a}$

Παρατήρηση: Τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BA}$ είναι αντίθετα. Συνεπώς $\vec{AB} = -\vec{BA}$

$\vec{AB}$ $\vec{BA}$

Ορισμός 9: Ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος συμπίπτουν λέγεται μηδενικό διάνυσμα.

Συμβολισμός: $\vec{0}$

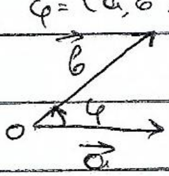
Παρατήρηση

Το μέτρο ενός μηδενικού διανύσματος είναι ίσο με μηδέν. Σαν φορά ή διεύθυνση του μηδενικού διανύσματος θεωρούμε οποιοδήποτε φορά ή διεύθυνση. Έτσι το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί παράλληλο ή ομόρροπο ή αντίρροπο με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα.

Παρατήρηση: Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a}$ συμβολίζεται με $|\vec{a}|$.

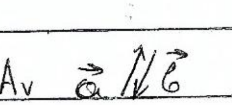
Ορισμός 10: Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δύο διανύσματα με κοινή αρχή το σημείο O.
Γωνία του $\vec{b}$ με το $\vec{a}$ ονομάζεται η κυρτή γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί το διάνυσμα $\vec{a}$ (πάνω στο επίπεδο) ώστε να γίνει ομόρροπο με το $\vec{b}$ διάνυσμα.

Συμβολισμός: $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

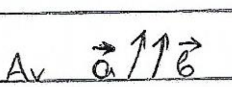


Παρατήρηση: 1) Η γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ τα οποία είναι αντίρροπα (δηλ. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$) είναι η γωνία 180°
2) Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ τότε $\varphi = 0^\circ$

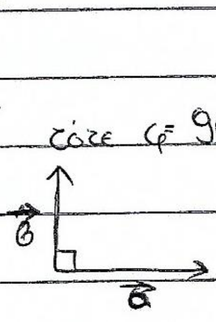
1) Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



2) Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$



3) Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$ τότε $\varphi = 90^\circ$



Άσκηση - Θεωρεία

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ το μέσο του.

Τότε $\vec{AM}=\vec{MB}$

Έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.

Άσκηση

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ

αν ισχύει $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$ τότε ν.δ.ο

i) $\vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta}$

ii) $\vec{\Delta B}=\vec{\Gamma A}$

i) $\vec{A\Gamma}=\vec{AB}+\vec{B\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}=\vec{\Gamma\Delta}+\vec{B\Gamma}$

Επειδή όμως $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$

Τα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}$ έχουν το ίδιο μέτρο

Επίσης έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά άρα είναι ίσα.

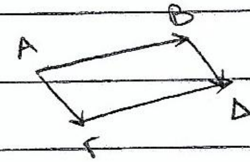
ii) $\vec{\Delta B}=\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Gamma B}$ και $\vec{\Gamma A}=\vec{BA}+\vec{\Gamma B}$

Άρα τα $\vec{\Delta B}$ και $\vec{\Gamma A}$ έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά. Επομένως είναι ίσα.

26.06.19

Β΄ τρόπος

Απόδειξη



i) Αφού $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ τότε

ΑΒΓΔ #

Συνεπώς ΑΓ//ΒΔ και (ΑΓ)=(ΒΔ)

Τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Delta}$ έχουν την ίδια φορά και είναι παράλληλα με το ίδιο μέτρο (αφού ΑΒΓΔ#)

Άρα, $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$

ii) Αφού $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$ άρα $-\vec{\Gamma A} = -\vec{B\Delta}$ επομένως $\vec{\Gamma A} = \vec{B\Delta}$

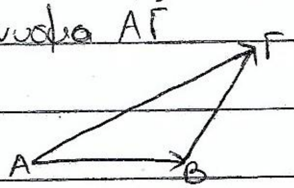
Πρόσθεση διανυσμάτων

Ορισμός: Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ λέγονται διαδοχικά όταν το τέλος του ενός είναι η αρχή του άλλου

π.χ. $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$ διαδοχικά

$\vec{EZ}, \vec{ZP}$ διαδοχικά

Έστω, $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ δύο διαδοχικά διανύσματα ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ ορίζουμε το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$

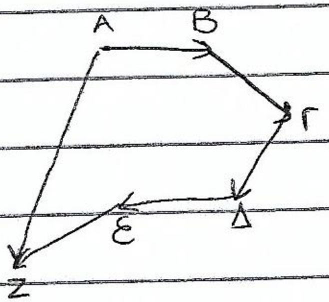


Συμβολισμός: $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$

Δηλ. $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}$

Παρατήρηση: Αν έχουμε ν διαδοχικά διανύσματα ως άθροισμα των ν διανυσμάτων ορίζεται το διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου διανύσματος.

π.χ. για $\nu=5$ έχουμε: $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta E}+\vec{EZ}=\vec{AZ}$

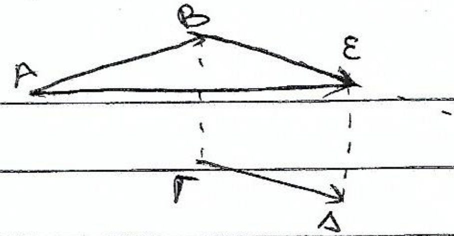


Αφαίρεση διανυσμάτων

Έστω $\vec{a},\vec{b}$ δύο διανύσματα τότε ορίζουμε:

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-b)$

Παρατήρηση Στην περίπτωση που έχουμε δύο διανύσματα τα οποία δεν είναι διαδοχικά για να ορίσουμε το άθροισμά τους τα κάνουμε διαδοχικά με παράλληλη μετατόπιση του ενός διανύσματος από τα δύο δηλαδή αν $\vec{AB},\vec{\Gamma\Delta}$ δύο μη διαδοχικά διανύσματα τότε για να ορίσουμε το $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}$ μεταφέρουμε το διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ με παράλληλη μετατόπιση έτσι ώστε το σημείο Β να ταυτιστεί με το σημείο Γ

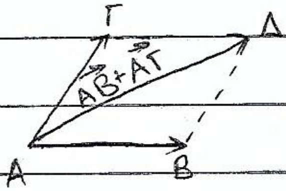


ΒΕΔΓ # $\Rightarrow \vec{\Gamma\Delta}=\vec{BE}$

Άρα $AB+\vec{\Gamma\Delta}=\vec{AB}+\vec{BE}=\vec{AE}$

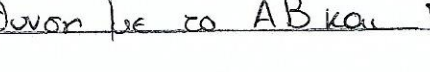
Παρατήρηση

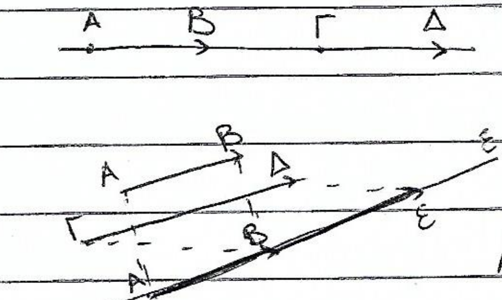
Αν τα διανύσματα $\vec{AB},\vec{A\Gamma}$ έχουν κοινή αρχή το σημείο Α τότε το άθροισμα τους $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}$ βρίσκεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου και είναι το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$



$\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{AB}+\vec{B\Delta}=\vec{A\Delta}$

Παρατήρηση 1) Αν $\vec{AB}\parallel\vec{\Gamma\Delta}$ τότε $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}$ έχει την ίδια διεύθυνση με το $\vec{AB}$ και ΓΔ





$\vec{AB}=\vec{A'B'}$

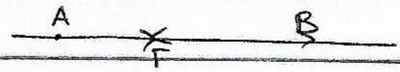
$\vec{\Gamma\Delta}=\vec{B'E}$

$\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=\vec{A'B'}+\vec{B'E}=\vec{A'E}$

Παρατήρηση

2) Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ τότε $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

3) Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ τότε $|\vec{a}+\vec{b}|=\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$

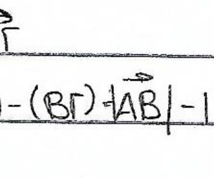


$\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$

$|\vec{A\Gamma}| = (AB)-(B\Gamma)=|\vec{AB}|-|\vec{B\Gamma}|$

Ορισμός Έστω O ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό σημείο του επιπέδου. Για κάθε σημείο P του επιπέδου ορίζεται το διάνυσμα OP το οποίο λέγεται διανυσματική ακτίνα ή διάνυσμα θέσης του σημείου P.

Παρατήρηση Το σημείο O λέγεται σημείο αναφοράς



S.O.S Πρόταση Έστω $\vec{AB}$ ένα διάνυσμα και O σημείο αναφοράς: Τότε $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$

$\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$

$\boxed{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}}$

Ιδιότητες πρόσθεσης

1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

2) $\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \gamma$

3) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$

4) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

(σελ. 21 ασκ. 3 σχολικό βιβλίο)

i) $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

ii) $\vec{x} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

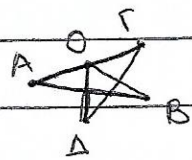
iii) $\vec{x} = \vec{\zeta} - \vec{\epsilon} - \vec{\delta} + \vec{\gamma} - \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

5) Α, Β, Γ, Δ σημεία

Ο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ

Ν.δ.ο. $\vec{OB} + \vec{O\Delta} = \vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma}$

Απόδειξη



Έχουμε ότι

$\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} =$

$(\vec{OB} - \vec{OA}) - (\vec{O\Gamma} - \vec{O\Delta}) =$

$\vec{OB} - \vec{OA} - \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta}$

Άρα, $\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{OB} - \vec{OA} - \vec{O\Gamma} + O\Delta$ (1)

Αφού O μέσο του ΑΓ τότε $\vec{AO} = \vec{O\Gamma}$ (2)

Άρα (1) $\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{OB} - \vec{OA} - \vec{AO} + \vec{O\Delta}$

$\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{OB} - \cancel{\vec{OA}} + \cancel{\vec{OA}} + \vec{O\Delta}$

$\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{OB} + \vec{O\Delta}$

7) Τυχαίο Εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$

Ν.δ.ο. $\vec{P_1P_3} + \vec{P_2P_4} + \vec{P_3P_5} + \vec{P_4P_6} + \vec{P_5P_1} + \vec{P_6P_2} = \vec{0}$

Απόδειξη:

1ος τρόπος: Έχουμε ότι:

$\vec{P_1P_3} + \vec{P_2P_4} + \vec{P_3P_5} + \vec{P_4P_6} + \vec{P_5P_1} + \vec{P_6P_2} =$

$(\vec{P_1P_3} + \vec{P_3P_5} + \vec{P_5P_1}) + (\vec{P_2P_4} + \vec{P_4P_6} + \vec{P_6P_2}) =$

$\vec{P_1P_1} + \vec{P_2P_2} =$

$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

2ος τρόπος: Έστω O σημείο αναφοράς

Τότε $\vec{P_1P_3} + \vec{P_2P_4} + \vec{P_3P_5} + \vec{P_4P_6} + \vec{P_5P_1} + \vec{P_6P_2} =$

$\vec{OP_3} - \cancel{\vec{OP_1}} + OP_4 - \cancel{OP_2} + \cancel{OP_5} - \cancel{OP_3} + \cancel{OP_6} - \cancel{OP_4} + \cancel{OP_1} -$

$\cancel{OP_5} + \cancel{OP_2} - \cancel{OP_6}$

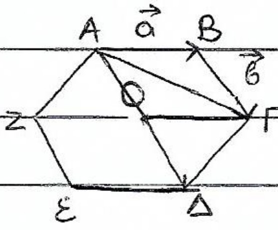
$\vec{0} = \vec{0}$

6) Κανονικό Εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ

$\vec{AB}=\vec{a}$

$\vec{B\Gamma}=\vec{b}$

$\vec{\Gamma\Delta}=;$



Με σημείο αναφοράς το σημείο Α ισχύει

$\vec{\Gamma\Delta}=\vec{A\Delta}-\vec{A\Gamma}=\vec{AO}+\vec{O\Delta}-\vec{A\Gamma}=\vec{AO}+\vec{AO}-\vec{A\Gamma}=2\vec{AO}-\vec{A\Gamma}$

δηλ. $\vec{\Gamma\Delta}=2\vec{AO}-\vec{A\Gamma}$ ①

Έχουμε ότι:

$\vec{A\Gamma}=\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{a}+\vec{b}$ ②

Φέρνουμε την ακτίνα ΟΑ, ΟΓ του κανονικού εξαγώνου.

Τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΟ #

Συνεπώς, $\vec{AO}=\vec{B\Gamma}$ ⟹ $\vec{AO}=\vec{b}$ ③

Όμως, $\vec{B\Gamma}=\vec{b}$

Άρα, ① $\overset{②}{\underset{③}{\Longleftrightarrow}}$ $\vec{\Gamma\Delta}=2\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})$

$\vec{\Gamma\Delta}=2\vec{b}-\vec{a}+\vec{b}$

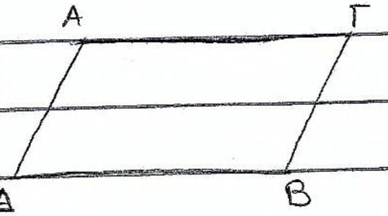
$\vec{\Gamma\Delta}=\vec{b}-\vec{a}$

4) ΑΒΓ, ΑΔΕ τρίγωνα

$\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}$

Ν.δ.ο. ΒΔΕΓ #

Μεθοδολογία Για ν.δ.ο. ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αρκεί ν.δ.ο. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$



Απόδειξη Αρκεί ν.δ.ο. $\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{E\Gamma}$.

Έχουμε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Gamma}$

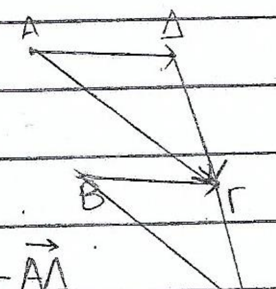
$\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma E}$

$\overrightarrow{B\Delta}$

(σελ. 27 ασκ. 1.15 Βοήθημα)

$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{A\Gamma}$



α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}$

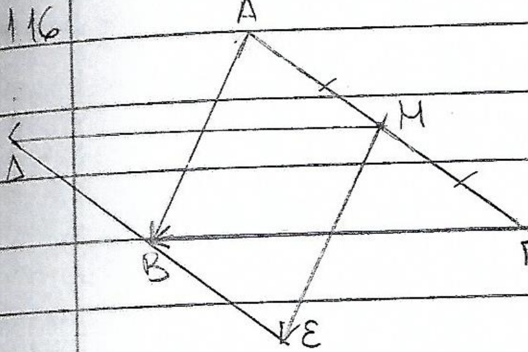
$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{B\Gamma}$

$\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{B\Gamma}$

Άρα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma E}$

β) Επειδή $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma E} \Rightarrow \Delta\Gamma=\Gamma E$ άρα Γ μέσο ΔΕ

1.16



α) Επειδή $\vec{MΔ}=\vec{ΓB}$ τότε το ΔΜΓΒ #

Επομένως, ΒΔ//ΜΓ ①

Επειδή $\vec{MΕ}=\vec{AB}$ τότε το ΒΑΜΕ #

Επομένως, ΒΕ//ΑΜ ②

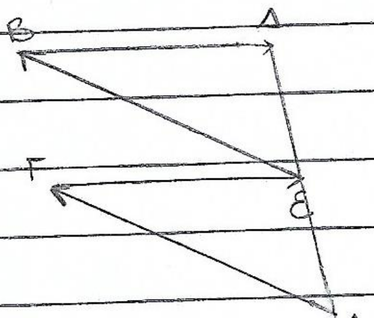
Άρα $\overset{①}{\underset{②}{\Rightarrow}}$ ΔΕ//ΑΓ => Δ,Β,Ε συνευθειακά

β) Επειδή ΔΜΓΒ # και ΒΑΜΕ #

$\left.\begin{aligned} BΔ&=MΓ \\ BΕ&=AM \end{aligned}\right\} \overset{AM=MΓ}{\Longrightarrow} BΔ=BΕ$

Άρα Β μέσο του ΔΕ

1.17



Επειδή $\vec{BΔ}=\vec{ΓΕ}$ τότε

ΒΔΕΓ # άρα

$\vec{ΔΕ}=\vec{BΓ}$

Επειδή $\vec{AΓ}=\vec{ΕB}$ τότε

ΒΕΑΓ # άρα

$\vec{ΕA}=\vec{BΓ}$

Επομένως $\vec{ΔΕ}=\vec{ΕA}$ => ΔΕ=ΕΑ

Άρα Ε μέσο του ΔΑ

1.18 1. $\vec{x} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

2. $\vec{x} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} - \vec{\delta} - \vec{\gamma}$

3. $\vec{x} = -\vec{\delta} + \vec{\gamma} - \vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\varepsilon}$

1.20 α) $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OA} = \vec{OB}$

β) $\vec{OK} - \vec{O\Lambda} = \vec{OK} + \vec{O\Lambda} = \vec{O\Lambda}$

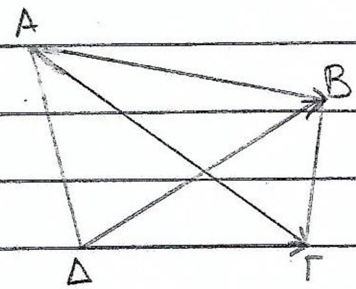
γ) $\vec{AK} + \vec{K\Lambda} = \vec{A\Lambda}$

δ) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta}$

ε) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{AA}$

στ) $\vec{AK} - \vec{\Lambda K} + \vec{\Lambda B} = \vec{AK} + \vec{K\Lambda} + \vec{\Lambda B} = \vec{AB}$

1.21



$\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}$

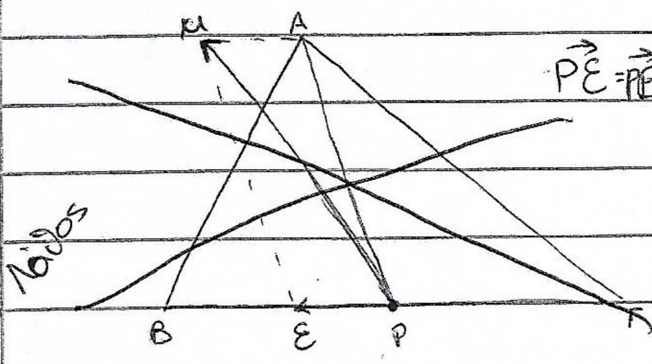
$\vec{\Delta B} = \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma B}$

$\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B}$

$\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB} + \cancel{\vec{B\Gamma}} + \vec{\Delta\Gamma} + \cancel{\vec{\Gamma B}}$

$\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma}$

1.23



$\vec{PE} = \vec{PB} + \vec{P\Gamma}$

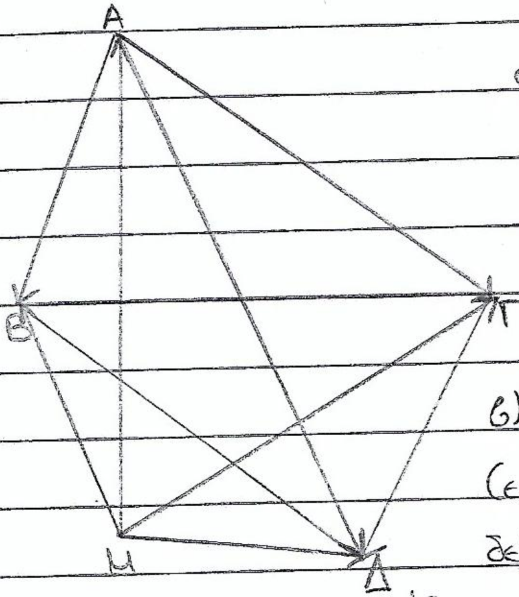
Απόδειξη Αρκεί ν.δ.ο. $\vec{AB}=\vec{\Gamma M}$

Έχουμε ότι

$\vec{PM}=\vec{AP}+\vec{PB}+\vec{P\Gamma}$

$\vec{PM}-\vec{P\Gamma}=\vec{AP}+\vec{PB} \Leftrightarrow \vec{\Gamma M}=\vec{AB}$

1.24



α) ΑΓΔΒ # $\Rightarrow \vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$

$\vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta} \overset{\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}+\vec{AB}$

Το σημείο Δ είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου του οποίου οι πλευρές είναι τα $\vec{AB}=\vec{A\Gamma}$

β) Αφού ΑΒΔΓ# τότε $\vec{B\Delta}=\vec{A\Gamma}$

(εξάλλου τη σχέση αυτή την δείξαμε στο ερώτημα α))

Έστω Μ το σημείο αναφοράς τότε

$\vec{B\Delta}=\vec{M\Delta}-\vec{MB}$ ①

$\vec{A\Gamma}=\vec{M\Gamma}-\vec{MA}$ ②

Η σχέση $\vec{B\Delta}=\vec{A\Gamma}$ γράφεται λόγω των ① και ② ως εξής: $\vec{M\Delta}-\vec{MB}=\vec{M\Gamma}-\vec{MA} \Leftrightarrow \vec{M\Delta}+\vec{MA}=\vec{M\Gamma}+\vec{MB}$

03.07.19

Μεθοδολογία (για την άσκηση 1.16)

Για ν.δ.ο. τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά (δηλ. ανήκουν πάνω στην ίδια ευθεία αρκεί ν.δ.ο. $\vec{AB}//\vec{A\Gamma}$ (ή $\vec{BA}//\vec{B\Gamma}$)

1.25) σελ. 28 Στεργίου

Απόδειξη

α) Αφού $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ τότε

$\vec{AE} - \vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$

$\vec{BE} = \vec{\Gamma\Delta}$ Άρα, ΒΕΔΓ #

Ομοίως, $\vec{AZ} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} \iff \vec{AZ} - \vec{A\Delta} = \vec{\Gamma B} \iff \vec{\Delta Z} = \vec{\Gamma B}$

Άρα, ΓΒΖΔ #

β. Ν.δ.ο $E \equiv Z$

Αρκεί ν.δ.ο $EZ = \vec{0}$

Έχουμε ότι

$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$

$\vec{AZ} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$\vec{AE} - \vec{AZ} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} - (\vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B})$

$\vec{ZE} = \vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{A\Delta} - \vec{\Gamma B}$

$\vec{ZE} = AB - A\Delta + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{\Gamma B}$

$\vec{ZE} = \vec{\Delta B} + \vec{B\Delta}$

$\vec{ZE} = \vec{\Delta\Delta}$

$\vec{ZE} = \vec{0}$

$\vec{EZ} = \vec{0}$

(σελ. 28 ασκ. 1.19)

α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

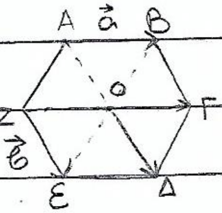
β) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}$

1.22 κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ

$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$

$\overrightarrow{ZE}=\vec{\beta}$

$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=$;



α) Με σημείο αναφοράς το Ο έχουμε ότι:

$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}$ ①

Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΓ του κανονικού εξαγώνου

οπότε ΑΒΓΟ #

Επομένως $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}$ ②

Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΖ, ΟΔ του κανονικού εξαγώνου

οπότε ΖΟΔΕ #

Επομένως $\overrightarrow{O\Delta}=\vec{\beta}$ ③

Από ① $\overset{②}{\underset{③}{\Longrightarrow}}$ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

β) Έχουμε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma}=\overrightarrow{ZO}+\overrightarrow{O\Gamma}$ ①

Αφού ΖΟΔΕ # τότε $\overrightarrow{ZO}=\overrightarrow{E\Delta}$

Όμως $\overrightarrow{E\Delta}=\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$. Άρα, $\overrightarrow{ZO}=\vec{\alpha}$

Αφού ΑΒΓΟ # τότε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O\Gamma}$ Όμως $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$

Άρα, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}$

Από τη σχέση ① έπεται $\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\alpha}=2\vec{\alpha}$

Επίσης, $\vec{AΔ}=\vec{AO}+\vec{OΔ}$ ②

Επειδή Ο μέσο του ΑΔ (διότι Ο κέντρο του ΑΒΓΕΖ έχουμε $\vec{AO}=\vec{OΔ}$

Άρα από τη σχέση ② παίρνουμε

$\vec{AΔ}=\vec{OΔ}+\vec{OΔ}=2\vec{OΔ}$. Όμως από το ερώτημα α) είδαμε $\vec{OΔ}=\vec{β}$

Συνεπώς, $\vec{AΔ}=2\vec{β}$

Έχουμε ότι Ο μέσο της ΕΒ (διότι Ο κέντρο του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ) Άρα, $\vec{EO}=\vec{OB}$ ③

Είναι $\vec{EB}=2\vec{EO}$ ④

Αφού ΟΓΔΕ # $\vec{OE}=\vec{ΓΔ}$

Άρα από τη σχέση ④ παίρνουμε $\vec{EB}=2\vec{EO}=-2\vec{OE}=-2\vec{ΓΔ}$.

Από το ερώτημα α) $\vec{ΓΔ}=\vec{β}-\vec{α}$

Άρα, $\vec{EB}=-2(\vec{β}-\vec{α})=2\vec{α}-2\vec{β}=2(\vec{α}-\vec{β})$

Άσκηση

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι $\vec{ΔM}=\vec{AΔ}$ και $\vec{BN}=\vec{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά

Επειδή ΑΒΓΔ # τότε $\Rightarrow \vec{AB}=\vec{ΔΓ}$ ①

$\vec{AΔ}=\vec{BΓ}$ ②

$\vec{ΔM}=\vec{AΔ} \overset{②}{\Rightarrow} \vec{ΔM}=\vec{BΓ}$ ③

$\vec{BN}=\vec{AB} \overset{①}{\Rightarrow} \vec{BN}=\vec{ΔΓ}$ ④

③ + ④ $\Rightarrow \vec{ΔM}+\vec{BN}=\vec{BΓ}+\vec{ΔΓ}$

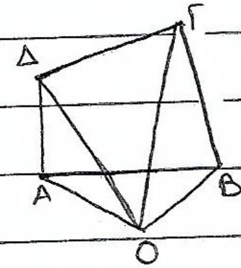
$\vec{ΔM}+\vec{ΓΔ}=\vec{BΓ}+\vec{NB}$

$\vec{ΓM}=\vec{NΓ}$

Άρα $\vec{ΓM}\parallel\vec{NΓ}$

Αλλά επειδή έχουν το Γ κοινό σημείο Μ, Γ, Ν συνευθειακά

(σελ. 20 ασκ. 2)



ΑΒΓΔ $\vec{\alpha}=\vec{OA}$, $\vec{\beta}=\vec{OB}$, $\vec{\gamma}=\vec{O\Gamma}$, $\vec{\delta}=\vec{O\Delta}$

$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$

τότε τι μπορείτε να πείτε για το ΑΒΓΔ;

Απάντηση

α) Έχουμε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta} \Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{OB}+\vec{O\Delta} \Leftrightarrow \vec{OA}-\vec{OB}=\vec{O\Delta}-\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{BA}=\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$

Άρα, ΑΒΓΔ #

β) Αν $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

τι μπορείτε να πείτε για το ΑΒΓΔ;

Απάντηση

Έχουμε ότι: $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{OA}-\vec{O\Gamma}|=|\vec{\Gamma A}|$

$|\vec{\beta}-\vec{\delta}|=|\vec{OB}-\vec{O\Delta}|=|\vec{\Delta B}|$

Αφού $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$ τότε $|\vec{\Gamma A}|=|\vec{\Delta B}|$

Άρα, το ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο με ίσες τις διαγωνίους

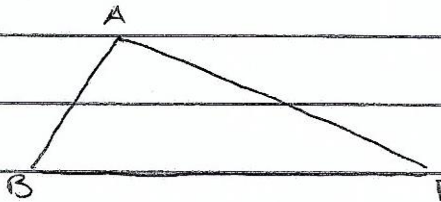
γ) Αν ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$ τότε τι συμπεραίνουμε για το ΑΒΓΔ;

Απάντηση

Λόγω των α), β) ΑΒΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Τριγωνική Ανισότητα

Υπενθυμίζουμε ότι από την Ευκλείδια Γεωμετρία πως ισχύει σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η εξής σχέση:



$(ΑΒ) \leq (ΑΓ) + (ΒΓ)$

Επίσης,

$|(ΑΓ) - (ΒΓ)| \leq (ΑΒ)$

Τελικά,

$|(ΑΓ) - (ΒΓ)| \leq (ΑΒ) \leq (ΑΓ) + (ΒΓ)$

Παρατηρούμε ότι $|\vec{ΑΒ}| = (ΑΒ)$, $|\vec{ΑΓ}| = (ΑΓ)$ και $|\vec{ΒΓ}| = (ΒΓ)$. Άρα, έχουμε

$||\vec{ΑΓ}| - |\vec{ΒΓ}|| \leq |\vec{ΑΒ}| \leq |\vec{ΑΓ}| + |\vec{ΒΓ}|$

$||\vec{ΑΓ}| - |\vec{ΒΓ}|| \leq |\vec{ΑΓ} + \vec{ΓΒ}| \leq |\vec{ΑΓ}| + |\vec{ΒΓ}|$

$||\vec{ΑΓ}| - |\vec{ΓΒ}|| \leq |\vec{ΑΓ} + ΓΒ| \leq |\vec{ΑΓ}| + |\vec{ΓΒ}|$

Παρατηρήσεις

1) Ισχύει ότι $|\vec{ΑΓ} + \vec{ΓΒ}| = |\vec{ΑΓ}| + |\vec{ΓΒ}|$ αν και μόνο αν $\vec{ΑΓ} \uparrow\uparrow \vec{ΓΒ}$

2) Ισχύει ότι: $|\vec{ΑΓ} + \vec{ΓΒ}| = ||\vec{ΑΓ}| + |\vec{ΓΒ}||$ αν και μόνο αν $\vec{ΑΓ} \uparrow\downarrow \vec{ΓΒ}$

1,27 / σελ. 29 Στεργίου

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα

$|\vec{\alpha}| \leq 2$ και $|\vec{\beta}| \leq 1$

Ν.δ.ο. α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq 3$

β) $|\vec{\alpha}-2\beta| \leq 4$

γ) $|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}| \leq 7$

δ) $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \leq 8$

Απάντηση

α) Έχουμε ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ ①

Αφού $|\vec{\alpha}| \leq 2$ και $|\vec{\beta}| \leq 1$ τότε $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \leq 2+1$

δηλ. $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \leq 3$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq 3$

β) Ισχύει ότι

$|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})+(-\vec{\beta})| =$

$|\underbrace{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}_{\vec{u}}+\underbrace{(-\vec{\beta})}_{\vec{v}}| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|-\vec{\beta}| =$

$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})|+|\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|-\vec{\beta}|+|\vec{\beta}| =$

$|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}| \leq 2+2\cdot 1 = 4$

δηλ. $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}| \leq 4$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι

$||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

γ) Είναι $|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}| \leq |2\vec{\alpha}|+|3\vec{\beta}|$ ①

$|2\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}+\vec{\alpha}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\alpha}|$

δηλ. $|2\vec{\alpha}| \leq 2|\vec{\alpha}|$ ②

$|3\vec{\beta}| = |2\vec{\beta}+\vec{\beta}| \le |2\vec{\beta}| + |\vec{\beta}| \le 2|\vec{\beta}| + |\vec{\beta}| = 3|\vec{\beta}|$

δηλ. $|3\vec{\beta}| \le 3|\vec{\beta}|$ ③

Από ② + ③ ⇒ $|2\vec{\alpha}| + |3\vec{\beta}| \le 2|\vec{\alpha}| + 3|\vec{\beta}|$ ④

Αφού $|\vec{\alpha}| \le 2$ τότε $2|\vec{\alpha}| \le 4$ ④ ⇒

Επίσης $|\vec{\beta}| \le 1$ τότε $3|\vec{\beta}| \le 3$ $\quad 2|\vec{\alpha}| + 3|\vec{\beta}| \le 7$ ⑤

Από ④,⑤ ⇒ $|2\vec{\alpha}| + |3\vec{\beta}| \le 7$ ⑥

Από ①,⑥ ⇒ $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| \le 7$

δ) $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le 8$

Έχουμε ότι $|3\vec{\alpha} + (-2\vec{\beta})| \le |3\vec{\alpha}| + |-2\vec{\beta}|$

δηλ. $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le |3\vec{\alpha}| + |-2\vec{\beta}|$ ①

Είναι $|3\vec{\alpha}| + |-2\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha}| + |2\vec{\beta}|$ ②

Από ①, ② ⇒ $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le |3\vec{\alpha}| + |2\vec{\beta}|$ ③

$|3\vec{\alpha}| \le 3|\vec{\alpha}|$

Πραγματικά

$|3\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\alpha}| + |\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}|$

Όμοιως $|2\vec{\beta}| \le 2|\vec{\beta}|$ ⑤

Από ④ + ⑤ ⇒ $|3\vec{\alpha}| + |2\vec{\beta}| \le 3|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}|$ ⑥

Από ③, ⑥ ⇒ $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le 3|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}|$ ⑦

Αφού $|\vec{\alpha}| \le 2$ τότε $3|\vec{\alpha}| \le 6$

Αφού $|\vec{\alpha}| \le 2$ τότε $3|\vec{\alpha}| \le 6$

$|\vec{\beta}| \le 1$ τότε $2|\vec{\beta}| \le 2$

$\oplus$

$3|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| \le 8$ ⑧

Από ⑦, ⑧ ⇒ $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \le 8$

128/σελ. 29 Στεργίου

α) Ν.δ.ο. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$

β) Ν.δ.ο. $|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

Απόδειξη

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$ ①

Ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\gamma}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$

β) Έχουμε ότι:

$|\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\beta}| = |(\vec{\alpha}-\vec{\beta})+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|$

δηλ. $|\vec{\alpha}| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|$

$$\boxed{\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}$$