Ασκήσεις Β' ομάδας σχολ. βιβλ.

1/σελ.88

Ν.δ.ο η εξίσωση $(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\delta)(y-\gamma)=0$ ① παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία: $A(\alpha,\gamma)$, $B(\beta,\gamma)$, $\Gamma(\beta,\delta)$ και $\Delta(\alpha,\delta)$ και ότι οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροι αυτού του κύκλου.

Απόδειξη: Η εξίσωση ① γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2-(\gamma+\delta)y+\gamma\delta=0$$

$$x^2+y^2-(\alpha+\beta)x-(\gamma+\delta)y+\alpha\beta+\gamma\delta=0 \quad ②$$

Είναι: $A=-(\alpha+\beta)$, $B=-(\gamma+\delta)$ και $\Gamma=\alpha\beta+\gamma\delta$

Έτσι, $A^2+B^2-4\Gamma=(-(\alpha+\beta))^2+(-(\gamma+\delta))^2-4(\alpha\beta+\gamma\delta)=$

$$=(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta-4\gamma\delta$$

$$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2-4\alpha\beta-4\gamma\delta$$

$$=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2$$

$$=(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2$$

Έχουμε ότι: $(\alpha-\beta)^2>0$ διότι $\alpha\neq\beta$

$(\gamma-\delta)^2>0$ διότι $\gamma\neq\delta$

Άρα, $(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2>0$ δηλ. $A^2+B^2-4\Gamma>0$

Συνεπώς, η εξίσωση ① παριστάνει κύκλο, τον οποίο ας πούμε C

Θα βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

Η εξίσωση ② γράφεται ως εξής:

$$x^2-2x\frac{(\alpha+\beta)}{2}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}+y^2-2y\frac{(\gamma+\delta)}{2}+\frac{(\gamma+\delta)^2}{4}-\frac{(\gamma+\delta)^2}{4}+\alpha\beta+$$

$$+\gamma\delta=0$$

$$\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2=\frac{(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta-4\gamma\delta}{4}$$

$$\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2=\frac{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2}{4}$$

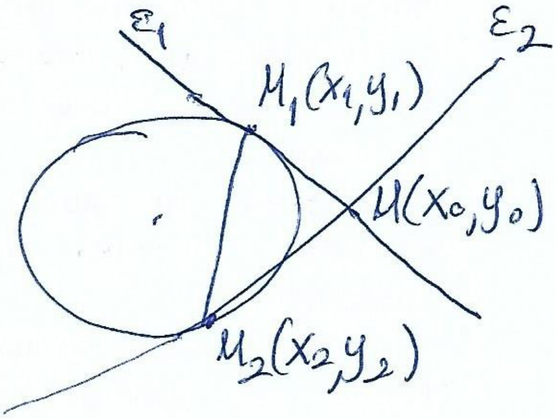
Αρα, ο κύκλος C έχει κεντρο το σημειο $K\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$ και ακτινα $\rho=\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2}{4}}=\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2}}{2}$

Οι συντεταγμενες των σημειων $A(\alpha,\gamma)$, $B(\beta,\gamma)$, $\Gamma(\beta,\delta)$ και $\Delta(\alpha,\delta)$ επαληθευουν την εξίσωση (1) οποτε, τα σημεια A, B, Γ και Δ ειναι σημεια του κυκλου C

Επισης, $(A\Gamma)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\delta-\gamma)^2}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2}=2\rho$

Ομοιως, $(B\Delta)=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2}=2\rho$

3/σελ:88



Εστω $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ τα σημεια επαφης των εφαπτομένων του κυκλου C που άγονται απο το σημειο $M(x_0,y_0)$

Η εφαπτομενη ε_1 στο σημειο $M_1(x_1,y_1)$ εχει εξισωση: $\varepsilon_1: x_1x+y_1y=\rho^2$

Ομοιως, η εφαπτομενη στο σημειο $M_2(x_2,y_2)$ εχει εξισωση $\varepsilon_2: x_2x+y_2y=\rho^2$

Αφου το σημειο $M(x_0,y_0)$ ανηκει στις ευθειες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ παιρνουμε

$$x_1x_0+y_1y_0=\rho^2 \quad (1)$$

$$x_2x_0+y_2y_0=\rho^2 \quad (2)$$

Απο τις σχεσεις (1), (2) επεται οτι τα σημεια $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ επαληθευουν την εξισωση $x_0x+y_0y=\rho^2$ Αρα, $(M_1M_2): x_0x+y_0y=\rho^2$

4/σελ: 88

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $x^2+y^2=(3\alpha)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=9\alpha^2$

Έστω $C_1: (x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$

Αν $M(x_1,y_1)$ το σημείο του κύκλου C και $G(x_2,y_2)$ το κέντρο βάρους του τριγώνου ΟΑΜ τότε ισχύει:

$\vec{OG}=\vec{GA}+\vec{GM}$ (γιατί;)

$\vec{OG}=\vec{OA}-\vec{OG}+\vec{OM}-\vec{OG}$

$\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OM})$

$(x_2,y_2)=\frac{1}{3}((\cancel{3}\alpha,0)+(\cancel{x}x_1,y_1))$

$(x_2,y_2)=\left(\frac{3\alpha+x}{3},\frac{y_1}{3}\right)$

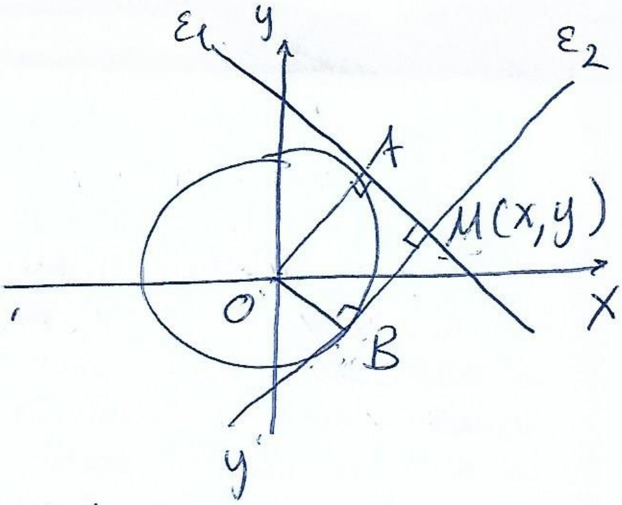
Άρα, $x_2=\frac{3\alpha+x_1}{3}$, $y_2=\frac{y_1}{3}$

Έχουμε $(x_2-\alpha)^2+y_2^2=\left(\frac{3\alpha+x_1}{3}-\alpha\right)^2+\left(\frac{y_1}{3}\right)^2=\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{9}=\frac{x_1^2+y_1^2}{9}=$

$=\frac{\cancel{9}\alpha^2}{\cancel{9}}=\alpha^2$

5/σελ:88

Εστω $M(x,y)$ ενα σημειο του επιπεδου
απο το οποιο οι εφαπτομενες προς
τον κυκλο $C: x^2+y^2=\rho^2$ ειναι καθετες
τις οποιες ας πουμε $\varepsilon_1, \varepsilon_2$



Εστω Α,Β τα σημεια επαφης με την
ε_1 και ε_2 αντιστοιχα
Επειδη $(OA)\perp\varepsilon_1$, $(OB)\perp\varepsilon_2$ (ως ακτινες
στην εφαπτομενη
στο σημειο επαφης)

και $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$ επεται οτι το τετραπλευρο ΑΟΒΜ ειναι τετραγωνο με πλευρα ιση με ρ
η διαγωνιος του τετραγωνου εχει μηκος $\sqrt{2}\rho$ (γιατι;)
Οποτε, η διαγωνιος του τετραγωνου ΟΑΒΜ ειναι η (ΟΜ)
Ομως, η διαγωνιος του τεφαγωνου

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ετσι, } (OM)=\sqrt{2}\rho \\ \text{Ομως, } (OM)=\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\rho \Leftrightarrow x^2+y^2=2\rho^2$$

Συνεπως, ο ζητουμενος γ.τ. των σημειων του επιπεδου
ειναι ο κυκλος $x^2+y^2=2\rho^2$

6/σελ:88

Εστω $M(x,y)$ ενα σημειο του επιπεδου
Το σημειο $M(x,y)$ ανηκει στον ζητουμενο γ.τ. αν και μονο αν

$$\frac{(MA)}{(MB)}=2 \quad (1)$$

Ειναι: $(MA)=|\vec{MA}|=\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(3+x)^2+y^2}$

$(MB)=\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+y^2}$

Αρα, η σχεση (1) γραφεται: $\sqrt{(3+x)^2+y^2}=2\sqrt{(3-x)^2+y^2}$

$$(3+x)^2+y^2=4(3-x)^2+4y^2$$

$$9+6x+x^2+y^2=36-24x+4x^2+4y^2$$

$$3x^2+3y^2-30x+27=0$$
$$x^2+y^2-10x+9=0$$
$$x^2-2\cdot5\cdot x+5^2-5^2+y^2+9=0$$
$$(x-5)^2+y^2=16$$
$$(x-5)^2+y^2=4^2$$

Αρα, ο ζητουμενος γ.τ. των σημειων $M(x,y)$ ειναι κυκλος με εξισωση $(x-5)^2+y^2=4^2$

9/σελ:89

Εστω $\varepsilon_1: x\sigma\upsilon\nu\theta+y\cdot\eta\mu\theta=\alpha$

$\varepsilon_2: x\,\eta\mu\theta-x\sigma\upsilon\nu\theta=\beta$

Θα βρουμε το σημειο επαφης των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ λυνοντας το συστημα

$$\left.\begin{aligned} x\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+y\cdot\eta\mu\theta&=\alpha\\ x\eta\mu\theta-y\,\sigma\upsilon\nu\theta&=\beta\end{aligned}\right\}(\Sigma)$$

Ειναι: $(\Sigma)\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x\sigma\upsilon\nu^2\theta+y\,\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta&=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\\ x\,\eta\mu^2\theta-y\,\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta&=\beta\cdot\eta\mu\theta\end{aligned}\right\}\overset{\oplus}{\Longrightarrow} x(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)=$
$=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\beta\eta\mu\theta$

Ομως, $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$ Αρα, $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\beta\cdot\eta\mu\theta$

Ομοιως, $(\Sigma)\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta+y\eta\mu^2\theta&=\alpha\cdot\eta\mu\theta\\ -x\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+y\sigma\upsilon\nu^2\theta&=-\beta\sigma\upsilon\nu\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=\alpha\eta\mu\theta-\beta\sigma\upsilon\nu\theta$

Αρα το σημειο τομης των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ειναι:

$$A(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\beta\eta\mu\theta,\ \alpha\eta\mu\theta-\beta\sigma\upsilon\nu\theta)$$

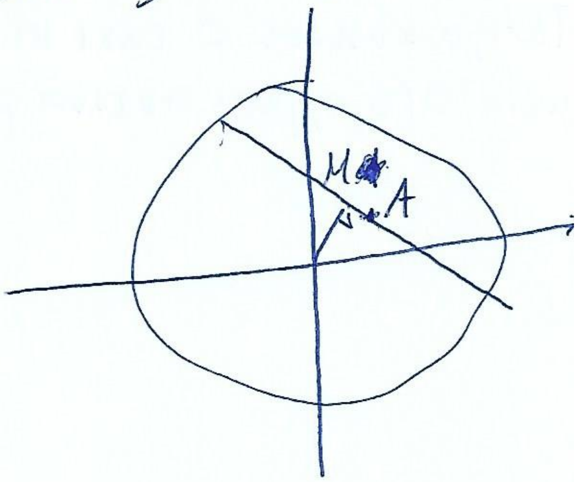
Ειναι $(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\beta\eta\mu\theta)^2+(\alpha\eta\mu\theta-\beta\sigma\upsilon\nu\theta)^2=\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta+$
$+\beta^2\eta\mu^2\theta+\alpha^2\eta\mu^2\theta-2\alpha\beta\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\theta=\alpha^2(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)+\beta^2(\eta\mu^2\theta+$
$+\sigma\upsilon\nu^2\theta)=\alpha^2+\beta^2$

10/σελ:88

Να βρειτε το γ.τ. των μέσων των χορδων του κυκλου $x^2+y^2=25$ που διερχονται απο το σημειο $A(2,4)$

Λύση: Εστω C ο κυκλος με εξίσωση $x^2+y^2=25$

Τότε, ο κυκλος C εχει κεντρο την αρχη των αξόνων (δηλ. το σημειο $O(0,0)$) και ακτινα $\rho=5$



Εστω μια χορδη του κυκλου $C: x^2+y^2=25$ που διερχεται απο το σημειο $A(2,4)$ και $M(x,y)$ το μεσο της χορδής αυτης

Τότε, $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM}$

Γνωριζουμε οτι: $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ (1)

Ειναι: $\overrightarrow{OM}=(x,y)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-2,y-4)$

Ετσι, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = x\cdot(-2+x)+y\cdot(-4+y)$ (2)

Απο (1), (2) $\Rightarrow$ $x(-2+x)+y\cdot(-4+y)=0$

$$x(x-2)+y\cdot(y-4)=0$$

$$x^2-2x+y^2-4y=0$$

$$x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4=0$$

$$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4=0$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

Αρα, ο ζητουμενος γ.τ. ειναι κυκλος με κεντρο το σημειο $K(1,2)$ και ακτινα $\rho=\sqrt{5}$