22.10.19

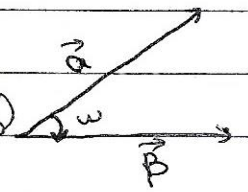
Υπενθύμιση:

Ορισμός: (Γωνία διανυσμάτων)

Έστω $\vec{α}, \vec{β}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Γωνία του διανύσματος $\vec{β}$ με το διάνυσμα $\vec{α}$ ονομάζεται η κυρτή γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί πάνω στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$ το διάνυσμα $\vec{α}$ μέχρι να γίνει ομόρροπο με το $\vec{β}$.

Συμβολισμός: $ω = (\widehat{\vec{α}, \vec{β}})$

$(\widehat{\vec{β}, \vec{α}}) = -(\widehat{\vec{α}, \vec{β}})$



Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: Έστω $\vec{α}, \vec{β}$ δύο διανύσματα. Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των $\vec{α}, \vec{β}$ το γινόμενο των μέτρων επί το συνημίτονο της γωνίας $φ = (\widehat{\vec{α}, \vec{β}})$.

Συμβολισμός: $\vec{α} \cdot \vec{β}$

Δηλαδή, $\vec{α} \cdot \vec{β} = |\vec{α}||\vec{β}| \cdot συν(\widehat{\vec{α}, \vec{β}})$

Παρατήρηση: Το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{α}, \vec{β}$ είναι αριθμός.

Ισοδύναμος ορισμός: Έστω $\vec{α} = (x_1, y_1)$ και $\vec{β} = (x_2, y_2)$. Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των $\vec{α}, \vec{β}$ το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων αντεταγμένων.

Δηλαδή, $\vec{α} \cdot \vec{β} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

1. $\vec{α} \cdot \vec{α} = \vec{α}^2 = |\vec{α}|^2$
2. $\vec{α} \cdot \vec{β} = \vec{β} \cdot \vec{α}$ (συμμετρικότητα)
3. $\vec{α}(λ\vec{β} + μ\vec{γ}) = λ\vec{α}\vec{β} + μ\vec{α}\vec{γ}$

Απόδειξη ιδιοτήτων

1. Έχουμε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\alpha}}) = 0^\circ$

Άρα $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}||\vec{\alpha}|\,\text{συν}0^\circ = |\vec{\alpha}|^2\cdot 1 = |\vec{\alpha}|^2$

2. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$

Τότε, $\vec{\alpha}\vec{\beta} = x_1x_2+y_1y_2 = x_2x_1+y_2y_1 = \vec{\beta}\vec{\alpha}$

3. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$

Έχουμε ότι $\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma} = \lambda(x_2,y_2)+\mu(x_3,y_3) = (\lambda x_2,\lambda y_2)+(\mu x_3,\mu y_3) =$

$= (\lambda x_2+\mu x_3, \lambda y_2+\mu y_3)$

Άρα, $\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}) = x_1(\lambda x_2+\mu x_3)+y_1(\lambda y_2+\mu y_3) =$

$= \lambda x_1x_2+\mu x_1x_3+\lambda y_1y_2+\mu y_1y_3 =$

$= \lambda(x_1x_2+y_1y_2)+\mu(x_1x_3+y_1y_3) =$

$= \lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta})+\mu(\vec{\alpha}\vec{\gamma})$.

Πρόταση: Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=0$

Απόδειξη: Υποθέτω ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ θ.δ.ό $\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$

Αφού $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ αν $\varphi=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ τότε $\varphi=90^\circ$. Άρα $\text{συν}90^\circ=0$

Οπότε, $\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\varphi$

$\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,0 = 0$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$

και θ.δ.ό $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Διακρίνω περιπτώσεις

1η περίπτωση: Αν ένα από τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\varphi=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=90^\circ$

2η περίπτωση: Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, $\vec{\beta}\neq 0$ τότε $|\vec{\alpha}|\neq 0$ και $|\vec{\beta}|\neq 0$.

Άρα από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

Όμως, $\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$

$|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0 \overset{|\vec{\alpha}|\neq 0,\ |\vec{\beta}|\neq 0}{\Longrightarrow}$ Άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=90^\circ \Rightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Δ.47

9. Αν $\vec{u}=|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a}$

$\vec{v}=|\vec{a}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{a}$

ν.δ.ο $\vec{u}\perp\vec{v}$

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Είναι:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(|\vec{a}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{a})(|\vec{a}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{a})=(|\vec{a}|\vec{\beta})^2-(|\vec{\beta}|\vec{a})^2=$

$=||\vec{a}|\vec{\beta}|-||\vec{\beta}|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2-|\vec{\beta}|^2\cdot|\vec{a}|^2=0$

Διότι, $(|\vec{a}|\cdot\vec{\beta})^2=||\vec{a}|\vec{\beta}|^2=(||\vec{a}||\vec{\beta}|)^2=(|\vec{a}||\vec{\beta}|)^2=|\vec{a}|^2|\vec{\beta}|^2$

Άρα, $\vec{u}\perp\vec{v}$

Παρατηρήσεις

1. Αν $\vec{a}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε προφανώς $\vec{a}\vec{\beta}=0$ (παρατηρήστε $|\vec{a}|=0$ ή $|\vec{\beta}|=0$)
2. Αν $\vec{a}\upuparrows\vec{\beta}$ τότε ~~το εσωτερικό γινόμενο~~ $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=|\vec{a}||\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως
3. Αν $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{a}\vec{\beta}=-|\vec{a}||\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Ανισότητα C.B.S

σ.1.48

2.i) Αν $\vec{a},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τότε ν.δ.ό $|\vec{a}\vec{\beta}|\leq|\vec{a}||\vec{\beta}|$

Απόδειξη: Έχουμε ότι $|\vec{a}\vec{\beta}|=||\vec{a}||\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})|=||\vec{a}||\vec{\beta}||\cdot|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})|=$

$|\vec{a}||\vec{\beta}||\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})|$ (1)

Δηλαδή, $|\vec{a}\vec{\beta}|=|\vec{a}||\vec{\beta}||\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})|$

Γνωρίζουμε ότι $-1\leq\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})\leq1$

$|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})|\leq1$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow|\vec{a}\vec{\beta}|\leq|\vec{a}||\vec{\beta}|$

1/σελ.47 σχολ βιβλ.

Αν $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,5)$ τότε:

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$; , $(2\vec{\alpha})(-3\vec{\beta})=$; και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})=$;

Λύση: Εχουμε οτι:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_{\vec{\alpha}}x_{\vec{\beta}}+y_{\vec{\alpha}}y_{\vec{\beta}}=-1\cdot2+3\cdot5=-2+15=13$

Ενας τρόπος ωστε να βρουμε το εσωτερικο γινόμενο των διανυσματων $2\vec{\alpha}$, $-3\vec{\beta}$ ειναι μέσω του ορισμου του εσωτερικου γινομένου Δηλαδη υπολογιζουμε πρωτα τις συντεταγμενες των διανυσματων $2\vec{\alpha}$ και $-3\vec{\beta}$ και στη συνεχεια βρισκουμε το εσωτερικο γινομενο αυτων με την βοηθεια του ισοδυναμου ορισμου Δηλαδη, για τις συντεταγμενες των διανυσματων $2\vec{\alpha}$ και $-3\vec{\beta}$ εχουμε:

$2\vec{\alpha}=2(-1,3)=(-1\cdot2,3\cdot2)=(-2,6)$
$-3\vec{\beta}=-3(2,5)=(2(-3),5\cdot(-3))=(-6,-15)$

Αρα, απο τον ισοδύναμο ορισμο του εσωτερικου γινομένου προκυπτει οτι:

$(2\vec{\alpha})(-3\vec{\beta})=(-2)(-6)+6\cdot(-15)=12-90=-78$

Παρατηρήστε οτι μπορουμε να υπολογισουμε το Εσωτερικο γινομενο των διανυσματων $2\vec{\alpha}$ και $-3\vec{\beta}$ με την βοήθεια των ιδιοτητων του εσωτερικου γινομένου Ετσι, εχουμε: $(2\vec{\alpha})(-3\vec{\beta})=(2(-3))(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=-6(\vec{\alpha}\vec{\beta})=$
$=-6(13)=-78$

Τώρα, θα μπορουσε κανεις να υπολογισει το εσωτερικο γινομενο των διανυσματων $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ με τη βοήθεια του ισοδύναμου ορισμού του εσωτερικού γινομένου (αφού πρώτα εβρίσκε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων) Εμείς θα βρούμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου

Εχουμε οτι

$$(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})-\vec{\beta}^2$$
$$= 3|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-|\vec{\beta}|^2$$
$$= 3|\vec{\alpha}|^2-2\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-|\vec{\beta}|^2$$

Αρα,

$$(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 3|\vec{\alpha}|^2-2\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

Ειναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Συνεπως, $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(3\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 3\cdot(\sqrt{10})^2-2\cdot 13-(\sqrt{29})^2$

$$= 3\cdot 10-26-29$$
$$= 30-26-29 = -25$$

σελ.47

1. ii) Αν $\vec{u} = (\kappa, \lambda)$ τότε να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ, λ ώστε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{u}, \vec{\beta}$ να είναι μηδέν.

Λύση: Αφού $\vec{u} \cdot \vec{\beta} = 0$ και $\vec{u} \cdot \vec{\beta} = 2\kappa + 5\lambda$ τότε $\boxed{2\kappa + 5\lambda = 0}$ (A)

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $u_1 = (0,0)$, $u_2 = (-5, 2)$, $u_3 = (5, -2)$ ικανοποιούν τη σχέση (A)

Συνεπώς, $\vec{u}_1 \cdot \vec{\beta} = 0$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{\beta} = 0$, $\vec{u}_3 \cdot \vec{\beta} = 0$

Έστω B το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{u} = (\kappa, \lambda)$ τα οποία ικανοποιούν τη σχέση (A) τότε κάθε διάνυσμα που ανήκει στο B έχει εσωτερικό γινόμενο με το $\vec{\beta}$ ίσο με το 0. Έτσι, κάθε διάνυσμα που ανήκει στο σύνολο B είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$. Άρα, τα διανύσματα του συνόλου B είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Για παράδειγμα παρατηρήστε ότι:

$\vec{u}_2 = -\vec{u}_3$ έτσι $\vec{u}_2 \parallel \vec{u}_3$

2/σελ:47 σχολ. βιβλ.

Αν $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(4,2)$ και $\vec{w}=(6,0)$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $\vec{u}\cdot(7\vec{v}+\vec{w})$ ii) $|\vec{u}|\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$ iii) $|(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}|$ και iv) $(|\vec{u}|\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$

Λύση: Έχουμε ότι:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot4+2\cdot2=8$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=1\cdot6+2\cdot0=6+0=6$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=4\cdot6+2\cdot0=24+0=24$

$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$|\vec{v}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$|\vec{w}|=\sqrt{6^2+0^2}=\sqrt{36+0}=\sqrt{36}=6$

i) $\vec{u}\cdot(7\vec{v}+\vec{w})=7(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{u}\cdot\vec{w}=7\cdot8+6=56+6=62$

ii) $|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})=\sqrt{5}\cdot24=24\sqrt{5}$

iii) $|(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}|=|\vec{u}\cdot\vec{v}|\cdot|\vec{w}|=|8|\cdot6=8\cdot6=48$

iv) $(|\vec{u}|\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=|\vec{u}|\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})=24\sqrt{5}$

3/σελ:47 σχολ. βιβλ.

Αν $\vec{\alpha}=(1,0)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τότε $\lambda=;$ ώστε

i) $\vec{\alpha}\perp\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$

ii) $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$

Λύση: i) Είναι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$

$|\vec{\beta}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot1+1\cdot0=1+0=1$

Αφού $\vec{\alpha}\perp\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=0$. (1)

Όμως, $\vec{\alpha}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2+\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=|\vec{\alpha}|^2+\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=1^2+\lambda\cdot1=1+\lambda$

Οπότε, από τη σχέση (1) παίρνουμε $1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1$

ii) Ομοίως, αφού $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=0$ (2)

Όμως, $\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda|\vec{\beta}|^2=1+\lambda(\sqrt{2})^2=1+2\lambda$

Συνεπώς, από τη σχέση (2) παίρνουμε $1+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$

4/σελ:47 σχολ βιβλ.

Να βρειτε το διανυσμα που ειναι καθετο στο $\vec{u}=(3,-2)$ και εχει μετρο ισο με 1

Λύση: Εστω $\vec{v}=(x,y)$ το διανυσμα που ειναι κάθετο στο $\vec{u}=(3,-2)$ και $|\vec{v}|=1$

Αφου $\vec{v}\perp\vec{u}$ τοτε $\left.\begin{array}{l}\vec{v}\cdot\vec{u}=0\\ \text{Ομως, } \vec{v}\cdot\vec{u}=3x-2y\end{array}\right\}\Rightarrow 3x-2y=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}y$ ①

Εχουμε οτι $\left.\begin{array}{l}|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}\\ |\vec{v}|=1\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow x^2+y^2=1$ ②

Η σχεση ② λογω της ① γινεται $\left(\frac{2}{3}y\right)^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9}y^2+y^2=1 \Leftrightarrow 4y^2+9y^2=9 \Leftrightarrow 13y^2=9 \Leftrightarrow y^2=\frac{9}{13}$

$\Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow y=\pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Αν $y=\frac{3\sqrt{13}}{13}$ τοτε απο την ① $\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Αρα, $\vec{v}_1=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

Αν $y=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$ τοτε απο την ① $\Rightarrow x=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Αρα, $\vec{v}_2=\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

10/σελ:48 σχολ. βιβλ.

Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τοτε ν.δ.ο $\vec{v}\perp\vec{\beta}$

οπου

$$\vec{v}=\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

Αποδειξη: Αρκει ν.δ.ο $\vec{v}\cdot\vec{\beta}=0$

Ειναι $\vec{v}\cdot\vec{\beta}=(\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta})\vec{\beta}=\vec{\beta}^2(\vec{\alpha}\vec{\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}^2=$

$=|\vec{\beta}|^2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\alpha}\vec{\beta})|\vec{\beta}|^2=0$