24.9.19

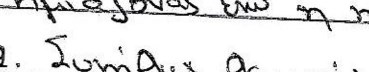
Συντεταγμένες στο επίπεδο.

Θεωρούμε μια ευθεία xx' του επιπέδου πάνω στην οποία επιλέγουμε δύο σημεία O και I έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{OI}=\vec{i}$ να έχει μέτρο ίσο με 1 (μοναδιαίο) να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox.

Λέμε ότι έχουμε έναν άξονα στο επίπεδο με αρχή το σημείο O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{OI}=\vec{i}$.

Παρατηρήσεις: 1. Η ημιευθεία Ox λέγεται θετικός ημιάξονας ενώ η ημιευθεία Ox' λέγεται αρνητικός.
2. Συνήθως θεωρούμε τη θετική φορά προς τα δεξιά.

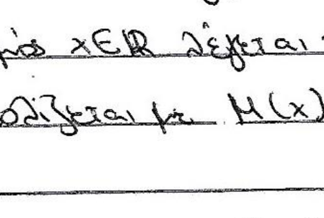
Θεωρούμε στο επίπεδο έναν άξονα x'x με αρχή το σημείο O και μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{OI}=\vec{i}$. Για κάθε σημείο M στον άξονα x'x υπάρχει μοναδικός αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ώστε $\vec{OM}=x\vec{i}$ (άρα $\vec{OM}\parallel\vec{OI}$)



Συνεπώς, σε κάθε σημείο Μ του άξονα $x'x$ αντιστοιχεί ένας $x \in \mathbb{R}$ αλλά και αντίστροφα από την σχέση $\vec{OM} = x\vec{i}$ συμπεραίνουμε ότι σε κάθε αριθμό $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί ένα σημείο Μ του άξονα $x'x$. Με άλλα λόγια υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του άξονα $x'x$ και των στοιχείων του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ λέγεται τετμημένη του σημείου Μ και συμβολίζεται με $M(x)$.

Θεωρούμε στο επίπεδο δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή το σημείο Ο και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα.



Από τυχόν σημείο Α του επιπέδου φέρουμε ευθείες παράλληλες στον $x'x$ και στον $y'y$ αντίστοιχα.

Έστω A_x, A_y τα σημεία τομής των παράλληλων ευθειών προς τους άξονες από το σημείο Α με τον $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

Έστω x η τετμημένη του A_x ως προς τον $x'x$ και y η τεταγμένη του σημείου A_y ως προς τον $y'y$. Άρα, το σημείο Α αντιστοιχεί στο ζεύγος (x, y)

πραγματικών αριθμών.
Επομένως, κάθε σημείο Α του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος (x, y) αλλά και αντίστροφα σε κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) αντιστοιχεί ένα σημείο Α του επιπέδου. Πράγματι, από το σημείο A_x με τετμημένη x ως προς τον $x'x$ φέρουμε μια ευθεία ε_1 παράλληλη στον $y'y$ και από το σημείο A_x με τεταγμένη y φέρουμε παράλληλη ευθεία ε_2 ως προς τον $x'x$. Το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το ζητούμενο σημείο.

Παρατήρηση:
Όταν έχουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$, $y'y$ στο επίπεδο με κοινή αρχή το σημείο Ο και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα τότε λέμε ότι έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα ή ένα καρτεσιανό επίπεδο Oxy.

Συντεταγμένες διανύσματος
Πρόταση: Κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$, δηλ. αν $\vec{a}$ ένα διάνυσμα τότε υπάρχουν μοναδικοί $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Παρατήρηση: Ο αριθμός x λέγεται τετμημένη και ο αριθμός y λέγεται τεταγμένη του διανύσματος $\vec{a}$.
Συμβολισμός: $\vec{a} = (x, y)$ ή $\vec{a}(x, y)$

Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού

Πρόταση: Έστω $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και

$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Τότε, ισχύουν τα εξής:

1. $\vec{a}+\vec{\beta}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$
2. $\vec{a}-\vec{\beta}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$
3. $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$
4. $\lambda\vec{a}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2)$

Απόδειξη

1. Αφού $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$

Τότε, $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ (1)

$\vec{\beta}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ (2)

Άρα από (1) + (2) $\Rightarrow \vec{a}+\vec{\beta}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=$

$(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$

Άρα, $\vec{a}+\vec{\beta}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

2. Συνεχίζοντας ομοίως, από (1) - (2) $\Rightarrow$

$\vec{a}-\vec{\beta}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$

3. Έχουμε ότι

$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1 i+y_1 j)=(\lambda x_1)i+(\lambda y_1)j$

Άρα $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$

4. Ομοίως, $\mu\vec{\beta}=(\mu x_2, \mu y_2)$

Συνεπώς, $\lambda\vec{a}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_1)$

Συντεταγμένες διανυσματικής ακτίνας μέσου

Πρόταση: Αν $\vec{OA}=(x_1, y_1)$ και $\vec{OB}=(x_2, y_2)$

Τότε, αν Μ το μέσο του ΑΒ ισχύει $\vec{OM}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Απόδειξη: Αφού $\vec{OA}=(x_1, y_1)$, $\vec{OB}=(x_2, y_2)$

Τότε, $\vec{OA}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ και $\vec{OB}=x_2 i+y_2 j$

Γνωρίζουμε ότι:

$\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$ (1)

Έχουμε ότι:

$\vec{OA}+\vec{OB}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

Οπότε,

$\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})=\frac{1}{2}(x_1+x_2, y_1+y_2)=\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1, y_2)\right]=$
$=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Άρα από την (1) $\Rightarrow \vec{OM}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

Πρόταση: Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2+y_2)$ τότε $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

Απόδειξη: Αφού $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\vec{OA}=(x_1, y_1)$, $\vec{OB}=(x_2, y_2)$

Γνωρίζουμε ότι $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$

Όμως, $\vec{OB}-\vec{OA}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ διότι

$\vec{OA}=(x_1, y_1)$, $\vec{OB}=(x_2, y_2)$

Άρα, $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

Μέτρο διανύσματος με γνωστές συντεταγμένες

<u>Πρόταση</u>: Αν $\vec{OA} = (x, y)$ τότε

$$|\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω A_x, A_y οι προβολές του σημείου A στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα

Τότε, $\vec{OA_x} = x\vec{i}$, $\vec{OA_y} = y\vec{j}$

Άρα, $(OA_x) = |\vec{OA_x}| = |x\vec{i}| = |x||\vec{i}| = |x|$

$(OA_y) = |\vec{OA_y}| = |y\vec{j}| = |y||\vec{j}| = |y|$

Έχουμε ότι

$|\vec{OA}|^2 = (OA)^2 = (OA_x)^2 + (OA_y)^2 = |OA_x|^2 + |OA_y|^2 =$

$|x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$

Άρα $|\vec{OA}|^2 = x^2 + y^2$

$|\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

<u>Παρατήρηση</u>

Εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι, αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

Τότε, $(AB) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Συνθήκη παραλληλίας με συντεταγμένες

Αν $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε ορίζουσα λέγεται η διαφορά $\alpha y - \beta x$ και με συμβολίζεται με:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}$$

δηλαδή, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix} = \alpha y - \beta x$

<u>Πρόταση</u>: Αν $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$$

<u>Ασκήσεις</u>:

σελ.39

1. $M(x,y)$

i) $|x|=2$

ii) $|x|<2$

iii) $|y|>2$

iv) $|x|=|y|$

i) Τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται στις ευθείες $\varepsilon_1: x=-2$ και $\varepsilon_2: x=2$

ii) Είναι: $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία της ζώνης των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

iii) $|y|>2 \Leftrightarrow y>2$ ή $y<-2$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία που βρίσκονται εκτός της ζώνης των $\varepsilon_3: y=-2$ και $\varepsilon_4: y=2$.

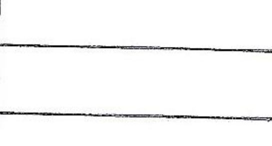
iv) $|x|=|y| \Leftrightarrow |x|^2=|y|^2 \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0$

$x-y=0$ ή $x+y=0$

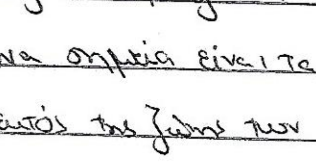
$x=y$ ή $x=-y$

Τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_5: y=x$ ή $\varepsilon_6: y=-x$

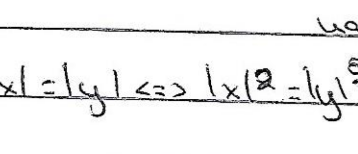
ii)



iii)



iv)



$\varepsilon_5 \to$ διχοτόμος 1,3 τεταρτημορίου

$\varepsilon_6 \to$ διχοτόμος 2,4 τεταρτημορίου σελ.39

3. $\vec{a}=(\lambda^2-4,\ \lambda^2-3\lambda+2)$

i) Αν $\vec{a}=\vec{0}$ τότε έχουμε:

$\lambda^2-4=0$ ή $\lambda^2-3\lambda+2=0$

$(\lambda+2)(\lambda-2)=0$ ή $\lambda(\lambda-3)=2$

$\lambda+2=0$ ή $\lambda-2=0$ ή $\lambda=2$ ή $\lambda=3+2$

$\lambda=-2$ ή $\lambda=2$ ή $\lambda=2$ ή $\lambda=5$

Άρα $\lambda=2$

σελ.39

4. Αν $\vec{a}=\vec{\beta}$ τότε έχουμε:

$\lambda^2-3\lambda+2=\lambda^2-5\lambda+6$ και $2\lambda^2-3\lambda-2=-3\lambda^2+7\lambda-2$

$\lambda^2-\lambda^2-3\lambda+5\lambda=-2+6$ $\quad$ $2\lambda^2+3\lambda^2-3\lambda-7\lambda=2-2$

$2\lambda=4$ $\quad$ $5\lambda^2-10\lambda=0$

$\lambda=2$ $\quad$ $5\lambda(\lambda-2)=0$

$\lambda=0$ ή $\lambda=2$

Άρα $\lambda=2$

σελ.39

5. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = x^2+4 \iff x^2=4 \iff x=2$ ή $x=-2$

Αν $x=2$ τότε $\vec{a}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,2)$

Αλλά $\vec{\beta}=2(2,1)$ οπότε $\vec{\beta}=2\vec{a}$ άρα $\vec{\beta}\upuparrows\vec{a}$

Αν $x=-2$ τότε $\vec{a}=(-2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,-2)$

Αλλά $\vec{\beta}=-2(-2,1)$ οπότε $\vec{\beta}=-2\vec{a}$ άρα $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{a}$

σελ. 39

6. $\vec{u} = (3, 4)$

Το διάνυσμα θα έχει την μορφή $\lambda\vec{u}$ και $|\lambda\vec{u}| = 2|\vec{u}|$.

Άρα $|\lambda||\vec{u}| = 2|\vec{u}| \Leftrightarrow |\lambda| = 2$ άρα $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$

Άρα $\lambda\vec{u} = (6, 8)$ ή $\lambda\vec{u} = (-6, -8)$.

σελ. 39

7. α) Γ μέσο του $\vec{OA}$ άρα $\vec{O\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{OA} \Leftrightarrow \boxed{\vec{O\Gamma} = \frac{1}{2} i}$

$\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{O\Delta}$ άρα $\boxed{\vec{O\Delta} = \vec{j} + \vec{i}}$

Ε μέσο του $\vec{AB}$ άρα $\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ (1)

Αλλά $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{AB} = j - i$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\vec{OE} = \frac{1}{2}(j - i)}$

$\vec{OZ} = 2\vec{OB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{OZ} = 2j}$

$\vec{OK} = 2\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{OK} = 2i + \frac{1}{2}j}$

$\vec{OH} = 2\vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{OH} = 2i + j}$

β). $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{O\Delta} - \vec{O\Gamma} = j + i - \frac{1}{2}i \Leftrightarrow 2\vec{\Gamma\Delta} = 2j + 2i - i \Leftrightarrow 2\vec{\Gamma\Delta} = 2j + i \Leftrightarrow \vec{\Gamma\Delta} = j + \frac{1}{2}i$

$\vec{KA} = \vec{OA} - \vec{OK} = i - 2i - \frac{1}{2}j \Leftrightarrow 2\vec{KA} = 2i - 4i - j \Leftrightarrow \vec{KA} = \frac{-2i - j}{2} = -i - \frac{1}{2}j$

$\vec{H\Delta} = \vec{O\Delta} - \vec{OH} = \cancel{j} + i - 2i - \cancel{j} = -i$

$\vec{K\Delta} = \vec{O\Delta} - \vec{OK} = j + i - 2i - \frac{1}{2}j \Leftrightarrow 2\vec{K\Delta} = 2j - 2i - j \Leftrightarrow \vec{K\Delta} = \frac{j - 2i}{2} = -i + \frac{1}{2}j$

$\vec{O\Theta} = i + \frac{1}{2}i + j \Leftrightarrow 2\vec{O\Theta} = 2i + i + 2j \Leftrightarrow \vec{O\Theta} = \frac{3i + j}{2} = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}j$

$\vec{H\Theta} = \vec{O\Theta} - \vec{OH} = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}j - 2i - j \Leftrightarrow \vec{H\Theta} = \frac{3i + j - 4i - 2j}{2} \Leftrightarrow \vec{H\Theta} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j$

$\vec{ZA} = \vec{OA} - \vec{OZ} = i - 2j$

$\vec{KZ} = \vec{OZ} - \vec{OK} = 2j - 2i - \frac{1}{2}j \Leftrightarrow \vec{KZ} = \frac{4j - 4i - j}{2} = \frac{3}{2}j - 2i$

σελ. 39

2. $A = 2$ και 1

$B = 3$ και 4

$\Gamma = 5$ και 6

$\Delta = |\alpha - 1|$ και $|\beta + 2|$

$M = |x|$ και $|y|$

Παρατηρήσεις:

1. Ένα σημείο ανήκει στον άξονα $x'x$ όταν έχει τεταγμένη 0. Ενώ ανήκει στον $y'y$ όταν έχει τετμημένη ίση με το 0.
2. Ένα διάνυσμα $\vec{a}$ είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ όταν έχει τετμημένη ίση με το 0. Ενώ το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ όταν έχει τεταγμένη ίση με το 0.
3. Ένα διάνυσμα $\vec{a}$ είναι ίσο με το $\vec{0}$ αν και μόνο αν έχει τις συντεταγμένες του ίσες με το 0. Δηλαδή αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε $\vec{a} = \vec{0} \iff x = 0$ και $y = 0$
4. Έστω ένα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta} \iff x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$

σελ. 39

3. ii) $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} \parallel x'x$

Αφού $\vec{a} \parallel x'x$ τότε από παρατήρηση 2) έπεται ότι

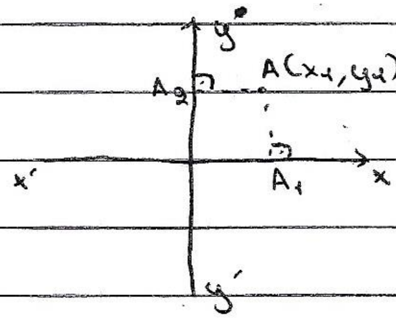
$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2 \rightarrow$ απορρίπτεται

Αφού το $\vec{a} \neq 0$ τότε $\lambda \neq 2$ Άρα $\boxed{\lambda = 1}$

Παρατήρηση:

Έστω $A(x_1, y_1)$ ένα σημείο.

Τότε η απόσταση του σημείου A από τον x'x είναι ίση με την τεταγμένη του ~~Β~~ σημείου A, δηλαδή, είναι ίση με y_1. Αντίστοιχα η απόσταση του σημείου A από τον y'y είναι ίση με την τετμημένη δηλαδή είναι ίση με x_1



σελ. 39

2. $A(-1, 2)$. Έστω d_1 η απόσταση του A από τον x'x και d_2 η απόσταση του A από τον y'y τότε

$d_1 = |2| = 2$ και $d_2 = |-1| = 1$

$\Gamma(-5, -6)$ Έστω d_1, d_2 οι αποστάσεις του σημείου Γ από τον y'y, x'x αντίστοιχα.

Τότε, $d_1 = |-5| = 5$

$d_2 = |-6| = 6$

$\Delta(\alpha - 1, \beta + 2)$

Έστω d_1, d_2 οι αποστάσεις του Δ από τους y'y και x'x. Τότε, $d_1 = |\alpha - 1|$ και $d_2 = |\beta + 2|$.

σελ. 39

5. $\vec{\alpha}=(x,1)$, $\vec{\beta}=(4,x)$

$x=$; ώστε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

Λύση: Αφού $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$

Συνεπώς $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}=x^2-1\cdot 4=x^2-4$

Άρα $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Αν $x=2$ τότε $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,2)$

Οπότε $\vec{\beta}=(4,2)=(2\cdot 2,\ 2\cdot 1)=2(2,1)=2\vec{\alpha}$

δηλ. $\vec{\beta}=2\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

Αν $x=-2$ τότε $\vec{\alpha}=(-2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,-2)$

Είναι:

$\vec{\beta}=(4,-2)=(2\cdot 2,\ -1\cdot 2)=2(2,-1)=-2(-2,1)=$

$-2\vec{\alpha}$ δηλ. $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$. Άρα $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. Οπότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow x$

σελ. 39

6. Λύση: Είναι $|\vec{u}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Έστω $\vec{v}=(x,y)$ τέτοιο ώστε $\vec{v}\parallel\vec{u}$ και $|\vec{v}|=10$

Αφού $\vec{u}\parallel\vec{v}$ τότε $\det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & y \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$3y-4x=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x$ (1)

Αφού $|\vec{v}|=10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=10 \Leftrightarrow x^2+y^2=100 \Leftrightarrow$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2+\left(\frac{4}{3}x\right)^2=100 \Leftrightarrow x^2+\frac{16}{9}x^2=100 \Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2=100 \Leftrightarrow$

$25x^2=900 \Leftrightarrow x^2=\frac{900}{25} \Leftrightarrow x^2=\frac{9\cdot \overset{4}{\cancel{100}}}{\cancel{25}} \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x$

Αν $x=6$ τότε $\overset{(1)}{\Rightarrow} y=8$

Οπότε, $\vec{v}=(6,8)$

Αν $x=-6$ τότε $\overset{(1)}{\Rightarrow} y=-8$

Οπότε $\vec{v}=(-6,-8)$

σελ. 480

8. $A=(-1,6)$ $B=(-9,-2)$

Βρείτε σημείο του $x'x$ ώστε το Μ να ισαπέχει από τα A, B

Λύση: Αφού Μ είναι σημείο του $x'x$ τότε $M(x,0)$

επειδή το σημείο Μ ισαπέχει από τα σημεία A,B

ισχύει $(MA)=(MB)$

Είναι $(MA)=\sqrt{(-1-x)^2+(6-0)^2}=\sqrt{(1+x)^2+36}$ κ

$$(MB)=\sqrt{(x_B-x_M)^2+(y_B-y_M)^2}=\sqrt{(-9-x)^2+(-2-0)^2}=$$
$$=\sqrt{(9+x)^2+4}$$

Άρα

$$\left(\sqrt{(1+x)^2+36}\right)^2=\left(\sqrt{(9+x)^2+4}\right)^2$$

$$(1+x)^2+36=(9+x)^2+4$$

$$1+2x+\cancel{x^2}+36=81+18x+\cancel{x^2}+4$$

$$-16x=48 \Rightarrow x=\frac{48}{-16} \Rightarrow x=-3$$

Άρα $M(-3,0)$

σελ. 40

4. Αν $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,x,y \in \mathbb{R}$ ν.δ.ό

$$\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}+\sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2}\geq\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}$$

Απόδειξη:

Έστω $M(x,y)$, $A(\alpha_1,\beta_1)$, $B(\alpha_2,\beta_2)$

Τότε $\vec{AB}=\vec{AM}+\vec{MB}$

Άρα $|\vec{AB}|=|\vec{AM}+\vec{MB}|\leq|\vec{AM}|+|\vec{MB}|$

Τελικά $|\vec{AB}| \le |\vec{AM}| + |\vec{MB}|$

$\vec{AB} = (a_2 - a_1, \beta_2 - \beta_1)$

$\vec{AM} = (x - a_1, y - \beta_1)$

$\vec{MB} = (a_2 - x, \beta_2 - y)$

Άρα,

$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2} \le \sqrt{(x-a_1)^2+(y-\beta_1)^2} + \sqrt{(a_2-x)^2+(\beta_2 \ldots}$

$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2} \le \sqrt{(x-a_1)^2+(y-\beta_1)^2} + \sqrt{(x-a_2)^2+(y-\beta \ldots}$

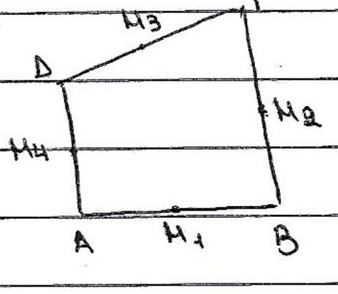
σελ.40

3. $M_1(k_1, \Lambda_1)$ $M_2(k_2, \Lambda_2)$ $M_3(k_3, \Lambda_3)$ και $M_4(k_4, \Lambda_4)$ μέσα των διαδοχικών πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ

ν.δ.ό $k_1 + k_3 = k_2 + k_4$

$\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4$

Λύση:



Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ και $\Delta(x_4, y_4)$ οι κορυφές του τετραπλεύρου.

Αφού M_1 μέσο του AB τότε:

$k_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$\lambda_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Ομοίως, αφού M_3 μέσο του ΓΔ τότε

$k_3 = \frac{x_3 + x_4}{2}$

$\lambda_3 = \frac{y_3 + y_4}{2}$

Είναι

$k_1+k_3 = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$ (1)

$\lambda_1+\lambda_3 = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}$ (2)

Ομοίως, αφού M_2, M_4 μέσα των ΒΓ, ΔΑ αντίστοιχα προκύπτει όπως πριν

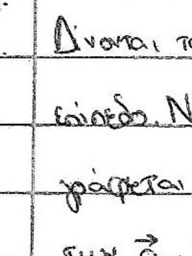
$k_2+k_4 = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$ (3)

$\lambda_2+\lambda_4 = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}$ (4)

Από (1), (3) $\Rightarrow k_1+k_3 = k_2+k_4$

(2), (4) $\Rightarrow \lambda_1+\lambda_3 = \lambda_2+\lambda_4$

Δίνονται τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ στο επίπεδο. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.



<u>Απόδειξη:</u> (Ύπαρξη). Θεωρούμε ένα σημείο Ο του επιπέδου ως αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων (σημείο αναφοράς) και τα σημεία Α, Β του επιπέδου ώστε $\vec{\alpha} = \vec{OA}$ και $\vec{\beta} = \vec{OB}$. Θ.δ.ό κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{O\Gamma}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Φέρουμε από το σημείο Γ παράλληλη προς την ευθεία OB η οποία τέμνει τον φορέα του $\vec{OA}$ σε ένα σημείο A_x. Άρα $\vec{OA_x} \parallel \vec{OA}$ έτσι, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{OA_x} = \lambda\vec{OA} \Rightarrow \vec{OA_x} = \lambda\vec{\alpha}$.

Ομοίως από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην
ΟΑ η οποία τέμνει τον φορέα του ΟΒ σε ένα σημείο B_y

Άρα $\vec{OB_y} \parallel \vec{OB}$. Συνεπώς, υπάρχει $y \in R$ ώστε $\vec{OB_y} = y\vec{OB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{OB_y} = y\vec{\beta}$.

Παρατηρούμε ότι:

$\vec{r} = \vec{O\Gamma} = \vec{OA_x} + \vec{OB_y} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$

Έστω $\vec{r} = \vec{O\Gamma} = \lambda_1\vec{\alpha} + \mu_1\vec{\beta}$ όπου $\lambda_1, \mu_1 \in R$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \vec{r} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \\ \vec{r} = \lambda_1\vec{\alpha} + \mu_1\vec{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \lambda_1\vec{\alpha} + \mu_1\vec{\beta}\ (\lambda - \lambda_1)\vec{\alpha} + (\mu - \mu_1)$

Αφού $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ από την (1) $\Rightarrow \lambda - \lambda_1 = 0$ και $\mu - \mu_1 = 0$

$\lambda = \lambda_1$ $\quad$ $\mu = \mu_1$

σελ. 110

2. Δίνεται η εξίσωση:

$x^2 - (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x - 17 = 0, \ \lambda \in R$ (1)

Αν οι τετμημένες των σημείων Α, Β είναι λύσεις (ρίζες) της εξίσωσης (1) τότε να βρείτε $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ευθ. τμήματος (ΑΒ) να έχει τετμημένη ίση με 4.

<u>Λύση:</u> Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Αναζητώ $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του (ΑΒ) να έχει τετμημένη ίση με 4. Έστω $M(x, y)$ το μέσο του (ΑΒ) τότε

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Όμως $x = 4$ άρα $x_1 + x_2 = 8$ (2)

Αφού x_1, x_2 ρίζες της (1) τότε από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

$x_1 + x_2 = -\frac{-(\lambda^2 - 4\lambda + 3)}{1}$

δηλ. $x_1+x_2=\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{1}$

$x_1+x_2=\lambda^2-4\lambda+3$

$8=\lambda^2-4\lambda+3$

$\lambda^2-4\lambda-5=0$

$\lambda^2-4\lambda-4-1=0$

$(\lambda+1)(\lambda-1)-4(\lambda+1)=0$

$(\lambda+1)\cdot(\lambda-1-4)=0$

$(\lambda+1)(\lambda-5)=0$

$\lambda=-1$ ή $\lambda=5$

σελ 40
κ1. σχολ. βιβλ.

$K(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$, $\Lambda(3,\frac{7}{2})$, $M(4,\frac{5}{2})$ $N(3,1)$, $\Xi(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ αντίστοιχα του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών.

Λύση: Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$, $\Delta(x_4,y_4)$ και $E(x_5,y_5)$

Αφού Κ μέσο του ευθ-τμήματος ΑΒ τότε

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow x_1+x_2=3\\ \frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow y_1+y_2=5\end{array}\right\}\Rightarrow (1)$$

Ομοίως, αφού Λ, Μ, Ν, Ξ μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} x_2+x_3=6 \\ y_2+y_3=7 \end{array}\right\} (2) \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l} x_3+x_4=8 \\ y_3+y_4=5 \end{array}\right\} (3)$$

$x_4+x_5=6$ και $y_4+y_5=2$ (4)

$x_5+x_1=3$ και $y_5+y_1=1$ (5)

Από (1) − (2) $\Rightarrow y_1-y_3=-2$ (6)

(6) + (3) $\Rightarrow y_1+y_4=3$ (7)

(7) − (4) $\Rightarrow y_1-y_5=1$ (8)

(8) + (5) $\Rightarrow 2y_1=2 \Rightarrow y_1=1$

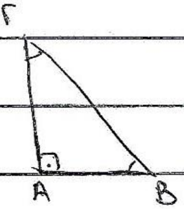
~~Αντικαθιστούμε~~

$$y_1=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} y_2=4 \overset{(3)}{\Rightarrow} y_3=3 \overset{(4)}{\Rightarrow} y_4=2 \overset{(5)}{\Rightarrow} y_5=0$$

Βασικά στοιχεία τριγωνομετρίας

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\hat{A}=90^\circ$



Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

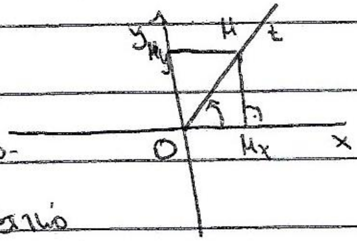
$$\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $ημ^2 B + συν^2 B = 1$
2. $εφ B = \frac{ημ B}{συν B}$
3. $εφ B \cdot σφ B = 1$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy και μία ημιευθεία Ot



Γωνία φ της ημιευθείας Ot με τον θετικό ημιάξονα Ox ονομάζεται η γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο Ox γύρω από το O μέχρι να ταυτιστεί με την Ot.

Αναζητούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ, δηλαδή ημφ, συνφ, εφφ, σφφ.

Θεωρούμε σημείο Μ με συντεταγμένες x, y $M(x,y)$ στην Ot. Αν M_x, M_y οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Τότε $M_x(x,0)$ και $M_y(y,0)$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OMM_x ($MM_x \perp Ox$) έχουμε το

$ημφ = \frac{MM_x}{OM} = \frac{y}{ρ}$, $ρ = (OM)$

δηλ. $\boxed{ημφ = \frac{y}{ρ}}$

$συνφ = \frac{OM_x}{OM} = \frac{x}{ρ}$

$εφφ = \frac{MM_x}{OM_x} = \frac{y}{x}$

$σφφ = \frac{OM_x}{MM_x} = \frac{x}{y}$

1. $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2+x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$

σελ.40

* 1. (1) − (2) $\Rightarrow x_1 + \cancel{x_2} - \cancel{x_2} - x_3 = 3 - 6 \Rightarrow x_1 - x_3 = -3$ (9)

(2) − (3) $\Rightarrow x_2 + \cancel{x_3} - \cancel{x_3} - x_4 = 6 - 8 \Rightarrow x_2 - x_4 = -2$ (10)

(3) − (4) $\Rightarrow x_3 + \cancel{x_4} - \cancel{x_4} - x_5 = 8 - 6 \Rightarrow x_3 - x_5 = 2$ (11)

(11) + (9) $\Rightarrow \cancel{x_3} - x_5 + x_1 - \cancel{x_3} = 2 - 3 \Rightarrow x_1 - x_5 = -1$ (12)

(12) + (5) $\Rightarrow x_1 - \cancel{x_5} + \cancel{x_5} + x_1 = -1 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$ (13)

(9) $\overset{(13)}{\Rightarrow} -x_3 + 1 = -3 \Rightarrow -x_3 = -1 - 3 \Rightarrow x_3 = 4$ (14)

(11) $\overset{(14)}{\Rightarrow} x_3 - x_5 = 2 \Rightarrow x_5 = 4 - 2 = x_5 = 2$ (15)

(3) $\overset{(14)}{\Rightarrow} x_3 + x_4 = 8 \Rightarrow x_4 = 8 - 4 \Rightarrow x_4 = 4$ (16)

(10) $\overset{(16)}{\Rightarrow} x_2 - x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = 4 - 2 \Rightarrow x_2 = 2$

Απόδειξη:

2. $\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y\cancel{\rho}}{x\cancel{\rho}} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\varphi$

3. $\varepsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1.$

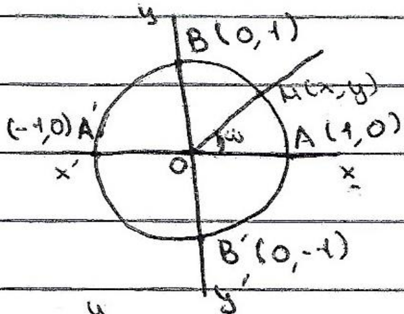
12.10.19

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{y}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{x}{\rho} \\ \varepsilon\varphi\omega &= \frac{y}{x} \\ \sigma\varphi\omega &= \frac{x}{y} \end{aligned}}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Τριγωνομετρικός κύκλος

Ορισμός: Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων (δηλ. το σημείο $O(0,0)$) και ακτίνα $\rho=1$



$ημω = \frac{y}{\rho} = y$

$συνω = \frac{x}{\rho} = x$

$εφω = \frac{y}{x}$

$σφω = \frac{x}{y}$

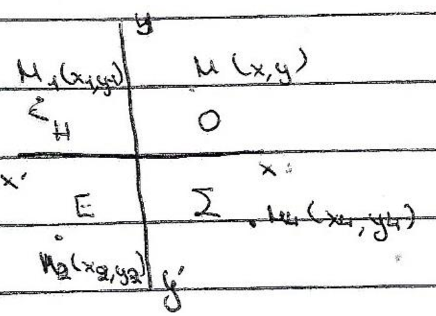
Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $ημ^2ω + συν^2ω = 1$
2. $εφω = \frac{ημω}{συνω}$
3. $εφω \cdot σφω = 1$

Απόδειξη: 1. $ημ^2ω + συν^2ω = y^2 + x^2 = 1^2 = 1$

2. $εφω \cdot σφω = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$

3. $εφω = \frac{y}{x} = \frac{ημω}{συνω}$



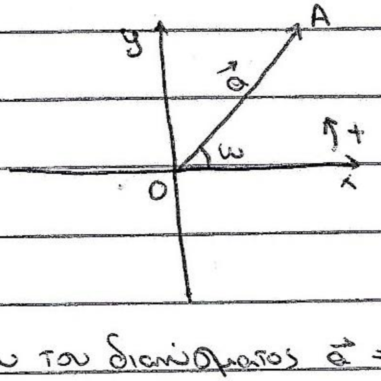
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών 30°, 45°, 60°, 90°

	30°	45°	60°	90°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
σφ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

15.10.19

Συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος

Ορισμός: Έστω ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy και $\vec{a} \neq \vec{0}$ με $\vec{a} = \vec{OA}$



Γωνία ω του διανύσματος $\vec{a} = \vec{OA}$ με τον άξονα x'x ονομάζεται η γωνία ω την οποία διαγράφει ο θεσελ.88.

3.56. $\vec{\alpha}=(-2,4)$

$\vec{\beta}=(4,-6)$

$\vec{\gamma}=(0,5)$

$\vec{\delta}=(6,0)$.

$\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{4}{-2}=-2$

$\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$

$\lambda_{\vec{\gamma}}$ (δεν ορίζεται)

$\lambda_{\vec{\delta}}=\frac{0}{6}=0$

Η κλίση του διανύσματος $\vec{\gamma}=(0,5)$ δεν ορίζεται διότι έχει τετμημένη 0 (αλγεβρικά δεν μπορούμε να ορίσουμε το πηλίκο $\lambda=\frac{5}{0}$)

Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(6,0)$ είναι παράλληλο στον $x'x$, διότι έχει τεταγμένη ίση με το 0. Άρα η κλίση του είναι $\lambda_{\vec{\delta}}=0$

σελ.88.

3.57 $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

$A(1,2)$

$B(-4,5)$

$\Gamma(1,6)$

Να βρείτε τις κλίσεις των:

α) $\vec{AB}$, β) $\vec{B\Gamma}$, γ) $\vec{\Gamma A}$

Λύση: α) Είναι $AB=(x_B-x_A, y_B-y_A)=(-4-1, 5-2)=(-5,3)$.

Οπότε $\lambda_{\vec{AB}}=\frac{y}{x}=-\frac{3}{5}$

β) Ομοίως $B\Gamma=(5,1) \Rightarrow \lambda_{\vec{B\Gamma}}=\frac{1}{5}$

γ) $\vec{A\Gamma}=(0,4)$. Δεν ορίζεται η κλίση του $A\Gamma$.

σελ.88.

3.58. $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-3,-2)$

α) $\lambda_{\vec{v}} = ;$ $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

β) γωνία του $\vec{v}$ με τον $x'x$.

<u>Λύση</u>: α) Είναι, $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 3(2,3) + 3(-3,-2) =$

$= (6,9) + (-9,-6) = (6-9, 9-6) = (-3,3)$

Οπότε, $\vec{v} = (-3,3)$. Άρα $\lambda_{\vec{v}} = \frac{y}{x} = \frac{3}{-3} = -1$

β) Έστω ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{v}$ με τον $x'x$. Αφού $\lambda_{\vec{v}} = -1$ και γνωρίζουμε ότι $\lambda_{\vec{v}} = εφω$ τότε $εφω = -1$. Άρα, $ω = 135^{\circ}$