9.7.19

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\vec{a}$ ένα διάνυσμα με $\vec{a} \neq \vec{0}$ και λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$. Ορίζουμε ως πολλαπλασιασμό (ή βαθμωτό γινόμενο) του αριθμού 1 επί το διάνυσμα με τις εξής ιδιότητες:

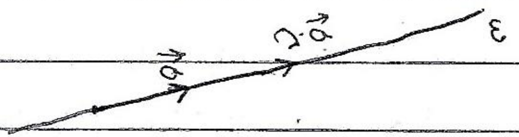
i) παραλληλόγραμμο με το $\vec{a}$.

ii) το μέτρο του είναι ίσο με $|\lambda| = |\vec{a}|$

iii) είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$ ενώ είναι αντίρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$

<u>Συμβολισμός:</u> $\lambda \cdot \vec{a}$ ή $\lambda\vec{a}$

Παρατήρηση: Το διάνυσμα $\lambda\vec{a}$ έχει τον ίδιο φορέα με το $\vec{a}$.



Παραδείγματα: $3\vec{a}$, $5\vec{a}-3\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$

Ιδιότητες:

1. $\lambda(\vec{a}+\vec{\beta})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{\beta}$ $\lambda\in\mathbb{R}$
2. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
3. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
4. $\lambda\vec{a}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\vec{a}=\vec{0}$
5. $(-\lambda)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(-\vec{a})=-\lambda\vec{a}$
6. $(\lambda-\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}-\mu\vec{a}$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
7. $\lambda(\vec{a}-\vec{\beta})=\lambda\vec{a}-\lambda\vec{\beta}$ $\lambda\in\mathbb{R}$
8. Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq 0$ και ισχύει $\lambda\vec{a}=\lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{a}=\vec{\beta}$
9. Αν $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και ισχύει $\lambda\vec{a}=\mu\vec{a}$ και $\vec{a}\neq\vec{0}$ τότε

$\lambda=\mu$

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες 4) έως 9) είναι συνέπεια του ορι-

σμού και των ιδιοτήτων 1), 2) και 3) π.χ.

η 1) αποδεικνύεται ως εξής:

Αφού $\lambda\vec{a}=\mu\vec{a}$ τότε $(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$ και επειδή

$\vec{a}\neq\vec{0}$ λόγω της ιδιότητας 4) ισχύει $\lambda-\mu$:

σελ. 27

10. $\vec{AB}\neq\vec{0}$

$\vec{A\Gamma}=\lambda\cdot\vec{AB}$

$\vec{B\Gamma}=\mu\cdot\vec{AB}$

ν.δ. ότι $\lambda-\mu=1$

Απόδειξη

Έχουμε ότι $\vec{A\Gamma}=\lambda\cdot\vec{AB} \Rightarrow \vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\lambda\cdot\vec{AB}$ $\vec{AB}+\mu\vec{AB}=\lambda\vec{A}$

Όμως $\vec{B\Gamma}=\mu\cdot\vec{AB}$ $\vec{AB}+\mu\vec{AB}-\lambda\vec{A}$

$(1+\mu-\lambda)\vec{AB}=$

Όμως $\vec{AB}\neq\vec{0}$

$1+\mu-\lambda=0$

$\underline{\lambda-\mu=1}$

σελ. 26

1. $\vec{\alpha}_0=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha} \quad \vec{\alpha}\neq\vec{0}$

Σύμφωνα με τον ορισμό αφού $\frac{1}{|\vec{\alpha}|}>0$ τότε $\vec{\alpha}_0 \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$ και

έχει μέτρο ίσο με $|\vec{\alpha}_0|=\left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}\right|=\left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\right||\vec{\alpha}|=\frac{1}{\cancel{|\vec{\alpha}|}}\cdot\cancel{|\vec{\alpha}|}=1$

Δηλ. το $\vec{\alpha}_0$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο του

διανύσματος $\vec{\alpha}$

σελ. 26

2. i) $\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha})=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})$

$\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(\vec{x}+\vec{\alpha})=\cancel{6}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}(\vec{x}+\vec{\beta})$

$3(\vec{x}+\vec{\alpha})=2(\vec{x}+\vec{\beta})$

$3\vec{x}+3\vec{\alpha}=2\vec{x}+2\vec{\beta}$

$3\vec{x}-2\vec{x}=2\vec{\beta}-3\vec{\alpha}$

$\boxed{\vec{x}=2\vec{\beta}-3\vec{\alpha}}$

ii) $\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$

$\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$

$\vec{x}+3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=4\vec{\alpha}-4\vec{\beta}-3\vec{x}$

$\vec{x}+3\vec{x}=-3\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+4\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$

$4\vec{x}=\vec{\alpha}-7\vec{\beta}$

$\vec{x}=\frac{\vec{\alpha}-7\vec{\beta}}{4}$

$\vec{x}=\frac{\vec{\alpha}}{4}-\frac{7\vec{\beta}}{4}$

$\vec{x}=\frac{1}{4}\vec{\alpha}-\frac{7}{4}\vec{\beta}$

σελ. 26

3. $BM=2(M\Gamma)$

ν.δ.ό. $\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$

$\vec{AB}=\vec{\beta}$

$\vec{A\Gamma}=\vec{\gamma}$

$\vec{AM}=\vec{x}$

Απόδειξη: Έχουμε $\vec{BM}\uparrow\uparrow\vec{M\Gamma}$ (1)

Όμως $|\vec{BM}|=(BM)=2(M\Gamma)=2|\vec{M\Gamma}|$

$|\vec{BM}|=|\vec{M\Gamma}|$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \vec{BM}=2\vec{M\Gamma}$ (3)

Με σημείο αναφοράς το σημείο

Α έχουμε ότι $\vec{BM}=\vec{AM}-\vec{AB}=\vec{x}-\vec{\beta}$

$\vec{M\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AM}=\vec{\gamma}-\vec{x}$

Άρα, η σχέση (3) γράφεται:

$\vec{x} - \vec{\beta} = 2(\vec{\gamma} - \vec{x})$

$\vec{x} - \vec{\beta} = 2\vec{\gamma} - 2\vec{x}$

$\vec{x} + 2\vec{x} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$

$3\vec{x} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$

$\vec{x} = \frac{\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}}{3}$

$\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{\beta} + \frac{2}{3}\vec{\gamma}$

$\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$

Γραμμικός συνδυασμός

Ορισμός: Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα.

Κάθε διάνυσμα $\vec{u} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.

π.χ. $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 8\vec{\beta}$

$\vec{\gamma} = \frac{2}{3}\vec{a} + \sqrt{2}\,\vec{\beta}$

$\vec{t} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{\beta}$

Συνθήκη παραλληλίας

Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ δηλ. $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Rightarrow$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{a} = \lambda\vec{\beta}$

υπάρχει ώστε

ασ.9ε

6. $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{B\Lambda} + 3\vec{AM}$

ν.δ.ό. Κ, Λ, Μ συνευθειακά

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{K\Lambda} \parallel \vec{KM}$

Έχουμε ότι $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{B\Lambda} + 3\vec{AM}$

$-\vec{KA} - 3\vec{KB} - 2(\vec{KA} - \vec{KB}) = \vec{K\Lambda} - \vec{KB} + 3(\vec{KM} - \vec{KA})$

$-\vec{KA} - 3\vec{KB} - 2\vec{KA} - 2\vec{KB} = \vec{K\Lambda} - \vec{KB} + 3\vec{KM} - 3\vec{KA}$

$-\cancel{3\vec{KA}} - \cancel{\vec{KB}} = \vec{K\Lambda} - \cancel{\vec{KB}} + 3\vec{KM} - \cancel{3\vec{KA}}$

$\vec{0} = \vec{K\Lambda} + 3\vec{KM}$

$-3\vec{KM} = \vec{K\Lambda}$

$\vec{K\Lambda} = -3\vec{KM}$

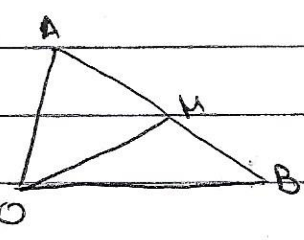
Συνεπώς $\left.\begin{array}{l} \vec{K\Lambda} \parallel \vec{KM} \\ K \text{ κοινό} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Κ, Λ, Μ συνευθειακά

Διανυσματική ακτίνα μέσου

Αν ΑΒ ένα ευθ. τμήμα και Μ το μέσο του ΑΒ τότε για ένα σημείο αναφοράς Ο ισχύει:

$\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

Απόδειξη:



Αφού Μ μέσο του $\vec{AB}$ τότε $\vec{AM}=\vec{MB}$ ①

Με σημείο αναφοράς το σημείο Ο έχουμε $\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}$ ②

$\vec{MB}=\vec{OB}-\vec{OM}$ ③

Από ① $\overset{②}{\underset{③}{\Longleftrightarrow}}$ $\vec{OM}-\vec{OA}=\vec{OB}-\vec{OM}$

$\vec{OM}+\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}$

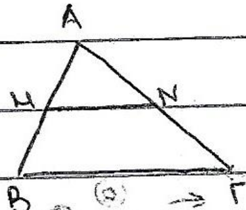
$2\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}$

$\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$

Άσκηση

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$



$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AN}$ ①

$\vec{MA}=\frac{1}{2}\vec{BA}$ ②

$\vec{AN}=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$ ③

Από ① $\overset{②}{\underset{③}{\Longrightarrow}}$ $\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{A\Gamma})=\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$

σελ. 27
4.

$\Delta E=2EB$ i) $\vec{\Delta B}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$

$\vec{AB}=\vec{\alpha}$ $\vec{\Delta B}=\vec{\Delta E}+\vec{EB}=2\vec{EB}+\vec{EB}=3\vec{EB}$ } $\Rightarrow 3\vec{EB}=$

$\vec{\Delta\Gamma}=2\vec{\alpha}$ $\vec{\Delta B}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ $\vec{EB}=$

$\vec{\Delta A}=\vec{\beta}$ $\vec{\Gamma B}=-\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta B}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

$\vec{AE}=\vec{AB}+\vec{BE}=\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}=\frac{1}{3}\vec{\beta}+3\vec{\alpha}-$

$\vec{E\Gamma}=\vec{EB}+\vec{B\Gamma}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-\vec{\Gamma B}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-$

$=\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}-\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\frac{4}{3}\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\beta}=$

σελ. 27

5. $\vec{A\Gamma} // \vec{AE}$

$\vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$\vec{AE} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 4\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = 4(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 4\vec{A\Gamma}$

Άρα $\vec{AE} = 4\vec{A\Gamma}$ οπότε $\vec{AE} // \vec{A\Gamma}$ άρα A, Γ, E συνευθειακά.

σελ. 53

223. α) $\vec{BA} = -\vec{\alpha}$

β) $\vec{\Gamma A} = -\vec{\beta}$

γ) $\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

δ) $\left.\begin{array}{l} \vec{A\Delta} = 2\vec{AO} \\ \vec{A\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\vec{AO} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \Rightarrow \vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

ε) $\vec{\Delta O} = -\vec{AO} = -\frac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

στ) $\left.\begin{array}{l} \vec{B\Gamma} = \vec{BA} + \vec{A\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \\ \vec{B\Gamma} = 2\vec{BO} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\vec{BO} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{BO} = \frac{1}{2}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$

σελ. 30

1.38 Αν η εξίσωση $x^2 - |\vec{\beta}|x + |\vec{\gamma}|^2 = 0$ (1)

δεν έχει πραγματικές ρίζες τότε ν.δ.ό.

$|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| < 3|\vec{\gamma}|$

Απόδειξη: Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -|\vec{\beta}|$, $\gamma = |\vec{\gamma}|^2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-|\vec{\beta}|)^2 - 4 \cdot 1 \cdot |\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\beta}|^2 - (2|\vec{\gamma}|)^2 =$

$= (|\vec{\beta}| + 2|\vec{\gamma}|)(|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}|)$

Αφού η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες τότε η διακρί-νουσα είναι αρνητική δηλ. $(|\vec{\beta}| + 2|\vec{\gamma}|)(|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}|) < 0$

Όμως $|\vec{\beta}| + 2|\vec{\gamma}| \geq 0$ διότι $|\vec{\beta}| \geq 0$ και $|\vec{\gamma}| \geq 0$

Άρα, $|\vec{\beta}| - 2|\vec{\gamma}| < 0 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| < 2|\vec{\gamma}|$

Έχουμε ότι:

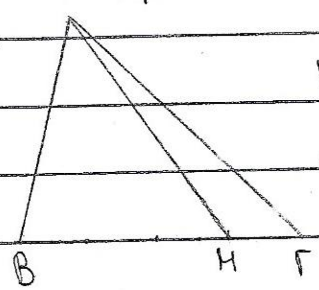
$|\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \le |\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}| < 2|\vec{\gamma}|+|\vec{\gamma}| = 3\vec{\gamma}$

Άρα $|\vec{\beta}+\vec{\gamma}| < 3|\vec{\gamma}|$

σελ. 53
2.96.

Αφού $\vec{BM} \upuparrows \vec{M\Gamma}$ ~~και ισχύει (MB) = 3(MΓ) τότε~~

$\vec{BM} = 3\vec{M\Gamma}$



Με σημείο αναφοράς το A έχουμε

$\vec{AM}-\vec{AB} = 3(\vec{A\Gamma}-\vec{AM})$

$\vec{AM}-\vec{AB} = 3\vec{A\Gamma}-3\vec{AM}$

$\vec{AM}+3\vec{AM} = \vec{AB}+3\vec{A\Gamma}$

$4\vec{AM} = \vec{AB}+3\vec{A\Gamma}$

σελ. 53
2.95

$\vec{AM} = 3\vec{MB}$

$\vec{OM}-\vec{OA} = 3(\vec{OB}-\vec{OM})$

$\vec{x}-\vec{a} = 3(\vec{\beta}-\vec{x})$

$\vec{x}-\vec{a} = 3\vec{\beta}-3\vec{x}$

$\vec{x}+3\vec{x} = 3\vec{\beta}+\vec{a}$

$4\vec{x} = 3\vec{\beta}+\vec{a}$

$\vec{x} = \frac{1}{4}(3\vec{\beta}+\vec{a})$

αφοράς το σημείο Α:

$) = 3(\vec{A\Gamma} - \vec{AP})$.

$\vec{B} = 3\vec{A\Gamma} - 3\vec{AP}$

$\vec{P} = 2\vec{AB} + 3\vec{A\Gamma}$

$2\vec{AB} + 3\vec{A\Gamma}$

Απόδειξη: Από υπόθεση έχουμε $2\vec{BP} = \vec{P\Gamma}$

Αφού ΑΒΓΔ ∥ τότε $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$ (1) και $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ (2)

Έχουμε ότι $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{P\Delta} = -\vec{AP}+\vec{AB}-\vec{AP}+\vec{A\Delta}-\vec{AP} =$

$= \vec{AB}+\vec{A\Delta}-3\vec{AP} = \vec{AB}+\vec{B\Gamma}-3\vec{AP} =$

$= \vec{A\Gamma}-3\vec{AP} = \vec{A\Gamma}-\vec{AP}-2\vec{AP} = \vec{P\Gamma}-2\vec{AP} =$

$= \vec{P\Gamma}-2(\vec{BP}-\vec{BA}) = \vec{P\Gamma}-2\vec{BP}+2\vec{BA} =$

$= \vec{P\Gamma}-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\vec{P\Gamma}+2\vec{BA} = \cancel{\vec{P\Gamma}}-\cancel{\vec{P\Gamma}}+2\vec{BA} =$

$= 2\vec{BA}$

$\vec{AE}+\vec{BZ}+\vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$

$\vec{BE}-\vec{BA}+\Gamma Z-\vec{\Gamma B}+\vec{A\Delta}-\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$-5\vec{a}+3\vec{a}+2\vec{a}-\vec{BA}-\vec{\Gamma B}-\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$-5\vec{a}+5\vec{a}+\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A} = \vec{0}$

$\vec{BZ}+\vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ $\quad \vec{0}+\vec{AA}\ \vec{0}$

$0 = \vec{0}$

σελ.54

2.31. $\vec{AB} \neq \vec{0}$

$\vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$ ①

$\vec{B\Gamma} = \mu \vec{AB}$ ②

$\lambda - \mu = 1$

Από ①-② έχουμε:

$\vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma} = \lambda \vec{AB} - \mu \vec{AB}$

$-\vec{B\Gamma} - \vec{\Gamma A} = \lambda \vec{AB} - \mu \vec{AB}$

$-\vec{BA} = \lambda \vec{AB} - \mu \vec{AB}$

$\lambda \vec{AB} - \mu \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$

$\lambda \vec{AB} - \mu \vec{AB} - \vec{AB} = \vec{0}$

$\vec{AB}(\lambda - \mu - 1) = \vec{0}$

Αλλά $\vec{AB} \neq \vec{0}$ άρα $\lambda - \mu - 1 = \vec{0} \iff \boxed{\lambda - \mu = 1}$

σελ.55

2.39 $\vec{\Delta\Gamma} = -\cancel{\vec{\alpha}} + \cancel{\vec{\alpha}} + 2\vec{\beta}$

$\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{\beta}$

$\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{AB}$ άρα $\vec{\Delta\Gamma} \parallel \vec{AB}$ οπότε ΑΒΓΔ τραπέζιο.

Επίσης $|\vec{\Delta\Gamma}|$ $2|\vec{AB}| \iff |\vec{\Gamma\Delta}| = 2|\vec{AB}| \iff \Gamma\Delta = 2AB$

σελ.56

2.47 Πρέπει $\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} - 4\vec{\gamma} - 7\vec{\alpha} - 15\vec{\beta} + 14\vec{\gamma} = -4\vec{\alpha} - 8\vec{\beta} + 10\vec{\gamma} = 2(-2$

$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} - 7\vec{\alpha} - 15\vec{\beta} + 14\vec{\gamma} = -6\vec{\alpha} - 12\vec{\beta} + 15\vec{\gamma} = 3(-$

Άρα $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} \iff 2\vec{AB} = 3\vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$

Οπότε $\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma}$ οπότε Α, Β, Γ συνευθειακά.

σελ.56

2.48 α) $3\vec{MA} + 4\vec{MB} = 7\vec{M\Gamma}$

$3\vec{MA} + 4(\vec{MA} + \vec{AB}) = 7(\vec{MA} + \vec{A\Gamma})$

$3\vec{MA} + 4\vec{MA} + 4\vec{AB} = 7\vec{MA} + 7\vec{A\Gamma}$

$3\vec{MA} + 4\vec{MA} - 7\vec{MA} + 4\vec{AB} = 7\vec{A\Gamma}$

$4\vec{AB} = 7\vec{A\Gamma}$

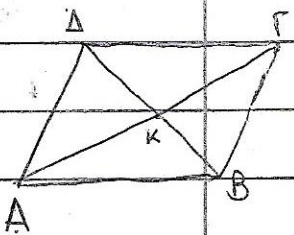
$\vec{AB} = \frac{7}{4}\vec{A\Gamma}$

Άρα $\vec{AB} // \vec{A\Gamma}$ οπότε Α, Β, Γ συνευθειακά.

σελ. 54

2.32 Αν Κ, Λ κέντρα των ΑΒΓΔ#, ΕΖΗΘ# ν.δ.ο. $\vec{AE}+\vec{BZ}+\vec{\Gamma H}+\vec{\Delta\Theta}=4\vec{K\Lambda}$

Απόδειξη: Αφού Κ κέντρο του ΑΒΓΔ# τότε



ισχύουν:

$(AK)=(K\Gamma)$ (1)

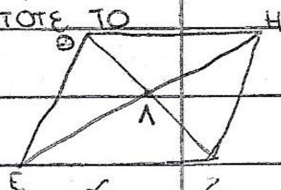
$(BK)=(K\Delta)$ (2)

Δηλ. Κ μέσο των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ.

Αφού Κ μέσο της ΑΓ τότε $\vec{AK}=\vec{K\Gamma}$ (3)

Ομοίως, αφού Κ μέσο της ΒΔ τότε $\vec{BK}=\vec{K\Delta}$ (4)

Τώρα, ομοίως αφού Λ κέντρο του ΕΖΗΘ# τότε το



$\vec{E\Lambda}=\vec{\Lambda H}$ και $\vec{Z\Lambda}=\vec{\Lambda\Theta}$

Με σημείο αναφοράς το σημείο Κ έχουμε:

$\vec{AE}+\vec{BZ}+\vec{\Gamma H}+\vec{\Delta\Theta}=\vec{KE}-\cancel{\vec{KA}}+\vec{KZ}-\cancel{\vec{KB}}+\vec{KH}-\cancel{\vec{K\Gamma}}+\vec{K\Theta}-\cancel{\vec{K\Delta}}=$

$\vec{KE}+\vec{KZ}+\vec{KH}+\vec{K\Theta}$

Με σημείο αναφοράς του σημείο Λ έχουμε:

$\vec{KE}+\vec{KZ}+\vec{KH}+\vec{K\Theta}=\vec{\Lambda E}-\vec{\Lambda K}+\vec{\Lambda Z}-\vec{\Lambda K}+\vec{\Lambda H}-\vec{\Lambda K}+\vec{\Lambda\Theta}-\vec{\Lambda K}=$

$\vec{\Lambda E}+\vec{\Lambda Z}+\vec{\Lambda H}+\vec{\Lambda\Theta}-4\vec{\Lambda K}=-\vec{E\Lambda}-\vec{Z\Lambda}-\vec{H\Lambda}-\vec{\Theta\Lambda}-4\vec{\Lambda K}=$

$-\cancel{\vec{\Lambda H}}-\cancel{\vec{\Lambda\Theta}}+\cancel{\vec{\Lambda H}}+\cancel{\vec{\Lambda\Theta}}-4\vec{\Lambda K}=-4\vec{\Lambda K}=4\vec{K\Lambda}$

Άρα $\vec{AE}+\vec{BZ}+\vec{\Gamma H}+\vec{\Delta\Theta}=4\vec{K\Lambda}$

σελ. 27
4. β) Είναι $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta} = \frac{1}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

$\vec{E\Gamma} = \frac{2}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2 \cdot \frac{1}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\vec{AE}$

Άρα $\vec{AE} \parallel \vec{E\Gamma}$ => A, E, Γ συνευθειακά.
E κοινό

15.7.19

σελ. 55
2.42. Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεία

$2\vec{A\Delta} - 2\vec{BE} + \vec{\Gamma B} = \vec{A\Gamma} + \vec{AE} - 3\vec{B\Delta}$

ν.δ.ό Γ, Δ, Ε συνευθειακά

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{\Gamma\Delta} \parallel \vec{\Gamma E}$

Με σημείο αναφοράς το σημείο Γ έχουμε:

$2(\vec{\Gamma\Delta} - \vec{\Gamma A}) - 2(\vec{\Gamma E} - \vec{\Gamma B}) + \vec{\Gamma B} = -\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma E} - \vec{\Gamma A} - 3(\vec{\Gamma\Delta} - \vec{\Gamma B})$

$\Leftrightarrow 2\vec{\Gamma\Delta} - 2\vec{\Gamma A} - 2\vec{\Gamma E} + 2\vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma B} = -\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma E} - \vec{\Gamma A} - 3\vec{\Gamma\Delta} + 3\vec{\Gamma B}$

$\Leftrightarrow 2\vec{\Gamma\Delta} - \cancel{2\vec{\Gamma A}} - 2\vec{\Gamma E} + \cancel{3\vec{\Gamma B}} = -\cancel{2\vec{\Gamma A}} + \vec{\Gamma E} - 3\vec{\Gamma\Delta} + \cancel{3\vec{\Gamma B}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\vec{\Gamma\Delta} - 2\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma E} - 3\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow 2\vec{\Gamma\Delta} + 3\vec{\Gamma\Delta} = 2\vec{\Gamma E} + \vec{\Gamma E} \Leftrightarrow$

$(2+3)\vec{\Gamma\Delta} = (2+1)\vec{\Gamma E} \Leftrightarrow 5\vec{\Gamma\Delta} = 3\vec{\Gamma E} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5}\vec{\Gamma E}}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα } \vec{\Gamma\Delta} \parallel \vec{\Gamma E} \\ \Gamma \text{ κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Γ, Δ, Ε συνευθειακά

σελ. 56
2.44 Α, Β, Γ, Δ σημεία

$3\vec{AB} + 5\vec{A\Delta} = 8\vec{A\Gamma}$

ν.δ.ό Β, Γ, Δ συνευθειακά

Απόδειξη: Αρκεί να δείξω ότι $\vec{B\Gamma} \parallel \vec{B\Delta}$

Με σημείο αναφοράς το σημείο Β έχουμε:

$-3\vec{BA} + 5(\vec{B\Delta} - \vec{BA}) = 8(\vec{B\Gamma} - \vec{BA})$

$-3\vec{BA}+5\vec{B\Delta}-5\vec{BA}=8\vec{B\Gamma}-8\vec{BA}$

$-\cancel{8\vec{BA}}+5\vec{B\Delta}=8\vec{B\Gamma}-\cancel{8\vec{BA}}$

$5\vec{B\Delta}=8\vec{B\Gamma}$

$\vec{B\Delta}=\frac{8}{5}\vec{B\Gamma}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα } \vec{B\Delta}\parallel\vec{B\Gamma} \\ B \text{ κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow B,\Gamma,\Delta$ συνευθειακά.

<u>2ος τρόπος:</u>

$3\vec{AB}+5\vec{A\Delta}=8\vec{A\Gamma}$

$3\vec{AB}+5\vec{A\Delta}=3\vec{A\Gamma}+5\vec{A\Gamma}$

$3\vec{AB}-3\vec{A\Gamma}=5\vec{A\Delta}-5\vec{A\Gamma}$

$3(\vec{AB}-\vec{A\Gamma})=5(\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta})$

$3\vec{\Gamma B}=5\vec{\Delta\Gamma}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{\Gamma B}=\frac{5}{3}\vec{\Delta\Gamma} \\ \Gamma \text{ κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow B,\Gamma,\Delta$ συνευθειακά.

σελ. 50

2.45 Αν $\vec{AK}+3\vec{BK}-2\vec{BA}=\vec{B\Lambda}+3\vec{AM}$

ν.δ.ό. K,Λ,M συνευθειακά

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{K\Lambda}\parallel\vec{KM}$

Με σημείο αναφοράς το K έχουμε:

$-\vec{KA}-3\vec{KB}-2(\vec{KA}-\vec{KB})=\vec{K\Lambda}-\vec{KB}+3(\vec{KM}-\vec{KA})$

$-\vec{KA}-3\vec{KB}-2\vec{KA}+2\vec{KB}=\vec{K\Lambda}-\vec{KB}+3\vec{KM}-3\vec{KA}$

$-\cancel{3\vec{KA}}-\cancel{\vec{KB}}=\vec{K\Lambda}-\cancel{\vec{KB}}+3\vec{KM}-\cancel{3\vec{KA}}$

$\vec{K\Lambda}+3\vec{KM}=\vec{0}$

$\vec{K\Lambda}=-3\vec{KM}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα } \vec{K\Lambda}\parallel\vec{KM} \\ K \text{ κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow K,\Lambda,M$ συνευθειακά.

σελ.56.

2.46. $AB\Gamma$ τρίγωνο

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα

$\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ v.δ.ό. i) B, Γ, Δ συνευθειακά

$\vec{A\Gamma} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ii) $B\Delta = 3B\Gamma$

$\vec{A\Delta} = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$

Απόδειξη: i) Αρκεί να δείξω ότι $\vec{B\Gamma} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$

Έχουμε ότι:

$\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta} - 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 3\vec{\alpha} -$

δηλ. $\vec{B\Gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ (1)

$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{A\Gamma} = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - (5\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + \vec{\beta} =$

$= 2(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \overset{(1)}{=} 2\vec{B\Gamma}$

Άρα $\vec{\Gamma\Delta} = 2\vec{B\Gamma}$

Συνεπώς $\vec{\Gamma\Delta} \parallel \vec{B\Gamma}$ και Γ κοινό σημείο $\Rightarrow \Gamma, \Delta, B$ συνευθειακά

ii) Αρκεί ν.δ.ό $|\vec{B\Delta}| = 3|\vec{B\Gamma}|$

Είναι $\vec{B\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AB} = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 11\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$

$= 9\vec{\alpha} - 6\vec{\beta} = 3(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \overset{(1)}{=} 3\vec{B\Gamma}$

Άρα $\boxed{\vec{B\Delta} = 3\vec{B\Gamma}}$

Οπότε $|\vec{B\Delta}| = |3\vec{B\Gamma}| = |3| \cdot |\vec{B\Gamma}| = 3|\vec{B\Gamma}|$ δηλ. $|\vec{B\Delta}$

248. Μ, Α, Β, Γ σημεία

$3\vec{MA}+4\vec{MB}=7\vec{M\Gamma}$ ν.δ.ό.

i) Α, Β, Γ συνευθειακά

ii) Να βρείτε την σχετική θέση των Α, Β, Γ.

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{AB}\parallel\vec{A\Gamma}$

Έχουμε ότι: $3\vec{MA}+4\vec{MB}=7\vec{M\Gamma}$

$$3\vec{MA}+4\vec{MB}=3\vec{M\Gamma}+4\vec{M\Gamma}$$

$$3\vec{MA}-3\vec{M\Gamma}=4\vec{M\Gamma}-4\vec{MB}$$

$$3(\vec{MA}-\vec{M\Gamma})=4(\vec{M\Gamma}-\vec{MB})$$

$$3\vec{\Gamma A}=4\vec{B\Gamma}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma A}=\frac{4}{3}\vec{B\Gamma}} \quad (2)$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα } \vec{\Gamma A}\parallel\vec{B\Gamma} \\ \quad \Gamma \text{ κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Α, Β, Γ συνευθειακά

ii)

Από την σχέση (2) έπεται ότι $\vec{B\Gamma}\uparrow\uparrow\vec{\Gamma A}$ δηλ. τα σημεία Β, Α είναι εκατέρωθεν (δεξιά και αριστερά) του Γ και ισχύει πως $(\Gamma A)=|\vec{\Gamma A}|=\frac{4}{3}|\vec{B\Gamma}|=\frac{4}{3}(B\Gamma)$

16.7.19

Παρατήρηση: Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$

Αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ τότε έπεται ότι $\lambda=\mu=0$

Απόδειξη: Έστω ότι ένας τουλάχιστον από τους πραγματικούς αριθμούς $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ είναι διαφορετικός από το μηδέν. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας αν υποθέσουμε ότι $\lambda\neq 0$ τότε από την σχέση:

$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$$

Έχουμε ότι: $\vec{\alpha} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{\beta}$

Άρα $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ Άτοπο! Διότι $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$

Ομοίως, αν $\mu\neq 0$ τότε $\vec{\beta}=-\frac{\lambda}{\mu}\vec{\alpha}$ δηλ. $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ Άτοπ διότι $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$

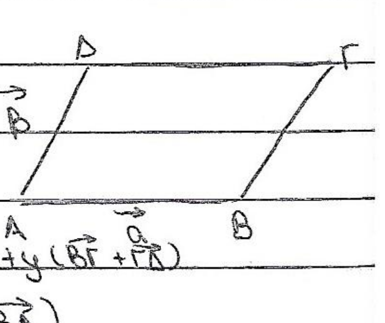
σελ. 59

2.64. ΑΒΓΔ ▱, $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$

Αν ισχύει ότι $\vec{AB}+3\vec{A\Delta}=x\vec{A\Gamma}+y\vec{B\Delta}$ τότε να προσδιορίσετε τους αριθμούς x,y

Λύση: Αφού ΑΒΓΔ ▱ τότε

$\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$



Έχουμε ότι $\vec{AB}+3\vec{A\Delta}=x\vec{A\Gamma}+y\vec{B\Delta}$

$= x(\vec{AB}+\vec{B\Gamma})+y(\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta})$

$\vec{AB}+3\vec{A\Delta}=x(\vec{AB}+\vec{A\Delta})+y(\vec{B\Gamma}+\vec{BA})$

$\vec{AB}+3\vec{A\Delta}=x(\vec{AB}++\vec{A\Delta})+y(\vec{B\Gamma}-\vec{AB})$

$\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=x(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+y(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$

$\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=x\vec{\alpha}+x\vec{\beta}+y\vec{\beta}-y\vec{\alpha}$

$\vec{\alpha}-x\vec{\alpha}+y\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-x\vec{\beta}-y\vec{\beta}=\vec{0}$

$(1-x+y)\vec{\alpha}+(3-x-y)\vec{\beta}=\vec{0}$ ①

Αφού $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ τότε από την (1) έπεται:

$1-x+y=0$

$3-x+y=0$

Έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} 1-x+y&=0 \\ 3-x+y&=0 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 4-2x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$$

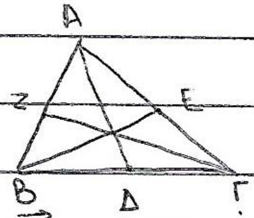
Για $x=2$ από την ισότητα $1-x+y=0$ παίρνουμε $1-2+y=0 \Leftrightarrow$
$-1+y=0 \Leftrightarrow \boxed{y=1}$

Υπενθύμιση: Αν ΑΒ ευθ. τμήμα και Μ το μέσο αυτού. Τότε
$\vec{OM} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$

σελ. 27

7. ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ.

ν.δ.ο. $\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{0}$



Απόδειξη: Αφού Δ μέσο της ΒΓ τότε
$\vec{A\Delta} = \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2}$ (1)

Ομοίως αφού Ε, Ζ μέσα των $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{AB}$ αντίστοιχα έχουμε
ότι: $\vec{BE} = \frac{\vec{BA}+\vec{B\Gamma}}{2}$ (2)

$\vec{\Gamma Z} = \frac{\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}}{2}$ (3)

Από (1)+(2)+(3) έχουμε:

$\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z} = \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2} + \frac{\vec{BA}+\vec{B\Gamma}}{2} + \frac{\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}}{2} = \frac{\cancel{\vec{AB}}+\cancel{\vec{A\Gamma}}+\cancel{\vec{BA}}+\cancel{\vec{B\Gamma}}+\cancel{\vec{\Gamma A}}+\cancel{\vec{\Gamma B}}}{2} = \frac{\vec{0}}{2} = \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}$

σελ. 28
1. $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{AE} = -\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$

G βαρύκεντρο του ΑΒΓ

ν.δ.ό ΑGΔΕ #

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{AE} = \vec{G\Delta}$

Αφού G βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ τότε $(AG) = \frac{2}{3}(AZ)$

Αφού $\vec{AG} \uparrow\uparrow \vec{AZ}$ τότε $\boxed{\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AZ}}$ $\Rightarrow \vec{AG} = \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$

Όμως $\vec{AZ} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$

Άρα $\boxed{\vec{AG} = \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{3}}$

Με σημείο αναφοράς το σημείο Α έχουμε:

$\vec{G\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AG} = \frac{\vec{AB}}{3} - \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{3} = \frac{\cancel{\vec{AB}} - \cancel{\vec{AB}} - \vec{A\Gamma}}{3} = -\frac{\vec{A\Gamma}}{3} = -\frac{1}{3}$

Συνεπώς, $\vec{AE} = \vec{G\Delta} \Rightarrow$ ΑGΔΕ #

$\boxed{\vec{AG} = 2\vec{GZ}}$

σελ. 29
8. Α, Β, Γ σημεία

Ν.δ.ό $3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{M\Gamma}$ = σταθερο για καθε σημείο Μ τ

επιπέδου

Απόδειξη: Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου.

Τότε:

$3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{M\Gamma} = 3\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{M\Gamma} =$

$= 3(\vec{MA} - \vec{MB}) + 2(\vec{M\Gamma} - \vec{MB}) = 3\vec{BA} + 2\vec{B\Gamma} =$

σελ. 29

9. $(AB) = 2(\Gamma\Delta)$

I μέσο της ΓΔ

ΚΑΛΒ#

ν.δ.ό i) $\vec{K\Gamma} = -\frac{1}{2}\vec{KA}$

$\vec{K\Delta} = -\frac{1}{2}\vec{KB}$

ii) I, K, Λ συνευθειακά

Απόδειξη: i) Τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΑΚΒ είναι όμοια διότι:

$\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (ως κατακορυφήν)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (ως εντός εναλλάξ)

$\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$ (ως εντός εναλλάξ)

Έστω λ ο λόγος ομοιότητας τότε $\lambda = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{2(\Gamma\Delta)}{(\Gamma\Delta)} = 2$

Οπότε, το $\frac{(KA)}{(K\Gamma)} = 2 \Leftrightarrow (KA) = 2(K\Gamma) \Leftrightarrow (K\Gamma) = \frac{1}{2}(KA)$

Όμως $\vec{K\Gamma} \uparrow\downarrow \vec{KA}$ $\Rightarrow \vec{K\Gamma} = -\frac{1}{2}\vec{KA}$

Ομοίως, $\vec{K\Delta} = -\frac{1}{2}\vec{KB}$

ii) Αρκεί ν.δ.ό $KI \parallel K\Lambda$

Αφού I μέσο του (ΓΔ) τότε $\vec{KI} = \frac{\vec{K\Delta} + \vec{K\Gamma}}{2}$ (1)

Είναι $\vec{K\Delta} + \vec{K\Gamma} = -\frac{1}{2}\vec{KB} - \frac{1}{2}\vec{KA} = -\frac{1}{2}(\vec{KB} + \vec{KA}) = -\frac{1}{2}\vec{K\Lambda}$

Δηλ. $\vec{K\Delta} + \vec{K\Gamma} = -\frac{1}{2}\vec{K\Lambda}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \vec{KI} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\vec{K\Lambda}\right) = -\frac{1}{4}\vec{K\Lambda}$

Άρα $\vec{KI} \parallel \vec{K\Lambda}$

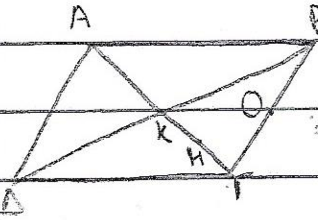
K κοινό σημείο $\Rightarrow$ K, Λ, I συνευθειακά.

Όλες τις ασκήσεις της ενότητας 2 53-62.

Σελ. 58 όχι 2.60, 2.61, 2.62

30.7.19

σελ. 53
2.24



ΑΒΓΔ τετράπλευρο

O τυχαίο σημείο

K σημείο τομής των διαγωνίων τ...

M μέσο του KΓ => KM = MΓ

$\vec{OB}+\vec{O\Delta}-\vec{O\Gamma}+\vec{OA}$

α) Αρκεί ν.δ.ό $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$

$\vec{OB}+\vec{O\Delta}=\vec{O\Gamma}+\vec{OA}$

$\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{O\Gamma}-\vec{O\Delta}$

$\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$ άρα ΑΒΓΔ #

β) Εφόσον ΑΒΓΔ # τότε $\vec{AK}=\vec{K\Gamma}$ (1)

Επίσης $\vec{KM}=\vec{M\Gamma}$ (2) αφού M μέσο του KΓ

Άρα $\vec{A\Gamma}=\vec{AK}+\vec{K\Gamma} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \vec{A\Gamma}=2\vec{AK} \Rightarrow \vec{AK}=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$ (3)

Έχουμε $\vec{K\Gamma}=\vec{KM}+\vec{M\Gamma} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \vec{AK}=2\vec{KM}=\vec{KM}=\frac{1}{2}\vec{AK} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{KM}=\frac{1}{2}\cdot$

Άρα $\vec{AM}=\vec{AK}+\vec{KM} \overset{(4)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}+\frac{1}{4}\vec{A\Gamma} \Rightarrow 4\vec{AM}=\cancel{4}^{2}\frac{1}{\cancel{2}}\vec{A\Gamma}+\cancel{4}$

$4\vec{AM}=2\vec{A\Gamma}+\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow 4\vec{AM}=3\vec{A\Gamma}$

Οπότε $4\vec{AM}-2\vec{A\Gamma}=3\vec{A\Gamma}-2\vec{A\Gamma}=\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AB}$

Άρα $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=4\vec{AM}-2\vec{A\Gamma}$

σελ 54

2.28. ΑΒΓΔ #

Κ κέντρο

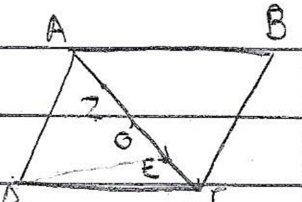
Μ μέσο του ΚΓ => ΚΜ = ΜΓ

Ν.δ.ό $\vec{AB}+2\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}=4\vec{AM}$

$4\vec{AM} = 4\cdot\frac{3}{4}\vec{A\Gamma} = 3\vec{A\Gamma} = 2\vec{A\Gamma}+\vec{A\Gamma} = 2\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}+\vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}+\vec{AB}$

Άρα $\vec{AB}+2\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}=4\vec{AM}$

σελ. 54



2.33. ΑΒΓΔ #

Ε, Ζ σημεία ώστε $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$

α) Αν $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\vec{\Delta E}$, $\vec{\Delta Z}$ ως γραμμ. συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

$\vec{\Delta E} = \vec{AE}+\vec{\Delta A} = \vec{AE}+\vec{\Gamma B} = \vec{AE}-\vec{B\Gamma} = \frac{1}{4}\vec{A\Gamma}-\vec{B\Gamma} = \frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}-\vec{B\Gamma}$

Επομένως, $\vec{\Delta E} = \frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}-\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow 4\vec{\Delta E} = 4\cdot\frac{1}{4}\vec{AB}+4\cdot\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}-4\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$4\vec{\Delta E} = \vec{AB}+\vec{B\Gamma}-4\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow 4\vec{\Delta E} = \vec{AB}-3\vec{B\Gamma} \Rightarrow \vec{\Delta E} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$

$\vec{\Delta Z} = \vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Gamma Z} = \vec{AB}-\vec{Z\Gamma} = \vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{A\Gamma} = \vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$

Επομένως $\vec{\Delta Z} = \vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow 4\vec{\Delta Z} = 4\vec{AB}-4\cdot\frac{1}{4}\vec{AB}-4\cdot\frac{1}{4}\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$4\vec{\Delta Z} = 4\vec{AB}-\vec{AB}-\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow 4\vec{\Delta Z} = 3\vec{AB}-\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\Delta Z} = \frac{1}{4}(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ (1)

β) Ν.δ.ό ΕΒΖΔ #

Αρκεί ν.δ.ό $\vec{EB} = \vec{\Delta Z}$

$\vec{EB} = \vec{EA}+\vec{AB} = \vec{AB}-\vec{AE} = \vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{A\Gamma} = \vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$

Επομένως, $\vec{EB} = \vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow 4\vec{EB} = 4\vec{AB}-4\cdot\frac{1}{4}\vec{AB}-4\cdot\frac{1}{4}\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$4\vec{EB} = 3\vec{AB}-\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{EB} = \frac{1}{4}(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\vec{EB} = \vec{\Delta Z}$ άρα ΕΒΖΔ #

σελ. 54
2.34 ΑΒΓ τρίγωνο

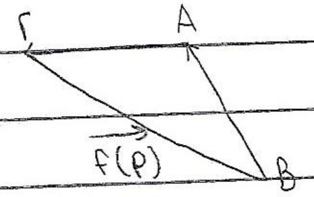
Ρ τυχαίο σημείο

α) $\overrightarrow{f(P)} = 2\overrightarrow{PA} - 5\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{P\Gamma}$

$\overrightarrow{f(P)} = -2\overrightarrow{AP} + 5\overrightarrow{BP} - 3\overrightarrow{\Gamma P} = -\cancel{2\overrightarrow{AP}} + \cancel{5\overrightarrow{AP}} - 5\overrightarrow{AB} - \cancel{3\overrightarrow{AP}} + 3\overrightarrow{A\Gamma}$

$\overrightarrow{f(P)} = 3\overrightarrow{A\Gamma} - 5\overrightarrow{AB}$ που είναι σταθερό

β)



σελ. 54
2.35 Α, Β, Γ σταθερά σημεία

Μ τυχαίο σημείο

α) $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M\Gamma}$

$\vec{u} = -3\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{\Gamma M} = -\cancel{3\overrightarrow{AM}} + \cancel{5\overrightarrow{AM}} - 5\overrightarrow{AB} - \cancel{2\overrightarrow{AM}} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$

$\vec{u} = 2\overrightarrow{A\Gamma} - 5\overrightarrow{AB}$ που είναι σταθερό

β) $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{M\Gamma}$

$\vec{u} = -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{\Gamma M} = -\cancel{\overrightarrow{AM}} - \cancel{\overrightarrow{AM}} + \overrightarrow{AB} + \cancel{2\overrightarrow{AM}} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$ που είναι σταθερό

σελ. 55
2.40 α) $3\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{P\Gamma}$

$-3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{B\Gamma} - 2\overrightarrow{BP}$

$-\cancel{3\overrightarrow{BP}} + \cancel{\overrightarrow{BP}} + \cancel{2\overrightarrow{BP}} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{B\Gamma}$

$-\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$

β) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{B\Gamma} \text{ τότε } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{B\Gamma} \\ B \text{ η αρχή του } \overrightarrow{B\Gamma} \\ \text{και τέλος του } \overrightarrow{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = 2\vec{B\Gamma} \\ \text{Β κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Α, Β, Γ συνευθειακά

δ) Άρα $\vec{AB} = 2\vec{B\Gamma}$ τότε και $|\vec{AB}| = |2\vec{B\Gamma}|$ άρα $AB = 2B\Gamma$

σελ. 55

2.41. α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\Gamma A} \parallel \vec{\Gamma B}$

$2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 5\vec{P\Gamma} = \vec{0}$

$2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 2\vec{P\Gamma} - 3\vec{P\Gamma} = \vec{0}$

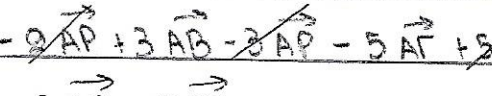
$2(\vec{PA} - \vec{P\Gamma}) + 3(\vec{PB} - \vec{P\Gamma}) = \vec{0}$

$2\vec{\Gamma A} + 3\vec{\Gamma B} = \vec{0}$

$2\vec{\Gamma A} = -3\vec{\Gamma B}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{\Gamma A} = -\frac{3}{2}\vec{\Gamma B} \\ \text{Γ κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Α, Β, Γ συνευθειακά

β)



Άρα το Γ είναι ανάμεσα στο Β και στο Α.

γ) $2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 5\vec{P\Gamma} = \vec{0}$

$-\cancel{2\vec{AP}} + 3\vec{AB} - \cancel{3\vec{AP}} - 5\vec{A\Gamma} + \cancel{5\vec{AP}} = \vec{0}$

$3\vec{AB} = 5\vec{A\Gamma}$

$\vec{AB} = \frac{5}{3}\vec{A\Gamma}$ άρα και $|\vec{AB}| = \left|\frac{5}{3}\vec{A\Gamma}\right| = \frac{5}{3}|\vec{A\Gamma}|$

Αν $|\vec{A\Gamma}| = 12$ τότε $|\vec{AB}| = \frac{5}{3}|\vec{A\Gamma}|$

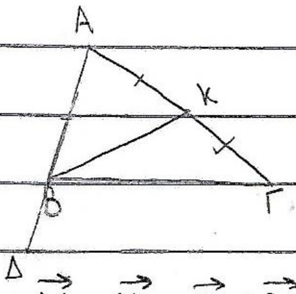
$|\vec{AB}| = \frac{5}{3}\cdot 12$

$|\vec{AB}| = \frac{60}{3}$

$|\vec{AB}| = 20$

σελ. 55

2.43



$\vec{K\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AK} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} - \vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

Άρα $\vec{K\Delta} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

$2\vec{K\Delta} = 2\vec{AB} + 2\frac{1}{2}\vec{AB} - 2\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

$2\vec{K\Delta} = 2\vec{AB} + \vec{AB} - \vec{A\Gamma}$

$2\vec{K\Delta} = 3\vec{AB} - \vec{A\Gamma}$

$\vec{K\Delta} = \frac{1}{2}(3\vec{AB} - \vec{A\Gamma})$

$\vec{K\Delta} = \frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

σελ. 56

2.49. $AB \parallel \Gamma\Delta$

$(\Gamma\Delta) = 3(AB)$

Αν $(E\Gamma) = 3(EA)$, $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$

α) $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$\vec{E\Gamma} = 3\vec{AE}$ (1)

$\vec{A\Gamma} = \vec{AE} + \vec{E\Gamma} \overset{(1)}{=} \vec{AE} + 3\vec{AE} = 4\vec{AE}$

$4\vec{AE} = \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{A\Gamma}$

$\vec{AE} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

$\vec{BE} = -\vec{AB} + \vec{AE} = -\vec{\alpha} + \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

$\vec{BE} = -\alpha + \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta} \Leftrightarrow 4\vec{BE} = -4\vec{\alpha} + 4\frac{1}{4}\vec{\alpha} + 4\frac{1}{4}\vec{\beta} \Leftrightarrow$

$4\vec{BE} = -4\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\beta} \Leftrightarrow 4\vec{BE} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{BE} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} - 3\vec{\alpha})$

$\vec{B\Delta} = \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{B\Gamma} - 3\vec{AB} = \vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$

β) $\left.\begin{array}{l}\vec{BE}=\frac{1}{4}(\vec{\beta}-3\vec{\alpha})\\ \vec{B\Delta}=\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\vec{BE}=\frac{1}{4}\vec{B\Delta}\\ \text{Β κοινό σημείο}\end{array}\right\}\Rightarrow Α,Β,Γ$ συνευθειακά

σελ. 56
2.51 $\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{\Gamma E}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$

$\vec{AZ}=\frac{3}{5}\vec{A\Gamma}$

α) $\vec{A\Delta}-\vec{\Gamma E}=\frac{1}{3}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$

$\vec{A\Delta}-\vec{AE}+\vec{A\Gamma}=\frac{1}{3}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}+\frac{1}{2}\vec{AB}$

$6\vec{E\Delta}+6\vec{A\Gamma}=\cancel{6}^{2}\frac{1}{\cancel{3}}\vec{AB}-\cancel{6}^{3}\frac{1}{\cancel{2}}\vec{A\Gamma}+\cancel{6}^{3}\frac{1}{\cancel{2}}\vec{AB}$

$6\vec{E\Delta}+6\vec{A\Gamma}=2\vec{AB}-3\vec{A\Gamma}+3\vec{AB}$

$6\vec{E\Delta}=-6\vec{A\Gamma}-3\vec{A\Gamma}+2\vec{AB}+3\vec{AB}$

$6\vec{E\Delta}=-9\vec{A\Gamma}+5\vec{AB}$

$-6\vec{\Delta E}=-9\vec{A\Gamma}+5\vec{AB}$

$\vec{\Delta E}=+\frac{9}{6}\vec{A\Gamma}-\frac{5}{6}\vec{AB}$

$\vec{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{A\Gamma}-\frac{5}{6}\vec{AB}$

$\vec{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\alpha}$

$\vec{\Delta Z}=\vec{AZ}-\vec{A\Delta}$

$\vec{AZ}-\vec{A\Delta}=\frac{3}{5}\vec{A\Gamma}-\frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{\Delta Z}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}$

β) $\vec{\Delta E}=\frac{3}{2}\vec{\beta}-\frac{5}{6}\vec{\alpha}\Leftrightarrow 6\vec{\Delta E}=\cancel{6}^{3}\frac{3}{\cancel{2}}\vec{\beta}-\cancel{6}\frac{5}{\cancel{6}}\vec{\alpha}\Leftrightarrow 6\vec{\Delta E}=9\vec{\beta}-5\vec{\alpha}$ (1)

$\vec{\Delta Z}=\frac{3}{5}\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\alpha}\Leftrightarrow 15\vec{\Delta Z}=\cancel{15}^{3}\frac{3}{\cancel{5}}\vec{\beta}-\cancel{15}^{5}\frac{1}{\cancel{3}}\vec{\alpha}\Leftrightarrow 15\vec{\Delta Z}=9\vec{\beta}-5\vec{\alpha}$ (2)

Από (1) και (2) παρατηρούμε ότι $6\vec{\Delta E}=15\vec{\Delta Z}$ άρα $\left.\begin{array}{c}\vec{\Delta E}=\frac{15}{6}\vec{\Delta Z}\\ \text{Δ κοινό σημείο}\end{array}\right\}\Rightarrow Δ,Ε,Ζ$ συνευθειακά

σελ. 57
2.54 Κ μέσο του ΒΓ => ΒΚ = ΚΓ

Λ μέσο του ΓΑ => ΓΛ = ΛΑ

Μ μέσο του ΑΒ => ΑΜ = ΜΒ

α) $\vec{AK} + \vec{B\Lambda} + \vec{\Gamma M} = \frac{\cancel{\vec{AB}} + \cancel{\vec{A\Gamma}} + \cancel{\vec{BA}} + \cancel{\vec{B\Gamma}} + \cancel{\vec{\Gamma A}} + \cancel{\vec{\Gamma B}}}{2} = \vec{O}$

β) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = \vec{OK} + \vec{O\Lambda} + \vec{OM}$

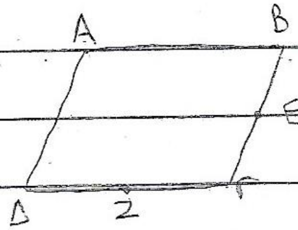
$\vec{OK} - \vec{OA} + \vec{O\Lambda} - \vec{OB} + \vec{OM} - \vec{O\Gamma} = \vec{O}$

$\vec{AK} + \vec{B\Lambda} + \vec{\Gamma M} = \vec{O}$ που ισχύει σύμφωνα με το ερώτημα 1.

σελ. 57
2.55 ΑΒΓΔ #

Ε μέσο του ΒΓ

Ζ μέσο του ΓΔ



$\vec{AE} + \vec{AZ} = \frac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma} + \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta}}{2} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta}}{2} = \frac{\vec{AB} + 2(\vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}) + \vec{A\Delta}}{2}$

$\frac{\vec{AB} + 2(\vec{A\Delta} + \vec{AB}) + \vec{A\Delta}}{2} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{A\Delta} + 2\vec{AB} + \vec{A\Delta}}{2} = \frac{3\vec{AB} + 3\vec{A\Delta}}{2} = \frac{3}{2}(\vec{AB}$

$\frac{3}{4}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta}) = \frac{3}{4}(\vec{A\Gamma} + \vec{A\Gamma}) = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2}\vec{A\Gamma} = \frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$

Άρα $\vec{AE} + \vec{AZ} = \frac{3}{4}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta})$

σελ. 57
2.56. $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{AE} = -\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$

G βαρύκεντρο

Ν.δ.ό ΑGΔΕ #

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{AE} = \vec{G\Delta}$

Επειδή G βαρύκεντρο τότε $AG = \frac{2}{3}AZ$

Επειδή $\vec{AG} \uparrow\uparrow \vec{AZ}$ τότε $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AZ}$ (1)

Όμως $\vec{AZ} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$ (2)

Άρα (1) και (2) [illegible] $\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$

Με σημείο αναφοράς το Α έχουμε

$\vec{\Theta\Delta} = \vec{A\Delta}-\vec{A\Theta} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}) = \frac{1}{3}(\vec{AB}-\vec{AB}-\vec{A\Gamma}) = -\frac{1}{3}\vec{A\Gamma} = \vec{AE}$

Άρα $\vec{\Theta\Delta} = \vec{AE}$ οπότε ΑΘΔΕ ...

σελ 58

2.63 A. Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\vec{\alpha} = -\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}$ άρα $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ το οποίο είναι άτοπο

Άρα $\kappa = 0$

Αν $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{\beta} = -\frac{\kappa}{\lambda}\vec{\alpha}$ άρα $\vec{\beta} // \vec{\alpha}$ το οποίο είναι άτοπο

Άρα $\lambda = 0$

Οπότε $\kappa = \lambda = 0$

B. $BM = 2M\Gamma$

α) $\vec{BM} = 2\vec{M\Gamma} \iff \vec{AM} - \vec{AB} = 2(\vec{A\Gamma} - \vec{AM}) \iff \vec{AM} = -2\vec{AM} + 2\vec{A\Gamma} + \vec{AB}$

$3\vec{AM} = 2\vec{A\Gamma} + \vec{AB}$

β) $\kappa\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} = 3\vec{AM} + 2\vec{B\Gamma}$

$\kappa\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} = 2\vec{A\Gamma} + \vec{AB} - 2\vec{AB} + 2\vec{A\Gamma}$

$\kappa\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} = 4\vec{A\Gamma} - \vec{AB}$

$\kappa\vec{AB} + \vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} - 4\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$(\kappa+1)\vec{AB} + (\lambda-4)\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$\kappa+1=0$ και $\lambda-4=0$

$\kappa=-1$ και $\lambda=4$

σελ.59
- 2.65 Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$ τότε $\vec{u} = x\vec{v} \Rightarrow 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = x(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

$$2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = x\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}x$$

$$2\vec{\alpha} - x\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 3\vec{\beta}x = \vec{0}$$

$$(2-x)\vec{\alpha} + (1-3x)\vec{\beta} = \vec{0}$$

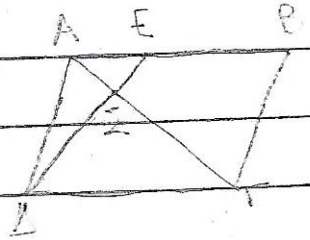
Αλλά $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ άρα $x = 2$ και $x = -\frac{1}{3}$.

Άτοπο.

Άρα $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$

σελ.59
2.66. ΑΒΓΔ ▱

Ε σημείο της ΑΒ ώστε $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$



Σ σημείο τομής ΑΓ, ΔΕ

ν.δ.ό $\vec{A\Gamma} = 4\vec{A\Sigma}$

$\vec{A\Sigma} + \vec{\Sigma E} + \vec{EA} = \vec{0}$ (1)

$\vec{A\Sigma} \parallel \vec{A\Gamma}$ άρα $\vec{A\Sigma} = x\vec{A\Gamma} = x(\vec{AB} + \vec{A\Delta}) = x\vec{AB} + x\vec{A\Delta}$ (2)

$\vec{\Sigma E} \parallel \vec{\Delta E}$ άρα $\vec{\Sigma E} = y\vec{\Delta E} = y(\vec{\Delta A} + \vec{AE}) = -y\vec{A\Delta} + \frac{y}{3}\vec{AB}$ (3)

$\vec{AE} = -\vec{EA} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$ (4)

(1) $\xRightarrow[(4)]{(2),(3)}$ $x\vec{AB} + x\vec{A\Delta} - y\vec{A\Delta} + \frac{y}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{0}$

$$\left(x + \frac{y}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{AB} + (x-y)\vec{A\Delta} = \vec{0}$$

Αλλά $\vec{AB}, \vec{A\Delta} \neq \vec{0}$ άρα

$\left.\begin{array}{l} x + \frac{y}{3} = \frac{1}{3} \\ x = y \end{array}\right\} \Rightarrow x + \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x + x = 1 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Άρα $\vec{A\Sigma} = x\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{A\Sigma} = \frac{1}{4}\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = 4\vec{A\Sigma}$

σελ. 59

2.67 ΑΒΓ τρίγωνο

ΑΜ διάμεσος => ΒΜ = ΜΓ

ε ευθεία που τέμνει ΑΒ στο Δ και ΑΓ στο Ε και ΑΜ στο Ζ.

$\vec{\Delta Z} = 2\vec{ZE}$

$\vec{A\Delta} = \kappa\vec{AB}$

$\vec{AZ} = \lambda\vec{AM}$ όπου $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\vec{AE} = \mu\vec{A\Gamma}$

ν.δ.ό i) $(3\lambda - 2\kappa)\vec{AB} + (3\lambda - 4\mu)\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$\vec{\Delta Z} = 2\vec{ZE} \Leftrightarrow \vec{AZ} - \vec{A\Delta} = 2\vec{ZE} \Leftrightarrow \lambda\vec{AM} - \kappa\vec{AB} = 2\vec{AE} - 2\vec{AZ} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{AM} - \kappa\vec{AB} = 2\mu\vec{A\Gamma} - 2\lambda\vec{AM} \Leftrightarrow \lambda\vec{AM} + 2\lambda\vec{AM} = \kappa\vec{AB} + 2\mu\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\lambda\vec{AM} = \kappa\vec{AB} + 2\mu\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow 3\lambda\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma}) = \kappa\vec{AB} + 2\mu\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\cdot 3\lambda\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma}) = 2\kappa\vec{AB} + 2\cdot 2\mu\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow 3\lambda\vec{AB} + 3\lambda\vec{A\Gamma} = 2\kappa\vec{AB} + 4\mu\vec{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow 3\lambda\vec{AB} - 2\kappa\vec{AB} + 3\lambda\vec{A\Gamma} - 4\mu\vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow (3\lambda - 2\kappa)\vec{AB} + (3\lambda - 4\mu)\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

ii) $2\kappa = 3\lambda = 4\mu$

$\vec{AB}, \vec{A\Gamma} \neq \vec{0}$ άρα $\left.\begin{array}{l} 3\lambda - 2\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 2\kappa \\ 3\lambda - 4\mu = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 4\mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow 3\lambda = 2\kappa = 4\mu$

σελ. 59

2.68 ΑΒΓ τρίγωνο

$\vec{AB} = \vec{\alpha}$

$\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$

$\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{A\Gamma}$

α) $\vec{\Delta E} = \vec{AE} - \vec{A\Delta} = \frac{3}{4}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{3}\vec{AB} = \left(\frac{\overset{3}{3}}{4} - \frac{\overset{4}{1}}{3}\right)(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) =$

$\frac{6}{12} - \frac{4}{12}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

$\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

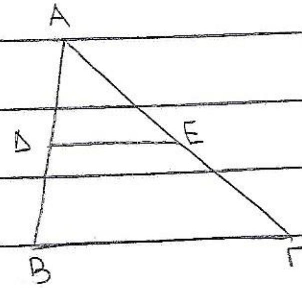
β) Έστω ότι $\vec{\Delta E} \parallel \vec{B\Gamma}$ άρα $\vec{\Delta E} = \lambda\vec{B\Gamma}$.

Αλλά $\vec{\Delta E} = \vec{B\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ άρα $\vec{\Delta E} = \lambda\vec{B\Gamma}$ άτοπο

Οπότε $\vec{\Delta E} \not\parallel \vec{B\Gamma}$

σελ.59

2.69



$\vec{AΔ} = \vec{ΔB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AE} = \vec{EΓ} = \frac{1}{2}\vec{AΓ}$

ν.δ.ό $\vec{ΔE} \parallel \vec{BΓ}$ και $\vec{ΔE} = \frac{1}{2}\vec{BΓ}$

$\vec{ΔE} = \vec{AE} - \vec{AΔ} = \frac{1}{2}\vec{AΓ} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AΓ} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{BΓ}$

Οπότε $\vec{ΔE} = \frac{1}{2}\vec{BΓ}$ άρα $\vec{ΔE} \parallel \vec{BΓ}$. Οπότε και $ΔE = \frac{1}{2}BΓ$ κα
$ΔE \parallel BΓ$

σελ.60

2.71 ΑΒΓ τρίγωνο

ΑΜ διάμεσος

Δ,Ε,Ζ σημεία ώστε:

$AΔ = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{1}{3}AM$, $AZ = \frac{1}{4}AΓ$

Αν $\vec{AB} = \vec{α}$, $\vec{AΓ} = \vec{β}$ τότε:

α) $\vec{ΔE} = \vec{AE} - \vec{AΔ} = \frac{1}{3}\vec{AM} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AΓ}) - \frac{1}{2}\vec{AB} =$

$\frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AΓ}) - \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{ΔE} = \frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AΓ}) - \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow 6\vec{ΔE} = \cancel{6}\frac{1}{\cancel{6}}(\vec{AB} + \vec{AΓ}) - \overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\vec{AB} \Leftrightarrow$

$6\vec{ΔE} = \vec{AB} + \vec{AΓ} - 3\vec{AB} \Leftrightarrow 6\vec{ΔE} = \vec{AΓ} - 2\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{ΔE} = \frac{1}{6}(\vec{β} - 2\vec{α})$

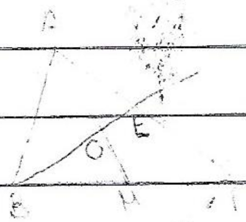
$\vec{ΔZ} = \vec{AZ} - \vec{AΔ} \Leftrightarrow \vec{ΔZ} = \frac{1}{4}\vec{AΓ} - \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow 4\vec{ΔZ} = \cancel{4}\frac{1}{\cancel{4}}\vec{AΓ} - \overset{2}{\cancel{4}}\frac{1}{\cancel{2}}\vec{AB} \Leftrightarrow$

$4\vec{ΔZ} = \vec{AΓ} - 2\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{ΔZ} = \frac{1}{4}(\vec{β} - 2\vec{α})$

β) $\vec{ΔE} = \frac{1}{6}\cdot 4\vec{ΔZ} \Leftrightarrow \vec{ΔE} = \frac{2}{3}\vec{ΔZ}$
Δ κοινό σημείο $\Big\}$ ⇒ Ε,Δ,Ζ συνευθειακά

σελ.60

2.72. ΑΒΓ τρίγωνο



ΑΜ διάμεσος

Ο μέσο της ΑΜ => ΑΟ = ΟΜ

ΒΟ τέμνει την ΑΓ στο Ε

ν.δ.ό ΕΓ = 2ΑΕ

$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})$ (1)

$\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AM} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \vec{AO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma}) \Leftrightarrow \vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})$

$\vec{AE} \parallel \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AE} = \lambda\vec{A\Gamma}$ (2)

$\vec{OE} \parallel \vec{BE} \Leftrightarrow \vec{OE} = \mu\vec{BE} \Leftrightarrow \vec{OE} = \mu(\vec{AE} - \vec{AB}) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \vec{OE} = \mu(\lambda\vec{A\Gamma} - \vec{AB})$

ΑΟΕ τρίγωνο άρα:

$\vec{AO} + \vec{OE} + \vec{EA} = \vec{0}$

$\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma}) + \mu(\lambda\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) - \lambda\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{A\Gamma} + \mu\lambda\vec{A\Gamma} - \mu\vec{AB} - \lambda\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$\left(\frac{1}{4} - \mu\right)\vec{AB} + \left(\frac{1}{4} + \mu\lambda - \lambda\right)\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$\frac{1}{4} - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{4}$ (3)

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4}\lambda - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow -3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$

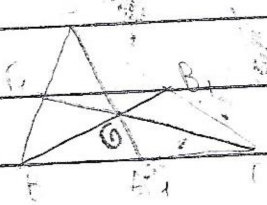
$3\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ (4)

(2) $\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$ (5)

$\vec{A\Gamma} = \vec{AE} + \vec{E\Gamma} \overset{(5)}{\Leftrightarrow} 3\vec{AE} = \vec{AE} + \vec{E\Gamma} \Leftrightarrow 3\vec{AE} - \vec{AE} = \vec{E\Gamma} \Leftrightarrow 2\vec{AE} = \vec{E\Gamma}$

σελ. 60

2.73 ΑΒΓ τρίγωνο



A_1 μέσο του ΒΓ

B_1 μέσο του ΑΓ

$Γ_1$ μέσο του ΑΒ

G βαρύκεντρο του ΑΒΓ

ν.δ.ό για κάθε σημείο Μ:

α) $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MΓ} = 3\vec{MA} + 2\vec{AA_1} = 3\vec{MB} + 2\vec{BB_1} = 3\vec{MΓ} + 2\vec{ΓΓ_1}$

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MΓ} = -\vec{AM} + \vec{AB} - \vec{AM} + \vec{AΓ} - \vec{AM} = -3\vec{AM} + \vec{AB} + \vec{AΓ} =$

$3\vec{MA} + 2\vec{AA_1}$ (1)

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MΓ} = \vec{BA} - \vec{BM} - \vec{BM} + \vec{BΓ} - \vec{BM} = -3\vec{BM} + \vec{BA} + \vec{BΓ} =$

$= 3\vec{MB} + 2\vec{BB_1}$ (2)

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MΓ} = \vec{ΓA} - \vec{ΓM} + \vec{ΓB} - \vec{ΓM} - \vec{ΓM} = -3\vec{ΓM} + \vec{ΓA} + \vec{ΓB} =$

$3\vec{MΓ} + 2\vec{ΓΓ_1}$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MΓ} = 3\vec{MA} + 2\vec{AA_1} = 3\vec{MB} + 2\vec{BB_1} = 3\vec{MΓ} + 2\vec{ΓΓ_1}$

β) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GΓ} = \vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GΓ_1}$

$\vec{GA_1} = \dfrac{\vec{GB}+\vec{GΓ}}{2}$ (1)

$\vec{GB_1} = \dfrac{\vec{GΓ}+\vec{GA}}{2}$ (2)

$\vec{GΓ_1} = \dfrac{\vec{GB}+\vec{GA}}{2}$ (3)

Από (1) + (2) + (3) προκύπτει ότι:

$\vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GΓ_1} = \dfrac{\vec{GB}+\vec{GΓ}+\vec{GΓ}+\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GA}}{2} = \dfrac{2\vec{GB}+2\vec{GΓ}+2\vec{GA}}{2} =$

$\dfrac{2(\vec{GB}+\vec{GΓ}+\vec{GA})}{2} = \vec{GB} + \vec{GΓ} + \vec{GA}$

σελ. 60
2.74 $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ τρίγωνα για τα οποία ισχύει:
$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'} = \vec{0}$

Έστω G και Θ τα βαρύκεντρα των τριγώνων $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα.

Τότε:

$\vec{G\Theta} = \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'\Theta}$ (1)

$\vec{G\Theta} = \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{B'\Theta}$ (2)

$\vec{G\Theta} = \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma'} + \vec{\Gamma'\Theta}$ (3)

Από (1) + (2) + (3) προκύπτει ότι:

$\vec{G\Theta} + \vec{G\Theta} + \vec{G\Theta} = \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'\Theta} + \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{B'\Theta} + \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma'} +$

$3\vec{G\Theta} = (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}) + (\vec{A'\Theta} + \vec{B'\Theta} + \vec{\Gamma'\Theta})$

$3\vec{G\Theta} = \vec{0}$

Άρα τα G και Θ συμπίπτουν.

σελ. 60
2.75. $AB\Gamma$, $A_1B_1\Gamma_1$ τρίγωνα.

G και G_1 τα βαρύκεντρα των τριγώνων $AB\Gamma$, $A_1B_1\Gamma_1$ αντίστοιχα.

ν.δ.ό α) $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{\Gamma\Gamma_1} = 3\vec{GG_1}$

$\vec{GG_1} = \vec{GA} + \vec{AA_1} + \vec{A_1G_1}$ (1)

$\vec{GG_1} = \vec{GB} + \vec{BB_1} + \vec{B_1G_1}$ (2)

$\vec{GG_1} = \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma_1} + \vec{\Gamma_1G_1}$ (3)

Από (1) + (2) + (3) προκύπτει ότι:

$\vec{GG_1} + \vec{GG_1} + \vec{GG_1} = \vec{GA} + \vec{AA_1} + \vec{A_1G_1} + \vec{GB} + \vec{BB_1} + \vec{B_1G_1} + \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma_1} + \vec{\Gamma_1G_1}$

$3\vec{GG_1} = (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{\Gamma\Gamma_1}) + (\vec{A_1G_1} + \vec{B_1G_1} + \vec{\Gamma_1G_1})$

$3\vec{GG_1} = \vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{\Gamma\Gamma_1}$

β) Για να έχουν τα τρίγωνα ΑΒΓ, $A_1B_1\Gamma_1$ το ίδιο βαρύκεντρο πρέπει G και G_1 να ταυτίζονται δηλαδή $\vec{GG_1}=\vec{0}$

Άρα $3\vec{GG_1} = \vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$

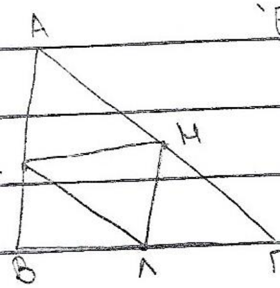
Άρα πρέπει $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{\Gamma\Gamma_1}=\vec{0}$.

σελ. 67

ΑΒΓ τρίγωνο

Κ, Λ, Μ μέσα των πλευρών του

Τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΛΜ ταυτίζονται.



Έστω ότι G το βαρύκεντρο του ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο του ΚΛΜ. Τότε έχουμε:

$G\Theta = GA + AK + K\Theta$ (1)

$G\Theta = GB + B\Lambda + \Lambda\Theta$ (2)

$G\Theta = G\Gamma + \Gamma M + M\Theta$ (3)

Από (1) + (2) + (3) έχουμε:

$G\Theta + G\Theta + G\Theta = GA + AK + K\Theta + GB + B\Lambda + \Lambda\Theta + G\Theta + G\Gamma + \Gamma M$

$3G\Theta = (GA + GB + G\Gamma) + (AK + B\Lambda + \Gamma M) + (K\Theta + \Lambda\Theta + M\Theta)$

$3G\Theta = AK + B\Lambda + \Gamma M$

$3G\Theta = \frac{1}{2}(AB + B\Gamma + \Gamma A)$

$3G\Theta = \vec{0}$

Οπότε τα βαρύκεντρα G και Θ ταυτίζονται.

2.80 α) Ορίζουμε γινόμενο του πραγματικού αριθμού λ με το διάνυσμα $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda\vec{a}$ ή $\lambda\cdot\vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- Είναι ομόρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda>0$ και αντίρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda<0$
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{a}|$ είναι δηλαδή $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

β) i) $\lambda(a+\beta)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{\beta}$

ii) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

iii) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

γ) Έστω a,β δύο διανύσματα. Κάθε διάνυσμα $\vec{v}=\kappa\vec{a}+\lambda\vec{\beta}$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων a,β

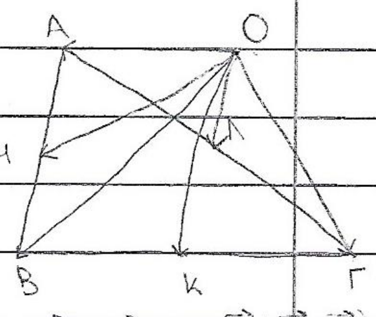
ε) Αν AB ένα ευθ. τμήμα M το μέσο ενός ευθ. τμήματος τότε για ένα σημείο αναφοράς O ισχύει η σχέση:
$\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$

στ) $\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})$

ζ) $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$

σελ. 27

8. K μέσο του $B\Gamma \Leftrightarrow \vec{BK}=\vec{K\Gamma}$



Λ μέσο του $\Gamma A \Leftrightarrow \vec{\Gamma\Lambda}=\vec{\Lambda A}$

M μέσο του $AB \Leftrightarrow \vec{AM}=\vec{MB}$

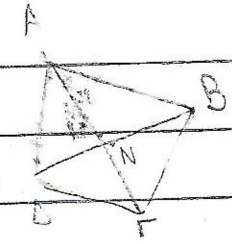
δ.ό. $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\vec{OK}+\vec{O\Lambda}+\vec{OM}$

$\vec{OK}+\vec{O\Lambda}+\vec{OM}=\frac{\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{OA}+\vec{O\Gamma}+\vec{OA}+\vec{OB}}{2}=\frac{2\vec{OB}+2\vec{O\Gamma}+2\vec{OA}}{2}=\frac{2(\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{OA})}{2}=$

$=\vec{OB}+\vec{OA}+\vec{O\Gamma}$

σελ.27

9. ΑΒΓΔ τετράπλευρο



Μ μέσο του ΑΓ

Ν μέσο του ΒΔ

ν.δ.ό $\vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta}=4\vec{MN}$

$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AB}+\vec{BN}$ (1)

$\vec{MN}=\vec{M\Gamma}+\vec{\Gamma B}+\vec{BN}$ (2)

$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{A\Delta}+\vec{\Delta N}$ (3)

$\vec{MN}=\vec{M\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta N}$ (4)

Από (1) + (2) + (3) + (4) προκύπτει ότι:

$\vec{MN}+\vec{MN}+\vec{MN}+\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AB}+\vec{BN}+\vec{M\Gamma}+\vec{\Gamma B}+\vec{BN}+\vec{MA}+\vec{A\Delta}+\vec{\Delta N}+\vec{M\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}$

$4\vec{MN}=2(\vec{MA}+\vec{M\Gamma})+(\vec{AB}+\vec{\Gamma B}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma\Delta})+2(\vec{BN}+\vec{\Delta N})$

$4\vec{MN}=\vec{AB}+\vec{\Gamma B}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma\Delta}$

σελ.27

11. ΑΒΓ τρίγωνο

Αν $\vec{A\Delta}=\kappa\vec{AB}+\lambda\vec{A\Gamma}$ και

$\vec{AE}=\lambda\vec{AB}+\kappa\vec{A\Gamma}$

ν.δ.ό $\vec{\Delta E}\parallel\vec{B\Gamma}$

$\vec{AE}-\vec{A\Delta}=\lambda\vec{AB}+\kappa\vec{A\Gamma}-\kappa\vec{AB}-\lambda\vec{A\Gamma}$

$\vec{\Delta E}=(\kappa-\lambda)\vec{A\Gamma}-(\kappa-\lambda)\vec{AB}$

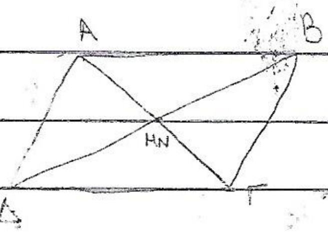
$\vec{\Delta E}=(\kappa-\lambda)(\vec{A\Gamma}-\vec{AB})$

$\vec{\Delta E}=(\kappa-\lambda)\vec{B\Gamma}$

Άρα $\vec{\Delta E}\parallel\vec{B\Gamma}$

Είναι λάθος
σελ. 38

5. ΑΒΓΔ τετράπλευρο



Μ μέσο του ΑΓ,

Ν μέσο του ΒΔ

Αν $4\vec{MN} = \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}$

τότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{A\Delta} + \vec{\Delta N}$ (1)

$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AN}$ (2)

$\vec{MN} = \vec{M\Gamma} + \vec{\Gamma B} + \vec{BN}$ (3)

$\vec{MN} = \vec{M\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma N}$ (4)

Από (1) + (2) + (3) + (4) έχουμε:

$\vec{MN} + \vec{MN} + \vec{MN} + \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{A\Delta} + \vec{\Delta N} + \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AN} + \vec{M\Gamma} + \vec{\Gamma B} + \vec{BN} + \vec{M\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma N}$

$4\vec{MN} = (\vec{MA} + \vec{M\Gamma}) + (\vec{MB} + \vec{M\Delta}) + (\vec{\Delta N} + \vec{BN}) + (\vec{AN} + \vec{\Gamma N}) + (\vec{A\Delta} + \vec{BA} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Delta\Gamma})$

$4\vec{MN} = \vec{A\Delta} + \vec{BA} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Delta\Gamma}$

Αν ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$

Άρα $4\vec{MN} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} \Leftrightarrow 4\vec{MN} = \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}$

Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

σελ. 55

2.43 β) $\vec{KE} = \vec{KA} - \vec{AE} = \vec{K\Gamma} - \vec{A\Delta} - \vec{\Delta E} = \cancel{\vec{K\Gamma}} - \vec{A\Delta} - \cancel{\vec{K\Gamma}} = -\vec{A\Delta} = -\vec{AB} - \vec{B\Lambda} = -\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

Άρα $\vec{KE} = -\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow 2\vec{KE} = -2\vec{AB} - 2\frac{1}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow 2\vec{KE} = -3\vec{AB} \Leftrightarrow$

$\vec{KE} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$ άρα $\vec{KE} \parallel \vec{AB}$

σελ. 29.
7. G βαρύκεντρο του ΑΒΓ

G': βαρύκεντρο του $A'B'\Gamma'$

ν.δ.ό $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'} = 3\vec{GG'}$

$\vec{GG'} = \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'G'}$ (1)

$\vec{GG'} = \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{B'G'}$ (2)

$\vec{GG'} = \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma'} + \vec{\Gamma'G'}$ (3)

Απο (1) + (2) + (3) προκύπτει ότι

$\vec{GG'} + \vec{GG'} + \vec{GG'} = \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'G'} + \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{B'G'} + \vec{G\Gamma} + \vec{\Gamma\Gamma'} + \vec{\Gamma'G'}$

$3\vec{GG'} = (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma}) + (\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}) + (\vec{A'G'} + \vec{B'G'} + \vec{\Gamma'G'})$

$3\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}$

Το κέντρο βάρους τριγώνου

Υπενθύμιση: Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο τομής των διαμέσων του λέγεται κέντρο βάρους ή βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ

Παρατήρηση: Αν ΑΒΓ τρίγωνο, Μ μέσο της πλευράς ΒΓ και G το βαρύκεντρο του ΑΒΓ τότε ισχύουν τα εξής: (Ι.Τ.Ε)

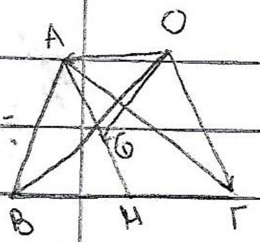
i) $\vec{AG} = 2\vec{GM}$

ii) Αν Ο σημείο αναφοράς τότε

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma})$$

iii) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} = \vec{0}$

Απόδειξη: i) Αφού το G είναι το βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τότε A, G, M είναι συνευθειακά (πάνω στην διάμεσο AM του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$).



Άρα, $\overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{GM}$

Επομένως, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{GM}$

Από την γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το $(AG) = 2(GM)$

και επειδή $\overrightarrow{AG} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GM}$ τότε $\lambda = 2$

Οπότε, ισχύει ότι $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$

ii) Από την σχέση $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ με σημείο αναφοράς το σημείο O έχουμε ότι:

$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG})$

$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OG}$

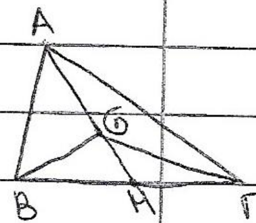
$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}$

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$ διότι M μέσο της $B\Gamma$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$

iii) Αφού M μέσο της $B\Gamma$ τότε $\frac{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma}}{2} = \overrightarrow{GM}$



$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = 2\overrightarrow{GM}$

Όμως, $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$

Άρα, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$

σελ.29
7. Απόδειξη: Αφού Ο το βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τότε ισχύει

ότι $3\vec{OO} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}$ (1)

Ομοίως, αφού Ο' βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ τότε

$3\vec{OO'} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{O\Gamma'}$ (2)

Από (2) - (1) $\Rightarrow 3\vec{OO'} - 3\vec{OO} = \vec{OA'} - \vec{OA} + \vec{OB'} - \vec{OB} + \vec{O\Gamma'} - \vec{O\Gamma}$

$3(\vec{OO'} - \vec{OO}) = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}$

$3\vec{OO'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'}$

σελ.27
9. Μ, Ν μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ΑΒΓΔ

νδό $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} = 4\vec{MN}$

Απόδειξη: Φέρνουμε τις ΑΝ και ΓΝ. Το σημείο

Μ είναι μέσο της ΑΓ

Άρα η ΜΝ είναι διάμεσος στο $\overset{\triangle}{AN\Gamma}$.

Οπότε $\vec{NM} = \dfrac{\vec{NA} + \vec{N\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 2\vec{NM} = \vec{NA} + \vec{N\Gamma}$ (1)

Αφού Ν μέσο της ΒΔ τότε ισχύει ότι:

$\vec{AN} = \dfrac{\vec{AB} + \vec{A\Delta}}{2} \Leftrightarrow 2\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{A\Delta}$ (2)

Επίσης αφού Ν μέσο της ΒΔ ισχύει ότι:

$\vec{\Gamma N} = \dfrac{\vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta}}{2} \Leftrightarrow \vec{N\Gamma} = -\dfrac{\vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta}}{2}$ (3)

Οπότε, (1) $\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Leftrightarrow}} 2\vec{NM} = -\dfrac{\vec{AB} + \vec{A\Delta}}{2} - \dfrac{\vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta}}{2}$

$-2\vec{MN} = -\dfrac{\vec{AB} + \vec{A\Delta}}{2} - \dfrac{\vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta}}{2}$

$-4\vec{MN} = -(\vec{AB} + \vec{A\Delta}) - (\vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta})$

$4\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta}$

σελ. 28

6. ΑΒΓΔ τετράπλευρο

Ν, Μ τα μέσα των ΒΔ, ΑΓ

ν.δ.ο αν $4\vec{MN} = \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}$ τότε ΑΒΓΔ #

Απόδειξη: Αφού ΑΒΓΔ τετράπλευρο και Μ,Ν μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ τότε ισχύει:

$$4\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} \quad (1)$$

(Για την απόδειξη της σχέσης (1) βλέπε προηγούμενη άσκηση)

Από την υπόθεση έχουμε $4\vec{MN} = \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \vec{AB} + \cancel{\vec{A\Delta}} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} = \cancel{\vec{A\Delta}} - \vec{B\Gamma}$

$$\vec{AB} + \cancel{\vec{\Gamma B}} + \vec{\Gamma\Delta} = +\cancel{\vec{\Gamma B}}$$

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$$

$$\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$$

Άρα ΑΒΓΔ #.

σελ. 28

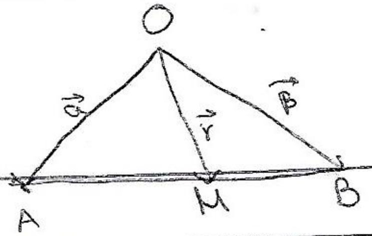
4. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{r}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β, Μ αντίστοιχα

$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\lambda}$ τότε ν.δ.ο

i) Αν Μ εσωτερικό του ΑΒ ισχύει ότι $\vec{r} = \frac{\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}}{\lambda+\mu}$

ii) Αν Μ εξωτερικό του ΑΒ τότε $\vec{r} = \frac{\lambda\vec{a} - \mu\vec{\beta}}{\lambda-\mu}$

i)



Αφού $\frac{(MA)}{(MB)} = \frac{\kappa}{\lambda}$ τότε

$$\left.\begin{array}{l}(MA) = \frac{\kappa}{\lambda}(MB) \\ \vec{MA} \uparrow\downarrow \vec{MB}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{MA} = -\frac{\kappa}{\lambda}\vec{MB}$$

$$\lambda\vec{MA} = -\kappa\vec{MB}$$

$$\lambda(\vec{OA} - \vec{OM}) = -\kappa(\vec{OB} - \vec{OM})$$

$$\cancel{\lambda\vec{OA} + \lambda\vec{OM} = -\kappa\vec{OB} + \kappa\vec{OM}}$$

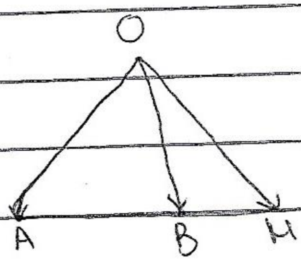
$$\lambda\vec{OA} + \kappa\vec{OB} = \lambda\vec{OM} + \kappa\vec{OM}$$

$$\lambda\vec{OA} + \kappa\vec{OB} = (\lambda+\kappa)\vec{OM}$$

$$\frac{\lambda\vec{\alpha} + \kappa\beta}{\lambda+\kappa} = \frac{(\lambda+\kappa)\vec{\gamma}}{\cancel{\lambda+\kappa}}, \quad \lambda \neq -\kappa$$

$$\frac{\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa} = \vec{\gamma}$$

ii)



Ομοίως, έχουμε ότι $(MA) = \frac{\kappa}{\lambda}(MB)$

Επειδή ισχύει ότι $\vec{MA} \uparrow\uparrow \vec{MB}$ από την σχέση

$(MA) = \frac{\kappa}{\lambda}(MB)$ έπεται $\vec{MA} = \frac{\kappa}{\lambda}\vec{MB} \Leftrightarrow \lambda\vec{MA} = \kappa\vec{MB} \Leftrightarrow$

$$\lambda(\vec{OA} - \vec{OM}) = \kappa(\vec{OB} - \vec{OM})$$

$$\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\gamma}) = \kappa(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \frac{\lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}}{\lambda-\kappa}, \quad \lambda \neq \kappa$$

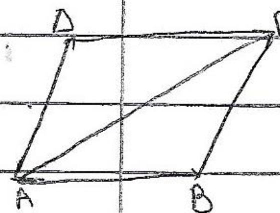
σελ. 28

5. ΑΒΓΔ #

Να βρεθεί σημείο Μ ώστε

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}$

Απόδειξη:



Αφού ΑΒΓΔ# τότε $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}$

Έχουμε ότι:

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}$

$\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{M\Delta}-\vec{M\Gamma}$

$\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{\Gamma\Delta}$

$\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{BA}$ (αφού ΑΒΓΔ#)

Έστω Κ το μέσο του ΑΒ τότε

$\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MK}$

Άρα, $2\vec{MK}=\vec{BA} \iff \vec{MK}=\frac{1}{2}\vec{BA}$

Όμως, $\vec{BK}=\frac{1}{2}\vec{BA}$ διότι

Κ μέσο του ΑΒ

Άρα $\left.\begin{aligned}\vec{MK}&=\frac{1}{2}\vec{BA}\\ \vec{BK}&=\frac{1}{2}\vec{BA}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{MK}=\vec{BK}$

δηλ. τα σημεία Μ, Β ταυτίζονται

σελ.54 17.9.19

236. ΑΒΓ τρίγωνο. Να βρείτε σημείο Ρ ώστε:

α) $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$

β) $\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{\Gamma P}$

Λύση: α) Είναι $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{B\Gamma} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{B\Gamma} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{\Gamma P} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

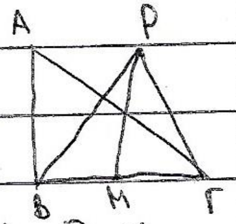
$-\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{P\Gamma} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = 3\overrightarrow{BA}$ (1)

Έστω Μ το μέσο της ΒΓ τότε γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}$ (2)

Οπότε, (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ $2\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ (3)



Άρα, το σημείο Ρ από την σχέση (3) βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ (μέσου του ΒΓ) και είναι παράλληλη στην ΑΒ και μάλιστα το σημείο Ρ είναι τέτοιο ώστε το ευθ. τμήμα $PM = \frac{3}{2} BA$. και $\overrightarrow{PM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$.

β) Με σημείο αναφοράς το σημείο Α η σχέση

$\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{\Gamma P}$ γράφεται $\overrightarrow{AB} + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) = -\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$

σελ. 56

250 α) Είναι:

$$\vec{KΛ} = \vec{AΛ} - \vec{AK} = \vec{AΛ} - \frac{1}{2}\vec{AΔ} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AΓ}) - \frac{1}{2}\vec{AΔ} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AΓ} - \frac{1}{2}\vec{AΔ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AΓ}-\vec{AΔ}) = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{ΔΓ} =$$

$$\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{ΔΓ})$$

β) Αρκεί ν.δ.ό $\vec{KΛ} \parallel \vec{KM}$

$$\vec{KM} = \vec{AM} - \vec{AK} = \vec{AM} - \frac{1}{2}\vec{AΔ} = \frac{1}{2}(\vec{AE}+\vec{AZ}) - \frac{1}{2}\vec{AΔ} =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AE}+\vec{AZ}-\vec{AΔ}) = \frac{1}{2}(\vec{AE}+\vec{ΔZ}) = \frac{1}{2}(2\vec{AB}+2\vec{ΔΓ}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2(\vec{AB}+\vec{ΔΓ}) = \vec{AB}+\vec{ΔΓ} = 2\vec{KΛ}$$

Άρα $\left.\begin{array}{r}\vec{KM} = 2\vec{KΛ} \Rightarrow \vec{KM} \parallel \vec{KΛ} \\ K \text{ κοινό}\end{array}\right\} \Rightarrow K, Λ, M$ συνευθ.

σελ. 28

2. ΑΒΓΔ # Ε, Ζ ώστε

$\vec{AE} = κ\vec{AΔ}$

$AZ = λ\vec{AB}$

όπου $λ = \frac{κ}{κ-1}$, $κ \neq 1$

ν.δ.ό Ε, Γ, Ζ συνευθειακά

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ό $\vec{EΓ} \parallel \vec{EZ}$

Από (2) - (1) $\Rightarrow \vec{AZ} - \vec{AE} = λ\vec{AB} - κ\vec{AΔ} \Leftrightarrow \vec{EZ} = λ\vec{AB} - κ\vec{AΔ} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ}{κ-1}\vec{AB} - κ\vec{AΔ} \Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ\vec{AB} - κ(κ-1)\vec{AΔ}}{(κ-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ\vec{AB} - κ^2\vec{AΔ} + κ\vec{AΔ}}{κ-1} \Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ(\vec{AB}+\vec{AΔ}) - κ^2\vec{AΔ}}{κ-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ\vec{AΓ} - κ^2\vec{AΔ}}{κ-1} \Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ\vec{AΓ} - κ\cdot κ\vec{AΔ}}{κ-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ\vec{AΓ} - κ\vec{AE}}{κ-1} \Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{κ}{κ-1}\vec{EΓ} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Leftrightarrow \vec{EZ} = λ\vec{EΓ} \Leftrightarrow \vec{EΓ} \parallel \vec{EZ} \\ E \text{ κοινό}\end{array}\right\} \Rightarrow E, Γ, Z \text{ συνευθειακά}$$

σελ.28.

3. $x\vec{KA}+y\vec{KB}+z\vec{K\Gamma}=\vec{0}$ (1)

$x\vec{\Lambda A}+y\vec{\Lambda B}+z\vec{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$ (2)

$x+y+z=0$ (3)

Ν.δ.ό i) Αν (1), (2) => (3)

ii) Αν (1), (3) => (2)

iii) Αν (2), (3) => (1)

Απόδειξη i) Αν ισχύουν η (2), (3) τότε θ.δ.ό την (1). Με σημείο αναφοράς το σημείο Λ έχουμε ότι

$x\vec{KA}+y\vec{KB}+z\vec{K\Gamma}=x(\vec{\Lambda A}-\vec{\Lambda K})+y(\vec{\Lambda B}-\vec{\Lambda K})+z(\vec{\Lambda\Gamma}-\vec{\Lambda K})=$

$x\vec{\Lambda A}-x\vec{\Lambda K}+y\vec{\Lambda B}-y\vec{\Lambda K}+z\vec{\Lambda\Gamma}-z\vec{\Lambda K}=\underbrace{x\vec{\Lambda A}+y\vec{\Lambda B}+z\vec{\Lambda\Gamma}}_{\vec{0}}-$

$(x+y+z)\vec{\Lambda K}$

$\overset{(2)}{\underset{(3)}{=}}\vec{0}=0\vec{\Lambda K}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Ομοίως, αν (1), (3) => (2) τότε θ.δ την (2). Με σημείο αναφοράς το σημείο Κ έχουμε:

$x\vec{\Lambda A}+y\vec{\Lambda B}+z\vec{\Lambda\Gamma}=x(\vec{KA}-\vec{K\Lambda})+y(\vec{KB}-\vec{K\Lambda})+z(\vec{K\Gamma}+\vec{K\Lambda})=$

$x\vec{KA}-x\vec{K\Lambda}+y\vec{KB}-y\vec{K\Lambda}+z\vec{K\Gamma}-z\vec{K\Lambda}=$

$x\vec{KA}+y\vec{KB}+z\vec{K\Gamma}-(x+y+z)\vec{K\Lambda}=\vec{0}$

Άρα $x\vec{\Lambda A}+y\vec{\Lambda B}+z\vec{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$

Αν ισχύει (1), (2) τότε θ.δ. την (3). Από (1)-(2) έχουμε:

$x\vec{KA}+y\vec{KB}+z\vec{K\Gamma}-x\vec{\Lambda A}-y\vec{\Lambda B}-z\vec{\Lambda\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

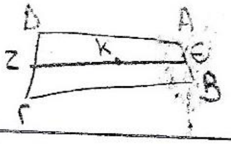
$x(\vec{KA}-\vec{\Lambda A})+y(\vec{KB}-\vec{\Lambda B})+z(\vec{K\Gamma}-\vec{\Lambda\Gamma})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$x(\vec{KA}+\vec{A\Lambda})+y(\vec{KB}+\vec{B\Lambda})+z(\vec{K\Gamma}+\vec{\Gamma\Lambda})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$x\vec{K\Lambda}+y\vec{K\Lambda}+z\vec{K\Lambda}=\vec{0}\Leftrightarrow(x+y+z)\vec{K\Lambda}=\vec{0}$

$\vec{K\Lambda}\neq\vec{0}$ άρα $x+y+z=0$

σελ. 58



2.57. α) $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}=4\vec{AK}$

$\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta} = \vec{AB}+2\vec{AZ} = 2\vec{AE}+2\vec{AZ} = 2(\vec{AE}+\vec{AZ}) =$

$2\cdot 2\vec{AK} = 4\vec{AK}$

β) $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}+\vec{K\Delta} = 2\vec{KE}+2\vec{KZ} = 2(\vec{KE}+\vec{KZ})$ (1)

Επειδή Κ μέσο της ΕΖ τότε ΖΚ = ΚΕ

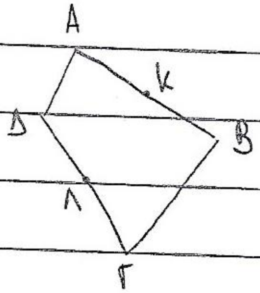
Επειδή $\vec{ZK} \parallel \vec{KE}$ τότε $\vec{ZK} \uparrow\uparrow \vec{KE}$ και $\vec{ZK}=\vec{KE}$

Από (1) έχουμε $2(\vec{KE}+\vec{KZ}) = 2(\vec{ZK}+\vec{KZ}) = \vec{0}$

Άρα $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}+\vec{K\Delta}=\vec{0}$

σελ. 58

2.59. Έστω ότι Κ το μέσο της ΑΒ και Λ το μέσο της ΔΓ τότε έχουμε:



$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}=\vec{0}$

$2\vec{OK}+2\vec{O\Lambda}=\vec{0}$

$2\vec{OK}=-2\vec{O\Lambda}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{OK}=-\vec{O\Lambda} \\ \text{O κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Άρα Ο, Κ, Λ συνευθειακά και $\vec{OK}\uparrow\downarrow\vec{O\Lambda}$

Οπότε το Ο είναι το μέσο του ΛΚ.

σελ. 61

2.77. $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}+\vec{ME}$

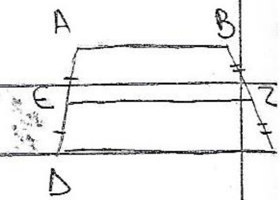
Έστω Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και Κ το μέσο του ΔΕ.

Οπότε έχουμε:

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}+\vec{ME}$

$\left.\begin{array}{l}3\vec{M\Theta}=2\vec{MK} \Leftrightarrow \vec{M\Theta}=\frac{2}{3}\vec{MK} \\ \text{M κοινό σημείο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Άρα Μ, Θ, Κ είναι συνευθειακά και $\vec{M\Theta}=\frac{2}{3}\vec{MK}$

σελ.60
2.70 Από την γεωμετρία ξέρουμε ότι $EZ = \frac{AB+\Delta\Gamma}{2}$



Άρα έχουμε:

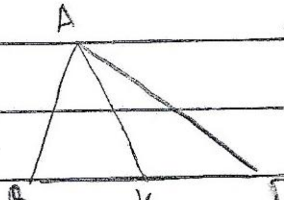
$\vec{EZ} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{\Delta\Gamma}) \Leftrightarrow 2\vec{EZ} = \vec{AB}+\vec{\Delta\Gamma}$ (1)

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο τότε $\vec{AB} \parallel \vec{\Delta\Gamma}$ οπότε $\vec{AB} = x\vec{\Delta\Gamma}$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} 2\vec{EZ} = x\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow 2\vec{EZ} = (x+1)\vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \vec{EZ} = \frac{1}{2}(x+1)\vec{\Delta\Gamma}$

Άρα $\vec{EZ} \parallel \vec{\Delta\Gamma} \parallel \vec{AB}$.

σελ.55
2.38. $\vec{PB}+\vec{P\Gamma} = \vec{AP}$



$\vec{AB}-\vec{AP}+\vec{A\Gamma}-\vec{AP} = \vec{AP}$

$-\vec{AP}-\vec{AP}-\vec{AP} = \vec{AB}+\vec{A\Gamma}$

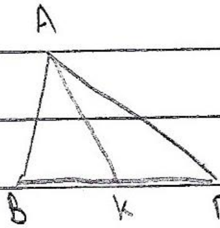
$-3\vec{AP} = \vec{AB}+\vec{A\Gamma}$ (1)

Έστω Κ το μέσο της ΒΓ οπότε $\vec{AB}+\vec{A\Gamma} = 2\vec{AK}$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} -3\vec{AP} = 2\vec{AK} \Leftrightarrow \vec{AP} = -\frac{2}{3}\vec{AK}$

σελ.55
2.37. α) $2\vec{AM}-\vec{\Gamma M} = \vec{MB}-2\vec{AB}$

Με σημείο αναφοράς το σημείο Α έχουμε:



$2\vec{AM}-(\vec{AM}-\vec{A\Gamma}) = (\vec{AB}-\vec{AM})-2\vec{AB}$

$2\vec{AM}-\vec{AM}+\vec{A\Gamma} = \vec{AB}-\vec{AM}-2\vec{AB}$

$2\vec{AM}-\cancel{\vec{AM}}+\cancel{\vec{AM}} = \vec{AB}-2\vec{AB}-\vec{A\Gamma}$

$2\vec{AM} = -\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$ (1)

Έστω Κ το μέσο της ΒΓ οπότε $\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}) = \vec{AK}$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} 2\vec{AM} = -\vec{AK} \Rightarrow \vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{AK}$

Άρα το σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και μάλιστα ισχύει η σχέση $\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{AK}$

άρα $\vec{AM} \uparrow\downarrow \vec{AK}$.

β) $\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{M\Gamma} = \vec{0}$

$-\vec{AM} - 2(\vec{AB} - \vec{AM}) + 3(\vec{A\Gamma} - \vec{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$-\vec{AM} - 2\vec{AB} + 2\vec{AM} + 3\vec{A\Gamma} - 3\vec{AM} = \vec{0} \Rightarrow -2\vec{AM} - 2\vec{AB} + 3\vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$-2\vec{AM} = 2\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AM} = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$