

Τι είναι το GeoGebra;

Το GeoGebra είναι ένα δυναμικό λογισμικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών που ενώνει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και το λογισμό. Αναπτύχθηκε από τον Markus Hohenwarter στο Florida Atlantic University για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στο σχολείο.

Το GeoGebra είναι ένα δυναμικό σύστημα γεωμετρίας. Ο χρήστης μπορεί να κάνει κατασκευές με σημεία, διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, κωνικές τομές καθώς επίσης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις και στη συνέχεια να τα τροποποιήσει με ένα δυναμικό τρόπο.

Το λογισμικό επιτρέπει, επίσης, την απευθείας εισαγωγή εξισώσεων και συντεταγμένων. Το GeoGebra έχει τη δυνατότητα να χειρίζεται μεταβλητές για αριθμούς, διανύσματα και σημεία, να βρίσκει παραγώγους και ολοκληρώματα συναρτήσεων και να παρέχει εντολές για την εύρεση Ριζών και Ακρότατων.

Αυτές οι δύο όψεις είναι χαρακτηριστικές του GeoGebra: μια έκφραση (αναπαράσταση) στο παράθυρο της άλγεβρας αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο στο παράθυρο της γεωμετρίας και αντίστροφα.

Βασικά εργαλεία του Geogebra

**Σημείο**: Με το εργαλείο αυτό μπορούμε να μαρκάρουμε ένα σημείο κάνοντας δεξί κλικ.



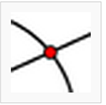
**Σημείο σε αντικείμενο**: Με το εργαλείο αυτό, μαρκάρουμε ένα σημείο πάνω σε ένα αντικείμενο (π.χ. σημείο σε μία ευθεία)



**Τομή δύο αντικειμένων**: Τα σημεία τομής δύο αντικειμένων μπορούν να κατασκευαστούν με δύο τρόπους. Αν

· Επιλέξουμε δύο αντικείμενα, θα κατασκευαστούν όλα τα σημεία τομής (αν υπάρχουν).

· Κάνουμε κλικ στην τομή δύο αντικειμένων θα κατασκευαστεί μόνο το συγκεκριμένο σημείο τομής.



**Μέσο ή κέντρο**: Επιλέγοντας το εργαλείο αυτό μπορούμε να κάνουμε κλικ σε :

· Δύο σημεία για να βρείτε το μέσο σημείο.

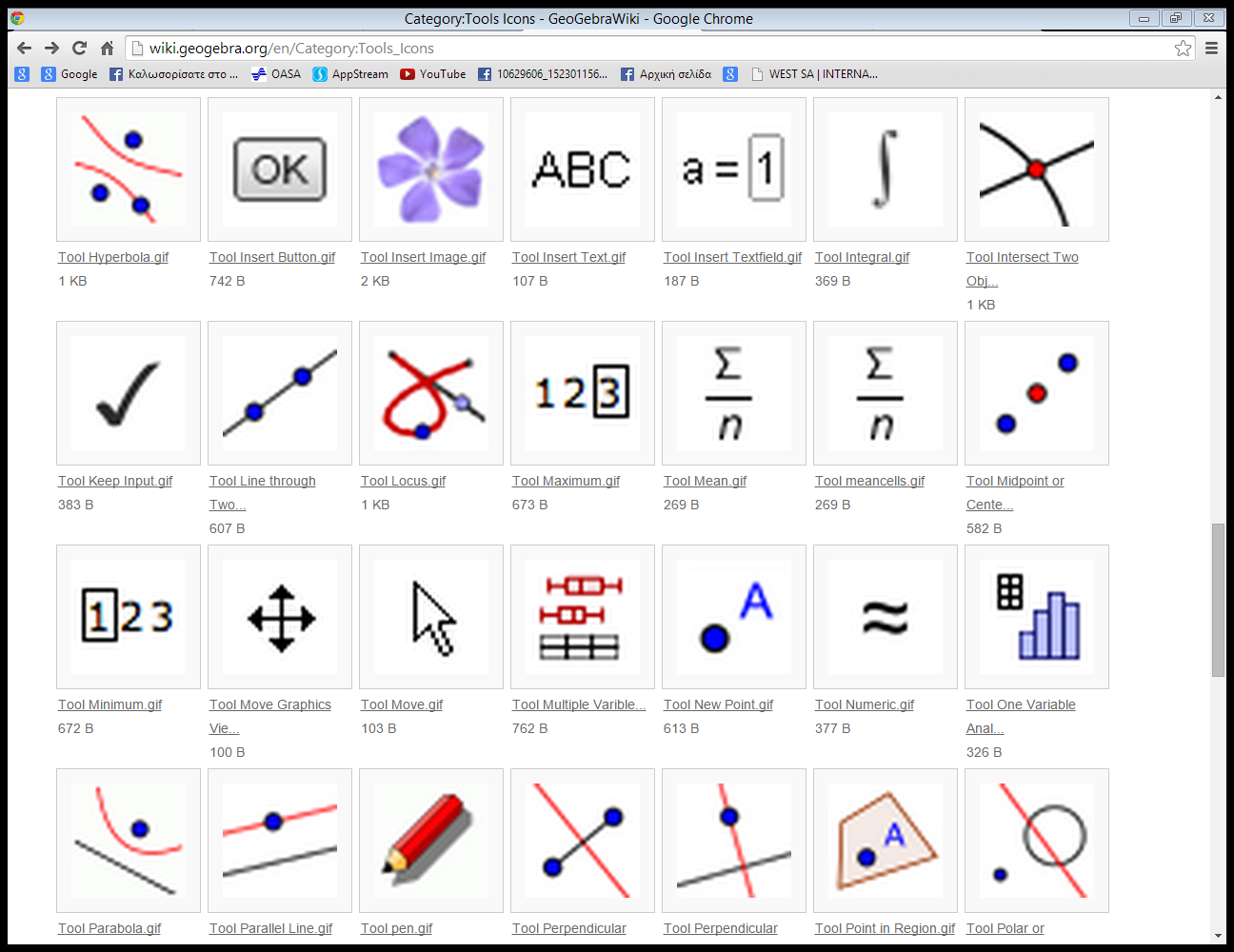
· Ένα ευθύγραμμο τμήμα για να βρείτε το μέσο του.

· Μια κωνική τομή για να βρείτε το κέντρο της.

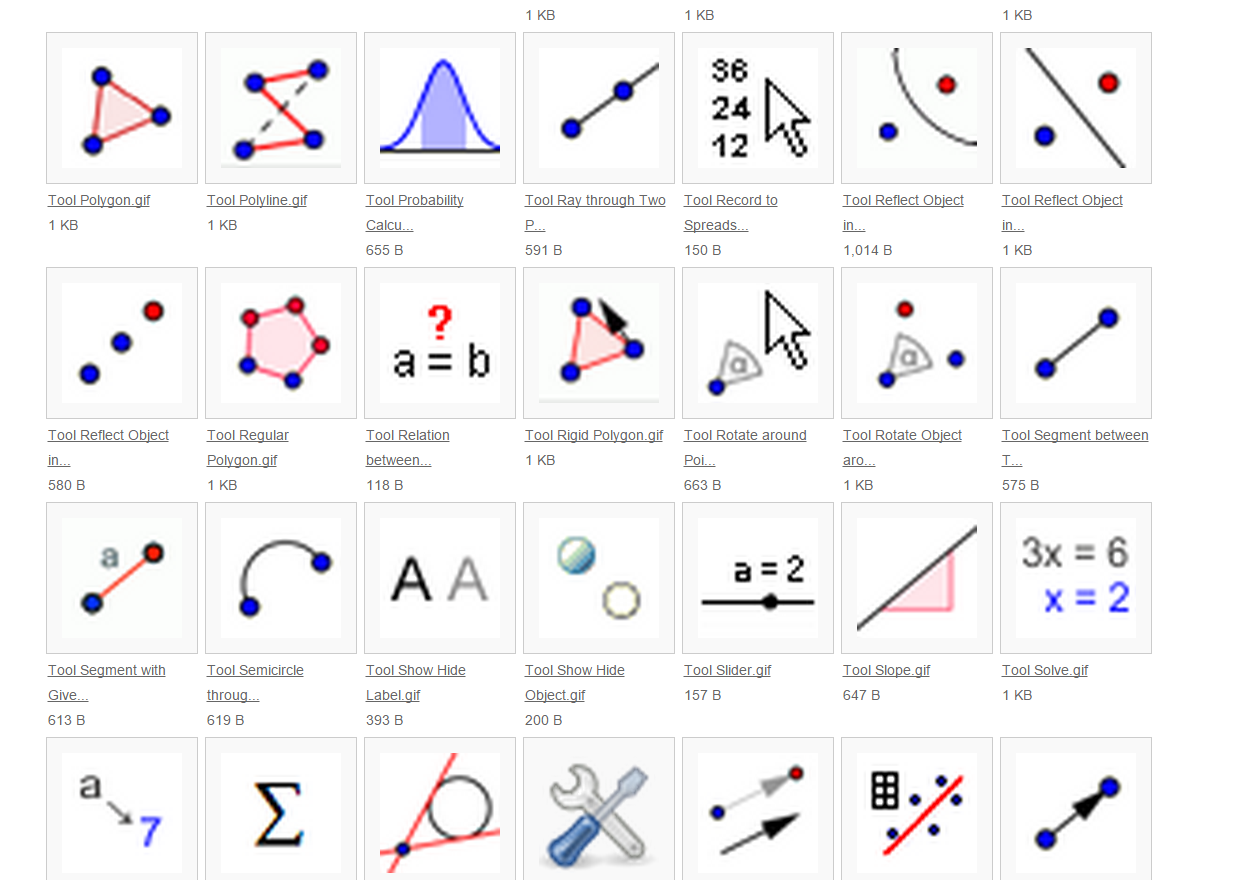


**Ευθεία:** Με το εργαλείο αυτό, μπορούμε να τραβήξουμε μία ευθεία,

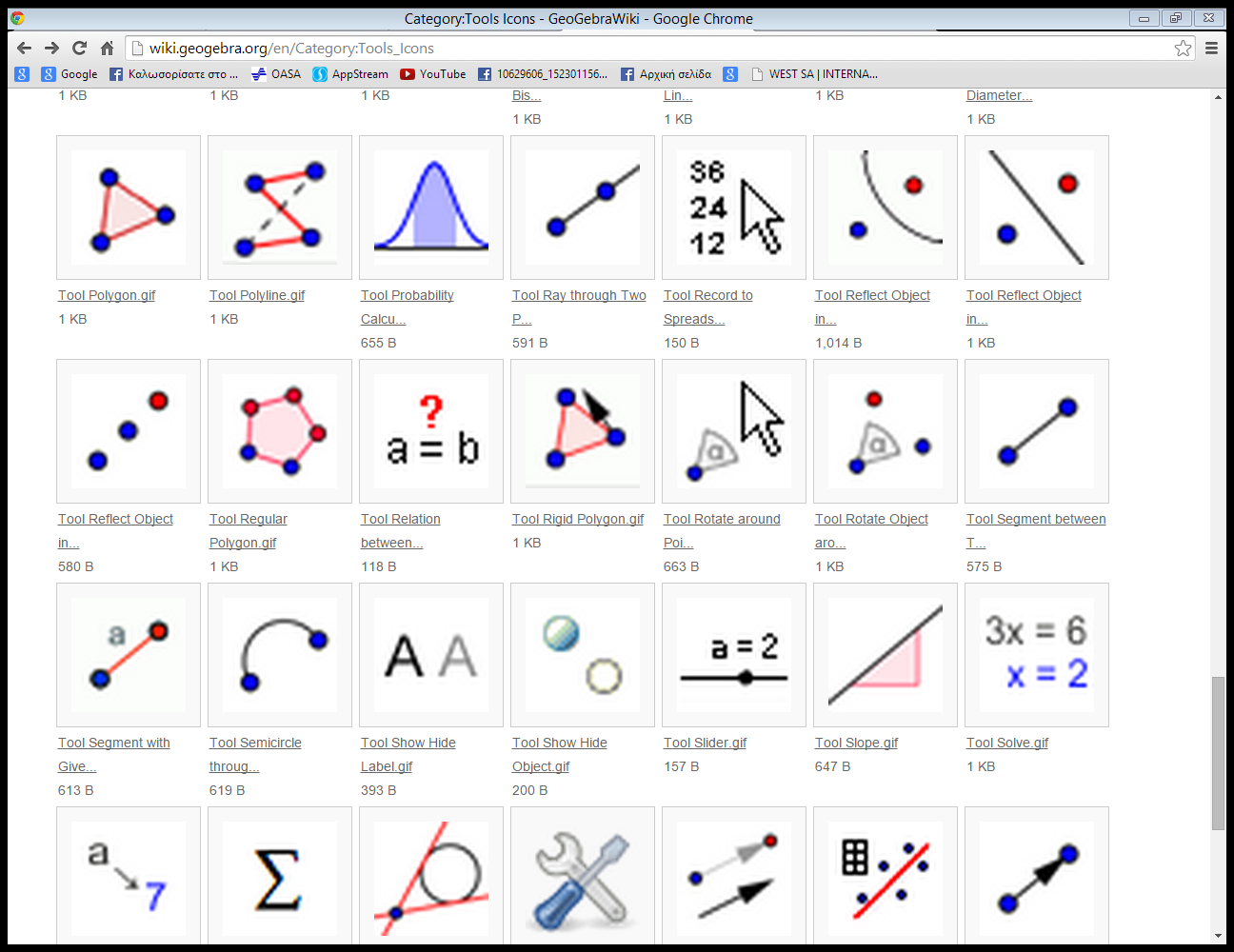
κάνοντας κλικ σε ένα σημείο

**~~~~**

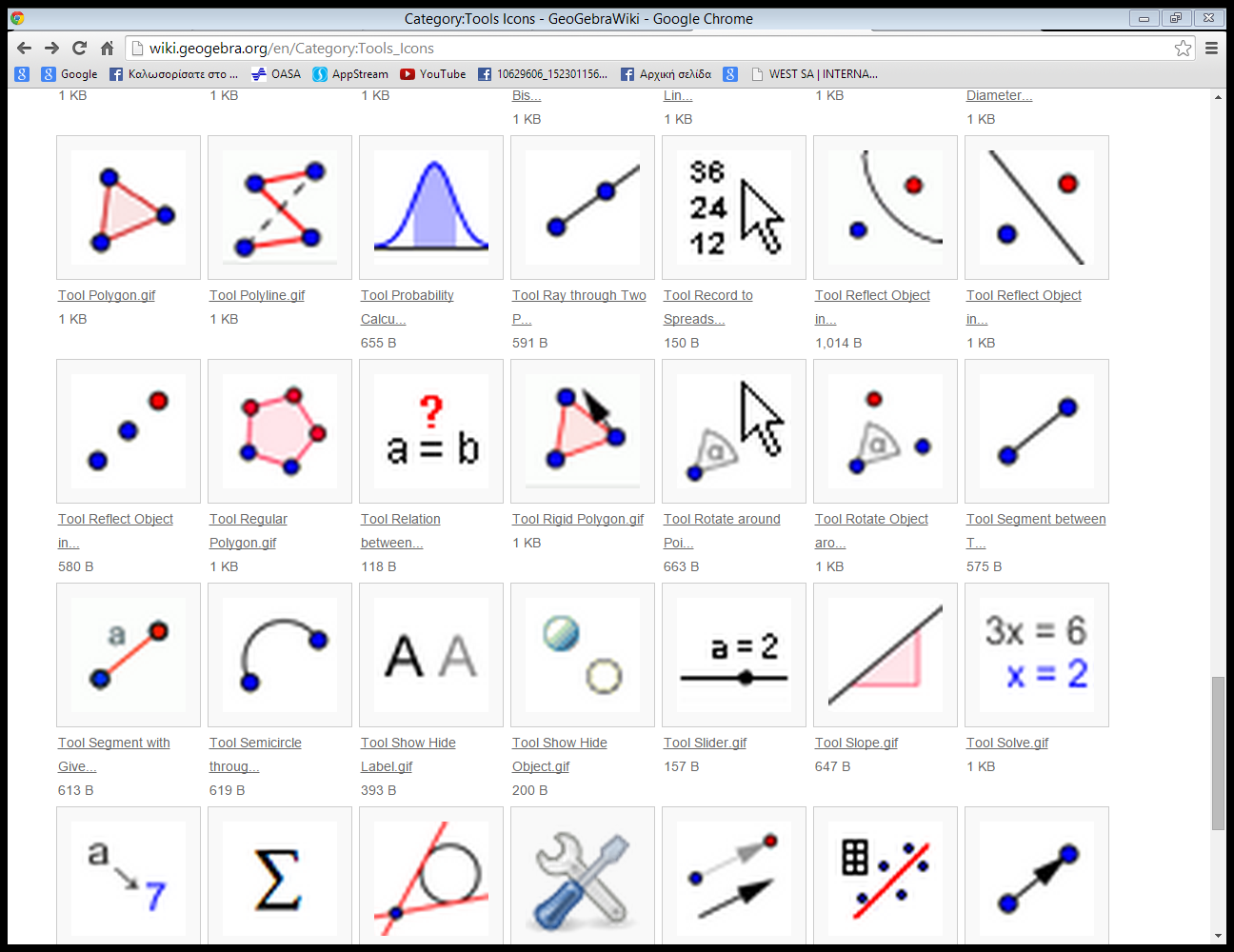
**Ευθύγραμμο τμήμα:** Με το εργαλείο αυτό, έχουμε την δυνατότητα να δημιουργήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα κάνοντας κλικ σε δύο σημεία.



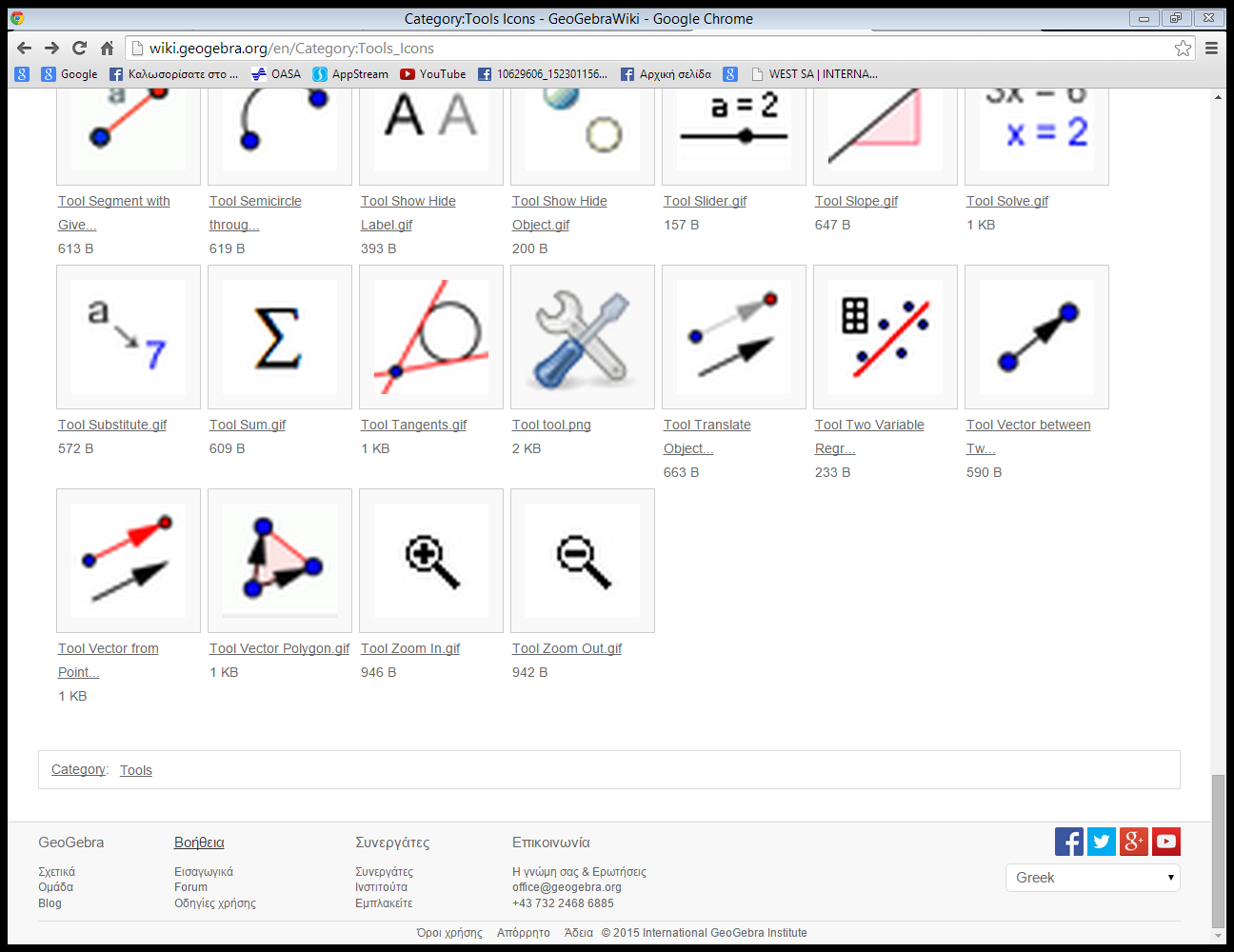
**Τμήμα με δοσμένο μήκος**: Κάνοντας κλικ στο εργαλείο που απεικονίζεται στο παρακάτω εικονίδιο μπορούμε τραβήξουμε μία ευθεία κάνοντας κλικ αρχικά σε ένα σημείο και δίνοντας έπειτα το μήκος της ευθείας που επιθυμούμε.



**Ημιευθεία:** Υπάρχει επίσης η δυνατότητα δημιουργίας μίας ημιευθείας, την οποία παρέχει το ανάλογο εργαλείο.



## Διάνυσμα μεταξύ δύο σημείων: Το εργαλείο αυτό μας επιτρέπει τη σημείωση του αρχικού και του τελικού σημείου διανύσματος.



**Διάνυσμα από σημείο:** Με το εργαλείο αυτό σημειώνουμε ένα σημείο A και ένα διάνυσμα v για να κατασκευάσουμε το σημείο B = A + v και το διάνυσμα από το σημείο A στο B.



Παραδείγματα

Τρίγωνο με γωνίες

Επιλέξτε Νέο σημείο στην μπάρα εργαλείων. Κάντε κλικ τρεις φορές στον πίνακα σχεδίασης για να δημιουργήσετε τις τρεις κορυφές A, B και Γ του τριγώνου. Στη συνέχεια, επιλέξτε Πολύγωνο και ακολούθως κάντε κλικ στα σημεία Α, Β και Γ. Για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του τριγώνου Πόλυ 1 κάντε ξανά κλικ στο σημείο Α. Το εμβαδόν του τριγώνου παρουσιάζεται στο παράθυρο της άλγεβρας. Για να εμφανιστούν όλες οι γωνίες ενός τριγώνου, επιλέξτε Γωνία στη μπάρα εργαλείων και ακολούθως επιλέξτε ένα τρίγωνο. Επιλέγοντας Μετακίνηση και μετακινώντας τις κορυφές του τριγώνου, μπορείτε να αλλάξετε δυναμικά το τρίγωνο. Μπορείτε να αποκρύψετε το παράθυρο της άλγεβρας και τους άξονες συντεταγμένων χρησιμοποιώντας το μενού Προβολή.

Γραμμική Εξίσωση ψ = α x + β

Θα επικεντρωθούμε στη σημασία του α και του β στη γραμμική εξίσωση ψ = αx + β,

δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές για το α και το β. Αυτό μπορεί να γίνει με την

εισαγωγή των πιο κάτω γραμμών στο πεδίο εισαγωγής κειμένου στο κάτω μέρος της

οθόνης και πατώντας το πλήκτρο Enter στο τέλος της κάθε γραμμής.

α = 1

β = 2

ψ = α x + β

Οι τιμές των α και β μπορούν να αλλάξουν χρησιμοποιώντας το πεδίο εισαγωγής

κειμένου ή απευθείας στο παράθυρο άλγεβρας με δεξιό κλικ (MacOS: Apple + κλικ)

σε ένα αριθμό και επιλέγοντας Επανακαθορισμός. Δοκιμάστε τις ακόλουθες τιμές

για τα α και β.

α = 2

α = -3

β = 0

β = -1

Μπορείτε, επίσης, να αλλάξετε τα α και β πολύ εύκολα, χρησιμοποιώντας

• βέλη (δείτε Κίνηση )

• δρομείς: δεξιό κλικ (MacOS: Apple + κλικ) στο α ή στο β και επιλέγοντας

Εμφάνιση / Απόκρυψη Αντικειμένου (δείτε περισσότερα στο Δρομέας)

Μεσόκεντρο τριών σημείων Α, Β, και Γ

Θα κατασκευάσουμε το μεσόκεντρο τριών σημείων, εισάγοντας στο πεδίο εισαγωγής

τις ακόλουθες γραμμές και πατώντας Enter στο τέλος της κάθε γραμμής. Φυσικά η

κατασκευή μπορεί να γίνει και με το ποντίκι χρησιμοποιώντας τις επιλογές (δείτε

Επιλογές) στη μπάρα εργαλείων.

A = (-2, 1)

B = (5, 0)

Γ = (0, 5)

M\_a = Μέσο[B, Γ]

M\_b = Μέσο[A, Γ]

s\_a = Ευθεία[A, M\_a]

s\_b = Ευθεία[B, M\_b]

S = Τομή [s\_a, s\_b]

To μεσόκεντρο μπορεί να υπολογιστεί άμεσα S1 = (A + B + C) / 3 και

συγκρίνοντας τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την εντολή Σχέση[S, S1].

Στη συνέχεια μπορείτε να ελέγξετε ισχύει το S = S1 και για άλλες θέσεις των

σημείων Α, Β και Γ. Αυτό μπορεί να γίνει επιλέγοντας Μετακίνηση και

μετακινώντας τα σημεία με το ποντίκι.

Διαχωρισμός Ευθύγραμμου Τμήματος AB με λόγο 7

: 3

Ο διαχωρισμός είναι μια εύκολη διαδικασία, καθώς το GeoGebra επιτρέπει τους

υπολογισμούς με τη χρήση διανυσμάτων. Πληκτρολογήστε τις πιο κάτω γραμμές στο

πεδίο εισαγωγής και πατήστε το Enter στο τέλος της κάθε γραμμής.

A = (-2, 1)

B = (3, 3)

s = Τμήμα[A, B]

T = A + 7/10 (B - A)

Αυτό μπορεί να γίνει, επίσης, με τον ακόλουθο τρόπο

A = (-2, 1)

B = (3, 3)

s = Τμήμα[A, B]

v = Διάνυσμα[A, B]

T = A + 7/10 v

Σε ένα επόμενο βήμα, θα μπορούσε να γίνει εισαγωγή ενός αριθμού t, π.χ.,

χρησιμοποιώντας ένα Δρομέα και επανακαθορίζοντας το σημείο T ως T = A +

t v (δείτε Επανακαθορισμός). Αλλάζοντας το t ο χρήστης μπορεί να δει το

σημείο T να μετακινείται κατά μήκος μιας γραμμής που μπορεί να εισαχθεί σε

παραμετρική μορφή (δείτε Γραμμή): g: X = T + s v

8

Γραμμικές Εξισώσεις με Δύο Μεταβλητές

Δύο γραμμικές εξισώσεις με x και y μπορούν να αναπαρασταθούν ως δύο ευθείες

γραμμές. Η αλγεβρική λύση είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών. Πληκτρολογήστε

τις ακόλουθες γραμμές στο πεδίο εισαγωγής και πατήστε Enter στο τέλος της κάθε

γραμμής.

g: 3x + 4y = 12

h: y = 2x – 8

S = Τομή[g, h]

Μπορείτε να αλλάξετε τις εξισώσεις πατώντας δεξιό κλικ (MacOS: Apple + κλικ) σε

μια από αυτές και επιλέγοντας Μορφοποίηση. Χρησιμοποιώντας το ποντίκι μπορείτε

να μετακινήσετε τις ευθείες επιλέγοντας Μετακίνηση ή να τις περιστρέψετε γύρω

από σημείο χρησιμοποιώντας Περιστροφή γύρω από σημείο.

Εφαπτομένη μιας Συνάρτηση του x

Στο λογισμικό GeoGebra υπάρχει η δυνατότητα χρησιμοποίησης εντολής για την

κατασκευή της εφαπτομένης μιας συνάρτησης f(x) στο σημείο x = a. Πληκτρολογήστε

τις ακόλουθες γραμμές στο πεδίο εισαγωγής και πατήστε Enter στο τέλος της κάθε

γραμμής.

a = 3

f(x) = 2 ημ(x)

t = Εφαπτομένη[a, f]

Χρησιμοποιώντας αυτόματη κίνηση για τον αριθμό a (δείτε Κίνηση), η εφαπτομένη

μετακινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x).

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την εύρεση της εφαπτομένης της συνάρτησης f(x) σε

συγκεκριμένο σημείο T.

a = 3

f(x) = 2 ημ(x)

T = (a, f(a))

t: X = T + s (1, f'(a))

Στην πιο πάνω μέθοδο η εφαπτομένη t δίνεται σε παραμετρική μορφή.

Μπορείτε, επίσης, να κατασκευάσετε την εφαπτομένη μιας συνάρτησης με

γεωμετρικό τρόπο.

• Επιλέξτε Νέο σημείο και πατήστε στην καμπύλη f για να κατασκευάσετε

ένα νέο σημείο A πάνω στην καμπύλη f.

• Επιλέξτε Εφαπτομένες και επιλέξτε διαδοχικά την καμπύλη f και το σημείο

A.

Επιλέξτε Μετακίνηση και μετακινήστε το σημείο A πάνω στην καμπύλη με το

ποντίκι. Με τον τρόπο αυτό μπορείτε να παρατηρήσετε πώς αλλάζει δυναμικά η

εφαπτομένη.