Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ΒΑΘΜΟΥ

Τουρναβίτης Στέργιος

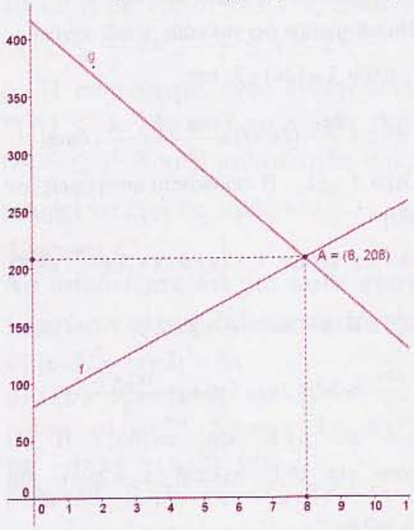
1. Μία κτηνοτροφική μονάδα έχει 80 πρόβατα και 416 κατσίκια. Κάθε εξάμηνο ο πληθυσμός των προβάτων αυξάνεται κατά 8 και ο αντίστοιχος των κατσικιών μειώνεται κατά 13.
α) Σε πόσα χρόνια η κτηνοτροφική μονάδα θα έχει ίσο αριθμό από τα δύο είδη φυτοφάγων;
β) Πόσος θα είναι τότε ο συνολικός αριθμός των ζώων

Λύση:

Α΄ τρόπος: α) Έστω ότι μετά από x χρόνια θα συμβεί αυτό. Αφού κάθε μισό χρόνο (1 εξάμηνο) τα πρόβατα αυξάνονται κατά 8, σε 1 χρόνο θα αυξηθούν κατά 16 και σε x χρόνια θα έχουμε μία αύξηση $16x$. Αντίστοιχα στον πληθυσμό των κατσικιών θα επέλθει μία μείωση $26x$. Σύμφωνα με το πρόβλημα σε x χρόνια, ο αριθμός από τα δύο είδη ζώων θα είναι ίσος.

Έχουμε την εξίσωση: $80 + 16x = 416 - 26x \ (1) \Leftrightarrow 42x = 336 \Leftrightarrow x = 8$

β) Για να βρούμε πόσα θα είναι τα πρόβατα σε 8 χρόνια, θα αντικαταστήσουμε το 8 στην ποσότητα $80 + 16x$, που εκφράζει το πλήθος τους. Έχουμε: $80 + 16 \cdot 8 = 208$. Αντίστοιχα για το πλήθος των κατσικιών σε 8 χρόνια, έχουμε: $416 - 26 \cdot 8 = 208$.



Άρα, όλα μαζί τα αιγοπρόβατα θα είναι: $2 \cdot 208 = 416$.

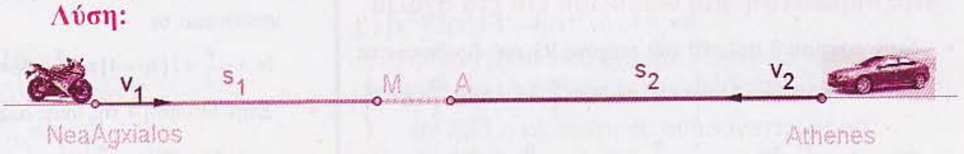
Β΄τρόπος: Σε ορθό και μη κανονικό σύστημα συντεταγμένων, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων,

$f(x) = 16x + 80$ και, $g(x) = -26x + 416$.

Στον οριζόντιο άξονα μετράμε τα χρόνια και στον κατακόρυφο το πλήθος των προβάτων ή των κατσικιών. Επειδή στον άξονα αυτόν χρειάζεται να παραστήσουμε (αρχικά τουλάχιστον) μεγάλους αριθμούς (το 80 για την f και το 416 για την g), το σύστημά μας δεν μπορεί να είναι κανονικό. Η τετμημένη του σημείου τομής, μας δίνει την λύση για το α) ερώτημα και το διπλάσιο της τεταγμένης του, μας δίνει την λύση για το β) ερώτημα.

2. Η απόσταση από την Αθήνα στην Νέα Αγχίαλο Μαγνησίας, είναι περίπου 300 km. Δύο φίλοι ξεκινάνε ταυτόχρονα και κινούμενοι αντίθετα, ο ένας με αυτοκίνητο από Αθήνα προς Νέα Αγχίαλο και ο άλλος με μοτοσικλέτα από Νέα Αγχίαλο προς Αθήνα. Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι 7km παραπάνω από αυτή της μοτοσικλέτας. Αν η απόσταση μεταξύ τους μετά από 2 ώρες οδήγησης είναι 6km, να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο οχημάτων.

Λύση:



Έστω v_1 η μέση ταχύτητα, s_1 το διάστημα του μοτοσικλετιστή που θα είχε διανύσει αν κινούνταν με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε 2 h. Επίσης v_2 η μέση ταχύτητα, s_2 το διάστημα που θα είχε διανύσει ο φίλος του με το αυτοκίνητο, αν κινούνταν και αυτός με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, στον ίδιο χρόνο αντίστοιχα. Σύμφωνα με το πρόβλημα, τον ορισμό της μέσης ταχύτητας από την Φυσική και το παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$s_1 + 6 + s_2 = 300,\ 2v_1 + 6 + (v_1 + 7) \cdot 2 = 300, 4v_1 = 300 - 20, v_1 = \frac{280}{4} = 70km/h$. Οπότε η ταχύτητα του αυτοκινήτου, είναι: $v_2 = (70 + 7)km/h = 77km/h$

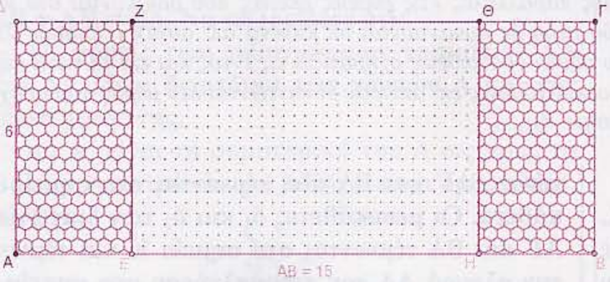
3. Ένας κηπουρός θέλει να χωρίσει έναν κήπο $ΑΒΓΔ$ σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε τρία μικρότερα ορθογώνια, έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο ακριανών και ίσων ορθογωνίων, να είναι τα $\frac{2}{3}$ του μεσαίου. Αν ο κήπος έχει διαστάσεις $ΑΒ = 15m$ και $ΑΔ = 6m$,

α) μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρεί τη θέση των σημείων $Ε$ και $Η$;

β) Να βρείτε τις διαστάσεις των τριών ορθογωνίων επαληθεύοντας και το αποτέλεσμα που βρήκατε από το α) ερώτημα.

Λύση:

α) Επειδή τα δύο ακριανά ορθογώνια έχουν ίσα εμβαδά, τα σημεία Ε και Η θα απέχουν εξίσου από τα Α και Β. Έστω λοιπόν $AE = HB = x$. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε:



$$6x + 6x\frac{2}{3}(15 - 2x) \cdot 6 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{6} \cdot \cancel{2}x = \cancel{6} \cdot \frac{2}{3}(15 - 2x) \Leftrightarrow 3x = 15 - 2x \Leftrightarrow$$

$5x = 15 \Leftrightarrow x = 3m$. Άρα $AE = HB = 3m$.

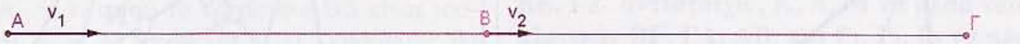
β) Τα εμβαδά των $AEZ\Delta$ και $HB\Gamma\Theta$ είναι $3 \cdot 6\, m^2$, ενώ το άθροισμά τους $36\, m^2$. Το $EH = 15 - 6 = 9m$, άρα εμβαδόν του $EH\Theta Z = 9 \cdot 6m^2 = 54\, m^2$. Επίσης ισχύει $\frac{2}{3} \cdot 54 = 36$.

4. Δύο σώματα (1) και (2) κινούνται στην ίδια ευθεία κατά την ίδια φορά με σταθερές ταχύτητες $v_1 = 0,5\frac{m}{s}$ και $v_2 = 0,25\frac{m}{s}$ αντίστοιχα. Αρχικά τα δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους απόσταση 10m. Να υπολογίσετε:

α) Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν.

β) Το διάστημα που θα διανύσει το κάθε σώμα από την αρχική του θέση μέχρι το σημείο της συνάντησής τους.

γ) Να επιλύσετε τα παραπάνω ερωτήματα, κατασκευάζοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις διαστήματος-χρόνου των δύο σωμάτων και βρίσκοντας τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.



Λύση

α) και β) Τα δύο σώματα (1) και (2) αρχικά, ή την χρονική στιγμή $t = 0$, βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα και $AB = 10m$. Έστω επίσης ότι θα συναντηθούν μετά από χρόνο t στο Γ, το οποίο απέχει $x\, m$ από το B. Εφόσον η κίνηση και των δύο σωμάτων είναι ευθύγραμμη ομαλή και της ίδιας φοράς, τα διαστήματα που διανύουν, δίνονται από τις εξισώσεις:

σώμα (1): $10 + x = v_1 \cdot t$, σώμα (2): $x = v_2 \cdot t$

Αντικαθιστώντας την τιμή του x από την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη, πετυχαίνουμε να έχουμε μία εξίσωση με έναν άγνωστο (τον χρόνο t).

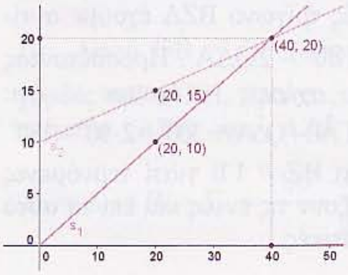
$10 + 0,25 \cdot t = 0,5 \cdot t \Leftrightarrow 0,25 \cdot t = 10 \Leftrightarrow t = 40s$ και $x = 0,25 \cdot 40 = 10m$.

Άρα τα δύο σώματα θα συναντηθούν μετά από χρόνο $40s$ και το σημείο συνάντησής τους απέχει συνολική απόσταση $10 + 10 = 20m$ από το A. Αυτή η απόσταση αποτελεί και το διάστημα που διάνυσε το σώμα (1), ενώ το αντίστοιχο διάστημα του σώματος (2) είναι $10m$.

γ) Αν θεωρήσουμε ότι στον οριζόντιο άξονα μετράμε τον χρόνο κίνησης των δύο σωμάτων και στον κατακόρυφο τα διαστήματα που αυτά διανύουν, οι συναρτήσεις των κινήσεών τους είναι αντίστοιχα:

$s_1(t) = 0,5 \cdot t$, $s_2(t) = 10 + 0,25t$ (τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σε απόσταση 10m προς την φορά της κίνησης σε σχέση με το (1))

t (*χρόνος σε δευτερόλεπτα*)	0	20
$s_1(t)$ (*διάστημα σε μέτρα*)	0	10
$s_2(t)$ (*διάστημα σε μέτρα*)	10	15



Η πρώτη συνάρτηση-ευθεία, διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (20,10) ενώ η δεύτερη από τα σημεία (0,10) και (20,15).

Επειδή όπως είπαμε στους δύο άξονες μετράμε διαφορετικά μεγέθη, δεν είναι απαραίτητο το σύστημα των δύο συντεταγμένων να είναι κανονικό. Αν προεκτείνουμε τις δύο ευθείες, βλέπουμε και τις συντεταγμένες του σημείου τομής, που είναι η λύση του προβλήματος.