

Σχολικό Έτος 2020-2021

Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου

Course Site :

<https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclass/courses/MIDDLESCHOOLA102>



Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	1
Εισαγωγή Στο Γυμνάσιο – Θέματα Επανάληψης	3
1ο Κεφάλαιο - Οι φυσικοί αριθμοί	24
A.1.1 Φυσικοί Αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση.....	24
A.1.2 Πρόσθεση Αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών.....	33
A.1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών	42
A.1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα.....	50
A.1.5 Χαρακτήρες ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων	53
Σύντομη Επανάληψη 1 ^{ου} Κεφαλαίου.....	62
Κριτήριο Αξιολόγησης 1 ^{ου} Κεφαλαίου	65
2ο Κεφάλαιο – Τα κλάσματα	66
A.2.1 Η έννοια του κλάσματος	66
A.2.2 Ισοδύναμα Κλάσματα.....	72
A.2.3 Σύγκριση Κλασμάτων	80
A.2.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση Κλασμάτων.....	84
A.2.5 Πολλαπλασιασμός Κλασμάτων	90
A.2.6 Διαίρεση Κλασμάτων	95
Σύντομη Επανάληψη 2 ^{ου} Κεφαλαίου.....	100
Κριτήριο Αξιολόγησης 2 ^{ου} Κεφαλαίου	103
3ο Κεφάλαιο – Δεκαδικοί Αριθμοί.....	105
A.3.1 Δεκαδικοί Αριθμοί.....	105
A.3.2 Πράξεις Με Δεκαδικούς Αριθμούς – Δυνάμεις Με Βάση Δεκαδικό Αριθμό	108
A.3.4 Τυποποιημένη Μορφή Μεγάλων Αριθμών	119
A.3.5 Μονάδες Μέτρησης	120
Κριτήριο Αξιολόγησης 3 ^{ου} Κεφαλαίου	125
4ο Κεφάλαιο – Εξισώσεις και Προβλήματα	126
A.4.1 Η Έννοια της Εξίσωσης Οι εξισώσεις $a + x = \beta$, $x - a = \beta$, $a - x = \beta$, $ax = \beta$, $a:x = \beta$, $x:a = \beta$	126
A.4.2 Επίλυση Προβλημάτων.....	137
Κριτήριο Αξιολόγησης 4 ^{ου} Κεφαλαίου	141
5ο Κεφάλαιο – Ποσοστά.....	142
A.5.1 Ποσοστά.....	142
A.5.2 Προβλήματα Με Ποσοστά	146
Κριτήριο Αξιολόγησης 5 ^{ου} Κεφαλαίου	153
6 ^ο Κεφάλαιο - Ανάλογα Ποσά - Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά	154
A.6.1 Παράσταση Αριθμών Στο Επίπεδο	154
A.6.2 Λόγος Δύο Αριθμών.....	158

A.6.3 Ανάλογα Ποσά – Ιδιότητες Ανάλογων Ποσών.....	163
A.6.4 Γραφική Παράσταση Σχέσης Αναλογίας	167
A.6.5 Προβλήματα Αναλογιών	173
A.6.6 Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά.....	176
Κριτήριο Αξιολόγησης 6 ^{ου} Κεφαλαίου	183
Συνδυαστικές Ασκήσεις - Ανάλογα Ποσά και Αντιστρόφως Ανάλογα.....	184
7^ο Κεφάλαιο – Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί	186
A.7.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί Αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη Σημείου	186
A.7.2 Απόλυτη Τιμή Ρητού – Αντίθετοι Ρητοί – Σύγκριση Ρητών	190
A.7.3 Πρόσθεση Ρητών Αριθμών	195
A.7.4 Αφαίρεση Ρητών Αριθμών	198
A.7.5 Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών.....	204
A.7.6 Διαίρεση Ρητών Αριθμών.....	216
A.7.7 Δεκαδική Μορφή Ρητών Αριθμών	224
A.7.8 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Φυσικό.....	226
A.7.9 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Ακέραιο	235
A.7.10 Τυποποιημένη Μορφή Μεγάλων και Μικρών Αριθμών.....	239
Κριτήριο Αξιολόγησης 7 ^{ου} Κεφαλαίου	241
Επαναληπτικές Ασκήσεις – Ανά Κεφάλαιο.....	242
Επαναληπτικές Ασκήσεις 1 ^{ου} Κεφαλαίου.....	242
Επαναληπτικές Ασκήσεις 2 ^{ου} Κεφαλαίου.....	244
Επαναληπτικές Ασκήσεις 3 ^{ου} Κεφαλαίου.....	247
Επαναληπτικές Ασκήσεις 4 ^{ου} Κεφαλαίου.....	249
Επαναληπτικές Ασκήσεις 5 ^{ου} Κεφαλαίου.....	251
Επαναληπτικές Ασκήσεις 6 ^{ου} Κεφαλαίου.....	253
Επαναληπτικές Ασκήσεις 7 ^{ου} Κεφαλαίου.....	257
Συνδυαστικές Ασκήσεις - Σε όλα τα Κεφάλαια	260
Επανάληψη Θεωρίας Άλγεβρας σε 46 Ερωτήσεις - Απαντήσεις.....	268
Eclass - Online Test Ανά Κεφάλαιο.....	282

Εισαγωγή Στο Γυμνάσιο – Θέματα Επανάληψης

Θέμα 1^ο

Η κυρία Όλγα ξεκινάει το πρωί από το σπίτι της έχοντας στο πορτοφόλι της:

- 2 χαρτονομίσματα των 50ευρώ
- 3 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ
- 1 χαρτονόμισμα των 10 ευρώ
- 4 κέρματα των 2 ευρώ
- 10 κέρματα των 20 λεπτών

Και αγοράζει από ένα βιβλιοπωλείο:

- Δέκα τετράδια αξίας 2,20 ευρώ το ένα
- Δύο στυλό αξίας 1,50 ευρώ το ένα
- Ένα λογοτεχνικό βιβλίο αξίας 12, 30 ευρώ

Πόσο κοστίζουν αυτά που αγόρασε;

Αν δώσει στον βιβλιοπώλη 40 ευρώ. Πόσα ρέστα θα πάρει;

Στη συνέχεια, αποφασίζει να πληρώσει το λογαριασμό του κινητού τηλεφώνου της και πηγαίνει στο κατάστημα. Στο λογαριασμό έχουν χρεωθεί:

- Το πάγιο: 10,50 ευρώ
- 4 ώρες ομιλίας προς 0,09 ευρώ κόστος ομιλίας του ενός λεπτού της ώρας
- 2,90 ευρώ τα 10 GB

Ποιο είναι το τελικό ποσό της πληρωμής και πόσα χρήματα της έχουν μείνει;

Στη συνέχεια, περνώντας από το γυμναστήριο αποφασίζει να αγοράσει μία μηνιαία κάρτα με 8 μαθήματα yoga προς 40 ευρώ. Χωρίς την κάρτα ένα μάθημα yoga κοστίζει 7 ευρώ. Να βρεθεί το ποσοστό της έκπτωσης για τον ίδιο αριθμό μαθημάτων, αν τελικά αγόρασε τη μηνιαία κάρτα.

Τέλος, θέλει να αγοράσει για την αγαπημένη της φίλη ένα ζευγάρι παπούτσια. Βλέπει στη βιτρίνα ενός καταστήματος ένα ζευγάρι καθαρής αξίας 60 ευρώ χωρίς το ΦΠΑ (23%). Στο ταμείο της κάνουν έκπτωση 20% και στη συνέχεια, αφού υπολογιστεί και ο ΦΠΑ, δίνει τα χρήματα στον ταμιά. Πόσο κόστισαν τα παπούτσια;

Τελικά, έφτασαν τα χρήματα που είχε αρχικά για όλες τις συναλλαγές της;

Περίσσεψαν χρήματα;

Θέμα 2^ο

Οι 18 εργάτες ενός συνεργείου τελειώνουν το έργο σε 12 ημέρες. Αν απουσιάσει το $\frac{1}{3}$ των εργατών, σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο;

Θέμα 3^ο

Ένας βιβλιοπώλης αγοράζει ένα λογοτεχνικό βιβλίο και το πουλάει με κέρδος 30%. Αν η τιμή πώλησης του βιβλίου είναι 25 ευρώ, να βρεθεί η τιμή του βιβλίου χωρίς το κέρδος τους εμπόρου.

Θέμα 4^ο

Η τιμή ενός αυτοκινήτου ήταν 12.000 ευρώ. Τον προηγούμενο χρόνο έγινε αύξηση της τιμής κατά 10% και φέτος έγινε αύξηση της τιμής κατά 10%. Θα ήταν σωστό να πούμε ότι η συνολική αύξηση της τιμής του αυτοκινήτου ήταν 20%;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας και να υπολογίσετε ποια είναι η τελική φετινή τιμή του αυτοκινήτου.

Θέμα 5^ο

Από τους μαθητές μιας τάξης οι μισοί μαθαίνουν κιθάρα, το $\frac{1}{3}$ παίζει πιάνο, το $\frac{1}{9}$ μαθαίνει αρμόνιο και 2 μαθητές παίζουν βιολί. Μπορείτε να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

Θέμα 6^ο

Ο κύριος Τάκης ζωγράφισε μερικά απ' τα ζώακια που έχει στο αγρόκτημα η γιαγιά κι ο παππούς της. Με τις παρακάτω πληροφορίες που μας δίνει, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ακριβή αριθμό των ζώων στο αγρόκτημα;

- Ο αριθμός των προβάτων της εικόνας αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ του συνολικού αριθμού τους.
- Ο αριθμός των γουρουνιών της εικόνας αντιστοιχεί στα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού τους.
- Ο αριθμός των αγελάδων της εικόνας αντιστοιχεί στα $\frac{2}{9}$ του συνολικού αριθμού τους.
- Ο αριθμός των χηνών της εικόνας αντιστοιχεί στα $\frac{4}{10}$ του συνολικού αριθμού τους.
- Ο αριθμός των κοτόπουλων (άσπρα και κίτρινα) της εικόνας αντιστοιχεί στα $\frac{2}{5}$ του συνολικού αριθμού τους.

Πόσα ζώακια έχει συνολικά το αγρόκτημα της κα Αριθμητικής;

Θέμα 7^ο

Χρησιμοποιώντας το διαβήτη και το γνώμονα να σχεδιάσετε:

Α. Να σχεδιάσετε δύο ευθείες α και β , που να είναι παράλληλες. Με το γνώμονα να σχεδιάσετε μία ευθεία γ , που τέμνει κάθετα τις δύο προηγούμενες ευθείες. Ονομάστε AB το ευθύγραμμο τμήμα, που το μήκος του ισούται με την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων. Πώς θα το βρούμε αυτό το μήκος;

Με το διαβήτη ορίζουμε πάνω στην ευθεία α ένα ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$ ίσο με TO AB . Στη συνέχεια φέρνουμε την ευθεία δ , που διέρχεται από το Δ κι είναι κάθετη στην ευθεία α .

Αναγνωρίζετε το κλειστό σχήμα που κατασκευάσαμε;

Β. Να σχεδιάσετε δύο ευθείες α και β , που να είναι παράλληλες και μία ευθεία γ , που τις τέμνει πλάγια. Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των δύο ευθειών να το ονομάσετε AB . Με άνοιγμα του διαβήτη όσο το μήκος AB και κέντρο το A να γράψετε έναν κύκλο και να ονομάσετε Δ το σημείο στο οποίο τέμνει ο κύκλος την ευθεία α .

Τέλος, από το σημείο Δ να χαράξετε μία ευθεία δ , που να είναι παράλληλη προς την γ . Αναγνωρίζετε το κλειστό σχήμα που κατασκευάσαμε;

Γ. Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες α και β . Να σχεδιάσετε με το γνώμονα δύο παράλληλες ευθείες γ και δ που να είναι κάθετες στις α και β .

Αναγνωρίζετε το κλειστό σχήμα που κατασκευάσαμε;

Δ. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο. Με άνοιγμα του διαβήτη όσο η ακτίνα του κύκλου που σχεδιάσατε, να σημειώσετε έξι διαδοχικά σημεία πάνω στον κύκλο και να τα ενώσετε.

Αναγνωρίζετε το κλειστό σχήμα που κατασκευάσαμε;

Αν ενώσουμε τρία μη διαδοχικά σημεία, ποιο σχήμα προκύπτει;

Γυρίστε πίσω στο τετράγωνο και φέρτε τις διαγωνίες του ενώνοντας δύο μη διαδοχικές κορυφές του. Ονομάστε O το σημείο τομής τους και να γράψετε τον κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα όσο το μισό της διαγωνίου του τετραγώνου...

Θέμα 8^ο

Μέσα σε ένα λεωφορείο βρίσκονται 36 επιβάτες, οι οποίοι έχουν κάρτα απεριορίστων διαδρομών. Αυτοί αντιστοιχούν στο 60% όλων των επιβατών του λεωφορείου.

Να βρεθούν πόσοι είναι όλοι οι επιβάτες τους λεωφορείου.

Αν 15 επιβάτες είναι παιδιά και το 40% των επιβατών είναι άνδρες, να βρείτε πόσοι είναι οι άνδρες επιβάτες.

Ποιο είναι το ποσοστό των παιδιών στο σύνολο των επιβατών του λεωφορείου;

Θέμα 8^ο

Ποιος αριθμός ονομάζεται πρώτος;

Παραδείγματα

Υπάρχει κάποιο μοτίβο; Πώς μπορούμε να τους βρούμε όλους; Τελειώνουν άραγε;

Περίπου το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης απέδειξε ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι. Ωστόσο, πώς αποφασίζουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος;

Περίπου το 240 π.Χ., ο Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης δημιούργησε μία πρώτη προσπάθεια για την εύρεση πρώτων αριθμών, που σήμερα καλείται 'Το κόσκινο του Ερατοσθένη'. Ο Ερατοσθένης διετέλεσε διευθυντής της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και ο πρώτος που έδωσε μία προσέγγιση για τη διάμετρο της Γης.

Κόσκινο του Ερατοσθένη (Sieve of Eratosthenes)



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Θέμα 9^ο

Ποιο είναι το μεγαλύτερο πιθανό γινόμενο δύο πρώτων αριθμών, από τους οποίους ο καθένας είναι μικρότερος από το 100; Το γινόμενο που θα προκύψει θα είναι πρώτος αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 10^ο

Η ηλικία της κα Αριθμητικής είναι σύνθετος αριθμός μικρότερος του 40. Το άθροισμα των ψηφίων της ηλικίας της είναι 7. Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία της πραγματικής ηλικίας της, προκύπτει αριθμός πρώτος. Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία της;

Θέμα 11^ο

Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

78, 348, 1.210, 2.344

Θέμα 12^ο

Ένα μπουκάλι γάλα πωλείται 1,75 ευρώ στο σούπερ μάρκετ. Αν το κέρδος του εμπόρου είναι 25% επί της καθαρής αξίας του γάλακτος, να βρεθεί η αξία του γάλακτος χωρίς το κέρδος του εμπόρου.

Θέμα 13^ο

Ένα σχολείο είχε πριν δύο χρόνια 250 μαθητές. Πέρυσι είχε αύξηση 12 % και φέτος είχε αύξηση 8%. Θα ήταν σωστό να λέγαμε ότι η συνολική αύξηση του αριθμού των μαθητών στο σχολείο αυτό ήταν 20%;

Μπορείτε να βρείτε πόσους μαθητές έχει φέτος το σχολείο;

Θέμα 14^ο

Οι 16 εργάτες ολοκληρώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Για να τελειώσουν το ίδιο έργο 4 μέρες νωρίτερα, πόσοι εργάτες ίδιας απόδοσης θα πρέπει να προσληφθούν;

Θέμα 15^ο

Μία δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και χωράει 105 κυβικά μέτρα νερό. Αν το μήκος της είναι 3,5 μέτρα και το πλάτος της είναι 3μ., να βρεθεί το ύψος της δεξαμενής. Στη συνέχεια, πόσα μπουκάλια χωρητικότητας $3\frac{1}{2}$ λίτρα θα γεμίσουμε με το νερό της;

Θέμα 16^ο

Ο Ανδρέας ζυγίζει 80 κιλά και 350 γραμμάρια, η Κατερίνα ζυγίζει 12 κιλά και 150 γραμμάρια λιγότερο από τον Ανδρέα και 8,5 κιλά περισσότερο από την Άννα. Να βρεθεί πόσο ζυγίζει η Κατερίνα και η Άννα.

Θέμα 17^ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες ως σωστές ή λανθασμένες:

i) $2 + 13 = 15$

ii) $18 - 4 = 10$

iii) $18 - 3 + 6 = 9$

iv) $(32 - 9) - 9 + 7 = 23 - 16$

Θέμα 18^ο

Είναι η παρακάτω ισότητα εξίσωση;

$$x - 3 + 4 = 10$$

Αιτιολογείστε...

Θέμα 19^ο

Δίνεται η εξίσωση:

$$2x - 4 = 10$$

Να ελέγξετε, αν την επαληθεύουν οι αριθμοί: $x = 0, 2$ ή 7 .

Θέμα 20^ο

Πώς θα ονομάσετε τον αριθμό που την επαλήθευσε;

Άραγε, όλες οι εξισώσεις έχουν λύση; Και μάλιστα μία και μοναδική λύση;

Θέμα 21^ο

Για κοιτάξτε την παρακάτω εξίσωση: $2x + 4 = 4 + 2x$

Χρειάζεται να «κουραστούμε» για να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση;

Θέμα 22^ο

Για κοιτάξτε την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{2} + 3$$

Πώς θα μπορούσατε να λύσετε την παραπάνω εξίσωση, χωρίς να γίνουν πράξεις;

Θέμα 23^ο

«Μιλήστε» με την άσκηση, με την μαθηματική σχέση, «μεταφράστε την».....

- Το διπλάσιο ενός αριθμού
- Τα πολλαπλάσια του 2

Υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στα δύο προηγούμενα ερωτήματα;;;

- Έναν άρτιο αριθμό
- Έναν περιττό αριθμό

Σε ποιο μεγάλο σύνολο αριθμών ανήκουν οι δύο παραπάνω κατηγορίες αριθμών;
.....

- Το μισό ενός αριθμού
- Ένας αριθμός αυξημένος κατά 10 ισούται με 22
- Από το διπλάσιο ενός αριθμού αφαιρούμε το 2 και παίρνουμε τον αριθμό 10
.....

Θέμα 24^ο

Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 106cm. Γνωρίζουμε ότι το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

(να κάνετε και σχήμα...)

Ονομάστε x το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου... Πώς θα συμβολίζατε το πλάτος του;

Πώς θα συμβολίζατε την περίμετρο;

Θέμα 25^ο

Ο Πέτρος και ο Ανδρέας έχουν μαζί 25 βόλους. Οι βόλοι του Πέτρου είναι κατά 5 περισσότεροι από τους βόλους του Ανδρέα. Πόσους βόλους έχει ο καθένας;

Αν κάνουμε μία υπόθεση, ότι οι βόλοι του Ανδρέα είναι x . Πόσους βόλους θα έχει ο Πέτρος συμβολικά;

Μαζί τα δύο παιδιά, πόσους βόλους θα έχουν συμβολικά;

Μήπως ξέρουμε πόσους βόλους έχουν, στ' αλήθεια, τα δύο παιδιά;

Θέμα 26^ο

α) Χρησιμοποιώντας όλα τα ψηφία από μία φορά το καθένα, να σχηματίσετε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο φυσικό αριθμό.

Ψηφία	Ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός	Ο μικρότερος φυσικός αριθμός
0,1,2,3,4,5,6		
0,1,2,3,4,6,9,7		

Θέμα 26^ο

Ποια από τα ψηφία των παρακάτω δεκαδικών αριθμών μπορούμε να διαγράψουμε χωρίς να αλλάξει η αξία τους;

0,4	14,2020
0,055	4,3200
0,006	10,00880
0,3030	0,0099

Θέμα 27^ο

α) Να γράψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα και τα κλάσματα να τα γράψετε στη μορφή δεκαδικού αριθμού.

0,6	
0,0032	
2,4	
$\frac{26}{10}$	
$\frac{9}{100}$	
$\frac{306}{10000}$	

β) Ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων του το Σάββατο και τα 0,3 των χρημάτων του την Κυριακή. Ποια ημέρα ξόδεψε πιο πολλά χρήματα ο Γιάννης;

Θέμα 28^ο

α) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις: (Προσοχή να κάνετε την πράξη που ζητείται κάθε φορά)

- i. $8,2 + 14,5 + 9,25 =$
- ii. $8 + 2,5 + 5,2 =$
- iii. $12,4 - 2,4 =$
- iv. $205 - 5,25 =$
- v. $65,25 \cdot 10 =$
- vi. $4,0021 \cdot 100 =$
- vii. $0,655 \cdot 0,1 =$
- viii. $45 \cdot 0,001 =$

β) Να γίνουν κάθετα οι παρακάτω διαιρέσεις και οι αντίστοιχες δοκιμές τους.

i. $10,75:2,5$	<u>δοκιμή</u>
ii. $405:0,5$	<u>δοκιμή</u>

Θέμα 29^ο

α) Να βρεθεί η τιμή της κάθε παράστασης

i. $5 \cdot (4 + 3) - 3 \cdot (20 - 12) =$

ii. $(4,2 + 3,8) \cdot (3 : 10 - 0,3) =$

β) Ένας έμπορος πούλησε τρία καφάσια με πατάτες. Στο α' καφάσι οι πατάτες ζύγισαν 24,25 κιλά, στο β' καφάσι οι πατάτες ζύγισαν 7,5 κιλά λιγότερα από το α' καφάσι και 5,25 κιλά λιγότερα από το γ' καφάσι. Πόσα κιλά πατάτες πούλησε συνολικά και από τα τρία καφάσια;

Θέμα 30^ο

α) Έχουμε 15 κόκκινα, 35 άσπρα και 25 ροζ τριαντάφυλλα. Πόσες το πολύ όμοιες ανθοδέσμες μπορούμε να φτιάξουμε και από πόσα από το κάθε είδος τριαντάφυλλα θα αποτελούνται;

β) Η Μαρία κάνει τον γύρο του σταδίου σε 5 λεπτά. Ο Σπύρος κάνει τον γύρο του σταδίου σε 8 λεπτά και η Φανή σε 4 λεπτά.

- i. Αν ξεκινήσουν ταυτόχρονα στις 10 το πρωί από την αφετηρία σε πόση ώρα θα ξανασυναντηθούν;
- ii. Πόσους γύρους θα έχει κάνει ο καθένας;

Θέμα 31^ο

α) Μπορείτε να συμπληρώσετε το ψηφίο που λείπει ώστε οι παρακάτω αριθμοί να διαιρούνται ακριβώς με:

- i. Το 2 και το 4: 2653_
- ii. Το 3 και το 5: 370_

β) Να γίνουν οι πράξεις:

i.

$$3^1 =$$

$$3^2 =$$

$$2^3 =$$

$$3^3 =$$

$$8^2 =$$

$$10^4 =$$

ii. $4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 =$

Θέμα 32^ο

α) Σημειώστε το σύμβολο (>, <, =) που ταιριάζει:

i. $1 \square \frac{5}{5}$

ii. $\frac{3}{5} \square \frac{2}{5}$

iii. $1 \square \frac{1}{6}$

iv. $2\frac{1}{3} \square \frac{2}{3}$

Θέμα 33^ο

α) Γράψε ισοδύναμα κλάσματα:

i. $\frac{2}{3} = \text{---} = \text{---} = \text{---}$

ii. $\frac{45}{75} = \text{---} = \text{---}$

β) Η Στέλλα έφαγε τα $\frac{2}{3}$ μιας τούρτας και ο Πέτρος τα $\frac{4}{6}$ μιας άλλης όμοιας τούρτας.

Έφαγε κάποιος περισσότερο από τον άλλον; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 34°

α) Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

i. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) - 0,5 =$

ii. $4 - \left(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\right) =$

iii. $3^2 + \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$

iv. $2^3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}$

v. $\frac{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{1}{6}\right)}{\frac{15}{5} \div \frac{3}{2}} =$

β) Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού τυρί κασέρι ζυγίζουν 9 ευρώ. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{2}{3}$ του κιλού;

Θέμα 35°

Να βρεθεί ο άγνωστος x στις παρακάτω εξισώσεις:

i. $3\frac{1}{5} - x = \frac{3}{2}$

ii. $x + 7,5 = \frac{25}{2}$

iii. $2\frac{1}{4} \cdot x = 4$

iv. $\frac{2}{3} \cdot x = 140$

v. $x : \frac{2}{5} = 35$

vi. $\frac{1}{100} \cdot x = 1$

Σταθερά και μεταβλητά ποσά...

Στην καθημερινή ζωή μας χρησιμοποιούμε έννοιες που δεν είναι εύκολο να μετρηθούν με μία συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης, αλλά τις καταλαβαίνουμε διαισθητικά κι υποκειμενικά.

Ωστόσο, υπάρχουν κάποιες έννοιες, όπως το μήκος, το εμβαδόν, η απόσταση, η θερμοκρασία, η ώρα που μπορούν να μετρηθούν. Οι έννοιες αυτές που μπορούν να μετρηθούν και να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό λέγονται ποσά.

Για να μετρήσουμε ένα ποσό, το συγκρίνουμε προς ένα ομοειδές ποσό, που αποτελεί τη μονάδα. Από αυτή τη σύγκριση, που λέγεται μέτρηση, προκύπτει ένας αριθμός, που εκφράζει πόσες φορές χωράει η μονάδα στη τιμή του ποσού μας ή πόσα μέρη της μονάδας χωράνε σ' αυτό.

Υπάρχουν πολλά είδη ποσών, άρα και πολλές διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Υπάρχουν ποσά που παραμένουν σταθερά (π.χ. η απόσταση Αθήνα – Πάτρα) κι άλλα που μεταβάλλονται (π.χ. η απόσταση που διανύει το αμάξι σε μία ώρα)

Τα μεγέθη που η μεταβολή του ενός επηρεάζει τις τιμές του άλλου λέγονται συµμεταβλητά. Δύο κατηγορίες τέτοιων ποσών είναι τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

(μην ξεχνάτε όμως: Υπάρχουν ποσά που αλληλοεξαρτώνται, αλλά δεν ανήκουν στις παραπάνω δύο κατηγορίες, αφού μεταβάλλονται ανόμοια. Π.χ. το ύψος με την ηλικία του ανθρώπου, η σταθερή αύξηση στους μισθούς των εργαζομένων μια εταιρείας)

Ορισμός:

Ανάλογα ποσά ονομάζονται δύο ποσά, όταν όσες φορές (πολλαπλασιασμός) αυξάνεται (ή ελαττώνεται) η τιμή του ενός ποσού, τόσες φορές αυξάνεται (ή ελαττώνεται αντίστοιχα) η τιμή του άλλου ποσού.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά ονομάζονται δύο ποσά, όταν όσες φορές αυξάνεται (ή ελαττώνεται) η τιμή του ενός ποσού, τόσες φορές ελαττώνεται (ή αυξάνεται αντίστοιχα) η τιμή του άλλου ποσού.

Θέμα 36^ο

α) Δίνονται οι παρακάτω πίνακες δυο ποσών x, y . Είναι ανάλογα αυτά τα δύο ποσά; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
x	1	2	3	4
y	3	5	6	7

β) Δύο κτηνοτρόφοι νοίκιασαν μία φάρμα με ενοίκιο 900 ευρώ. Ο πρώτος κτηνοτρόφος έχει 30 ζώα κι ο δεύτερος έχει 45 ζώα. Πόσο ενοίκιο θα πληρώσει ο καθένας αναλογικά με τα δικά τους ζώα στη φάρμα;

Θέμα 37^ο

α) Οι 15 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 30 ημέρες. Πόσους εργάτες ίδιας απόδοσης θα χρειαστούμε για να τελειώσουμε το ίδιο έργο σε 25 ημέρες;

β) Από 150 κιλά σταφύλια προέκυψαν 100 κιλά μούστος. Πόσα κιλά σταφύλια της ίδιας ποικιλίας χρειάζονται για να γεμίσουμε 4 βαρέλια που το καθένα χωράει 180 κιλά μούστο;

Θέμα 38^ο

α) Υπολογίστε:

- i. Το 10% των 70 ευρώ
- ii. Το 30% των 4000 ευρώ
- iii. Το 5% των 20 κιλών
- iv. Το 20% των 800 κιλών

β) Η Α΄ γυμνασίου στο σχολείο μας έχει 40 μαθητές, από τους οποίους το 30% είναι κορίτσια και τα υπόλοιπα αγόρια. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια ακριβώς έχει η Α΄ γυμνασίου του σχολείου μας.

Θέμα 39^ο

α) Πόσα χρήματα θα δώσουμε για να αγοράσουμε μία τηλεόραση με έκπτωση 20% που κοστίζει αρχικά 650 ευρώ;

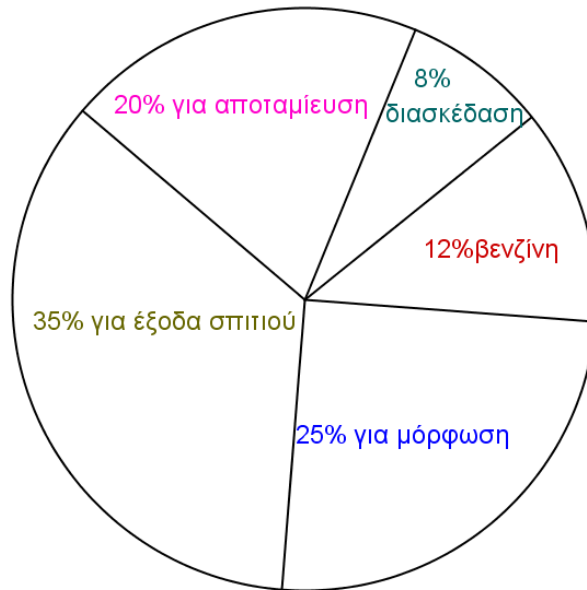
β) Ποιο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών: 8, 14, 27, 24

γ) Ποιος είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών: 30, 25, 20

δ) Ένας έμπορος αγόρασε ένα ψυγείο 500 ευρώ και το πούλησε 750 ευρώ. Ποιο είναι το % κέρδος του;

Θέμα 40

α) Στο παρακάτω διάγραμμα-πίτα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα μιας οικογένειας.



- i. Πόσο % από το εισόδημά της ξοδεύει αυτή η οικογένεια για τα έξοδα του σπιτιού;
- ii. Πόσο % ξοδεύει για διασκέδαση;
- iii. Πόσο % αποταμιεύει;

Αν το εισόδημα είναι 3.500 ευρώ να βρεθούν τα χρήματα που ξοδεύονται για τη βενζίνη από την οικογένεια.

Θέμα 41°

α) Συμπληρώστε:

- i. $124\text{εκ} = \dots\dots\dots\mu$
- ii. $56\text{χιλ.} = \dots\dots\dots\mu$
- iii. $8\text{δεκ.} = \dots\dots\dots\mu$
- iv. $3.000\mu = \dots\dots\dots\chi\mu$
- v. $70\text{χιλ.} = \dots\dots\dots\mu$
- vi. $90\text{εκ.} = \dots\dots\dots\chi\text{ιλ.}$
- vii. $4\mu\ 6\text{δεκ.} = \dots\dots\dots\text{εκ}$
- viii. $3\mu\ 12\text{εκ.} = \dots\dots\dots\chi\text{ιλ.}$

- ix. 4 ώρες =λεπτά
x. 1 ώρα =δευτερόλεπτα
xi. 5ημέρες και 3 ώρες =ώρες

β) Υπολογίστε:

- v. Το 10% των 60 ευρώ:.....
vi. Το 30% των 3000 ευρώ:.....
vii. Το 5% των 10 κιλών:.....
viii. Το 20% των 500 κιλών:.....

γ) Οι βαθμοί της Μαρίας στο Α΄ τρίμηνο της ΣΤ΄ Δημοτικού ήταν: Μήπως μπορείτε να βρείτε τον μέσο όρο των βαθμών της;

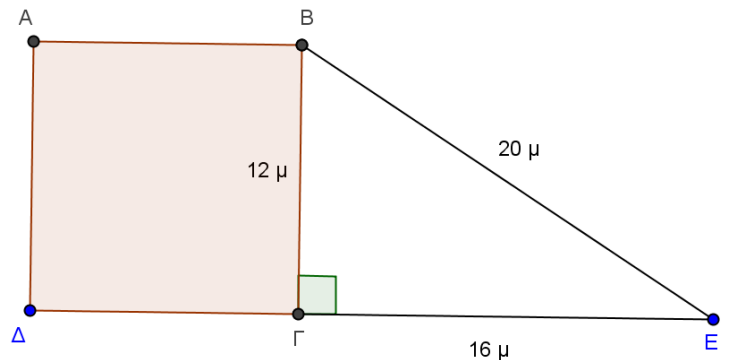
Γλώσσα	9
Μαθηματικά	10
Καλλιτεχνικά	10
Μουσική	8
Γυμναστική	9
Αγγλικά	8
Γαλλικά	7
Θρησκευτικά	9
Γεωγραφία	10
Ιστορία	9

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θέμα 42°

α) Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο και το $B\Gamma E$ ορθογώνιο τρίγωνο. Να βρείτε:

- το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
- το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου $B\Gamma E$
- την περίμετρο του σχήματος $ABE\Delta$
- Αν θέλουμε να στρώσουμε με τάπητα το σχήμα $ABE\Delta$, πόσα χρήματα θα χρειαστούν αν γνωρίζουμε ότι το 1 τ.μ. κοστίζει 0,80 ευρώ;
- Γνωρίζετε τι σχήμα είναι το $ABE\Delta$;

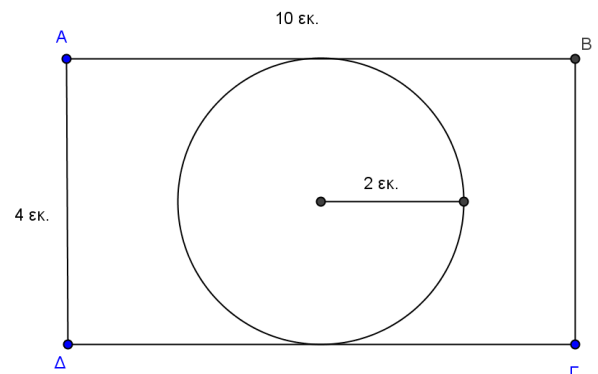


Θέμα 43°

Στο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και στο εσωτερικό του βρίσκεται ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο O και ακτίνα 2 εκ.

Να βρεθούν:

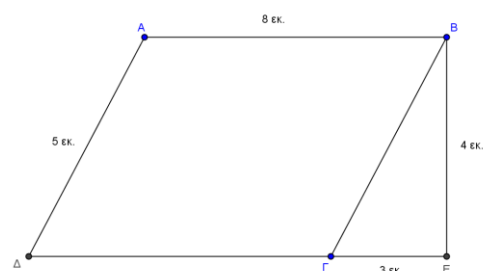
- Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου
- Το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου
- Αν θέλουμε να φυτέψουμε λουλούδια σε όλο το $AB\Gamma\Delta$ εκτός από τον κυκλικό δίσκο και γνωρίζουμε ότι για 1 τ.μ. χρειάζονται 10 λουλούδια, πόσα λουλούδια τελικά θα φυτέψουμε;



Θέμα 44°

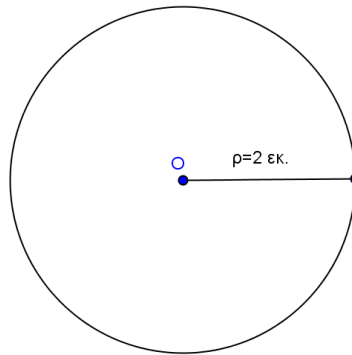
Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $B\Gamma E$ ορθογώνιο τρίγωνο. Να βρεθούν:

- Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
- Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου $B\Gamma E$
- Αν θέλουμε να περιφράξουμε αυτό το σχήμα με ένα σχοινί, πόσα εκατοστά σχοινί θα χρειαστούμε;

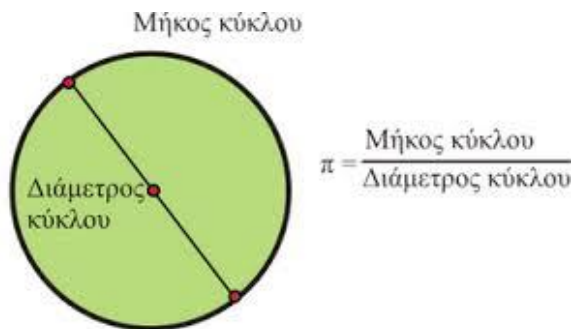


Θέμα 45^ο

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του παρακάτω κυκλικού δίσκου με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 2$ εκ.

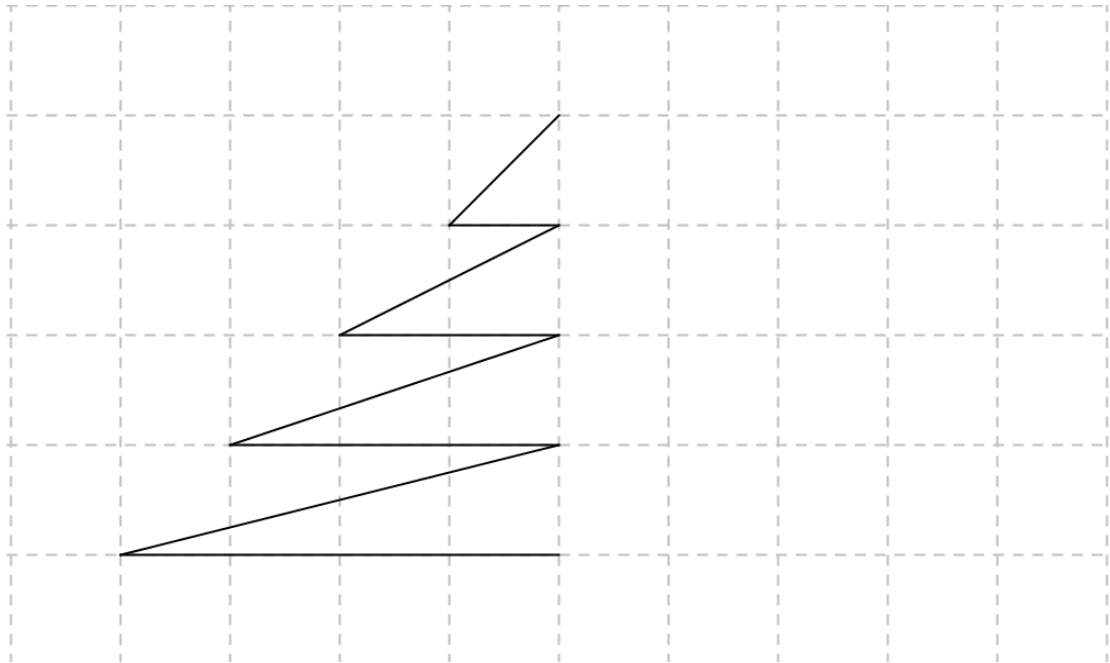


Υπενθύμιση Θεωρίας



Συμμετρία

Αξονική Συμμετρία ή Συμμετρία ως προς έναν άξονα (μία ευθεία)

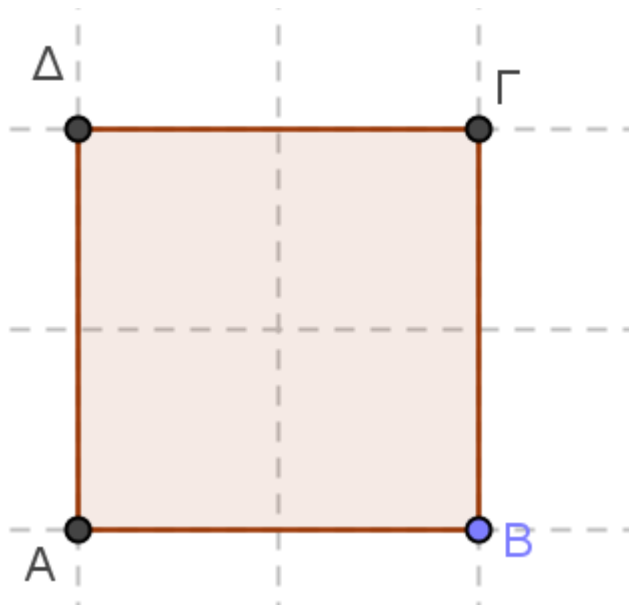


Να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας και το συμμετρικό σχήμα του παραπάνω σχήματος....

Κέντρο Συμμετρίας ή Συμμετρία ως προς σημείο...

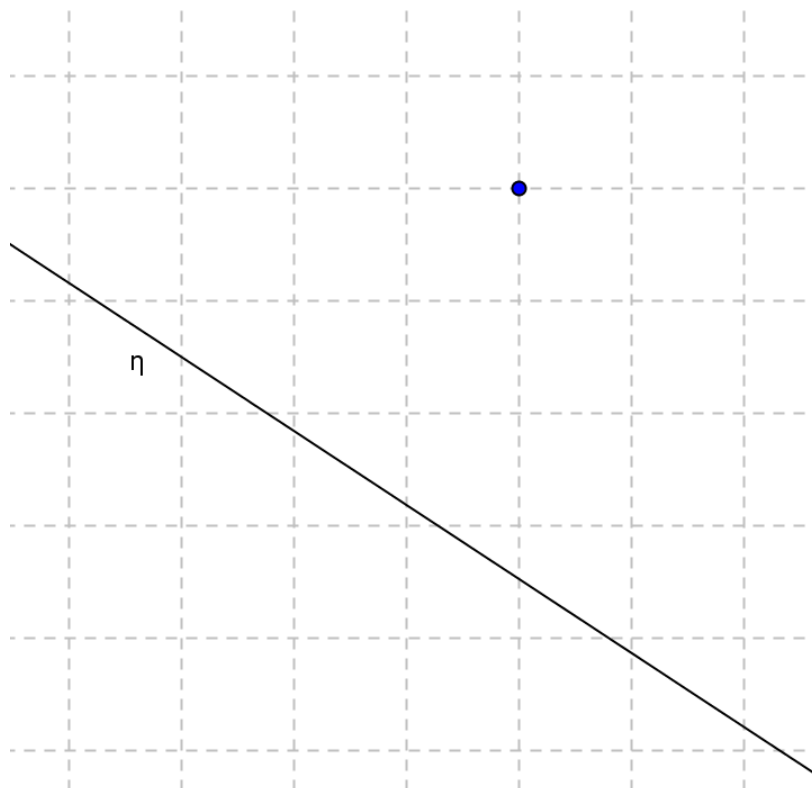
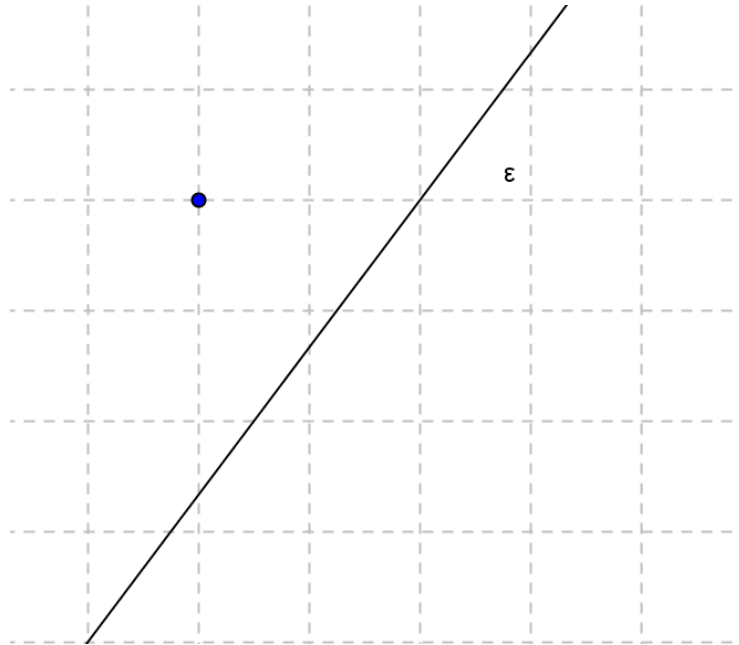
Δίνεται το παρακάτω τετράγωνο.... Να φέρετε τις διαγώνιές του και να ονομάσετε Ο το σημείο τομής τους....

Κρατώντας σταθερό το σημείο Ο περιστρέφουμε το σχήμα κατά 180 μοίρες... τι σχήμα θα προκύψει;



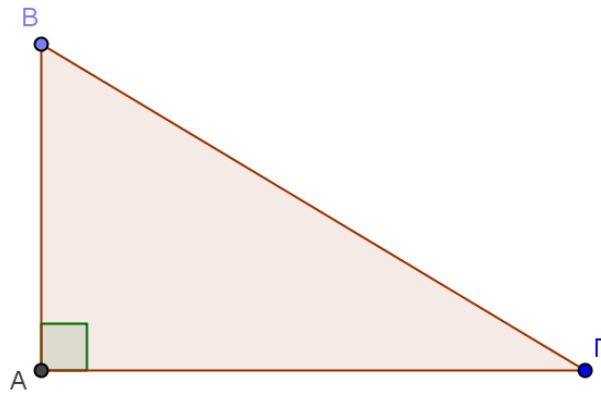
Καθετότητα

Να φέρετε κάθετες ευθείες από τα μπλε σημεία (ονομάστε τα Α) προς τις δοθείσες ευθείες με τη βοήθεια του γνώμονα.

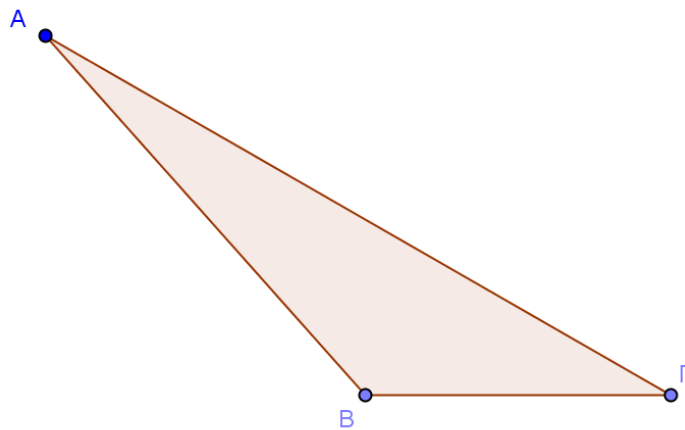


Ύψη τριγώνου...

Σε ορθογώνιο τρίγωνο...



Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο...



1ο Κεφάλαιο - Οι φυσικοί αριθμοί

A.1.1 Φυσικοί Αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση

Μία κατηγορία από τις πολλές που θα μάθουμε στα μαθηματικά είναι οι φυσικοί αριθμοί. Ποιοι είναι, λοιπόν, οι φυσικοί αριθμοί;

Είναι το 0,1,2,3,4,5,.....,2017,.....

Ερώτηση κατανόησης:

Πόσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί;

Απάντηση

Σκεφτείτε αν μπορείτε να σταματήσετε να μετράτε.

Κάθε φυσικός αριθμός έχει προηγούμενο και επόμενο αριθμό. Η μόνη εξαίρεση είναι το 0 που έχει επόμενο, αλλά δεν έχει προηγούμενο.

Τους φυσικούς αριθμούς τους χωρίζουμε σε ζυγούς (άρτιους επικρατέστερη ορολογία) και σε μονούς (περιττούς επικρατέστερη ορολογία).

Οι άρτιοι είναι οι αριθμοί, που μπορούν να διαιρεθούν ακριβώς από το 2, όπως οι 2,4,6,8,.... Στους άρτιους συμπεριλαμβάνεται και το 0.

Γενική συμβολική μορφή: $2 \cdot n$, όπου n ένας φυσικός αριθμός.

Οι περιττοί είναι οι αριθμοί, που δεν μπορούν να διαιρεθούν ακριβώς με το 2, όπως το 1,3,5,7,9.

Γενική συμβολική μορφή: $2 \cdot n + 1$, όπου n ένας φυσικός αριθμός.

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης: Το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς.

Ψηφιακό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης: Όλοι οι αριθμοί μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας τα δέκα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Θεσιακό σύστημα αρίθμησης: Η αξία κάθε ψηφίου καθορίζεται από τη θέση του μέσα στον αριθμό.

Παράδειγμα

Στον αριθμό 263, η αξία του ψηφίου 6(ψηφίο των δεκάδων) είναι μεγαλύτερη από αυτήν του ψηφίου 3(ψηφίο των μονάδων), ενώ το 2 είναι το ψηφίο των εκατοντάδων.

Επειδή μιλάμε για αριθμούς είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε να τους συγκρίνουμε. Για την σύγκριση αυτή χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $<$, $=$, $>$.

- 1) Το '>', που σημαίνει μεγαλύτερο από
- 2) Το '<', που σημαίνει μικρότερος από
- 3) Το '=', που σημαίνει ίσος με'.

Παράδειγμα

Ότι αριθμός 2 είναι μικρότερος από τον αριθμό 4, θα το γράψουμε ως εξής : $2 < 4$.

Ότι αριθμός 7 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 3, θα το γράψουμε ως εξής : $7 > 3$.

Διάταξη

Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δύο φυσικού αριθμούς. Άρα μπορούμε να τους διατάξουμε, για παράδειγμα από το μικρότερο από το μεγαλύτερο.

$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 2020 < 2021 < \dots < 5001 < \dots$

Παρατήρηση - Σύγκριση

- Αν δύο φυσικοί αριθμοί έχουν ακριβώς τα ίδια ψηφία στην ίδια ακριβώς θέση (μονάδες-δεκάδες-εκατοντάδες-....), τότε είναι ίσοι.
- Αν δύο φυσικοί αριθμοί δεν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, ο μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει τα περισσότερα ψηφία.

Σημείωση

Αν ένας φυσικός αριθμός είναι άρτιος, τότε ο προηγούμενος και ο επόμενός του, είναι περιττός, εκτός του 0. Αντίστοιχα αν είναι περιττός,

Δηλαδή η διάταξη των αριθμών πάει εναλλάξ άρτιος – περιττός – άρτιος -.....

Στρογγυλοποίηση

Πολλές φορές στην καθημερινότητα μας χρησιμοποιούμε αντί για έναν αριθμό μία προσέγγιση αυτού του αριθμού. Για παράδειγμα αν μιλάμε για το Έβερεστ θα πούμε ότι έχει ύψος 9.000 περίπου μέτρα, δεν θα πούμε 8.848 μέτρα.

Για να το κάνουμε αυτό υπάρχουν κάποιοι κανόνες (βήματα).

1. Προσδιορίζουμε (συνήθως μας το δίνει η άσκηση) σε ποια τάξη θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
2. Εξετάζουμε αν το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης. Δηλαδή, αν θέλουμε να κάνουμε τη στρογγυλοποίηση στις χιλιάδες, τότε θα κοιτάξουμε το ψηφίο στις εκατοντάδες.
3. Αν το αμέσως μικρότερης τάξης ψηφίο είναι μικρότερο από το 5 (δηλαδή 0,1,2,3,4), τότε όλα τα ψηφία μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.
4. Αν το αμέσως μικρότερης τάξης ψηφίο είναι μεγαλύτερο από το 5 (δηλαδή 5,6,7,8,9), τότε το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία μικρότερης τάξης μηδενίζονται και το ψηφίο στο οποίο κάνω τη στρογγυλοποίηση αυξάνεται κατά 1.

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό του ύψους του Έβερεστ, 8.848 στις χιλιάδες και μετά στις εκατοντάδες.

Στις χιλιάδες

1^ο βήμα

Στρογγυλοποιούμε στις χιλιάδες, άρα στο 8.

2^ο βήμα

Εξετάζουμε το αμέσως προηγούμενο ψηφίο, που είναι πάλι το 8.

3^ο βήμα

Το ψηφίο αυτό είναι μεγαλύτερο του 5 άρα, ακολουθούμε τη διαδικασία του 4^{ου} βήματος.

Άρα ο αριθμός γίνεται 9.000

Στις εκατοντάδες

1^ο Στρογγυλοποιούμε στις εκατοντάδες, άρα στο 8.

2^ο Εξετάζουμε το αμέσως προηγούμενο ψηφίο, που είναι πάλι το 4.

3^ο Το ψηφίο αυτό είναι μικρότερο του 5 άρα, ακολουθούμε τη διαδικασία του 3^{ου} βήματος.

Άρα ο αριθμός γίνεται 8.800

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 13 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε με ψηφία τους αριθμούς που δίνονται παρακάτω σε φυσική γλώσσα:

(α) διακόσια πέντε = 205

(β) επτακόσια τριάντα δύο = 732

(γ) είκοσι χιλιάδες οκτακόσια δέκα τρία = 20.813

Άσκηση 2/σελ. 13 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς :

(α) 38.95

(β) 5.000.812

(γ) 120.003

Λύση

(α) 38.951 = τριάντα οκτώ χιλιάδες εννιακόσια πενήντα ένα

(β) 5.000.812 = πέντε εκατομμύρια οκτακόσια δώδεκα

(γ) $120.003 =$ εκατόν είκοσι χιλιάδες τρία

Άσκηση 3/σελ. 13 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ποιοι είναι οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί του 289 και ποιοι οι δύο επόμενοι;

Λύση

Οι τρεις προηγούμενοι είναι το 288, το 287 και το 286.

Οι δύο επόμενοι είναι το 290 και το 291.

Άσκηση 4/σελ. 13 (Βιβλίο Οργανισμού)

Στρογγυλοποίησε στην πλησιέστερη εκατοντάδα τους αριθμούς:

- i) 345 ii) $761 = 800$ iii) $659 = 700$ iv) $2.567 = 2.600$
v) $9.532 = 9.500$ vi) $123.564 = 123.600$ vii) $34.564 = 34.600$ viii) $31.549 = 31.500$
ix) $8.765 = 8.800$

Λύση

- i) 345 θα γίνει 300
ii) 761 θα γίνει 800
iii) 659 θα γίνει 700
iv) 2.567 θα γίνει 2.600
v) 9.532 θα γίνει 9.500
vi) 123.564 θα γίνει 123.600
vii) 34.564 θα γίνει 34.600
viii) 31.549 θα γίνει 31.500
ix) 8.765 θα γίνει 8.800

Άλυτες Ασκήσεις

1.1 Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς:

- α) 65.789
β) 1.230.312
γ) 423
δ) 7.456
ε) 98.534

1.2 Να συμπληρωθεί η δεύτερη στήλη του πίνακα με τους αριθμούς που αναφέρονται στην πρώτη στήλη.

Τρεις χιλιάδες οκτακόσια δεκατρία	
Τριάντα χιλιάδες πεντακόσια	
Επτά χιλιάδες οκτώ	

Τρία εκατομμύρια είκοσι δύο χιλιάδες	
Τριακόσιες χιλιάδες δύο	
Εκατό εκατομμύρια τριακόσια δύο	

1.3 Να γράψετε ολογράφως τους αριθμούς που αναγράφονται στην πρώτη στήλη του πίνακα.

102	
3.000	
4.822	
5.007	
1.025.300	
30.752.003	

1.4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Ο αριθμός 13 είναι περιττός ()
- β) Ο αριθμός 16 είναι άρτιος ()
- γ) Αν στρογγυλοποιήσω τον αριθμό 2974, στις εκατοντάδες θα μου δώσει τον αριθμό 3000 ()
- δ) Ο αριθμός 3,14 είναι μικρότερος από τον αριθμό 3,145 ()

1.5 Να συμπληρώσετε τις κενές στήλες του πίνακα με τα κατάλληλα ψηφία του αριθμού της πρώτης στήλης.

Αριθμός	Ψηφίο εκατοντάδων	Ψηφίο χιλιάδων	Ψηφίο μονάδων
36.752			
7.058			
302			
458.002			
52.002			

1.6 Να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας όπως στο παράδειγμα.

Προηγούμενος φυσικός	Άρτιος ή περιττός	Φυσικός αριθμός	Άρτιος ή περιττός	Επόμενος φυσικός	Άρτιος ή περιττός
12	Άρτιος	13	Περιττός	14	Άρτιος
		252			
		302			
		6.587			
		10.884			
		12.000			
		5.300			
		5999			

1.7 Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου ψηφίου στους αριθμούς:

<u>5</u> 7		85. <u>2</u> 70	
81 <u>3</u>		2.0 <u>6</u> 4	
<u>2</u> 4,354		4 <u>7</u> 5.268	
2 <u>5</u> 7		<u>1</u> 2.586	

1.8 Να γράψετε τους τετραψήφιους αριθμούς που κάθε επόμενο ψηφίο τους είναι μια μονάδα μεγαλύτερο από το προηγούμενο.

1.9 Να γράψετε:

- Όλους τους άρτιους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 70 και του 87.
- Όλους τους περιττούς αριθμούς που συναντάτε από το 20 ως το 42.

1.10 Να ταξινομήσετε τους παρακάτω αριθμούς :

432,543,765,8765,9877,2314,3,543

- σε αύξουσα σειρά και
- σε φθίνουσα σειρά

1.11 Να ταξινομήσετε τους παρακάτω αριθμούς

34,54,87,981,2,4,5,76,123,34124,4231

- σε αύξουσα σειρά και
- σε φθίνουσα σειρά

1.12 Τοποθέτησε το σωστό σύμβολο (<, >, =) στο κενό μεταξύ των παρακάτω αριθμών:

- i) 55...342
- ii) 155...342
- iii) 515...342
- iv) 551...342
- v) 55...55
- vi) 12355...1235,5
- vii) 66,0...66

1.13 Να συμπληρωθούν τα κενά με τον προηγούμενο και τον επόμενο φυσικό αριθμό.

Προηγούμενος Φυσικός	Φυσικός Αριθμός	Επόμενος Φυσικός
	272	
	500	
	3074	
	40.574	
	1.000.000	
	1.210.512	

1.14 Δίνεται ο αριθμός 17.

- i) Ξεκινώντας απ' αυτόν να γράψετε 8 φυσικούς ώστε ο καθένας να προκύπτει από τον προηγούμενό του προσθέτοντας τον αριθμό 3.
- ii) Στη συνέχεια να γράψετε ποιοι από τους αριθμούς που βρήκατε είναι άρτιοι και ποιοι περιττοί.

1.15 Να κάνετε στρογγυλοποίηση τον

- i) 543 στις δεκάδες
- ii) 4324 στις χιλιάδες
- iii) 9075,2 στις μονάδες
- iv) 1.234.432.756 στις εκατοντάδες χιλιάδες
- v) 7.645.645 στις δεκάδες χιλιάδες

1.16 Να κάνετε στρογγυλοποίηση τον

- i) 78 στις δεκάδες και στις εκατοντάδες
- ii) 9678 στις χιλιάδες και στις εκατοντάδες
- iii) 1234,432 στις μονάδες και στις χιλιάδες
- iv) 432,756 στις εκατοντάδες και στα δέκατα
- v) 1.234.976 στις δεκάδες χιλιάδες και στο εκατομμύριο

1.17 Να κυκλώσετε τους αριθμούς που, αν τους στρογγυλοποιήσουμε ως προς τη δεκάδα, προκύπτει ο αριθμός 170.

160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173,
174, 175, 176, 178, 177, 179, 180.

1.18 Να στρογγυλοποιήσετε τους αριθμούς 4.444 και 14.872 στην πλησιέστερη
i) δεκάδα,
ii) χιλιάδα

1.19 Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη
i) δεκάδα,
ii) χιλιάδα.

3.582, 4.584, 48.372, 54.368, 2.084, 3002

Συνδυαστικές Ασκήσεις

1.20 Να βρείτε πόσες φορές χρησιμοποιούμε το 4 για να μετρήσουμε τις μέρες του Σεπτεμβρίου.

1.21 Σε ένα τμήμα της Α΄ Γυμνασίου ο καθηγητής έδωσε τις ασκήσεις από 5 έως και 13. Πόσες ασκήσεις δόθηκαν στους μαθητές;

1.22 Να παραστήσετε:

- i) το σύνολο των διψήφιων περιττών αριθμών που έχουν και τα 2 ψηφία τους ίσα
- ii) το σύνολο των άρτιων αριθμών μεταξύ του 700 και του 800.

1.23 Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός με δύο ψηφία; Να υπολογίσετε το πλήθος τους.

1.24 Να υπολογίσετε:

- i) πόσοι φυσικοί αριθμοί βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 201 και 1523,
- ii) το πλήθος των φυσικών αριθμών 201 έως και 1523.

1.25 Να βρείτε πόσοι είναι

- i) οι τριψήφιοι φυσικοί αριθμοί,
- ii) οι τετραψήφιοι φυσικοί αριθμοί.

1.26 Πόσες φορές θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε το ψηφίο 2 για να γράψουμε όλους τους αριθμούς από το 0 έως το 999;

(Βοήθεια: από το 0 -99 γράφουμε φορές το ψηφίο 2

από το 100 -199 γράφουμε φορές το ψηφίο 2

από το 200 -299 γράφουμε φορές το ψηφίο 2

από το 300 -399 γράφουμε φορές το ψηφίο 2 κτλ.)

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

- 1.27** Αν για το φυσικό αριθμό α ισχύει $\alpha < 8$, να βρείτε με ποιους φυσικούς αριθμούς μπορεί να είναι ίσος ο α . Αν ίσχυε $\alpha \leq 8$, ποιες τιμές θα μπορούσε να πάρει ο α ;
- 1.28** Αν για τον άρτιο αριθμό α ισχύει $51 < \alpha \leq 64$, να γράψετε με ποιους αριθμούς μπορεί να είναι ίσος.
- 1.29** Ποιοι είναι:
- οι φυσικοί αριθμοί που, αν τους στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη δεκάδα, παίρνουμε τον αριθμό 30;
 - οι περιττοί φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 30 που, αν στρογγυλοποιηθούν στην πλησιέστερη δεκάδα, παίρνουν τον αριθμό 30;
- 1.30** Ένας φυσικός αριθμός στρογγυλοποιείται στην πλησιέστερη εκατοντάδα. Να βρεθεί το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού, αν με την στρογγυλοποίηση:
- μεγαλώνει κατά 14
 - μικραίνει κατά 38
 - δεν μεταβάλλεται.
- 1.31** Ο πληθυσμός μιας πόλης είναι περίπου 9.000 κάτοικοι. Ποια είναι η τάξη της στρογγυλοποίησης; Λέγοντας περίπου 9.000, κατά πόσους κατοίκους μπορεί να «πέφτουμε έξω»;
- 1.32** Από τους δεκαδικούς αριθμούς $0, _ _ 3$ και $1, _ _ 9$ μας απέκρυψαν κάποια ψηφία. Συμπληρώστε τους αριθμούς κατάλληλα, ώστε μετά από στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο εκατοστό να προκύψουν οι αριθμοί 0,49 και 1,87 αντίστοιχα.

Α.1.2 Πρόσθεση Αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Πρόσθεση

Ας ξεκινήσουμε να δούμε τη πράξη της πρόσθεσης.

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Οι όροι της πρόσθεσης, οι οποίοι ονομάζονται προσθετέοι είναι οι: α , β και ο όρος γ ονομάζεται το άθροισμα της πρόσθεσης.

Παράδειγμα

$$29 + 30 = 59$$

Προσθετέοι : 29, 30

Άθροισμα : 59

Όλες οι πράξεις έχουν κάποιες ιδιότητες, έτσι και η πράξη της πρόσθεσης.

Ιδιότητες Πρόσθεσης

$$\checkmark \alpha + 0 = \alpha$$

Παράδειγμα

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5$$

$$\checkmark \text{ Αντιμεταθετική ιδιότητα: } \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Παράδειγμα

$$2 + 3 = 3 + 2 = 5$$

$$\checkmark \text{ Προσεταιριστική ιδιότητα: } \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

Παράδειγμα

$$1 + (3 + 4) = (1 + 3) + 4 = 8$$

Αφαίρεση

$$M - A = \Delta$$

ή αλλιώς σαν πρόσθεση γράφεται $M = A + \Delta$

Οι όροι της αφαίρεσης, ονομάζονται:

M: μειωτέος

A: αφαιρετέος

Δ : διαφορά

Παράδειγμα

$$40 - 20 = 20$$

$$M=40$$

$$A=20$$

$$\Delta = 20$$

Παρατήρηση

Στους φυσικούς αριθμούς πρέπει ο Μ μεγαλύτερος ή ίσος του Α, αλλιώς δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την πράξη της αφαίρεσης.

Ιδιότητες Αφαίρεσης

$$\checkmark \alpha - 0 = \alpha$$

Πολλαπλασιασμός

$$\alpha \cdot \beta = \gamma$$

Οι όροι α και β λέγονται παράγοντες και ο όρος γ ονομάζεται γινόμενο.

Παράδειγμα

$$2 \cdot 30 = 60$$

Παράγοντες : 2, 30

Γινόμενο : 60

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού

$$\checkmark \alpha \cdot 1 = \alpha$$

$$\checkmark 2^n \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\checkmark \text{Αντιμεταθετική ιδιότητα: } \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

$$\checkmark \text{Προσεταιριστική ιδιότητα: } \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Επιμεριστική Ιδιότητα – Σχέση Πρόσθεσης Αφαίρεσης με τον Πολλαπλασιασμό

Επιμεριστική ιδιότητα με πρόσθεση :

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Επιμεριστική ιδιότητα με αφαίρεση :

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Παράδειγμα

$$\text{i) } 2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = 2 \cdot x + 6$$

$$\text{ii) } 5 \cdot (2 - \omega) = 5 \cdot 2 - 5 \cdot \omega = 10 - 5 \cdot \omega$$

$$\text{iii) } 3 \cdot (-\omega - 1) = -3 \cdot \omega - 3$$

Για να εκτελέσουμε τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση, θα πρέπει να ακολουθήσουμε κάποιους κανόνες. Πιο συγκεκριμένα :

Προτεραιότητα των πράξεων

1. Πολλαπλασιασμός και Διαιρέσεις
2. Προσθέσεις και Αφαιρέσεις

Πάντα προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

Στη συνέχεια θα προσθέσουμε και άλλο ένα βήμα πριν τον πολλαπλασιασμό και τη Διαίρεση.

Παρατήρηση – Βοήθεια για τις ασκήσεις

Σε πολλές ασκήσεις συναντάμε δύσκολες πράξεις. Για παράδειγμα $678 \cdot 99$.

Κανονικά η πράξη αυτή είναι αρκετά χρονοβόρα. Αν σκεφτούμε, όμως έξυπνα και κάνουμε και χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας με αφαίρεση.

Το γινόμενο $678 \cdot 99$ μπορούμε να το γράψουμε :

$$678 \cdot (100-1) = 678 \cdot 100 - 678 \cdot 1 = 67.800 - 678 = 67.122$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 17 (Βιβλίο Οργανισμού)

Συμπλήρωσε τα γινόμενα :

α) $52 \cdot \boxed{100} = 5.200$

β) $37 \cdot \boxed{10} = 370$

γ) $490 \cdot \boxed{10.000} = 4.900.000$

Άσκηση 6/σελ. 18 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα παρακάτω γινόμενα χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $3 \cdot 13 = 3 \cdot (10 + 3) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 30 + 9 = 39$

β) $7 \cdot 11 = 7 \cdot (10 + 1) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 70 + 7 = 77$

γ) $45 \cdot 12 = 45 \cdot (10 + 2) = 45 \cdot 10 + 45 \cdot 2 = 450 + 90 = 540$

δ) $12 \cdot 101 = 12 \cdot (100 + 1) = 12 \cdot 100 + 12 \cdot 1 = 1.200 + 12 = 1.212$

ε) $5 \cdot 110 = 5 \cdot (100 + 10) = 5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 = 500 + 50 = 550$

στ) $4 \cdot 111 = 4 \cdot (100 + 11) = 4 \cdot 100 + 4 \cdot 11 = 400 + 44 = 444$

ζ) $34 \cdot 99 = 34 \cdot (100 - 1) = 34 \cdot 100 - 34 \cdot 1 = 3.400 - 34 = 3.366$

η) $58 \cdot 98 = 58 \cdot (100 - 2) = 58 \cdot 100 - 58 \cdot 2 = 5.800 - 116 = 5.684$

Άλυτες Ασκήσεις

1.33 Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας :

Αν ο $\alpha = \dots$	και ο $\beta = \dots$	τότε $\alpha + \beta = \dots$	και $\beta + \alpha = \dots$
3	5		
8	12		
4	2		
128	152		
1.028	134		

1.34 Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας :

α	β	γ	$(\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha + (\beta + \gamma)$
3	2	4		
12	7	8		
32	64	73		
182	72	31		
2.035	40	78		

1.35 Στις παρακάτω προσθέσεις να αντικαταστήσετε τα κενά με τα κατάλληλα ψηφία.

$$\begin{array}{r} 2 _ 5 _ \\ + _ 3 0 _ 5 \\ \hline 8 _ 4 6 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 4 _ 2 \\ + _ 7 5 _ \\ \hline _ _ 8 3 \end{array}$$

1.36 Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να αναγνωρίσετε τις ιδιότητες

- α) $a+b=b+a$
- β) $a+(b+g)=(a+b)+g$
- γ) $a \cdot b=b \cdot a$
- δ) $a \cdot (b \cdot g)=(a \cdot b) \cdot g$
- ε) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$
- στ) $a \cdot (b-c)=a \cdot b-a \cdot c$

1.37 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα.

- i) $A = x+3+y+2$, $B = x+y+\omega+3$, $\Gamma = x+y+5$ και $\Delta = x+y+(\omega+3)$, αν $x=4$, $y=6$, $\omega=7$.
- ii) $A = \alpha+3+\beta$, $B = 33+\gamma+10+\delta$, $\Gamma = \alpha+8+\beta+\gamma+12+\delta+1$ και $\Delta = 12+(\alpha+3)+(\beta+7)+(2+\gamma)+\delta$, αν $\alpha+\beta=5$ και $\gamma+\delta=13$.
- iii) $A = \alpha+\beta+3$, $B = (\alpha+\beta)+(3+\gamma)+\alpha$ και $\Gamma = (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)$, αν $\alpha=12+23$, $\beta=28+37$, $\gamma=84+36$.

1.38 Να κάνετε τις προσθέσεις:

- i) $43+15+22+8$
- ii) $108+22+74+6$
- iii) $351+278+1.028+12$
- iv) $378+3.078+33.572$

1.39 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω γινόμενα :

- α) $43 \cdot 1000 =$
- β) $34 \cdot \dots = 3400$

γ) $423 \cdot \dots = 4230$

δ) $\dots : \dots = 12500$

1.40 Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στον αριθμό 4693 για να μας δώσει τον 5100;

1.41 Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στον αριθμό 23 για να μας δώσει τον 213;

1.42 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα :

α) $3 \cdot 14$

β) $55 \cdot 12$

γ) $110 \cdot 5$

δ) $9 \cdot 210$

ε) $35 \cdot 99$

1.43 Ο Θοδωρής είναι 28 χρόνια μικρότερος από τον πατέρα του και 5 χρόνια μεγαλύτερος από τον αδελφό του. Αν ο πατέρας είναι 47 ετών, να βρείτε την ηλικία του Θοδωρή και του αδελφού του.

1.44 Η Αφροδίτη γεννήθηκε το 1991 και είναι μικρότερη από τη μητέρα της κατά 31 χρόνια.

α) Πόσο χρονών είναι σήμερα η Αφροδίτη;

β) Πότε γεννήθηκε η μητέρα του;

1.45 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω μαγικά τετράγωνα:

		6	32		
	7		37		
8		10	36	31	

1.46 Βάλτε το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$ ή $=$, μεταξύ των παρακάτω διαφορών:

$13 - 7 \dots 22 - 19$	$5 - 5 \dots 12 - 8$
$17 - 5 \dots 20 - 8$	$12 - (5 - 3) \dots 14 - 3$
$45 - 21 \dots 130 - 119$	$10 - (4 - 1) \dots 7 - (10 - 3)$

1.47 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (35 - 12) + 46 - 37 - (31 - 28)$$

$$B = 76 + (35 - 18) - 44 + (51 - 28)$$

$$\Gamma = 154 - (31 - 20) - (65 - 28) - 106$$

1.48 Αν $\alpha = 16$, $\beta = 12$, $\gamma = 9$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \alpha - \gamma + \beta$$

$$B = (\alpha - 5) - (\beta - 3) + \gamma$$

$$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma - \beta + \alpha - \gamma$$

1.49 Αν $\alpha = 16, \beta = 12, \gamma = 9$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \alpha - \gamma + \beta$$

$$B = (\alpha - 5) - (\beta - 3) + \gamma$$

$$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma - \beta + \alpha - \gamma$$

1.50 Αν $\alpha = 16, \beta = 12, \gamma = 9$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \alpha - \gamma + \beta$$

$$B = (\alpha - 5) - (\beta - 3) + \gamma$$

$$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma - \beta + \alpha - \gamma$$

1.51 Αν $\alpha = 16, \beta = 12, \gamma = 9$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \alpha - \gamma + \beta$$

$$B = (\alpha - 5) - (\beta - 3) + \gamma$$

$$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma - \beta + \alpha - \gamma$$

1.52 Να συμπληρωθούν οι αριθμοί που λείπουν:

$43 \cdot \dots\dots\dots = 43.000$	$560 \cdot \dots\dots\dots = 5.600.000$
$4.100 = \dots\dots\dots \cdot 10$	$720 \cdot 100 = \dots\dots\dots$
$23 \cdot 100 = \dots\dots\dots$	$570.000 = \dots\dots\dots \cdot 10$
$20.000 = 200 \cdot \dots\dots\dots$	$32.000 = 100 \cdot \dots\dots\dots$
$1.000 = \dots\dots\dots \cdot 100$	$5 \cdot \dots\dots\dots = 500.000$
$90 \cdot 10.000 = \dots\dots\dots$	$10.000 = 100 \cdot \dots\dots\dots$
$8.200 = 82 \cdot \dots\dots\dots$	$490.000 = 49 \cdot 100 \cdot \dots\dots\dots$

1.53 Να γίνουν οι πράξεις:

$(3+4) \cdot 8 = \dots\dots$	$3+4 \cdot 8 = \dots\dots$
$2 \cdot 5 - 3 = \dots\dots$	$2 \cdot (5 - 3) = \dots\dots$
$12 \cdot 2 + 5 = \dots\dots$	$12 \cdot (2 + 5) = \dots\dots$
$18 - 3 \cdot 2 = \dots\dots$	$(18 - 3) \cdot 2 = \dots\dots$
$2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 - 3 \cdot 7 = \dots\dots$	$3 \cdot (10 - 2) - 2(3 - 2) = \dots\dots$

$(3 + 4) \cdot 5 - 2 \cdot 2 = \dots\dots$	$8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 3 \cdot 13 = \dots\dots$
$32 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot (2 + 8) = \dots\dots$	$3(10 + 7) - 2(5 - 2) + 7 \cdot 3 = \dots\dots$
$7 \cdot 2 + 4 \cdot (12 - 4) - 3 \cdot (5 + 2) = \dots\dots$	$(8 + 5) \cdot (7 - 3) + 4 \cdot 9 - 25 = \dots\dots$

1.54 Να κάνετε τις πράξεις:

- i) $7 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5$
- ii) $3 + 4 \cdot 5$
- iii) $3 \cdot 4 + 5$
- iv) $3 \cdot (4 + 5)$
- v) $(3 + 4) \cdot 5$
- vi) $32 - 3 \cdot 6$
- vii) $(32 - 3) \cdot 6$
- viii) $32 \cdot 3 - 6$
- ix) $32 \cdot (3 - 6)$

1.55 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

α	β	γ	$\alpha \cdot \beta$	$\alpha \cdot \gamma$	$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	$\beta + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta + \gamma)$
3	2	5					
2	3	4					
6	1	3					
7	2	4					
3	3	1					
1	2	7					

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

1.56 Να γραφούν σύντομα τα παρακάτω:

- i) $3\alpha + 5\alpha - \alpha =$
- ii) $\beta - 2\beta - \beta =$
- iii) $x + 5x - 4x =$
- iv) $8\omega - 3\omega + 7\omega - \omega + 2\omega + \omega =$
- v) $7\alpha + 3\beta + 4\alpha - \beta =$
- vi) $4x + 3y - 2x + y =$

1.57 Να κάνετε τις πράξεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

- i) $12 \cdot 13 + 12 \cdot 17 =$
- ii) $34 \cdot 16 - 34 \cdot 6 =$
- iii) $234 \cdot 11 =$
- iv) $45 \cdot 19 =$

1.58 Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:

- i. $45 \cdot 3$
- ii. $45 \cdot 78$
- iii. $250 \cdot 24$
- iv. $890 \cdot 743$
- v. $420 \cdot 415$

1.59 Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

- i) $6 \cdot (3 - 2)$
- ii) $18 \cdot (19 + 31)$
- iii) $(4 + 2)(8 + 2)$
- iv) $(3 + 2)(7 - 5)$
- v) $7 \cdot (14 - 12 + 3)(4 - 3)$
- vi) $5 \cdot (3 + \omega) + 3(2 - \alpha)$
- vii) $7 \cdot (x + y) + 7(x - y)$
- viii) $2 \cdot (3x + 5y) + 5(2x - 2y)$

1.60 Αν ξέρουμε ότι $18 \cdot 25 = 450$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 18 \cdot 17 + 18 \cdot 8$$

$$B = 18 \cdot 38 - 18 \cdot 13$$

$$Γ = 25 \cdot 25 - 25 \cdot 7$$

1.61 Με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας να γίνουν γινόμενα οι παρακάτω παραστάσεις:

- i) $3x + 4x$
- ii) $2y + 2x$
- iii) $14 \cdot 125 + 14 \cdot 475 + 14 \cdot 500$
- iv) $8 \cdot 23 + 8 \cdot 63 + 8 \cdot 14$
- v) $2x + 8$
- vi) $5\alpha + 5$
- vii) $3x - 9$
- viii) $7\alpha + 14 + 21\beta$

1.62 Απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = 5 \cdot (2\alpha + 4\beta + 2) + 3(\alpha + \beta + 4)$$

$$B = 3(3\alpha + 2\beta) + 4(\alpha - \beta + 5)$$

$$Γ = 2(5\alpha + 9\beta) + 3(\alpha + 2\beta + 4)$$

$$\Delta = 3(\alpha + 8\beta + \gamma) + 2(\alpha + 2\gamma) - \gamma$$

1.63 Να τοποθετήσετε κατάλληλα παρενθέσεις στις παρακάτω ισότητες, ώστε αυτές να ισχύουν:

i) $10 + 5 \cdot 4 = 60$

ii) $5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 120$

iii) $2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 = 50$

iv) $4 + 2 \cdot 10 + 20 = 80$

v) $7 + 8 \cdot 2 + 8 = 87$

vi) $4 + 5 \cdot 7 + 3 = 90$

1.64 Να υπολογίσετε το άθροισμα :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

1.65 Αν $\alpha + \beta = 5$, υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 3 \cdot (5 + \alpha) + 6 + 3 \cdot \beta$$

$$B = 8 \cdot (2 + \beta) + 15 + 8 \cdot \alpha$$

$$\Gamma = 13 \cdot (2 + 3\beta) + 8 + 39 \cdot \alpha$$

$$\Delta = 10 \cdot (5 + \alpha) + 7 + 10 \cdot \beta$$

$$K = 3 \cdot (\alpha + 3) + 3 \cdot (4 + \beta)$$

$$\Lambda = 2 \cdot (4\alpha + 6) + 8 \cdot (\beta - 1)$$

$$M = 5 \cdot (\alpha + 2) + 4 \cdot (\beta - 2) - \alpha$$

1.66 Αν $\alpha - \beta = 1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = 3 \cdot \alpha + 3 \cdot (5 - \beta) + 8$$

$$B = 10 \cdot (\alpha + 2) + 2 \cdot (3 - 5\beta)$$

$$\Gamma = 2 \cdot (\alpha + 4) + 3 \cdot (5 - \beta) + \alpha$$

$$\Delta = 4 \cdot \alpha + 5 + 2 \cdot (\alpha + 1) + 6 \cdot (2 - \beta)$$

1.67 Αν α, β είναι φυσικοί αριθμοί, να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $x = 2\alpha + 4\beta$ είναι άρτιος, ενώ ο αριθμός $B = 3 \cdot (\alpha + 1) + 2\beta - \alpha$ είναι περιττός.

A.1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

Τι σημαίνει a^n ;

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

Το διαβάζουμε νιοστή δύναμη του a ή δύναμη του a εις την n .

Το n είναι ο εκθέτης και το a είναι η βάση.

Παρατήρηση

Η δύναμη του a στη δευτέρα, λέγεται a στο τετράγωνο

Η δύναμη του a στη τρίτη, λέγεται a στον κύβο.

Ιδιότητες Δυνάμεων

- $a^1 = a$
- $1^n = 1$
- $a^0 = 1$

Αριθμητική παράσταση, ονομάζουμε κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με πράξεις.

Προτεραιότητα των πράξεων

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμός και Διαίρεσεις
3. Προσθέσεις και Αφαιρέσεις

Πάντα προηγούνται οι πράξεις στο εσωτερικό των παρενθέσεων.

Παράδειγμα

1. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$
2. $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$
3. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$
4. $2021^1 = 2021$
5. $10^1 = 10$
6. $10^2 = 100$
7. $10^3 = 1000$
8. $10^4 = 10000$

Παράδειγμα

$$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$$

Προσοχή

Τα δύο μέλη της παρακάτω ισότητας δεν είναι ίσα:

$$2^2 + 5^2 \neq (2 + 5)^2$$

Το σύμβολο \neq , σημαίνει διάφορο και όχι ίσο.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 22 (Βιβλίο Οργανισμού)

Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

α	15	16	17	18	19	20	25
α^2	225	256	289	324	361	400	625
α^3	3.375	4.096	4.913	5.832	6.859	8.000	15.625

α	8	9	10	11	12	13	14
α^2	64	81	100	121	144	169	196
α^3	512	729	1.000	1.331	1.728	2.197	2.744

Άσκηση – Παράδειγμα - Εφαρμογή

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 3^2 \cdot (12:2 + 3^2) + 2^5 - 2^2$

Λύση

$$\begin{aligned}
 A &= 3^2 \cdot (12:2 + 3^2) + 2^5 - 2^2 = \\
 &= 3^2 \cdot (12:2 + 9) + 2^5 - 2^2 = \\
 &= 3^2 \cdot (6 + 9) + 2^5 - 2^2 = \\
 &= 3^2 \cdot 15 + 2^5 - 2^2 = \\
 &= 9 \cdot 15 + 32 - 4 = \\
 &= 135 + 32 - 4 = \\
 &= 135 + 28 = \\
 &= 163
 \end{aligned}$$

Άρα το A είναι ίσο με 163

Άσκηση 2/σελ. 22 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα :

(α) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$

(β) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 8^5 \cdot 6^3$

(γ) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^5 = 1$

(δ) $x \cdot x \cdot x = x^3$

(στ) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 2^4 \cdot a^3$

Άλυτες Ασκήσεις

1.68 Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

i) 2^4

ii) 10^2

iii) 5^2

iv) 3^3

v) 2^4

1.69 Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

i) 12^2

ii) 7^3

iii) $3^1 \cdot 5^2$

iv) 256^0

v) 1^{2017}

1.70 Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

i) 12^2

ii) 7^3

iii) $3^1 \cdot 5^2$

iv) 256^0

v) 1^{2017}

1.71 Να απαντήσετε αν ισχύουν τα παρακάτω:

α) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Σωστό ή Λάθος;

β) $3^3 = 3+3+3$

Σωστό ή Λάθος;

γ) $5^5 = 5+5+5+5+5$

Σωστό ή Λάθος;

δ) $\beta^4 = \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$

Σωστό ή Λάθος;

ε) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Σωστό ή Λάθος;

στ) $1^5 = 5$

Σωστό ή Λάθος;

1.72 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

α) $3^6 + 3^6 + 1^{41} + 2^3$

β) $(22-21)^{10} + 2^3$

γ) $3 \cdot (5+3)^3$

δ) $(121-21)^3 + 3^3 \cdot (2+2)^2$

1.73 Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε αναπτυγμένη μορφή με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10.

- i) 5.328
- ii) 23.568
- iii) 218.028
- iv) 3.000
- v) 15.723

1.74 Να γράψετε σύντομα τις παρακάτω παραστάσεις
 $A = 5 + 5 + 5$

$$B = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\Gamma = x + x + x + x + x$$

$$\Delta = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$E = x \cdot x \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega + \omega + \omega + \omega$$

$$Z = \alpha + \beta + \alpha + \beta + \gamma + \gamma + \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma$$

1.75 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

- i) $A = 3^2 \cdot (12:2 + 3^2) + 2^5 - 2^2$
- ii) $A = 5^2 \cdot (24:3 + 4^2) + 3^5 - 3^2$
- iii) $A = 2^2 \cdot (24:3 + 3^2 - 4^2)$
- iv) $A = 6^2 \cdot (50:2 - 5^2) + 7^2 + 10^2$
- v) $A = 7^2 \cdot (5^2 - 23)$
- vi) $A = (5 + 3^2) \cdot (2^2 + 2)$
- vii) $A = 7^2 + 10^2 - 5 \cdot 3 + 6:2$

1.76 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

- i) $A = 7^2 + 10^2 - (5 \cdot 3 + 6:2)$
- ii) $A = (5^2 + 10^2) : 5 + 6:2 + 5^2$
- iii) $A = 6:2 + 6^2 + (4^2 + 3^2) : 5$

1.77 Να γράψετε σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:

- i) $5 + 5 + 5 + 5 =$
- ii) $2x + x + x + x + x =$
- iii) $2 + 2 + 2 + 3 + 3 =$
- iv) $a + a + a + \beta + \beta =$
- v) $\alpha + \beta + \alpha + \alpha + \alpha + \beta =$
- vi) $0,5 + 0,5 + 0,5 =$
- vii) $x \cdot x \cdot x \cdot x =$

- viii) $\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa \cdot \lambda \cdot \lambda =$
- ix) $\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa + \lambda \cdot \lambda =$
- x) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + \kappa \cdot \kappa =$
- xi) $(\kappa + \lambda) \cdot (\kappa + \lambda) =$
- xii) $\kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \lambda =$
- xiii) $\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 =$
- xiv) $(2 \cdot \alpha) \cdot (2 \cdot \alpha) \cdot (2 \cdot \alpha) \cdot (2 \cdot \alpha) =$
- xv) $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha =$
- xvi) $\alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 =$
- xvii) $\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 =$

1.78 Να κάνετε τις πράξεις:

- i) $3^3 : 3^2 \cdot 2 \cdot 4$
- ii) $2^5 : 2^2 \cdot 3 : 4$
- iii) $3^3 + 3 \cdot 2^2 : 3 + 1$
- iv) $5^4 : 5^2 \cdot 2 : 10$
- v) $(2 + 3)^5 + (7 - 5)^7$
- vi) $(2 \cdot 5)^2 : (3 - 2)^2 \cdot (3 + 2)^2$
- vii) $2^2 + 3^2 + 4^2$
- viii) $8^2 - 6^2 + 7 \cdot 3 - 2^4$
- ix) $2(5^2 - 3 \cdot 4) + 2^3 \cdot 3$
- x) $2 \cdot (2^3 + 3 \cdot 2^2) - 2^3 \cdot 5$

1.79 Να συγκρίνετε τις δυνάμεις:

$$(2 \cdot 3)^2 \text{ και } 2^2 \cdot 3^2$$

$$(3 \cdot 4)^3 \text{ και } 3^3 \cdot 4^3$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 \text{ και } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$$

Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να το εκφράσετε συμβολικά;

1.80 Να γράψετε με μορφή δυνάμεων τους αριθμούς:

$$9, 16, 25, 100, 49, 81, 10000, 36, 4$$

Άσκησης Αυξημένης Δυσκολίας

1.81 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

$$A = 6^3 - 5 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot (7 + 1 + 2)$$

$$B = 3^2 + 4 \cdot (5^2 - 3^2 \cdot 2) + 2^2 + 1^{1995}$$

$$\Gamma = [2^2(2^3 - 1) + 2] : 10 + 2^2 \cdot 5^3$$

$$\Delta = [45 - 3^4 : 3^2 + 2^2] : 2^3$$

$$E = (2^2 \cdot 5^2) : 20 + 5^2 - 3^3$$

$$Z = 3^5 - 2 \cdot 6^2 + 3^2$$

$$H = (6^2 + 3 \cdot 4 - 47)^{85} + (3^3 + 2 - 3 \cdot 9)^5$$

1.82 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

$$A = 2^3 \cdot 3^2 - 5^2 + 2^2 \cdot 7 : 7 + 2^3 \cdot 3 : 6$$

$$B = [2^3 \cdot (3^2 + 2^2) - 2^2] : 10^2$$

$$\Gamma = 2^8 : 2^7 + 5 \cdot 3^2 - 3(2^4 - 2^3 - 6)$$

1.83 Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων.

$$A = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{για } \alpha=1 \text{ και } \beta=3$$

$$B = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{για } \alpha=5 \text{ και } \beta=4$$

$$\Gamma = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \quad \text{για } \alpha=1 \text{ και } \beta=2$$

$$\Delta = (\beta + 1)(\alpha - 1) \quad \text{για } \alpha=101 \text{ και } \beta=99$$

1.84 Αν $\alpha=6$ και $\beta=3$ υπολογίστε τις παραστάσεις.

i) $A = (\alpha + \beta)^2$, $B = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii) $A = (\alpha - \beta)^2$, $B = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii) $A = (\alpha + \beta)^3$, $B = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Τι παρατηρείτε ;

1.85 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = x^3 + 44 \cdot x - 13 \cdot x^2$ έχει τιμή 32 όταν $x = 1$ και $x = 4$.

1.86 α) Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις $A = x^3 + 10x$ και $B = 7x^2$ είναι ίσες όταν $x = 0$, $x = 2$ και $x = 5$. β) Ποια από τις δύο παραστάσεις είναι μεγαλύτερη όταν $x = 6$;

1.87 Αν $\alpha=10$, $\beta=5$ και $\gamma=2$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\alpha : \beta + \beta^2) - (\beta - \gamma)^\gamma + (\beta \cdot \gamma - \alpha)$$

1.88 Αν $\alpha=2$ και $\beta=3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(\alpha + \beta) \cdot \alpha + (\beta - \alpha)^\beta \cdot (\alpha \cdot \beta - \beta)$$

1.89 Αν $A = (92 + 19) : 10 - 23$, $B = (53 \cdot 2) : 5 - 72$ και $\Gamma = (24 \cdot 22) : 5$, να υπολογίσετε την παράσταση :

$$(A + B + \Gamma)^2 - 2 \cdot A \cdot B - 2 \cdot A \cdot \Gamma - 2 \cdot B \cdot \Gamma$$

1.90 Αν $A = (24 - 4 - 23 : 22) : 2$ και $B = (24 - 2 \cdot 32 : 6 + 2) : 15$, να υπολογίσετε την παράσταση :

$$(A^2 - 1) : 2 + B^{2005}$$

1.91 Αν $K = 23 - 2(32 - 23)2$ και $\Lambda = 2 \cdot 32 - 3 \cdot 22 : 4$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$2^3 + (K + 2\Lambda) : 3^2 - 3^2.$$

1.92 Αν $A = (24 - 32 \cdot 4 : 6) \cdot 52 : 53$, $B = 34 - 24 \cdot 5$ και $\Gamma = 22 \cdot 53 : 102$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$(A^3 - B)^2 - \Gamma^2$$

1.93 Αν $x = 23 - 22$, $y = 3 \cdot 52 - 23 \cdot 32$ και $\omega = 25 - 33$, να δείξετε ότι: $x^2 + y^2 = \omega^2$.

1.94 Αν $x = 2 \cdot (32 - 2 \cdot 3)$, $y = 23$ και $\omega = 2(52 - 22 \cdot 5)$, να δείξετε ότι:

$$x^2 + y^2 = \omega^2.$$

1.95 Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα:

- i) αν από το τετράγωνο του 17 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του 17;
- ii) αν από το κύβο του 11 αφαιρέσουμε το δεκαπλάσιο του 121;

1.96 Αν $\alpha = 125 + 148 + 152$, $\beta = 22 + 23 - 2$ και $\gamma = 34 - 33$ να υπολογίσετε:

- i) $(\alpha \cdot \beta)^2$
- ii) $(\gamma - \beta - \alpha)^4$

1.97 Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$$A = 2^6 \cdot 3.456 - 2^6 \cdot 3.455 =$$

$$B = 7^8 \cdot 12 - 7^8 \cdot 5 - 7^9 =$$

1.98 Δύο αριθμοί x , y έχουν γινόμενο 60. Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δύο αριθμούς με τον αριθμό κ τότε να βρείτε το νέο γινόμενο. Να γίνει εφαρμογή όταν $\kappa = 5$.

Ολιγόλεπτη Δοκιμασία

ΘΕΜΑ 1^ο

Στην παράσταση a^v , πως ονομάζεται το a και πως ονομάζεται το v ;

ΘΕΜΑ 2^ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας την απόφασή σας.

i. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

ii. $2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$

iii. $(2 \cdot a)^4 = 16 \cdot a^4$

iv. $3^3 = 9$

ΘΕΜΑ 3^ο

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις υπό την μορφή δύναμης:

i. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

ii. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

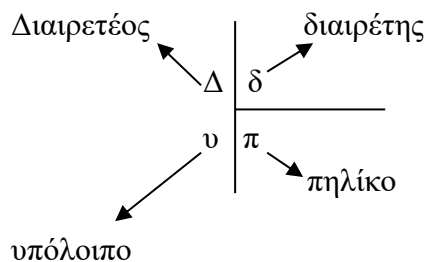
iii. $2 \cdot a \cdot \beta \cdot 2 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot 2$

ΘΕΜΑ 4^ο

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 2 \cdot 6^2 - [1 + 8 + (3^3 - 4) + 2 \cdot 4^2 - 25] + 1$$

A.1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα



Παράδειγμα

$$\begin{array}{r|l} 57 & 8 \\ -56 & 7 \\ \hline =1 & \end{array}$$

Σε κάθε διαίρεση ισχύει η σχέση $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, με $\upsilon < \delta$

Οι όροι της διαίρεσης είναι, σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα :

Διαιρετέος : 57

διαιρέτης : 8

Πηλίκο : 7

Υπόλοιπο : 1

Αν το $\upsilon = 0$, τότε λέμε ότι έχουμε τέλεια διαίρεση και η σχέση γίνεται $\Delta = \delta \cdot \pi$

Ιδιότητες Διαίρεσης και Παρατηρήσεις

- 1) Ο διαιρέτης δ , δεν μπορεί να είναι 0
- 2) Όταν $\Delta = \delta$, τότε το πηλίκο (π) = 1
- 3) Όταν $\delta = 1$, τότε το $\pi = \Delta$
- 4) Όταν ο διαιρετέος $\Delta = 0$, τότε το $\pi = 0$

Λυμένες Ασκήσεις

Αν χωρίσουμε τους μαθητές μιας τάξης σε πεντάδες, πόσοι μπορεί να περισσεύουν ;

Λύση

Σε κάθε διαίρεση το υπόλοιπο πρέπει να είναι πιο μικρό από το διαιρέτη, άρα τα πιθανά υπόλοιπα είναι το 0 ή το 1 ή το 2 ή το 3 ή το 4, αφού ο διαιρέτης είναι το 5. Άρα, οι μαθητές που μπορεί να περισσεύουν είναι κανένας ή ένας ή δύο ή τρεις ή τέσσερις, αντίστοιχα.

Άσκηση 2/σελ. 26 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσεις :

- α) Πόσο κοστίζει το 1 μέτρο υφάσματος αν τα 5 μέτρα κοστίζουν 65€ ;

- β) Πόσο κοστίζει το 1 κιλό κρέας αν για τα 3 κιλά πληρώσαμε 30€ ;
 γ) Πόσα δοχεία των 52 λίτρων θα χρειαστούν για 46.592 λίτρα κρασιού;

Λύση

- α) κάνουμε διαίρεση $65 : 5 = 13 \text{ €}$
 β) $30 : 3 = 10 \text{ €}$
 γ) $46.592 : 52 = 896$ δοχεία

Άλυτες Ασκήσεις

1.99 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδεια διαίρεση; Σε αυτές που παριστάνουν Ε.Δ. να προσδιορίσετε ποιος είναι ο διαιρέτης, ο διαιρετέος, το πηλίκο και το υπόλοιπο.

- i) $263 = 12 \cdot 21 + 11$
 ii) $155 = 20 \cdot 5 + 55$
 iii) $195 = 30 \cdot 6 + 15$

1.100 Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 και δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.
 (υπόδειξη: σκεφτείτε όλα τα πιθανά υπόλοιπα μιας διαίρεσης ενός αριθμού με το 5)

1.101 Να κάνετε τις παρακάτω ευκλείδειες διαιρέσεις και να γράψετε τις ισότητες που προκύπτουν.

- | | |
|---------------------|--------------------|
| i) $622 : 35$ | vii) $721 : 28$ |
| ii) $1.275 : 106$ | viii) $3.414 : 55$ |
| iii) $40.513 : 812$ | ix) $63.712 : 234$ |
| iv) $285 : 13$ | x) $1.821 : 52$ |
| v) $6.845 : 15$ | xi) $23.589 : 379$ |
| vi) $125 : 24$ | xii) $3.789 : 45$ |

1.102 Σε μία διαίρεση ο διαιρέτης είναι το 325, το πηλίκο 27 και το υπόλοιπο 138. Ποιος είναι ο διαιρετέος;

1.103 Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι το 328, το πηλίκο 131 και το υπόλοιπο 189. Ποιος είναι ο διαιρετέος;

1.104 Να συμπληρωθούν οι πίνακες.

Δ	50	500	48	49	51
δ	6	60	4	4	4
π					
υ					

Δ				
δ	5	5	5	5
π	10	10	10	10
υ	0	1	2	3

1.105 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις προκύπτουν από ευκλείδειες διαιρέσεις.

- i) $38 = 3 \cdot 10 + 8$
- ii) $41 = 4 \cdot 10 + 1$
- iii) $43 = 3 \cdot 10 + 13$
- iv) $50 = 3 \cdot 16 + 2$
- v) $58 = 2 \cdot 10 + 38$

Στις εξισώσεις που προκύπτουν από ευκλείδειες διαιρέσεις, να αναγνωρίσετε το πηλίκο, το διαιρέτη και το υπόλοιπο.

1.106 Να γράψετε τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι του 40 και όταν διαιρούνται με το 4 αφήνουν υπόλοιπο 2.

1.107 Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι το 13, το υπόλοιπο το μεγαλύτερο δυνατό και το πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου. Ποιος είναι ο διαιρετέος;

1.108 Να βρεθούν οι αριθμοί οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 8 δίνουν πηλίκο διπλάσιο από το υπόλοιπο.

1.109 Σε μία διαίρεση ο διαιρέτης είναι το 5 και το πηλίκο είναι διπλάσιο από το υπόλοιπο.

Ποιος μπορεί να είναι ο διαιρετέος και το πηλίκο;

Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι το 3 και το πηλίκο τριπλάσιο από το υπόλοιπο. Ποιος μπορεί να είναι ο διαιρετέος;

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

1.110 Να βρείτε τον διαιρετέο της ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 4 και πηλίκο κατά 3 μονάδες μεγαλύτερο από το υπόλοιπο.

1.111 Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης είναι το 5 και το πηλίκο κατά 1 περισσότερο από το υπόλοιπο.

- i) Να δείξετε ότι $\Delta = 6 \cdot \upsilon + 5$, όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης.
- ii) Ποιος μπορεί να είναι ο διαιρετέος και το πηλίκο;

Α.1.5 Χαρακτήρες ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμών σε γινόμενο πρώτων.

Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού a είναι τα $2a, 3a, 4a, 5a, \dots$

Είναι όλα τα γινόμενα που προκύπτουν, αν πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό a με όλους τους υπόλοιπους φυσικούς αριθμούς.

Παραδείγματα

Τα πολλαπλάσια του 2: $0 \cdot 2 = 0$, $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 2 = 6$, $4 \cdot 2 = 8$, $5 \cdot 2 = 10$, $6 \cdot 2 = 12$, $7 \cdot 2 = 14$

Τα πολλαπλάσια του 6: 0 , 6 , 12 , 18 , 24 , ...

Παρατηρήσεις

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του
- Κάθε φυσικός αριθμός, που διαιρείται από έναν άλλον είναι πολλαπλάσιό του.
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλον, τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά τους.
- Κάθε αριθμός a έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και a .
- Πολλοί αριθμοί είναι ταυτόχρονα πολλαπλάσια για περισσότερους από δύο φυσικούς αριθμούς. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται κοινά πολλαπλάσια των φυσικών αριθμών αυτών.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών ($\neq 0$) το ονομάζουμε **ΕΚΠ** των αριθμών αυτών. Το ΕΚΠ δύο φυσικών αριθμών a και β συμβολίζεται ΕΚΠ(a, β)

Πρώτοι Αριθμοί

Είναι οι αριθμοί, που διαιρούνται μόνο από το 1 και τον εαυτό τους. Διαφορετικά, λέγονται σύνθετοι.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Δύο φυσικοί αριθμοί a και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται ΜΚΔ των a και β και συμβολίζεται ΜΚΔ(a, β).

Παρατήρηση

Δύο φυσικοί αριθμοί a και β ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν $\text{ΜΚΔ}(a, \beta) = 1$

Πρώτοι αριθμοί

Είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, που δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα. (ο αριθμός 1 δεν θεωρείται πρώτος)

Σύνθετοι αριθμοί

Οι αριθμοί που δεν είναι **πρώτοι**.

Παρατήρηση

Δύο αριθμοί που έχουν ΜΚΔ τη μονάδα ονομάζονται **πρώτοι μεταξύ τους**.

Για παράδειγμα το 4 και το 35

Κριτήρια Διαιρετότητας των 2,3,4,5,9,10,25

- Ένας αριθμός διαιρείται με το 2, αν λήγει σε 0,2,4,6,8.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 3, αν το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού διαιρείται με το 3.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού διαιρείται με το 9.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 ή και το 25, αν τα δύο τελευταία του ψηφία είναι 0.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 και 5.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 8 αν τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού διαιρούνται με το 8.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 10, αν λήγει σε 0

Εφαρμογή – Άσκηση - Μεθοδολογία

Να αναλύσετε τους αριθμούς 2520, 2940 και 3780 σε πρώτους αριθμούς.

Μεθοδολογία

1^ο βήμα:

Γράφουμε τον αριθμό όπως φαίνεται παρακάτω

$$2520 \mid$$

2^ο βήμα:

Ξεκινάμε να γράφουμε στη δεξιά στήλη τους πρώτους αριθμούς, που θα αποτελέσουν και την ανάλυση του αριθμού 2520 σε γινόμενο πρώτων. Ξεκινάμε από τον 1^ο πρώτο αριθμό, ο οποίος είναι το 2, μετά είναι το 3, μετά το 5, μετά το 7, μετά το 11, μετά 13, μετά το 17 και συνεχίζουμε με τους αριθμούς που διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους. Οπότε για αρχή παίρνουμε το νούμερο 2 και ξεκινάμε να δούμε αν διαιρείται με τη βοήθεια των κριτηρίων διαιρετότητας.

$$2520 \mid 2$$

3^ο βήμα:

Γράφουμε στην αριστερή στήλη το αποτέλεσμα της διαίρεσης του 2520 με το 2.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \end{array}$$

4^ο βήμα:

Συνεχίζουμε μέχρι να ο αριθμός στα αριστερά να μην μπορεί να διαιρεθεί με το 2.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & \end{array}$$

5^ο βήμα:

Στη συνέχεια, όπως είπαμε συνεχίζουμε με τους υπόλοιπους πρώτους μέχρι να φτάσουμε στο σημείο που στην αριστερή στήλη θα έχουμε το νούμερο 1.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

6^ο βήμα:

Έχουμε τελειώσει τη διαδικασία και έχουμε βρει τους πρώτους αριθμούς που χρειαζόμασταν. Άρα το 2520 γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών ως $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Κάνουμε το ίδιο και για τους 2940 και 3780

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 & 2940 & 2 & 3780 & 2 \\ 1260 & 2 & 1470 & 2 & 1890 & 2 \\ 630 & 2 & 735 & 3 & 945 & 3 \\ 315 & 3 & 245 & 5 & 315 & 3 \\ 105 & 3 & 49 & 7 & 105 & 3 \\ 35 & 5 & 7 & 7 & 35 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & & 7 & 7 \\ 1 & & & & 1 & \end{array}$$

Άρα έχουμε τα γινόμενα πρώτων :

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

Τώρα είναι πολύ εύκολο να βρούμε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των 2520, 2940 και 3780.

Πώς βρίσκουμε το ΜΚΔ και ΕΚΠ από την ανάλυση πρώτων αριθμών;

Το ΜΚΔ(2520,2940,3780) = με το γινόμενο των πρώτων αριθμών που είναι κοινοί μεταξύ των 3 αυτών αριθμών στη μικρότερη δυνατή δύναμη.

$$\text{Άρα ΜΚΔ}(2520,2940,3780) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

Το ΕΚΠ(2520,2940,3780) = με το γινόμενο των πρώτων αριθμών στην μεγαλύτερη δυνατή δύναμη.

$$\text{Άρα ΕΚΠ}(2520,2940,3780) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$$

Λυμένη άσκηση ΜΚΔ και ΕΚΠ για εξάσκηση

16	2	24	2	36	2
8	2	12	2	18	2
4	2	6	2	9	3
2	2	3	3	3	3
1		1		1	

Άρα έχουμε τα γινόμενα πρώτων :

$$16 = 2^4$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\text{Άρα ΜΚΔ}(126, 288, 342) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{Άρα ΕΚΠ}(126, 288, 342) = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

126	2	288	2	342	2
63	3	144	2	171	3
21	3	72	2	57	3
7	7	36	2	19	19
1		18	2	1	
		9	3		
		3	3		
		1			

Άρα έχουμε τα γινόμενα πρώτων :

$$126 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$288 = 2^5 \cdot 3^2$$

$$342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$$

$$\text{Άρα } \text{ΜΚΔ}(126, 288, 342) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$\text{Άρα } \text{ΕΚΠ}(126, 288, 342) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19 = 32 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 19 = 288 \cdot 7 \cdot 19 = 38.304$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 30 (Βιβλίο Οργανισμού)

Συμπλήρωσε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε , ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9 :

α) $64 = 684$ που διαιρείται με το 9

Δηλαδή $684:9 = 76$

β) $954 \rightarrow 9504:9 = 1056$

γ) $601 \rightarrow 6012 : 9 = 668$

Άσκηση 5/σελ. 30 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ανά 3 , ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας .Πόσοι ήταν οι μαθητές της πρώτης τάξης αυτού του Γυμνασίου, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;

Λύση

Το πλήθος των μαθητών θα είναι ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών

3 , 5 και 7 και πρέπει επιπλέον να είναι μεταξύ 100 και 200

Πολλαπλάσια του 3 :102, 105,108,111,114,117,120,...,210,...,315

Πολλαπλάσια του 5: 100,105, 110 ,115,120,...,210,...,315

Πολλαπλάσια του 7:98,105,112,119,126,...,210,...,315

Άλυτες Ασκήσεις

1.112 Να κάνεις τους παρακάτω αριθμούς σε γινόμενα πρώτων αριθμών

$$16 =$$

$$2600 =$$

$$28 =$$

$$1800 =$$

$$2520 =$$

$$2600 =$$

$$3890 =$$

$$1222 =$$

$125=$

$144=$

$2000=$

$5000=$

$82=$

$95=$

$105=$

$35=$

$60=$

$75=$

$656=$

$1330=$

$1800=$

$5225=$

$3780=$

$2940=$

$17=$

$15=$

$20=$

$50=$

$52=$

$60=$

$80=$

$100=$

$500=$

$200=$

1.113 Να αναλύσετε τους αριθμούς 288 και 192 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να υπολογίσετε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών αυτών με τη νέα μέθοδο.

1.114 Ποιοί από τους αριθμούς:

72, 81, 105, 333, 150, 664, 156, 173, 375, 372

- i) διαιρούνται ταυτόχρονα με το 2 και το 3;
- ii) διαιρούνται ταυτόχρονα με το 2 και το 5;
- iii) διαιρούνται με το 9;

1.115 Να συμπληρώσετε τα ψηφία στους αριθμούς

- i) $82\square$, ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 3 και το 5
- ii) $3\square5$, ώστε να διαιρείται με το 3 και ο αριθμός στο κουτάκι να είναι άρτιος
- iii) $23\square4$, ώστε να διαιρείται με το 9
- iv) $7\square\square$, ώστε να διαιρείται με το 10.

1.116 Το ποσό των 4.722 € μπορούμε να το μοιράσουμε ακριβώς σε 3 ή σε 9 άτομα; Αν ναι, πόσα € θα πάρει ο καθένας;

1.117 Από τους αριθμούς, 710, 1.025, 3.475, 8.250 να βρείτε ποιό διαιρούνται:
i) με το 5,
ii) με το 25.

1.118 Ένα έτος θεωρείται δίσεκτο όταν η χρονολογία του διαιρείται με το 4. Να βρείτε τα δίσεκτα έτη από το έτος 1996 μέχρι και το 2007.

1.119 Εξετάστε αν οι αριθμοί 7.002, 1.623, 52.371 είναι πρώτοι.

1.120 Να γράψετε όλους τους πρώτους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 30.

1.121 Υπάρχουν πρώτοι αριθμοί που να είναι άρτιοι; Οι περιττοί αριθμοί είναι όλοι πρώτοι;

1.122 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

α	β	ΕΚΠ (α, β)	ΜΚΔ (α, β)	$\alpha \cdot \beta$	ΕΚΠ \cdot ΜΚΔ
15	12				
8	6				
5	14				
9	24				
18	27				
16	30				

1.123 Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς.

- i) 156
- ii) 400
- iii) 108
- iv) 72
- v) 35
- vi) 128
- vii) 275

1.124 Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών.

- i) 108 και 72
- ii) 200 και 500
- iii) 48 και 64
- iv) 56, 140 και 308
- v) 256, 136 και 384

1.125 Να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ των α και β (χωρίς να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς, αλλά με τη μέθοδο της ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων), όπου:

- | | | |
|---|-----|--------------------------------|
| i) $\alpha = 23 \cdot 32 \cdot 5$ | και | $\beta = 2 \cdot 34 \cdot 7$ |
| ii) $\alpha = 32 \cdot 5 \cdot 11$ | και | $\beta = 22 \cdot 5 \cdot 112$ |
| iii) $\alpha = 54 \cdot 73 \cdot 13$ | και | $\beta = 2 \cdot 32 \cdot 72$ |
| iv) $\alpha = 25 \cdot 33 \cdot 5 \cdot 17$ | και | $\beta = 23 \cdot 3 \cdot 52$ |

1.126 Υπάρχουν πρώτοι αριθμοί που να είναι άρτιοι; Οι περιττοί αριθμοί είναι όλοι πρώτοι;
Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός α , ο οποίος είναι μικρότερος του 15 και μεγαλύτερος του 10 και ισχύει ΜΚΔ ($\alpha, 15, 9$)= 3.

1.127 Υπάρχουν πρώτοι αριθμοί που να είναι άρτιοι; Οι περιττοί αριθμοί είναι όλοι πρώτοι;
Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 29 και μικρότεροι του 45 και για τους οποίους ισχύει ΜΚΔ (24, 12, x)=6.

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

1.128 Να δικαιολογήσετε γιατί οι αριθμοί: $9n, 15n + 6$ και $6n - 3$ διαιρούνται με το 3 (n φυσικός αριθμός).

1.129 Να δικαιολογήσετε γιατί οι αριθμοί:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| i) $4 + 60 + 80,$ | |
| ii) $2n + 4n + 30,$ | (n φυσικός αριθμός) |
| iii) $62n - 40,$ | |
- διαιρούνται με το 2.

1.130 Αν α, β δύο φυσικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι :

- η παράσταση $3\alpha + 18\beta$ διαιρείται με το 3
- η παράσταση $21\alpha + 14\beta$ διαιρείται με το 7
- η παράσταση $5\alpha + 30\beta - 10\gamma$ διαιρείται με το 5
- η παράσταση $9\alpha + 18\beta + 45\gamma$ διαιρείται με το 9

1.131 Εξηγήστε γιατί κάθε φυσικός αριθμός της μορφής $\alpha \cdot 104 + \beta \cdot 103 + \gamma \cdot 102 + 4\delta$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ φυσικοί) είναι πολλαπλάσιο του 4.

1.132 Εξηγήστε γιατί το γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών είναι πολλαπλάσιο του 2.

1.133 Εξηγήστε γιατί το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών είναι πολλαπλάσιο του 3.

1.134 Εξηγήστε γιατί κάθε φυσικός αριθμός της μορφής $\alpha \cdot 104 + \beta \cdot 103 + \gamma \cdot 102 + 4\delta$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ φυσικοί) είναι πολλαπλάσιο του 4.

- 1.135** Αν $ΜΚΔ(α, β, γ) = 15$ και οι αριθμοί είναι μικρότεροι του 50, ποιοι μπορεί να είναι οι $α, β, γ$;
- 1.136** Για την αναδάσωση μιας έκτασης συγκεντρώθηκαν 148 γυναίκες, 111 άνδρες και 185 παιδιά. Πόσες το πολύ, ομάδες με τον ίδιο αριθμό γυναικών, ανδρών και παιδιών μπορούν να γίνουν και ποια θα είναι η σύνθεση της κάθε ομάδας;
- 1.137** Ένας ανθοπώλης είχε 60 άσπρα, 90 κόκκινα και 120 κίτρινα τριαντάφυλλα. Πόσες το πολύ ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει και πόσα τριαντάφυλλα από το κάθε είδος θα περιέχει καθεμία;
- 1.138** Όταν οι μαθητές ενός σχολείου τοποθετούνται ανά 6άδες, 12άδες ή 15άδες δεν περισσεύει κανείς. Αν ο αριθμός των μαθητών βρίσκεται μεταξύ του 170 και του 200, να βρείτε πόσα παιδιά έχει το σχολείο.
- 1.139** Όταν μετράμε τις σελίδες ενός βιβλίου ανά 5 ή 7 δεν περισσεύει καμία. Αν ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου είναι από 120 έως 150, να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

Παιχνίδι

1. Σκεφτείτε έναν αριθμό.
2. Πολλαπλασιάστε τον με το 9.
3. Προσθέστε τα ψηφία του αριθμού που βρήκατε ώστε να προκύψει μονοψήφιος αριθμός.
4. Αφαιρέστε 5.
5. Αντιστοιχίστε τον αριθμό που βρήκατε στο κατάλληλο γράμμα της αλφαβήτου.
6. Σκεφτείτε μια Ευρωπαϊκή χώρα, που ν' αρχίζει απ' αυτό το γράμμα.
7. Από το δεύτερο γράμμα της χώρας σκεφτείτε ένα χρώμα.
8. Από το τέταρτο γράμμα του χρώματος σκεφτείτε ένα ζώο.

Μήπως βρήκατε έναν άσπρο ρινόκερο στη Δανία;

Σύντομη Επανάληψη 1^{ου} Κεφαλαίου

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Ποιοι ονομάζονται φυσικοί αριθμοί;
2. Ποιοι αριθμοί λέγονται άρτιοι και ποιοι περιττοί; Δώστε παράδειγμα.
3. Τι ονομάζουμε στρογγυλοποίηση;
4. Πώς στρογγυλοποιούμε έναν αριθμό;
5. Τι ονομάζουμε πρόσθεση ; Δώστε παράδειγμα.
6. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης; (γενική μορφή)
7. Τι είναι η αφαίρεση; Πότε αυτή δεν μπορεί να εκτελεστεί;
8. Τι είναι ο πολλαπλασιασμός;
9. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού; (γενική μορφή)
10. Να γράψετε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και ως προς την αφαίρεση.
11. Τι ονομάζουμε νιοστή δύναμη του a , τι βάση και τι εκθέτη της δύναμης;
12. Αν a φυσικός αριθμός
 - i) τι ονομάζουμε τετράγωνο του a ;
 - ii) τι ονομάζουμε κύβο του a ;
 - iii) με τι είναι ίσο το a^1 ;
 - iv) με τι είναι ίσο το 1^v ;
 - v) με τι είναι ίσο το a^0 ;
13. Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση; Δώστε παράδειγμα.
14. Ποια είναι η σειρά με την οποία γίνονται οι πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση; Αν υπάρχουν παρενθέσεις τι κάνουμε;
15. Ποια διαίρεση λέγεται Ευκλείδεια Διαίρεση; Δώστε παράδειγμα. Πότε αυτή ονομάζεται τέλεια διαίρεση; Δώστε παράδειγμα.
16. Αν a φυσικός τότε $a:a=.....$, $a:1=.....$, $0:a=.....$
17. Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a ;
18. Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων αριθμών;
19. Ποιοι ονομάζονται διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a ;
20. Ποιοι λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι αριθμοί; Δώστε παράδειγμα.
21. Τι ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ή περισσότερων αριθμών;
22. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους; Δώστε παράδειγμα.
23. Τι ονομάζουμε κριτήρια διαιρετότητας με 2,3,4,5,9,10 ή 25;
24. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10,100,1000,... ;
25. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2;
26. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5;
27. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9;
28. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25;

Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

1. Αν για τον α ισχύει $\alpha > 12$, τότε ισχύει και ότι $\alpha > 8$.
2. Αν $\beta \neq 6$, τότε $\beta < 6$.
3. Ισχύει ότι $\alpha + 1 > \alpha$.
4. Αν $\alpha > \beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.
5. Αν $x < 7$, τότε ο x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 7.
6. Αν α, β, γ φυσικοί αριθμοί και $\alpha < \beta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.
7. Αν $x \geq 6$, τότε ο x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 6.
8. Αν $\alpha < \beta < \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.
9. Ισχύει $\alpha + \beta + \gamma \neq \alpha + (\beta + \gamma)$.
10. Αν $\alpha - \beta = 2$, τότε το α είναι μικρότερο από το β κατά 2.
11. Αν $\alpha - \beta = 2$, τότε το 2 είναι μικρότερο από το α κατά β .
12. Αν $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$, τότε $\alpha = \beta$.
13. Αν $\alpha - \beta = 1$, τότε $\alpha > \beta$.
14. Αν $\alpha - \beta = 1$, τότε $\alpha \geq \beta$.
15. Η σχέση $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot (\beta \cdot \gamma)$ ισχύει.
16. $x + x + x + x + \omega = 3x \cdot \omega$
17. Αν $\alpha = 0$, τότε $\alpha \cdot \beta = 0$
18. Αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$.
19. Αν $\alpha = \beta$, τότε πάντα ισχύει $\alpha : x = \beta : x$
20. Αν $\alpha = \beta \cdot \gamma$, τότε $\alpha : \beta = \gamma$.
21. Το $4x$ είναι πολλαπλάσιο του 2.
22. $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$
23. $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$
24. $(3^2)^3 = 3^5$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν $\alpha > \beta > \gamma$, τότε
Α. $\beta > \alpha$ Β. $\gamma < \alpha$ Γ. $\alpha < \gamma$
2. Ο αριθμός $2x$ είναι
Α. άρτιος Β. περιττός Γ. δεν γνωρίζουμε
3. Η πρόσθεση $\alpha + 0$
Α. δεν ορίζεται Β. δίνει αποτέλεσμα 0 Γ. δίνει αποτέλεσμα α
4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) =$
Α. $\alpha \cdot \beta + \gamma$ Β. $(\alpha \cdot \beta) + \gamma$ Γ. $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
5. Αν $\alpha + \beta < 7$, τότε
Α. $7 < \alpha$ Β. $7 < \beta$ Γ. $7 > \beta$
6. Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε
Α. $\alpha < \beta$ Β. $\beta = 0$ Γ. $\alpha = \beta$ Δ. τίποτα από τα προηγούμενα
7. Αν $x - y = 4$, τότε
Α. $x = y = 4$ Β. $x > y + 4$
8. Αν $\alpha \cdot \beta = \alpha$, τότε
Α. $\beta = 0$ Β. $\beta = 1$ Γ. $\beta = \alpha$
9. Αν $\alpha : x = 1$, τότε
Α. $x = 1$ Β. $x = 0$ Γ. $x = \alpha$
10. $\alpha^\nu = 1$, αν
Α. $\alpha = 0$ Β. $\nu = 1$ Γ. $\nu = 0$
11. Αν $x^0 = 1$, τότε
Α. $x = 1$ Β. $x = 0$ Γ. ο x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός
12. Ο 2^ν είναι πολλαπλάσιο
Α. του 2 Β. του ν Γ. ούτε του 2, ούτε του ν
13. $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$, αν Δ πολλαπλάσιο του δ , τότε
Α. $\nu > \delta$ Β. $\nu = 0$ Γ. $\nu \neq 0$
14. $\alpha^\nu = 1$, αν
Α. $\alpha = 0$ Β. $\nu = 1$ Γ. $\nu = 0$
15. Αν $x^0 = 1$, τότε
Α. $x = 1$ Β. $x = 0$ Γ. ο x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός
16. Ο 2^ν είναι πολλαπλάσιο
Α. του 2 Β. του ν Γ. ούτε του 2, ούτε του ν
17. $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$, αν Δ πολλαπλάσιο του δ , τότε
Α. $\nu > \delta$ Β. $\nu = 0$ Γ. $\nu \neq 0$

Κριτήριο Αξιολόγησης 1^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

- A) Ποιά είναι η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης φυσικών αριθμών;
- B) Πότε ένα φυσικός αριθμός ονομάζεται άρτιος ;
- Γ) Ποιά είναι η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών ως προς την πρόσθεση;

ΘΕΜΑ 2ο

A) Συμπληρώστε τα κενά

$$2 \cdot (a + x) = \dots\dots\dots$$

$$(a - \lambda) \cdot x = \dots\dots\dots$$

B) Αν ο ν είναι ένας άρτιος φυσικός αριθμός

- i) Ποιός είναι ο επόμενος άρτιος του ν
- ii) Ποιός είναι ο μεγαλύτερος περιττός που δεν ξεπερνάει τον ν

ΘΕΜΑ 3ο

Να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

$$A = 13 + 2 \cdot (2^3 - 3 \cdot 2 + a) - 2a$$

$$B = 15 + 5 \cdot (3a + 5 \cdot 2^2) - 15a$$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $a + \beta = 10$ να υπολογίσετε την παράσταση

$$B = 2^2 + 5 \cdot 2^2 \cdot (a + 5) + (3 \cdot 2^2 + 2^3) \cdot \beta$$

Διάρκεια 60 λεπτά

2ο Κεφάλαιο – Τα κλάσματα

A.2.1 Η έννοια του κλάσματος

Ορισμός

Κλάσμα ή κλασματικός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{\nu}$, όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Το κ στο κλάσμα ονομάζεται αριθμητής και το ν στο κλάσμα ονομάζεται παρονομαστής (και είναι πάντα $\neq 0$).

Η γραμμή ανάμεσά τους ονομάζεται κλασματική γραμμή.

Το κάθε κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ είναι ουσιαστικά μία διαίρεση ($\kappa : \nu$)

Κάθε φυσικός αριθμός κ μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ως εξής: $\frac{\kappa}{1}$

Παράδειγμα

Ο αριθμός 5 μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα $\frac{5}{1}$

Ο αριθμός 5 μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα $\frac{6}{1}$

Ο αριθμός 5 μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα $\frac{15}{1}$

Γενικά ισχύει ότι

$$\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu}, \text{ με } \nu \neq 0.$$

Παρατηρήσεις:

1. Όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.
2. Όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μικρότερο του 1.
3. Όταν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι ίσο με το 1. ($\frac{\kappa}{\kappa} = 1$)
4. Αν ο αριθμητής είναι ίσος με το 0, τότε $\frac{0}{\nu} = 0$, με το $\nu \neq 0$

Μεθοδολογία για τις ασκήσεις

1^η) Όταν δίνεται ένα μέγεθος και μας ζητείται το $\frac{\mu}{\nu}$ του μεγέθους, υπολογίζουμε πρώτα το $\frac{1}{\nu}$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με μ .

Παράδειγμα

Να βρείτε τα $\frac{2}{5}$ της ώρας.

Λύση

Βρίσκουμε το $\frac{1}{5}$ της ώρας.

$$\frac{1}{5} \cdot 60 = 12 \text{ λεπτά (κάναμε } 60:5)$$

Άρα τα $\frac{2}{5}$, είναι $2 \cdot \frac{1}{5} = 24 \text{ λεπτά}$

2^η) Όταν δίνεται το $\frac{\mu}{\nu}$ μιας ποσότητας και μας ζητείται όλο το μέγεθος. Υπολογίζουμε το $\frac{1}{\nu}$ διαιρώντας το $\frac{\mu}{\nu}$ με το μ και στη πολλαπλασιάζουμε με ν .

Παράδειγμα

Αν τα $\frac{5}{8}$ των χρημάτων που έχει ο Γιώργος είναι 50 ευρώ. Τότε να βρείτε πόσα είναι τα συνολικά χρήματα του Γιώργου.

Λύση

Έχουμε ότι $\frac{5}{8} = 50$

Άρα το $\frac{1}{8} = 10$ ευρώ. (κάναμε $50:5$)

Οπότε για να βρούμε τα συνολικά χρήματα που έχει ο Γιώργος, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με το 8. Δηλαδή $8 \cdot \frac{1}{8} = 8 \cdot 10 = 80$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 36 (Βιβλίο Οργανισμού)

Τα κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}, \frac{18}{20}$ είναι όλα μικρότερα της μονάδας;

Λύση

Για να είναι ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας πρέπει ο αριθμητής να είναι μικρότερος από τον παρονομαστή.

Για να είναι ένα κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας πρέπει ο αριθμητής να είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.

$$\frac{3}{4} < 1 \text{ γιατί } 3 < 4 \qquad \frac{10}{9} > 1 \text{ γιατί } 10 > 9$$

$$\frac{2}{3} < 1 \text{ γιατί } 2 < 3 \qquad \frac{18}{20} < 1 \text{ γιατί } 18 < 20$$

$$\frac{7}{9} < 1 \text{ γιατί } 7 < 9$$

Άλυτες Ασκήσεις

2.1 Να συμπληρώσετε τους όρους στα ακόλουθα κλάσματα, ώστε αυτά να είναι

i) ίσα με τη μονάδα.

$$\frac{\dots\dots}{8}, \frac{3}{\dots\dots}, \frac{37}{\dots\dots}, \frac{\dots\dots}{15}$$

ii) μεγαλύτερα από τη μονάδα.

$$\frac{\dots\dots}{28}, \frac{32}{\dots\dots}, \frac{\dots\dots}{10}, \frac{21}{\dots\dots}$$

iii) μικρότερα από τη μονάδα.

$$\frac{\dots\dots}{13}, \frac{22}{\dots\dots}, \frac{30}{\dots\dots}, \frac{\dots\dots}{72}$$

2.2 Να βρείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα παριστάνουν φυσικούς αριθμούς:

$$\frac{9}{3}, \frac{7}{2}, \frac{15}{1}, \frac{8}{4}, \frac{86}{4}, \frac{198}{9}, \frac{86}{5}$$

2.3 Να εκφράσετε με κλάσμα :

- i) 6 ώρες της ημέρας
- ii) 17 λεπτά της ώρας
- iii) 2 μέρες της εβδομάδας
- iv) 50 sec της ώρας
- v) 15 Kg του τόνου
- vi) 28 m του χιλιόμετρου

2.4 Να βρείτε ποιο μέρος :

- i) των 1000 ευρώ είναι τα 50 ευρώ
- ii) των 300 ευρώ είναι τα 60 ευρώ
- iii) των 1000 ευρώ είναι τα 5.000 ευρώ
- iv) των 15 εκ είναι 18 χιλ
- v) των 6 ℓ είναι τα 250 m ℓ
- vi) του 1 μήνα είναι οι 7 ημέρες

2.5 Μια τάξη έχει 16 μαθητές. Τρεις μαθητές απουσίαζαν τη Δευτέρα. Να βρείτε το κλάσμα που εκφράζει το μέρος των μαθητών που απουσίαζαν και το κλάσμα που εκφράζει το μέρος των μαθητών που ήταν παρόντες. Αν η τάξη έχει 9 αγόρια, να βρείτε το κλάσμα που εκφράζει τον αριθμό των αγοριών και το κλάσμα που εκφράζει τον αριθμό των κοριτσιών.

2.6 Να βρείτε πόσα

- i) εκ. είναι τα του μέτρου;
- ii) χιλ. είναι τα του δεκατόμετρου;
- iii) γραμμ. είναι τα του κιλού;

iv) εκ. είναι το του μέτρου;

2.7 Να βρείτε

α) πόσοι μήνες είναι τα $\frac{2}{3}$ του έτους

β) πόσοι μήνες είναι τα $\frac{3}{4}$ του έτους

γ) πόσες μέρες είναι τα $\frac{5}{6}$ του μήνα

δ) πόσες μέρες είναι τα $\frac{4}{5}$ του μήνα

ε) πόσες ώρες είναι τα $\frac{3}{8}$ της ημέρας

στ) πόσες ώρες είναι τα $\frac{7}{12}$ της ημέρας

ζ) πόσα min είναι τα $\frac{5}{6}$ της ώρας

η) πόσα sec είναι τα $\frac{17}{30}$ του λεπτού

θ) πόσα min είναι το $\frac{1}{4}$ της ημέρας

2.8 Το μιας σοκολάτας ζυγίζει 25 γραμμ. Να βρείτε πόσο ζυγίζουν τα της σοκολάτας, καθώς και ολόκληρη η σοκολάτα.

2.9 Με βάση τις γνώσεις σας, να βρείτε ποιες τιμές δεν μπορεί να πάρει η μεταβλητή x στα παρακάτω κλάσματα, ώστε αυτά να ορίζονται:

$$\frac{3}{x}, \frac{7}{x-2}, \frac{3x}{x-1}, \frac{13}{1-x}, \frac{9}{6-x}$$

2.10 Ποιος αριθμός μπορεί να πάρει τη θέση της μεταβλητής x , έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ανισώσεις:

i) $\frac{3}{x} < 1$

ii) $\frac{7}{x} \geq 1$

iii) $\frac{x}{8} \leq 1$

- 2.11** Αν τα των μαθητών ενός σχολείου είναι 96 μαθητές να βρείτε:
- πόσους μαθητές έχει όλο το σχολείο,
 - πόσοι μαθητές είναι τα αυτών.
- 2.12** Τα χρήματα που πήρε για το δώρο των Χριστουγέννων ένας υπάλληλος αντιπροσωπεύουν τα του μισθού του, που είναι 1.582 ευρώ. Πόσα χρήματα πήρε ως δώρο;
- 2.13** Τα $\frac{2}{5}$ των κατοίκων μιας πόλης είναι 20.800. Να βρείτε πόσους άντρες έχει η πόλη, αν αυτοί είναι τα $\frac{7}{10}$ των κατοίκων;
- 2.14** Ένα κατάστημα για την αγορά ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή κάνει έκπτωση στους φοιτητές ίση με τα $\frac{4}{6}$ της αρχικής αξίας. Αν ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής κόστιζε πριν την έκπτωση 986€, να υπολογίσετε:
- πόσα ευρώ είναι η έκπτωση που γίνεται,
 - πόσο θα πληρώσουμε για την αγορά του.
- 2.15** Τα $\frac{5}{9}$ των εργαζομένων μιας εταιρείας είναι γυναίκες. Αν οι εργαζόμενοι άνδρες είναι 424, να βρείτε το εργατικό δυναμικό της εταιρείας.
- 2.16** Τα $\frac{3}{13}$ μιας απόστασης είναι 36km. Πόσα km είναι τα $\frac{3}{4}$ αυτής της απόστασης;
- 2.17** Η ηλικία του Βασίλη είναι ίση με τα $\frac{3}{10}$ της ηλικίας του πατέρα του που είναι 60 χρονών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του Βασίλη θα είναι ίδια με αυτή που έχει ο πατέρας του σήμερα;
- 2.18** Ένα κατάστημα αυτοκινήτων κάνει έκπτωση ίση με το $\frac{1}{6}$ της αρχικής τους αξίας.
Αν για ένα αυτοκίνητο πληρώσαμε 14.710€.
Να υπολογίσετε:
- ποιο μέρος της αρχικής αξίας είναι τα 14.710€,
 - πόσα ευρώ είναι η έκπτωση,
 - ποια ήταν η αρχική τιμή του αυτοκινήτου.
- 2.19** Να βρείτε τα $\frac{2}{5}$ του Α, όταν $A = 2^3 : 2^2 + 2(5^2 - 4^2)$.
- 2.20** Τι κλάσμα των μαθητών μιας τάξης 18 μαθητών είναι οι 3 απόντες;
- 2.21** Για ποια τιμή του α, τα παρακάτω κλάσματα είναι ίσα;

$$\alpha) \frac{\alpha}{9} \text{ και } \frac{9}{9} \quad \beta) \frac{2}{3} \text{ και } \frac{18}{\alpha} \quad \gamma) \frac{2}{5} \text{ και } \frac{\alpha}{10}$$

2.22 Πόσα χρήματα είναι:

α) Το $\frac{1}{6}$ των 480 ευρώ;

β) Τα $\frac{5}{8}$ των 720 ευρώ;

2.23 Το $\frac{1}{6}$ ενός κομματιού τούρτας ζυγίζει 15gr. Πόσο ζυγίζει ολόκληρο το κομμάτι;

2.24 Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού ενός μπαχαρικού κοστίζουν 27 ευρώ. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{8}{9}$ του κιλού;

2.25 Τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών μιας τάξης μαθαίνουν αγγλικά. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη, αν οι μαθητές που μαθαίνουν αγγλικά είναι 20.

2.26 Τα $\frac{5}{8}$ ενός φαγητού ζυγίζουν 120gr. Να βρείτε πόσο ζυγίζουν τα $\frac{2}{3}$ του φαγητού αυτού.

2.27 Να βρείτε ποια από τα κλάσματα παριστάνουν φυσικούς αριθμούς

$$\frac{0}{9}, \frac{9}{9}, \frac{2}{1}, \frac{25}{5}, \frac{12}{5}$$

2.28 Αν 5 πέννες στοιχίζουν 60 ευρώ. Να βρείτε πόσο στοιχίζουν οι 8.

A.2.2 Ισοδύναμα Κλάσματα

Ορισμός

Δύο ή περισσότερα κλάσματα, που έχουν διαφορετικό αριθμητή και παρονομαστή (δηλαδή διαφορετικούς όρους) αλλά εκφράζουν την ίδια ποσότητα, λέγονται ισοδύναμα.

Για παράδειγμα τα

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3} &= 0,66 \\ \frac{10}{15} &= 0,66 \end{aligned} \right\}$$

Άρα τα $\frac{2}{3}$ είναι ίσα με τα $\frac{10}{15}$.

Οπότε τα $\frac{2}{3}, \frac{10}{15}$ ονομάζονται ισοδύναμα.

Πως τα «κατασκευάζω»;

1) Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα.

Παράδειγμα

$$\frac{30}{16} = \frac{30 \cdot 2}{16 \cdot 2} = \frac{60}{32}$$

2) Όταν διαιρεθούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα.

Παράδειγμα

$$\frac{30}{20} = \frac{30:2}{20:2} = \frac{15}{10}$$

Τι είναι η απλοποίηση ενός κλάσματος και πως γίνεται;

Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$), τότε προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα.

Την διαδικασία αυτή την ονομάζουμε απλοποίηση και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό, αλλά με μικρότερους όρους.

Τι είναι τα ανάγωγα κλάσματα;

Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή εκτός από την μονάδα), λέγεται ανάγωγο.

Πως κάνω ένα κλάσμα ανάγωγο;

Αν σε ένα κλάσμα διαιρέσουμε τον κάθε όρο του (τον αριθμητή και τον παρονομαστή) το ΜΚΔ του αριθμητή και του παρονομαστή, τότε προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο.

Παράδειγμα

Έχω το κλάσμα $\frac{30}{26}$ και θέλω να το κάνω ανάγωγο.

Άρα θα πρέπει να διαιρέσουμε τον κάθε όρο του κλάσματος με το ΜΚΔ(30,26)=2

$$\text{Οπότε } \frac{30:2}{26:2} = \frac{15}{13}$$

Πως ελέγχω αν ένα κλάσμα είναι ανάγωγο;

Βρίσκω το ΜΚΔ του αριθμητή και του παρονομαστή, αν το ΜΚΔ ισούται με 1.

Τότε το κλάσμα που μας δόθηκε είναι ανάγωγο.

Παράδειγμα

Μας δίνεται να ελέγξουμε αν τα παρακάτω κλάσματα είναι ανάγωγα:

$$\frac{3}{6}, \frac{10}{20}, \frac{15}{13}$$

Για το πρώτο κλάσμα βρίσκω το ΜΚΔ του 3 και του 6 που είναι ίσο με το 3, άρα δεν είναι ανάγωγο.

Για το δεύτερο κλάσμα βρίσκω το ΜΚΔ του 10 και του 20 που είναι 10, άρα δεν είναι ανάγωγο.

Για το τρίτο κλάσμα βρίσκω το ΜΚΔ του 15 και του 13, που είναι ίσο με το 1, άρα είναι ανάγωγο.

Να θυμηθούμε ότι ισχύει : $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ή $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ ‘χιαστί’, καθώς και το αντίστροφό του. Δηλαδή $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ ή $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Παρατήρηση θεωρίας

Πως μπορούμε να εξετάσουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ ή } a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \text{ ‘χιαστί’ και ελέγχω αν το } a \cdot \delta \text{ είναι ίσο με το } \beta \cdot \gamma.$$

Αν ναι τότε είναι ισοδύναμα.

Αν όχι τότε δεν είναι ισοδύναμα.

Ομώνυμα κλάσματα

Λέγονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή

$$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\beta}, \frac{\varepsilon}{\beta}$$

Για παράδειγμα

$$\frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{34}{4}, \frac{23}{4} \text{ είναι ομώνυμα.}$$

Ετερόνυμα κλάσματα

Λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{\zeta}$

Για παράδειγμα τα $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{34}{2}, \frac{23}{4}$ είναι ετερόνυμα.

Πως μετατρέπω ετερόνυμα κλάσματα σε ομόνυμα;

Παράδειγμα

θέλουμε να κάνουμε ομόνυμα τα παρακάτω κλάσματα: $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{4}{2}, \frac{3}{4}$

Πρέπει να βρω ποιο είναι το κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών.

Άρα ψάχνω το ΕΚΠ(5,3,2,4)=;

Γράφω τα 5,3,2,4 σε γινόμενο πρώτων για να μπορέσω να βρω το ΕΚΠ τους

$$5 = 5^1 \quad 3 = 3^1$$

$$2 = 2^1 \quad 4 = 2^2$$

Άρα το ΕΚΠ(5,3,2,4) = με το γινόμενο των πρώτων αριθμών στην μεγαλύτερη δυνατή δύναμη, άρα ΕΚΠ(5,3,2,4) = $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Άρα όλα τα κλάσματα πρέπει να έχουν παρονομαστή το 60.

Οπότε $\frac{2}{5}$ θα πρέπει να το πολλαπλασιάσω με 12 (και τον αριθμητή και τον παρονομαστή πολλαπλασιάζω για να είναι ισοδύναμο το κλάσμα μου. Δεν μπορώ να πολλαπλασιάσω μόνο τον παρονομαστή) και άρα θα πάρουμε το εξής κλάσμα:

$$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{24}{60}$$

$\frac{1}{3}$ θα πρέπει να το πολλαπλασιάσω με 20 και άρα θα πάρουμε το εξής κλάσμα:

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{20}{60}$$

$\frac{4}{2}$ θα πρέπει να το πολλαπλασιάσω με 30 και άρα θα πάρουμε το εξής κλάσμα:

$$\frac{4}{2} \rightarrow \frac{120}{60}$$

$\frac{3}{4}$ θα πρέπει να το πολλαπλασιάσω με 15 και άρα θα πάρουμε το εξής κλάσμα:

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{45}{60}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 40 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να εξετάσεις ποια από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα :

Λύση

α) $\frac{2}{3}, \frac{18}{27}$ ελέγχω αν το χιαστί γινόμενο είναι ίσο.

Δηλαδή: $2 \cdot 27 = 3 \cdot 18$

$54 = 54$ που ισχύει άρα είναι ισοδύναμα τα κλάσματα

β) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ χιαστί $3 \cdot 2 = 1 \cdot 4$

$6 = 4$ που δεν ισχύει άρα δεν είναι ισοδύναμα

γ) $\frac{7}{8}, \frac{30}{40}$ χιαστί $7 \cdot 40 = 8 \cdot 30$

$280 = 240$ που δεν ισχύει, άρα δεν είναι ισοδύναμα

δ) $\frac{13}{14}, \frac{26}{28}$ χιαστί $13 \cdot 28 = 14 \cdot 26$

$364 = 364$ που ισχύει, άρα τα κλάσματα είναι ισοδύναμα

Άσκηση 3/σελ. 40 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να μετατρέψεις καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό 100:

Λύση

α) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}$

β) $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{160}{100}$

γ) $\frac{4}{20} = \frac{4 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{20}{100}$

δ) $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 50}{2 \cdot 50} = \frac{250}{100}$

ε) $\frac{60}{75} = \frac{60:3}{75:3} = \frac{20}{25} = \frac{20 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{80}{100}$

Άλυτες Ασκήσεις

2.29 Να γραφεί ο αριθμός 18 ως κλάσμα με παρονομαστή:

- i) 3
- ii) 5
- iii) 9
- iv) 10
- v) 11
- vi) 13

- vii) 20
- viii) 30
- ix) 25

2.30 Να μετατρέψετε το $\frac{2}{7}$ σε ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή :

7, 35, 91, 147

2.31 Να μετατρέψετε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100.

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{5}$$

$$\frac{14}{50}$$

$$\frac{7}{10}$$

$$\frac{12}{20}$$

$$\frac{13}{25}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{120}{200}$$

2.32 Να συμπληρώσετε τις ισότητες, ώστε τα παρακάτω κλάσματα να είναι ισοδύναμα:

$\frac{3}{4} = \frac{15}{\quad}$	$\frac{6}{5} = \frac{\quad}{40}$	$\frac{7}{11} = \frac{49}{\quad}$	$\frac{\quad}{12} = \frac{40}{96}$	$\frac{\quad}{42} = \frac{6}{7}$	$\frac{8}{\quad} = \frac{24}{30}$
$\frac{16}{40} = \frac{\quad}{5}$	$\frac{130}{260} = \frac{1}{\quad}$	$\frac{\quad}{4} = \frac{30}{120}$	$\frac{\quad}{75} = \frac{3}{25}$	$\frac{11}{\quad} = \frac{88}{72}$	$\frac{45}{60} = \frac{3}{\quad}$

2.33 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα.

x) $\frac{4}{8}$

xi) $\frac{25}{35}$

xii) $\frac{40}{10}$

xiii) $\frac{18}{72}$

xiv) $\frac{35}{105}$

xv) $\frac{126}{54}$

xvi) $\frac{144}{108}$

xvii) $\frac{256}{32}$

xviii) $\frac{333}{999}$

xix) $\frac{121}{33}$

2.34 Να βρείτε ένα κλάσμα, το οποίο να είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{9}$, και να έχει για παρονομαστή τον αριθμό :

- α) 18
- β) 27
- γ) 90
- δ) 180

2.35 Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{20}{80}$ σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.

2.36 Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{3}{5} = \frac{33}{\quad} \qquad \beta) \frac{6}{8} = \frac{18}{\quad} \qquad \gamma) \frac{30}{50} = \frac{\quad}{150}$$

2.37 Να γράψετε τον αριθμό 5 σαν κλάσμα, με παρονομαστή τους:

$$\alpha) 1 \qquad \beta) 9 \qquad \gamma) 5$$

2.38 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

$$\alpha) \frac{20}{80} \qquad \beta) \frac{40}{80} \qquad \gamma) \frac{30}{15}$$

2.39 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα, έτσι ώστε να γίνουν ανάγωγα:

$$\alpha) \frac{20}{80} \qquad \beta) \frac{40}{80} \qquad \gamma) \frac{30}{15}$$

2.40 Να πείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα.

$$\alpha) \frac{2}{9} \text{ και } \frac{5}{12} \qquad \beta) \frac{2}{5} \text{ και } \frac{6}{15} \qquad \gamma) \frac{4}{5} \text{ και } \frac{6}{10}$$

2.41 Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{20}{80}$ σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.

2.42 Να συγκρίνετε τον αριθμό 8 με το κλάσμα $\frac{26}{3}$.

2.43 Να κάνετε μεικτό αριθμό το κλάσμα $\frac{62}{5}$ και $\frac{197}{5}$.

2.44 Να γίνουν ομόνομα τα παρακάτω κλάσματα:

$$\text{i) } \frac{1}{3}, \frac{2}{6} \qquad \text{vi) } \frac{2}{3}, \frac{7}{10}$$

$$\text{ii) } \frac{3}{10}, \frac{7}{15} \qquad \text{vii) } \frac{16}{32}, \frac{3}{40}$$

$$\text{iii) } \frac{6}{13}, \frac{1}{3} \qquad \text{viii) } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$$

$$\text{ix)} \quad \frac{6}{8}, \frac{5}{6}, \frac{8}{12}$$

$$\text{v)} \quad \frac{8}{9}, \frac{5}{12}$$

$$\text{x)} \quad \frac{3}{9}, \frac{3}{12}$$

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

2.45 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα.

$$\text{i)} \quad \frac{2^2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{7^3 \cdot 2^3 \cdot 5}{7 \cdot 2^5 \cdot 5}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{3^2 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{v)} \quad \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^2}{3 \cdot 2^2 \cdot 5}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{3^2 + 2 \cdot (5 - 3) + 7}{2(2^2 + 1) + 3(8 - 2) + 5}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{7^2 \cdot 8^2 \cdot 3^4}{7^4 \cdot 8 \cdot 3^2}$$

2.46 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

$$\text{ii)} \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{2a}{3a}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{25a}{50}$$

$$\text{v)} \quad \frac{5+1}{9+1}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{8x}{28x}$$

$$\text{vii)} \quad \frac{12ab}{3a}$$

$$\text{viii)} \quad \frac{3+7}{7+5}$$

$$\text{ix)} \quad \frac{2 \cdot 8}{8+10}$$

2.47 Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

- i) $\frac{x-3}{4 \cdot x-12}$
- ii) $\frac{3(x-2)-4}{12x+8}$
- iii) $\frac{5x-10}{2x-4}$
- iv) $\frac{7x-2x+1}{25x+5}$

2.48 Αν α, β φυσικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ να κάνετε ομόνομα τα παρακάτω κλάσματα.

i) $\frac{1}{3a}, \frac{10}{3}$

iv) $\frac{37}{3\alpha\beta^3}, \frac{28}{12\alpha\beta}$

ii) $\frac{31}{2a}, \frac{19}{2\beta}$

v) $\frac{2}{\alpha^2\beta^3}, \frac{4}{\alpha\beta^2}$

iii) $\frac{27}{\alpha^2\beta}, \frac{18}{\alpha}$

2.49 Αν $\alpha=2\beta$ τότε να δείξετε ότι :

(α) $\frac{2\alpha + \beta}{3\alpha - 2\beta} = \frac{5}{4}$

(β) $\frac{4\alpha - 3\beta}{\alpha + \beta} = \frac{5}{3}$

(γ) $\frac{11\alpha - 7\beta}{2\alpha - \beta} = 5$

Α.2.3 Σύγκριση Κλασμάτων

Κατηγορία 1^η

Μεταξύ ομώνυμων κλασμάτων μικρότερο είναι αυτό που έχει μικρότερο αριθμητή .

Παράδειγμα

$$\frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Κατηγορία 2^η

Μεταξύ κλασμάτων με ίσους αριθμητές μικρότερο είναι αυτό με τον μεγαλύτερο παρονομαστή.

Παράδειγμα

$$\frac{6}{3} > \frac{6}{4}$$

Κατηγορία 3^η

Μεταξύ ετερόνυμων κλασμάτων με άνισους αριθμητές τα μετατρέπω σε ομώνυμα:

Παράδειγμα

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \quad \text{Άρα,} \quad \frac{4}{12} < \frac{8}{12}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 43 (Βιβλίο Οργανισμού)

Σύγκρινε τα κλάσματα

Λύση

α) $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{7}$

Αφού τα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$

β) $\frac{3}{5}$ και $\frac{3}{9}$

Είναι ετερόνυμα κλάσματα αλλά έχουν ίδιο αριθμητή άρα πιο μεγάλο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$, διότι $5 < 9$

γ) $\frac{4}{5}$ και $\frac{8}{12}$

Είναι ετερόνομα άρα πρέπει να τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα κλάσματα

$$\text{Το } \frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Το ΕΚΠ}(5,3) = 15$$

$$\text{Άρα, } \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15} \quad \text{και} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

Άρα,

$$\frac{10}{15} < \frac{12}{15}$$

Άρα,

$$\frac{8}{12} < \frac{4}{5}$$

Άσκηση 2/σελ. 43 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε τα κλάσματα $\frac{31}{10}, \frac{31}{14}, \frac{31}{11}, \frac{31}{13}, \frac{31}{12}$ σε φθίνουσα σειρά.

Λύση

Όταν τα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, για να τα βάλουμε σε σειρά συγκρίνουμε τους παρονομαστές

Πιο μεγάλο είναι το κλάσμα με τον μικρότερο παρονομαστή

$$\frac{31}{10} > \frac{31}{11} > \frac{31}{12} > \frac{31}{13} > \frac{31}{14}$$

Αφού $10 < 11 < 12 < 13 < 14$

Άλυτες Ασκήσεις

2.50 Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τα ακόλουθα κλάσματα.

$$(α) \frac{2}{19}, \frac{59}{19}, \frac{16}{19}, \frac{51}{19}, \frac{5}{19}$$

$$(β) \frac{13}{45}, \frac{13}{24}, \frac{13}{75}, \frac{13}{8}, \frac{13}{13}$$

$$(γ) \frac{19}{35}, \frac{7}{40}, \frac{19}{4}, \frac{7}{35}$$

$$(δ) \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{12}, \frac{9}{10}$$

$$(ε) \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{81}{100}, \frac{19}{20}, \frac{2}{5}$$

2.51 Να βρεθεί :

- i) ένα κλάσμα μεγαλύτερο του $\frac{2}{5}$ και μικρότερο του $\frac{3}{5}$,
- ii) δύο κλάσματα μεγαλύτερα του $\frac{3}{11}$ και μικρότερα του $\frac{4}{11}$,
- iii) κλάσματα που είναι ομώνυμα του $\frac{12}{19}$ και μικρότερα από αυτό.

2.52 Να βρείτε :

- iv) τα κλάσματα που έχουν παρανομαστή το 9 και είναι μικρότερα από τη μονάδα,
- v) τα κλάσματα που έχουν αριθμητή το 16 και είναι μεγαλύτερα από τη μονάδα.

2.53 Δίνεται το κλάσμα $\frac{11}{15}$.

- α) Να το συγκρίνετε με τη μονάδα.
- β) Αν και στους δύο όρους του κλάσματος προσθέσουμε τον αριθμό 1, να γράψετε το νέο κλάσμα και να το συγκρίνετε με το αρχικό.

2.54 Δίνεται το κλάσμα $\frac{7}{5}$.

- α) Να το συγκρίνετε με τη μονάδα.
- β) Αν και στους δύο όρους του κλάσματος προσθέσουμε τον αριθμό 1, να γράψετε το νέο κλάσμα και να το συγκρίνετε με το αρχικό.

2.55 Δίνεται το κλάσμα $\frac{9}{16}$.

- α) Να γράψετε το κλάσμα που θα προκύψει αν στον αριθμητή προσθέσουμε τη μονάδα και από τον παρονομαστή αφαιρέσουμε τη μονάδα.
- β) Να συγκρίνετε τα δύο κλάσματα.

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

2.56 Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύουν οι ανισώσεις.

2.57 Να βρεθούν τα x , έτσι ώστε :

i) $1 < \frac{x}{7} < \frac{15}{7}$

ii) $\frac{9}{5} < \frac{x}{2} < \frac{11}{3}$

2.58 Αν a φυσικός αριθμός και $a \neq 0$ να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα με τη μονάδα:

$$\frac{a+5}{4},$$

$$\frac{3}{a+5},$$

$$\frac{a}{a+1},$$

$$\frac{2a}{a},$$

$$\frac{2a+8}{a+4}$$

2.59 Αν α, β φυσικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, να συγκριθούν τα κλάσματα.

i) $\frac{5}{a}, \frac{6}{a}$

vi) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}$

ii) $\frac{a}{2\beta}, \frac{\alpha}{\beta}$

vii) $\frac{\alpha}{\beta+1}, \frac{\alpha+1}{\beta}$

iii) $\frac{a}{5}, \frac{a+1}{5}$

viii) $\frac{a+3\beta}{2\alpha}, \frac{\alpha+\beta}{2\alpha}$

iv) $\frac{7}{a}, \frac{7}{a+2}$

ix) $\frac{\alpha}{2\alpha+1}, \frac{\alpha}{\alpha+1}$

v) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta+1}$

Α.2.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση Κλασμάτων

Πρόσθεση κλασμάτων

Για να προσθέσουμε κλάσματα, πρέπει αυτά να είναι ομώνυμα

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a + \beta}{\gamma}$$

Αν μας δοθούν κλάσματα που **δεν** είναι ομώνυμα, **πρέπει** να τα κάνουμε εμείς και μετά να κάνουμε την πράξη της πρόσθεσης.

Μεικτός αριθμός

Μερικές φορές αντί για $1 + \frac{4}{5}$ γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$

Ο συμβολισμός αυτός παριστάνει το άθροισμα ενός ακεραίου με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας, που ονομάζεται μεικτός αριθμός.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το άθροισμα: $2 + 1\frac{1}{3}$.

Λύση

$$2 + 1\frac{1}{3} = 2 + 1 + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3}$$

Αφαίρεση κλασμάτων

Για να αφαιρέσουμε κλάσματα, **πρέπει** αυτά να είναι ομώνυμα

$$\frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a - \beta}{\gamma}$$

Αν μας δοθούν κλάσματα που **δεν** είναι ομώνυμα, **πρέπει** να τα κάνουμε εμείς και μετά να κάνουμε την πράξη της αφαίρεσης.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 46 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα αθροίσματα και απλοποίησε το τελικό αποτέλεσμα, αν δεν είναι ανάγωγο το κλάσμα.

Λύση

$$\alpha) \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\beta) \frac{11}{13} + \frac{2}{13} = \frac{11+2}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

$$\gamma) \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} + \frac{6}{9} = \frac{10}{9}, \text{ με ΕΚΠ}(9,3) = 9$$

$$\delta) \frac{8}{12} + \frac{2}{3} = \frac{8}{12} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} + \frac{8}{12} = \frac{16}{12} \text{ και μπορούμε να το απλοποιήσουμε διαιρώντας με}$$

το ΜΚΔ(16,12)=4, άρα το αποτέλεσμά μας θα γίνει: $\frac{16:4}{12:4} = \frac{4}{3}$, με ΕΚΠ(12,3) = 12

$$\epsilon) \frac{17}{20} + \frac{3}{15} = \frac{17 \cdot 3}{20 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{51}{60} + \frac{12}{60} = \frac{63}{60}, \text{ με ΕΚΠ}(20,15) = 60$$

και μπορούμε να το απλοποιήσουμε διαιρώντας με το ΜΚΔ(63,60)=3, άρα το

$$\text{αποτέλεσμά μας θα γίνει: } \frac{63}{60} = \frac{63:3}{60:3} = \frac{21}{20}$$

$$\sigma\tau) \frac{3}{7} - \frac{3}{11} = \frac{33}{77} - \frac{21}{77} = \frac{12}{77}, \text{ με ΕΚΠ}(7,11) = 77$$

Άλυτες Ασκήσεις

2.60 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$$1) \frac{2}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$2) \frac{2}{4} - \frac{1}{3} =$$

$$3) 2 + \frac{1}{3} =$$

$$4) 2 - \frac{1}{3} =$$

$$5) \frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$$

$$6) \frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$$

$$7) \frac{1}{7} + \frac{1}{9} =$$

$$8) \frac{1}{7} - \frac{1}{9} =$$

2.61 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα.

$$i) \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}$$

$$ii) \frac{13}{24} + \frac{7}{24} + \frac{4}{24}$$

$$iii) \frac{40}{35} + \frac{2}{35} + \frac{1}{35}$$

2.62 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα.

$$i) \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}$$

$$vi) \frac{7}{16} + \frac{3}{8}$$

$$ii) \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$$

$$vii) 8 + \frac{4}{9}$$

$$iii) \frac{13}{20} + \frac{7}{5} + \frac{9}{25}$$

$$viii) 3 + \frac{8}{5}$$

$$iv) \frac{3}{27} + \frac{2}{3} + \frac{7}{18}$$

$$ix) 7 + \frac{1}{3} + 2$$

$$v) \frac{2}{13} + \frac{7}{26}$$

2.63 Να γράψετε ως κλάσματα τους παρακάτω μεικτούς αριθμούς.

i. $2\frac{1}{12}$

ii. $3\frac{1}{3}$

iii. $4\frac{3}{7}$

iv. $8\frac{3}{5}$

2.64 Να γράψετε ως μεικτούς τα παρακάτω κλάσματα.

$$\frac{63}{6}, \quad \frac{58}{5}, \quad \frac{129}{12}, \quad \frac{150}{45}$$

2.65 Να υπολογίσετε τις διαφορές.

i) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$

vi) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

ii) $\frac{18}{22} - \frac{5}{22}$

vii) $\frac{25}{20} - \frac{2}{10}$

iii) $\frac{340}{100} - \frac{330}{100}$

viii) $\frac{1}{5} - \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\right)$

iv) $\frac{42}{50} - \frac{41}{50}$

ix) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right)$

v) $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

2.66 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$A = \left\{ 5 - \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{11}{5} - \frac{6}{4} \right) - \left(1 - \frac{7}{8} \right) \right] + \frac{1}{3} \right\}$$

$$B = \left(2 - \frac{1}{4} \right) + \left\{ 4 - \left[\left(3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{12}{7} - \frac{5}{14} \right) \right] \right\} - \frac{7}{6}$$

$$\Gamma = \frac{2}{3} + \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{6} \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{4}{5}$$

2.67 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\left\{ 5 - \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{11}{5} - \frac{6}{4} \right) - \left(1 - \frac{7}{8} \right) \right] + \frac{1}{3} \right\} - \frac{2}{3}$

β) $\left(2 - \frac{1}{4} \right) + \left\{ 4 - \left[\left(3 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{12}{7} - \frac{5}{14} \right) \right] \right\} - \frac{7}{6}$

2.68 Αν $x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 2$ και $y = \frac{5}{6} + 1 - \frac{4}{3}$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = 2x + y$$

2.69 Ένας εργάτης σκάβει έναν κήπο σε 4 ώρες και ένας άλλος σκάβει τον ίδιο κήπο σε 6 ώρες.

- i) Τι μέρος του κήπου σκάβει ο καθένας σε 1 ώρα;
- ii) Τι μέρος του κήπου θα σκάψουν σε 1 ώρα αν δουλέψουν και οι δύο μαζί;

2.70 Ένας παραγωγός λαδιού πούλησε την πρώτη μέρα το $\frac{1}{3}$ των δοχείων, τη

δεύτερη μέρα το $\frac{1}{5}$ και την τρίτη μέρα τα $\frac{3}{10}$.

- α) Τι μέρος των δοχείων πούλησε;
- β) Αν πούλησε 750 δοχεία πόσα ήταν συνολικά;

2.71 Μια αντλία πετρελαίου γεμίζει μια δεξαμενή σε 5 ώρες και μια άλλη αντλία γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 8 ώρες. Τι μέρος της δεξαμενής γεμίζουν σε 1 ώρα αν δουλεύουν και οι δύο αντλίες μαζί;

2.72 Από μια τάξη το $\frac{1}{12}$ πήρε άριστα σ' ένα διαγώνισμα, το $\frac{1}{3}$ πήρε πολύ καλά, το $\frac{1}{4}$ πήρε βαθμό καλά και τα υπόλοιπα παιδιά πήγαν μέτρια. Αν η τάξη έχει 36 μαθητές να βρείτε τι μέρος των παιδιών πήγε μέτρια και πόσα είναι αυτά τα παιδιά.

2.73 Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές και αθροίσματα:

i) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$

ii) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{3}$

iii) $\frac{x}{2} - \frac{x}{5}$

iv) $\frac{2x}{7} + \frac{5x}{2}$

v) $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10}$

vi) $\frac{3x}{4} - \frac{x}{5}$

vii) $\left(\frac{x}{3} + x\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right)$

A.2.5 Πολλαπλασιασμός Κλασμάτων

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή του ενός κλάσματος με τον αριθμητή του άλλου κλάσματος.

Δηλαδή:

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Θυμίζουμε ότι οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν κλάσμα βάζοντας για παρονομαστή τη μονάδα.

$$a \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{1} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\delta}$$

Παράδειγμα

$$\text{i) } 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} \quad \text{και} \quad \text{ii) } \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Αντίστροφα κλάσματα

Λέγονται τα κλάσματα που έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.

Παράδειγμα

$$8 \text{ και } \frac{1}{8}, \text{ γιατί } 8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$2 \text{ και } \frac{1}{2}, \text{ γιατί } 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 49 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα γινόμενα :

Λύση

$$\alpha) 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\beta) 7 \cdot \frac{10}{14} = \frac{7 \cdot 10}{14} = \frac{70}{14} = 5$$

$$\gamma) \frac{4}{2} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\delta) \frac{5}{100} \cdot 10 = \frac{5 \cdot 10}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 3/σελ. 49 (Βιβλίο Οργανισμού)

Βρες τα γινόμενα:

Λύση

$$\alpha) \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{14}{40} = \frac{14:2}{40:2} = \frac{7}{20}$$

$$\beta) \frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5} = \frac{800}{50} = 16$$

$$\gamma) \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$$

$$\delta) \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Άλυτες Ασκήσεις

2.74 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα.

$$\text{i)} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\text{v)} \quad 13 \cdot 5 \frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 5$$

$$\text{vi)} \quad 2 \frac{1}{3} \cdot 4 \frac{3}{7}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot 3$$

$$\text{vii)} \quad 5 \frac{4}{9} \cdot 6 \frac{3}{8}$$

$$\text{iv)} \quad 7 \cdot 4 \frac{2}{3}$$

2.75 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$A = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Gamma = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot 8^2$$

$$B = \left(3 \frac{1}{8}\right)^2$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 25$$

2.76 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$A = 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 1 \frac{1}{3}$$

$$B = \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{12}{9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{6}$$

$$\Gamma = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3}$$

$$\Delta = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{8} \right) + 3 \frac{1}{8}$$

$$E = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$Z = \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{10} \right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right)^2$$

$$H = \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{10} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{10} \right)^2 \cdot \frac{1}{5}$$

2.77 Να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω αριθμών.

i) $\frac{4}{3}$

v) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

ii) $\frac{11}{8}$

vi) $5 - \frac{1}{5}$

iii) 2

vii) $3 \frac{1}{5}$

iv) $\frac{3}{8}$

viii) $5 \frac{3}{8}$

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

2.78 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα.

i) $\frac{x}{8} \cdot \frac{3x}{5}$

iv) $2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{6}{x+4}$

ii) $\frac{5 \cdot x}{12} \cdot \frac{3x}{10}$

v) $\frac{9x}{25} \cdot \frac{5}{3\lambda}$

iii) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{2x+1}$

vi) $\frac{3x}{5} \cdot \frac{5}{9x}$

2.79 Αν $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{1}{3}$ και $\gamma = \frac{3}{12}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$A = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$B = \alpha \cdot (\beta - \gamma)^2$$

$$\Gamma = \alpha^2 \cdot (\beta - \gamma)$$

2.80 Αν α, β φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha \cdot \beta = 2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha + \beta}$$

είναι αντίστροφοι.

2.81 Να βρείτε με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $\frac{3}{8}$ ώστε να

$$\text{πάρουμε γινόμενο } \frac{1}{2}.$$

2.82 Ο Βασίλης έχει 60 ευρώ λιγότερα από τα $\frac{5}{8}$ των 500 ευρώ, ενώ ο Νίκος έχει

210 ευρώ περισσότερα από τα $\frac{2}{5}$ των 100 ευρώ. Ποιος έχει περισσότερα χρήματα και πόσα;

2.83 Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\alpha = \frac{13}{4}m$ και $\beta = \frac{2}{5}m$. Να βρείτε το εμβαδόν του.

2.84 Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά $a = \frac{5}{6}m$.

2.85 Να βρείτε:

i) τα $\frac{3}{5}$ του $\frac{1}{3}$ του 500

ii) τα $\frac{1}{2}$ των $\frac{3}{4}$ του 640

iii) το $\frac{1}{6}$ των $\frac{5}{7}$ του 84

2.86 Σε μια τάξη τα $\frac{3}{5}$ είναι κορίτσια και απ' αυτά το $\frac{3}{4}$ πηγαίνουν στο Σχολείο με τα πόδια.

α) Τι μέρος της τάξης αποτελούν τα κορίτσια που πηγαίνουν σχολείο με τα πόδια;

β) Αν τα κορίτσια που πηγαίνουν σχολείο με λεωφορείο είναι 6, να βρείτε πόσα παιδιά έχει συνολικά η τάξη και πόσα απ' αυτά είναι αγόρια.

2.87 Ο πατέρας της Μαρίας είναι 45 χρονών. Ποια θα είναι η ηλικία της Μαρίας μετά από 6 χρόνια αν σήμερα η ηλικία της είναι τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{5}$ της ηλικίας του πατέρα της;

Α.2.6 Διαίρεση Κλασμάτων

Διαίρεση κλασμάτων

Για να διαιρέσουμε κλάσματα, κάνουμε την εξής διαδικασία:

Δηλαδή:

$$\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Θυμίζουμε ότι ένα κλάσμα που έχει είτε για αριθμητή είτε για παρονομαστή κάποιο

κλάσμα ονομάζεται σύνθετο. Για παράδειγμα $\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το $\frac{7}{2}$ με το $\frac{3}{5}$.

Άρα με βάση τον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\frac{7}{2} : \frac{3}{5} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 3}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 51 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να κάνεις τις διαιρέσεις:

Λύση

$$\alpha) \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\beta) \frac{1}{3} : \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\gamma) \frac{10}{100} : \frac{1}{5} = \frac{10}{100} \cdot \frac{5}{1} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$\delta) \frac{7}{3} : \frac{21}{27} = \frac{7}{3} \cdot \frac{27}{21} = \frac{189}{63} = 3$$

Άσκηση 3/σελ. 51 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να βρεις τα πηλίκα:

Λύση

$$\alpha) 2 : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\beta) \frac{5}{8} : 1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{8}$$

$$\gamma) 2\frac{1}{2} : 4 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$\delta) 4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3} = \frac{41}{10} : \frac{10}{3} = \frac{41}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{123}{100}$$

Άλυτες Ασκήσεις

2.88 Να υπολογίσετε τα ακόλουθα:

i) $\frac{3}{2} : \frac{3}{5}$

vi) $7\frac{3}{8} : 2\frac{1}{2}$

ii) $\frac{1}{3} : \frac{2}{8}$

vii) $2\frac{1}{3} : \frac{5}{9}$

iii) $\frac{2}{3} : \frac{9}{4}$

viii) $\frac{1}{4} : \left(\frac{2}{3} : \frac{8}{3}\right)$

iv) $\frac{1}{8} : \frac{16}{2}$

ix) $\left(\frac{1}{4} : \frac{2}{3}\right) : \frac{8}{3}$

v) $20 : 5\frac{1}{4}$

x) $\frac{1}{5} : \left(\frac{3}{4} : \frac{9}{16}\right)$

2.89 Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά.

i) $\frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{2}}$

iv) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{2}}$

vii) $\frac{7\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$

ii) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}$

v) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{2}}$

viii) $\frac{5}{8\frac{1}{3}}$

vi) $\frac{1}{\frac{4}{4}}$

$$\text{iii) } \frac{\frac{3}{11}}{\frac{11}{3}}$$

$$\text{ix) } \frac{6\frac{2}{7}}{\frac{2}{14}}$$

2.90 Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά :

$$\text{i) } \frac{\frac{7}{5} - \frac{12}{10}}{\frac{3}{5} + \frac{3}{10}}$$

$$\text{iv) } \frac{3 - \frac{5}{4}}{6 + \frac{5}{8}}$$

$$\text{ii) } \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{6}}{\frac{7}{5} - \frac{11}{10}}$$

$$\text{v) } \frac{5}{3 + \frac{1}{10}}$$

$$\text{iii) } \frac{7 + \frac{1}{5}}{8 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{vi) } \frac{\frac{1}{8}}{2 + \frac{2}{16}}$$

2.91 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{6}{6} \right) : \frac{8}{6}$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{2} \right) : \frac{2}{3} + \frac{4}{6}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{2}{2} - \frac{8}{8} \right) : \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Delta = \left(1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} - \frac{3}{4} \right) : \frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

$$E = \left(2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \right) : \left(3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{7}{4} \right)$$

$$Z = \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) - 1 \right] : \frac{5}{12}$$

$$H = \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) : \frac{1}{12} \right] : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) : \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + 5$$

2.92 Δίνεται το κλάσμα $\frac{8}{30}$.

α) Να βρείτε το κλάσμα που θα προκύψει αν διαιρέσουμε μόνο τον παρονομαστή με τον αριθμό 3.

β) Να συγκρίνετε τα δύο κλάσματα.

γ) Πόσες φορές το ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το άλλο;

2.93 Δίνεται το κλάσμα $\frac{5}{12}$.

α) Να βρείτε το κλάσμα που θα προκύψει αν πολλαπλασιάσουμε μόνο τον παρονομαστή με τον αριθμό 4.

β) Να συγκρίνετε τα δύο κλάσματα.

γ) Πόσες φορές το ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το άλλο;

2.94 Αν μοιράσουμε το $\frac{1}{2}$ μιας τούρτας σε 6 παιδιά, τι μέρος της τούρτας θα πάρει το καθένα;

2.95 Να βρείτε με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε το $\frac{4}{9}$ ώστε να βρούμε πηλίκο 1.

2.96 Ένα ενυδρείο χωράει 15 lt νερό. Μια κανάτα χωράει $\frac{3}{4}$ του λίτρου νερό.
Πόσες κανάτες πρέπει να ρίξουμε για να γεμίσει το ενυδρείο;

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

2.97 Ένας εργάτης σε μια ώρα αποπερατώνει τα $\frac{3}{10}$ ενός έργου. Σε πόσες ώρες θα τελειώσει όλο το έργο;

2.98 Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 9 ημέρες, δεύτερος εργάτης το τελειώνει σε 12 ημέρες και τρίτος εργάτης σε 18 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν και οι τρεις μαζί το έργο;

2.99 Μια περιουσία μοιράστηκε μεταξύ τεσσάρων κληρονόμων. Ο Α πήρε το $\frac{1}{3}$ του Β και ο Β πήρε διπλάσια του Γ. Αν ο Β πήρε τα $\frac{4}{9}$ της περιουσίας, να βρείτε τα μερίδια των τεσσάρων κληρονόμων.

2.100 Αν $A = \frac{26}{1 + \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}}$, $B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}$ και $\Gamma = \frac{5}{2 - \frac{1}{3}}$, να υπολογίσετε.

i) $(A \cdot B) \cdot \Gamma$

ii) $(A : B) \cdot \Gamma$

iii) $[(A : B) : \Gamma] : \frac{2}{4}$

iv) $\left(1 + \frac{2}{A}\right) : \left(1 + \frac{2}{B}\right)$

v) $(A : \Gamma)^2$

vi) $\left(2 + \frac{1}{A}\right) : \left(3 + \frac{1}{\Gamma}\right)^2$

2.101 Να μετατρέψετε σε απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα.

$$A = \frac{3}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

$$B = \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

Σύντομη Επανάληψη 2^{ου} Κεφαλαίου

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Τι ονομάζεται «νιστό» ($\frac{1}{\nu}$) και τι «κάπα νιστά» ($\frac{\kappa}{\nu}$);
2. Πότε δύο κλάσματα ονομάζονται ισοδύναμα; Δώστε παράδειγμα.
3. Με ποιους τρόπους από ένα κλάσμα προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα; Δώστε παράδειγμα.
4. Τι ονομάζουμε απλοποίηση ενός κλάσματος;
5. Ποια κλάσματα λέγονται ανάγωγα; Δώστε παράδειγμα.
6. Ποια κλάσματα ονομάζονται ομώνυμα και ποια ετερόνυμα; Δώστε παράδειγμα.
7. Πώς συγκρίνουμε δύο κλάσματα; (τρεις περιπτώσεις)
8. Πώς προσθέτουμε δύο κλάσματα; (+ γενική μορφή)
9. Πώς αφαιρούμε δύο κλάσματα; (+ γενική μορφή)
10. Τι είναι το γινόμενο δύο κλασμάτων; (+ γενική μορφή)
11. Τι είναι το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα; (+ γενική μορφή)
12. Ποια πράξη παριστάνει το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$;
13. Πώς διαιρούμε δύο κλάσματα; (+ γενική μορφή)
14. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι; Δώστε παράδειγμα.
15. Ποιος είναι ο αντίστροφος του 1;
16. Το μηδέν έχει αντίστροφο; Αν ναι, ποιόν;
17. Ποιο κλάσμα ονομάζεται σύνθετο; Πώς το μετατρέπουμε σε απλό; (γενική μορφή)

Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

1. Αν $\frac{x}{y} = 2$, τότε $y : 2 = x$.
2. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$.
3. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.
4. $\frac{\alpha \cdot \lambda}{\lambda} = \alpha$, $\lambda \neq 0$
5. $\frac{5\alpha}{10\alpha} = \frac{1}{2}$
6. Το κλάσμα $\frac{1+1}{1+2}$ απλοποιείται σε $\frac{1}{2}$.
7. Το κλάσμα $\frac{3x}{x}$ είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.
8. Το κλάσμα $\frac{3+1}{3+2}$ είναι ανάγωγο.

9. $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+1}{\beta+1}$.
10. Αν $\beta < \gamma$ και $\beta, \gamma \neq 0$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\gamma}$.
11. Αν $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\gamma}$, τότε $\beta < \gamma$.
12. Αν $\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} = 1$, τότε $\alpha = \beta$.
13. Ισχύει για την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων ότι $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{x}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Μπορούμε να γράψουμε το κλάσμα $\frac{1}{x-1}$ μόνο όταν
 Α. $x \neq 0$ Β. $x \neq 1$ Γ. για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό
2. Αν $\frac{0}{\alpha} = 0$, τότε
 Α. $\alpha = 0$ Β. $\alpha = 1$ Γ. ο α είναι οποιοσδήποτε φυσικός εκτός του μηδενός
3. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = 1, \beta \neq 0$, τότε
 Α. $\beta = 1$ Β. $\beta = \alpha$ Γ. ο β είναι οποιοσδήποτε φυσικός
4. Αν $\frac{\alpha}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$, τότε
 Α. $\alpha = 1$ Β. $\alpha = 2$ Γ. ο α είναι οποιοσδήποτε φυσικός
5. Αν $\frac{x}{3} = 1$, τότε
 Α. $x = 1$ Β. $x = 3$ Γ. $x = \frac{1}{3}$
6. Αν $\frac{x}{1} = 3$, τότε
 Α. $x = 1$ Β. $x = 3$ Γ. $x = \frac{1}{3}$ Δ. τίποτα από τα προηγούμενα
7. Αν $\alpha < \beta$, τότε
 Α. $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ Β. $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ Γ. $\frac{\alpha}{\beta} < 1$
8. Η σχέση $\frac{x}{5} < 1$ ισχύει για
 Α. $x = 3$ Β. $x = 5$ Γ. $x = 7$

Κριτήριο Αξιολόγησης 2^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Να γράψετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιες είναι Λανθασμένες. Τα α, β, γ είναι φυσικοί αριθμοί διαφορετικοί από το 0.

	Σωστό	Λάθος
$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$		
Τα $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}$ είναι ισοδύναμα		
$1 + \frac{6}{3} = 3$		
Αν απλοποιήσουμε το κλάσμα $\frac{18}{16}$ θα πάρουμε το $\frac{9}{8}$.		
Έχουμε δύο ετερόνυμα κλάσματα, αλλά με τον ίδιο αριθμητή. Μεγαλύτερο κλάσμα είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο παρονομαστή.		
Έχουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, αλλά με διαφορετικό αριθμητή. Μεγαλύτερο κλάσμα είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή.		
Για να κάνω απλοποίηση σε ένα κλάσμα διαιρώ με το ΜΚΔ.		
Για να κάνω απλοποίηση σε ένα κλάσμα διαιρώ με το ΕΚΠ.		

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Τα $\frac{2}{5}$ των παιδιών της Α΄ Γυμνασίου ενός σχολείου είναι 60. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα και να τα γράψετε με αύξουσα σειρά

$$\alpha) \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \frac{17}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\beta) \frac{10}{4}, \frac{10}{1}, \frac{10}{2}, \frac{10}{25}, \frac{10}{35}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i. } \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}$$

$$\text{ii. } \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot 0 \cdot \frac{2010}{2011}$$

$$\text{iii. } \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{4} \right)$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 5ο

Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων

$$A = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}$$

$$B = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\Gamma = \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

Μονάδες 3

Διάρκεια 60 λεπτά

3ο Κεφάλαιο – Δεκαδικοί Αριθμοί

A.3.1 Δεκαδικοί Αριθμοί

Δεκαδικά κλάσματα: λέγονται τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή μια δύναμη του 10.

Παράδειγμα

$$\frac{15}{100}, \frac{23}{10}, \frac{5}{1000}$$

Παρατηρήσεις Θεωρίας

- Ένας δεκαδικός αριθμός αποτελείται από το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος.
- Το μέρος πριν την υποδιαστολή ονομάζεται ακέραιο μέρος και μετά την υποδιαστολή δεκαδικό μέρος.
- Στο δεκαδικό μέρος η αξία ενός ψηφίου εξαρτάται από τη θέση που βρίσκεται π.χ. αν βρίσκεται στο ψηφίο των δεκάτων, των εκατοστών, των χιλιοστών, κλπ.

Πως συγκρίνουμε δεκαδικούς αριθμούς;

Αρχικά συγκρίνουμε τα ακέραια μέρη τους

- Αν είναι διαφορετικά τότε μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος
Π.χ. $22,45 > 11,66$
- Αν είναι ίσα τότε πρέπει να συγκρίνω και τα δεκαδικά μέρη αρχίζοντας από τα ψηφία των δεκάτων, αν και αυτά είναι ίσα συγκρίνω τα ψηφία των εκατοστών κτλ.

Πως στρογγυλοποιούμε δεκαδικούς αριθμούς;

Για να στρογγυλοποιήσουμε δεκαδικούς αριθμούς πρέπει να ξέρουμε πρώτα ως προς ποιο ψηφίο στρογγυλοποιούμε και μετά κοιτάμε το επόμενο ψηφίο μικρότερης τάξης:

- Αν αυτό είναι μικρότερο του 5, τότε το ψηφίο στρογγυλοποίησης μένει όπως είναι κι όλα τα επόμενα ψηφία μηδενίζονται.

Παράδειγμα

$5, \underline{1}27 \rightarrow 5,100$ (ψηφίο στρογγυλοποίησης το 1)

- Αν αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο στρογγυλοποίησης και μηδενίζουμε όλα τα επόμενα ψηφία του.

Παράδειγμα

$8, 8 \underline{5}9 \rightarrow 8,860$ (ψηφίο στρογγυλοποίησης το 5)

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 59 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε ως κλάσματα τα ηλίκα των διαιρέσεων:

Λύση

$$\alpha) 4:5 = 0,8 = \frac{8}{10}$$

$$\beta) 9:16 = 0,5625 = \frac{5.625}{10.000}$$

$$\gamma) 25:79 = 0,316 = \frac{316}{1.000} \text{ με προσέγγιση χιλιοστού}$$

Άσκηση 2/σελ. 59 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ποιά διαίρεση παριστάνει καθένα από τα κλάσματα

Λύση

$$\alpha) \frac{2}{21} = 2:21$$

$$\beta) \frac{19}{3} = 19:3$$

$$\gamma) \frac{77}{105} = 77:105$$

Άσκηση 3/σελ. 59 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα, ως δεκαδικό αριθμό : (i) με προσέγγιση εκατοστού και (ii) με προσέγγιση χιλιοστού:

Λύση

$$\alpha) \frac{7}{16} = 7:16 = 0,4375$$

Με προσέγγιση εκατοστού 0,43

Με προσέγγιση χιλιοστού 0,437

$$\beta) \frac{21}{17} = 21:17 = 1,23529.....$$

Με προσέγγιση εκατοστού 1,23

Με προσέγγιση χιλιοστού 1,235

$$\gamma) \frac{20}{95} = 20:95 = 0,21052.....$$

Με προσέγγιση εκατοστού 0,21

Με προσέγγιση χιλιοστού 0,210

Άσκηση 4/σελ. 59 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε ως δεκαδικό αριθμό, καθένα από τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα: Λύση

α) $\frac{58}{10} = 58:10 = 5,8$

β) $\frac{3}{100} = 3:100 = 0,03$

γ) $\frac{5025}{100} = 5025:100 = 50,25$

δ) $\frac{1024}{1000} = 1024:1000 = 1,024$

Άσκηση 8/σελ. 59 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να στρογγυλοποιήσεις τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δέκατο, εκατοστό και χιλιοστό:

Λύση

α) 9876,008

Δέκατο: 9876

εκατοστό: 9876,01

χιλιοστό: 9876,008

β) 67,8956

Δέκατο: 67,9

εκατοστό : 67,90

χιλιοστό: 67,896

γ) 0,001

Δέκατο: 0

εκατοστό : 0

χιλιοστό : 0,001

δ) 8,239

Δέκατο : 8,2

εκατοστό : 8,24

χιλιοστό : 8,239

ε) 23,7048

Δέκατο: 23,7

δέκατο : 23,70

χιλιοστό : 23,705

Α.3.2 Πράξεις Με Δεκαδικούς Αριθμούς – Δυνάμεις Με Βάση Δεκαδικό Αριθμό

Μεθοδολογία Πρόσθεσης και Αφαίρεσης Δεκαδικών

Για να προσθέσω ή να αφαιρέσω δεκαδικούς αριθμούς βάζω τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλον ώστε το δεκαδικό μέρος του πρώτου να είναι κάτω από το δεκαδικό μέρος των άλλων αριθμών και το ακέραιο μέρος κάτω από το ακέραιο.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 23,156 \\ + 3,022 \\ \hline 26,179 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,389 \\ - 11,456 \\ \hline 23,933 \end{array}$$

Μεθοδολογία Πολλαπλασιασμού Δεκαδικών

Για να πολλαπλασιάσω δεκαδικούς αριθμούς κάνω κανονικά τον πολλαπλασιασμό και στο αποτέλεσμα χωρίζω με υποδιαστολή από δεξιά προς τα αριστερά τόσα ψηφία όσα δεκαδικά ψηφία έχουν και οι δύο παράγοντες.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 2,15 \\ \times 0,25 \\ \hline 1075 \\ 430 \\ + 000 \\ \hline 0,5375 \end{array}$$

Μεθοδολογία Διαίρεσης Δεκαδικών

Για να διαιρέσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με έναν φυσικό ακολουθούμε την ευκλείδεια διαίρεση βάζοντας υποδιαστολή στο πηλίκο μόλις κατεβάσουμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του διαιρετέου.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r|l} 331,38 & 14 \\ 51 & 23,67 \\ 93 & \\ 98 & \\ 0 & \end{array}$$

Για να διαιρέσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με έναν δεκαδικό αριθμό πολλαπλασιάζουμε διαιρέτη και διαιρετέο με κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός όποτε προκύπτει η προηγούμενη περίπτωση.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r|l} 36,45 & 4,5 \\ \times 10 & \times 10 \\ \hline 364,5 & 45 \\ 45 & 8,1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Μεθοδολογία Διαίρεσης με το 10,100,1000, κτλ

Όταν θέλουμε να διαιρέσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με το 10 ,το 100 , το 1000 αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι και μεταφέρουμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά όσα τα μηδενικά του αριθμού που διαιρούμε.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 289,35 : 10 &= 28,935 \\ 2345,56 : 100 &= 23,4556 \end{aligned}$$

Μεθοδολογία Πολλαπλασιασμού με το 10,100,1000, κτλ

Όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό με το 10,100,1000 τότε αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι και μεταφέρουμε την υποδιαστολή δεξιά τόσες θέσεις όσα τα μηδενικά του αριθμού που πολλαπλασιάζουμε.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 22,11 \cdot 10 &= 221,1 \\ 15,234 \cdot 100 &= 1523,4 \end{aligned}$$

Μεθοδολογία Δυνάμεων Δεκαδικών Αριθμών

Η δύναμη ενός δεκαδικού αριθμού με εκθέτη φυσικό αριθμό ορίζεται όπως και στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} (2,2)^2 &= (2,2) \cdot (2,2) = 4,84 \\ (0,3)^3 &= (0,3) \cdot (0,3) \cdot (0,3) = 0,027 \end{aligned}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 61 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσεις τα αθροίσματα:

Λύση

α) $48,18 + 3,256 + 7,129 = 58,565$

β) $3,59 + 7,13 + 8,195 = 18,915$

Άσκηση 3/σελ. 61 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσεις τις διαφορές:

Λύση

α) $15,833 - 4,791 = 11,042$

β) $13,902 - 12,5025 = 1,3995$

γ) $20,0005 - 12,501 = 7,4995$

Άσκηση 5/σελ. 61 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να κάνεις τις πράξεις:

Λύση

α) $520 \cdot 0,1 + 0,32 \cdot 100 = 52 + 32 = 84$

β) $4,91 \cdot 0,01 + 0,819 \cdot 10 = 0,0491 + 8,19 = 8,2391$

Άσκηση 6/σελ. 61 (Βιβλίο Οργανισμού)

Λύση

α) $4,7:0,1 - 45:10 = 47:1 - 45:10 = 47 - 4,5 = 42,5$

β) $0,98 : 0,0001 - 6785:1.000 = 9.800 : 1 - 6.785:1.000 = 9.800 - 6,785 = 9.793,215$

Άσκηση 10/σελ. 61 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσεις τις δυνάμεις :

Λύση

α) $3,1^2 = 3,1 \cdot 3,1 = 9,61$

β) $7,01^2 = 7,01 \cdot 7,01 = 49,1401$

γ) $4,5^2 = 4,5 \cdot 4,5 = 20,25$

δ) $0,5^2 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

ε) $0,2^2 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

στ) $0,3^2 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$

Άλυτες Ασκήσεις

3.1 Να γράψετε με λόγια τους παρακάτω αριθμούς:

47,34	
125,07	
0,03	
0,3456	

12,008	
1005,2	
4,894	
62,0305	
5,307	
12.005,2	

3.2 Να γράψετε με ψηφία τους παρακάτω αριθμούς:

	Είκοσι οκτώ και τριάντα τέσσερα χιλιοστά
	Εκατόν πέντε χιλιάδες και δύο εκατοστά
	Τριάντα χιλιάδες εκατό και εξήντα πέντε δεκάκις χιλιοστά
	Πέντε εκατοστά
	Είκοσι δύο χιλιοστά
	Χίλια τρία και πενήντα έξι εκατοστά
	Εφτά και οχτακόσια τριάντα πέντε χιλιοστά
	Σαράντα τρία και πεντακόσια οκτώ δεκάκις χιλιοστά
	Εννιά χιλιοστά
	Πενήντα ένα και τρία δέκατα

3.3 Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου ψηφίου σε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς:

48,1 <u>2</u> 3		<u>6</u> 7,129	
50 <u>2</u> , 034		40, <u>6</u> 83	
2007, <u>4</u> 5		1. <u>5</u> 05,4	
0,05 <u>6</u> <u>7</u>		367, <u>8</u> <u>9</u>	
4,7 <u>0</u> <u>9</u>		<u>1</u> 0.234,56	

3.4 Να γράψετε ως κλάσματα τις παρακάτω διαιρέσεις:

3:4=	23:100=	2.103: 15=	4:108=	7:10=
50: 120=	56:1000=	647:12=	79: 157=	5:7=

3.5 Ποια διαίρεση παριστάνουν τα κλάσματα:

$\frac{6}{7} =$	$\frac{32}{85} =$	$\frac{23}{178} =$	$\frac{56}{100} =$	$\frac{42}{10} =$
-----------------	-------------------	--------------------	--------------------	-------------------

3.6 Να γράψετε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικό με προσέγγιση: α) εκατοστού β) δεκάτου γ) χιλιοστού

$$\frac{15}{7} \quad \frac{3.496}{1000} \quad \frac{32}{46} \quad \frac{8}{132} \quad \frac{756}{17} \quad \frac{29}{8} \quad \frac{489}{13}$$

3.7 Να γράψετε ως δεκαδικούς αριθμούς καθένα από τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:

$\frac{6}{100} =$	$\frac{24}{10} =$	$\frac{105}{10} =$
$\frac{35}{1000} =$	$\frac{7}{10} =$	$\frac{47}{10.000} =$
$\frac{123}{10} =$	$\frac{56}{1.000} =$	$\frac{3}{1.000} =$
$\frac{5.893}{100} =$	$\frac{894}{10} =$	$\frac{95}{100} =$

3.8 Να γράψετε καθέναν από τους παρακάτω δεκαδικούς ως δεκαδικά κλάσματα:

3,56=	234,07=	2.069,03=
0,04=	0,089=	0,5=
45,23=	0,0067=	2,38=
0,34=	12,357=	50,2=

3.9 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικά:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{48}{120} \quad \frac{157}{4} \quad \frac{449}{8} \quad \frac{765}{18}$$

3.10 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς έχουν το ίδιο ακέραιο και ποιοι το ίδιο δεκαδικό μέρος:

$$34,07 - 12,3 - 34,95 - 7,071 - 50,070 - 12,095 - 0,30 - 0,95 - 12,07$$

3.11 Τοποθετήστε το κατάλληλο σύμβολο $<, >$ ή $=$ μεταξύ των αριθμών:

234,5 23,45	23,78 56	70,83 7,083
13,56 13,86	67,27 67,239	0,05 0,0500
12,98 13,01	4,24 4,240	0,3 0,030
7,08 7,080	5,25 5,025	23,45 32,450

3.12 Να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς σε αύξουσα σειρά:

7,62 - 7,602 - 6,72 - 7,062 - 6,702 - 6,072 - 6,207 - 7,27 - 6,027

3.13 Δίνεται ο αριθμός 123456789. Να τοποθετήσετε κατάλληλα την υποδιαστολή ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι:

α) ανάμεσα στο 100 και στο 200

β) ανάμεσα στο 10.000 και στο 100.000

Ποια είναι η τάξη του 6 σε κάθε περίπτωση;

3.14 Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στο ψηφίο που αναγράφεται σε κάθε στήλη του πίνακα:

	Δέκατο	Εκατοστό	Χιλιοστό
23,4713			
0,5286			
12,3894			
5,7932			
6,4231			
45,4982			
13,5997			
4,9999			
0,999			

3.15 Δίνεται ο αριθμός 572,8.....7..... Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε όταν στρογγυλοποιηθεί

α) στο δέκατο να γίνει 572,8

β) στο εκατοστό να γίνει 572,89

γ) στο χιλιοστό να γίνει 572,828

- 3.16** Να γράψετε τους δεκαδικούς αριθμούς
- α) που είναι μεγαλύτεροι του 53 και μικρότεροι του 54 και έχουν ένα δεκαδικό ψηφίο
 - β) που είναι μεγαλύτεροι του 7,5 και μικρότεροι του 7,6 και έχουν δύο δεκαδικά ψηφία.
- 3.17** Ένας αριθμός έχει ακέραιο μέρος 58 και δεκαδικό μέρος με τρία δεκαδικά ψηφία, που είναι τα 2, 6 και 9. Να γράψετε όλους τους δεκαδικούς που μπορείτε να βρείτε και να τους διατάξετε σε αύξουσα σειρά.

3.18 Τι «αξία» έχει το κάθε ψηφίο του αριθμού 403,567 και του 234.756.234,645 ;

3.19 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

- α) $2,6+12$
- β) $5,2+12$
- γ) $12,0+2,0+0,5$
- δ) $6,4+0,36$
- ε) $3,6+2,3+1,1$
- στ) $8,1+0,10$
- ζ) $0,68+11+1$
- η) $26+21+0,1$

3.20 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

- α) $(0,42 \cdot 10 + 286,5 \cdot 0,01) : 0,0001$
- β) $\frac{10}{25} - 0,14$
- γ) $\frac{411}{4} + \frac{12}{10}$ (το αποτέλεσμα να είναι δεκαδικός αριθμός)

3.21 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

- α) $0,7:0,1 + 8,5:2 - 3,45 + 2,2$
- β) $(0,45:0,01 + 2,56:0,01):0,001$

3.22 Να κάνετε με έξυπνο τρόπο τις παρακάτω πράξεις

- α) $7,25+7,25+7,25+7,25+7,25+7,25+7,25+7,25+7,25+7,25$
- β) $\underbrace{5,253 + \dots + 5,253}_{100 \text{ φορές}}$

$$\gamma) \underbrace{2,4 + \dots + 2,4}_{1000 \text{ φορές}}$$

$$\delta) \underbrace{\frac{25}{2} + \dots + \frac{25}{2}}_{100 \text{ φορές}}$$

3.23 Να γράψετε σαν δεκαδικούς τα παρακάτω κλάσματα και μετά να κάνετε την πρόσθεση:

$$\alpha) \frac{7}{\frac{8}{\frac{5}{2}}} \quad \beta) \frac{252}{5}$$

3.24 Να γράψετε τους παρακάτω δεκαδικούς με τη μορφή κλάσματος. Ο παρονομαστής να είναι δύναμη του 10.

- α) 0,42
- β) 0,234
- γ) 0,6534
- δ) 0,34578

3.25 Να κάνετε τις παρακάτω στρογγυλοποιήσεις στα εκατοστά και στα δέκατα:

	Εκατοστά	Δέκατα
423,5543		
123,342		
876,567		
32429,876		
141,43254		
171,3		
6544,81		

3.26 Να συμπληρώσετε το ψηφίο που λείπει στον αριθμό 87,(..)823, όταν ο αριθμός μετά την στρογγυλοποίηση γίνεται ίσος με 87,3

3.27 Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα του μικρότερου, μεγαλύτερου τα παρακάτω:

$$\alpha) 3,56 \dots (3,56)^2 \dots (3,56)^3 \dots (3,56)^4$$

$$\beta) 0,56 \dots (0,56)^2 \dots (0,56)^3 \dots (0,56)^4$$

Τι παρατηρείτε;

3.28 Η προτεραιότητα των πράξεων αλλάζει όταν κάνουμε πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς;

3.29 Να υπολογισθούν τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\alpha) 30,6 + 51,234$$

β) $11,01 + 9,04$

γ) $15,992 + 0,008$

δ) $15,992 + 0,08$

ε) $4,7 + 1,003$

στ) $175,666 + 25,443$

3.30 Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $15,992 - 0,008$

β) $166 - 0,02$

γ) $4,91 - 0,819$

δ) $520 - 0,32$

ε) $56,679 - 0,1$

στ) $20000 - 13,33$

3.31 Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

α) $0,98 \div 0,01$

β) $5,1 \div 0,01$

γ) $10,12 \div 2$

δ) $30,50 \div 2$

ε) $4,7 \div 0,1$

στ) $980 \div 1,6$

3.32 Να γίνουν οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί:

α) $0,8 \cdot 1,2$

β) $1,2 \cdot 100$

γ) $0,8 \cdot 0,15$

δ) $72,4 \cdot 2$

ε) $3 \cdot 11,2$

στ) $5 \cdot 12,5$

3.33 Να γίνουν οι παρακάτω υπολογισμοί:

α) $11,01 - 41,05 + 9,04$

β) $(0,8 + 1,2) \cdot (1,2 - 0,8 - 0,15)$

γ) $(0,8 + 1,2) \div (1,2 - 0,8 - 0,15) \cdot 100$

3.34 Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:

α) $(0,1)^4$

β) $(0,55)^2$

γ) $(3,44)^2$

δ) $(0,25)^4$

3.35 Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

α) $(2 \cdot 0,25)^2$

β) $(0,1 + 0,15)^2$

γ) $(2,41 - 0,01)^2$

δ) $(0,8 + 1,2)^5$

ε) $(1,2 - 0,8 - 0,15)^2$

3.36 Να βρείτε την περίμετρο ενός ορθογωνίου, αν η μία πλευρά του είναι $a=1,8\text{cm}$ και η δεύτερη είναι $b=1,8\text{cm}$.

3.37 Να βρείτε πόσα cm είναι η (οι) πλευρά (-ές) από τα παρακάτω σχήματα αν γνωρίζετε ότι :

α) περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 82,2 cm, με τη μία πλευρά να είναι διπλάσια από την άλλη.

β) περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 80,8 cm

γ) περίμετρος ενός τριγώνου, που έχει όλες τις μεριές του ίσες, είναι 30,6 cm

3.38 Γράψε τη λέξη Σωστό ή Λάθος στη δεύτερη στήλη αν η πρόταση στην πρώτη στήλη είναι αληθής ή ψευδής αντίστοιχα.

$4000 \cdot 0,0001 = 4$	
$(0,8 + 1,2) \cdot (1,2 - 0,8 - 0,15) = 0,5$	
$5,321 - 0,322 = 5000$	
$(0,8 + 1,2) \cdot (1,2 - 0,8 - 0,15) = 3$	
$4000 \cdot 10^{-3} = 4$	
$11,01 - 41,05 + 9,04 = 20$	
$(0,25)^4 = \frac{1}{256}$	
$980 \div 1,6$	

Αν η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 10 cm, τότε πάντα η μία πλευρά είναι 4 cm και η άλλη 6 cm	
Ένας αριθμός a υψωμένος στο τετράγωνο είναι πάντα μεγαλύτερος από τον ίδιο του τον εαυτό. Δηλαδή $a^2 > a$	
Ένας αριθμός a υψωμένος στο κύβο είναι πάντα μεγαλύτερος από τον ίδιο του τον εαυτό. Δηλαδή $a^3 > a$	
Ισχύει πάντα ότι $a^v > a$, όπου οποιοσδήποτε αριθμός	

Α.3.4 Τυποποιημένη Μορφή Μεγάλων Αριθμών

Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφτεί στη μορφή $a \cdot 10^v$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού a επί μία δύναμη του 10. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε τυποποιημένη μορφή. Ο αριθμός a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 63 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:

Λύση

$$\alpha) 583.000 = 5,83 \cdot 10^5$$

$$\beta) 4.300.000 = 4,3 \cdot 10^6$$

$$\gamma) 7.960.000 = 7,96 \cdot 10^6$$

$$\delta) 3.420.000.000 = 3,42 \cdot 10^9$$

$$\epsilon) 4.800 = 4,8 \cdot 10^3$$

$$\sigma\tau) 7.310 = 7,310 \cdot 10^3$$

$$\zeta) 281.900 = 2,819 \cdot 10^5$$

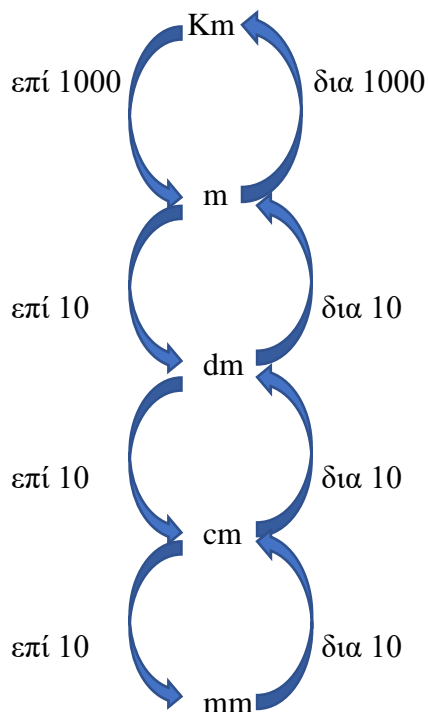
$$\eta) 518.000.000 = 5,18 \cdot 10^8$$

$$\theta) 131.000 = 1,31 \cdot 10^5$$

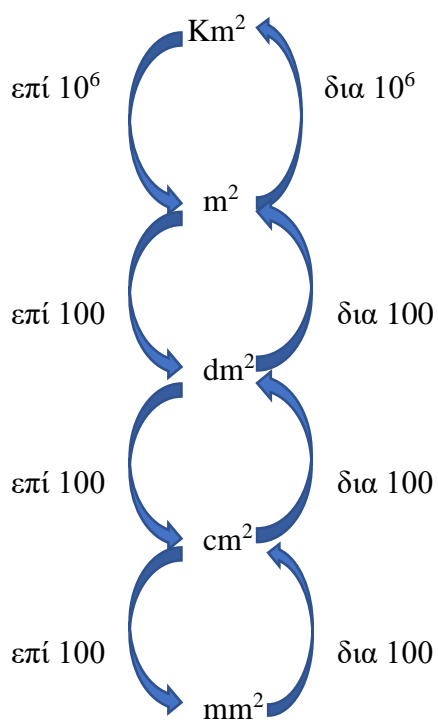
$$\iota) 675.000 = 6,75 \cdot 10^5$$

Α.3.5 Μονάδες Μέτρησης

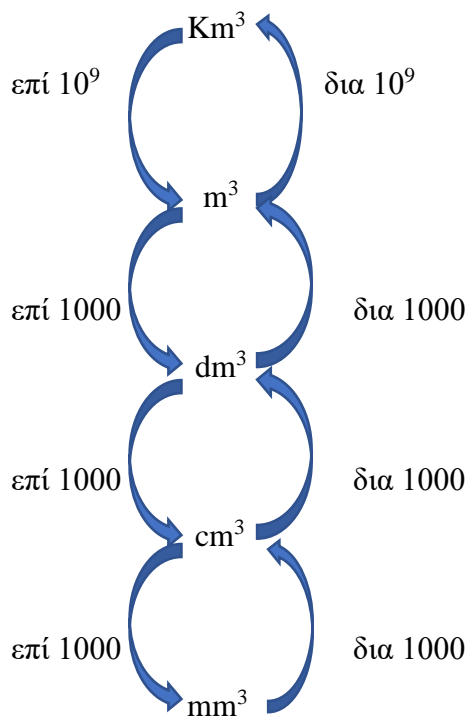
Μονάδες Μέτρησης Μήκους – 1^η Διάσταση



Μονάδες Μέτρησης Μήκους – 2^η Διάσταση – Εμβαδόν



Μονάδες Μέτρησης Μήκους – 3^η Διάσταση – Όγκος



Παρατηρήσεις – Χρήσιμες λεπτομέρειες για τις ασκήσεις

Το 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 m^2

Το 1 dm^3 είναι το $1 \text{ lt} = 1$ λίτρο

Το 1 cm^3 είναι το 1 ml

Μονάδες Μέτρησης Χρόνου

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \rightarrow 1 \text{ ώρα} = 60 \text{ λεπτά}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ sec} \rightarrow 1 \text{ λεπτό} = 60 \text{ δευτερόλεπτα}$$

$$1 \text{ ημέρα} = 24 \text{ ώρες}$$

$$1 \text{ ώρα (h)} = 3.600 \text{ sec}$$

Μονάδες Μέτρησης Μάζας

$$1 \text{ Kg} = 1000 \text{ gr} \rightarrow 1 \text{ κιλό} = 1000 \text{ γραμμάρια}$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ Kg} \rightarrow 1 \text{ τόνος} = 1000 \text{ κιλά}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 67 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να συμπληρώσεις τα κενά:

Λύση

α) $23\text{dm} = \dots 23 \cdot 10 \dots \text{cm} = 230\text{cm}$

β) $3,1\text{ m} = \dots 3,1 : 1.000 \dots \text{Km} = 0,0031\text{Km}$

γ) $45,83\text{ cm} = \dots 45,83 : 100 \dots \text{m} = 0,4583\text{m}$

δ) $67,2\text{ Km} = \dots 67,2 \cdot 1.000.000 \dots \text{mm} = 67.200.000\text{mm}$

ε) $95,5\text{ mm} = \dots 95,5 : 10 \dots \text{cm} = 9,55\text{cm}$

Άσκηση 5/σελ. 67 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να συμπληρώσεις τα κενά:

Λύση

α) $56\text{ Km}^2 = \dots 56 \cdot 1.000.000 \dots \text{m}^2 = 56.000.000\text{ m}^2$

β) $0,987\text{ στρέμματα} = \dots 0,987 \cdot 1.000 \dots \text{m}^2 = 987\text{m}^2$

γ) $350\text{ στρέμματα} = \dots 350 \cdot 1.000 \dots \text{m}^2 = 350.000\text{ m}^2$

Άσκηση 8/σελ. 67 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ο όγκος ενός στερεού είναι 15dm^3 29cm^3 . Να βρεις τον όγκο του στερεού σε cm^3 , m^3 και mm^3 .

Λύση

Ο όγκος του στερεού γράφεται αλλιώς ως εξής

$$15\text{dm}^3 29\text{cm}^3 = 15\text{dm}^3 + (29\text{cm}^3 : 1000) = 15\text{dm}^3 + 0,029\text{dm}^3 = 15,029\text{ dm}^3$$

Άρα κάνουμε τις μετατροπές:

$$15,029\text{ dm}^3 = 15,029\text{ dm}^3 \cdot 1000 = 15.029\text{ cm}^3$$

$$15,029\text{ dm}^3 = 15,029\text{ dm}^3 : 1.000 = 0,015029\text{ m}^3$$

$$15,029\text{ dm}^3 = 15,029\text{ dm}^3 \cdot 1.000.000 = 15.029.000\text{ mm}^3$$

Άσκηση 10/σελ. 67 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσεις τον χρόνο, από τις 8h 10min το πρωί, ως τις 5h 20min το απόγευμα.

Λύση

$$5\text{h } 20\text{min το απόγευμα είναι } 17\text{h } 20\text{min}$$

Άρα

$$17\text{h } 20\text{min}$$

$$- 8\text{h } 10\text{min}$$

$$9\text{h } 10\text{min}$$

Άλυτες Ασκήσεις

3.39 Να γίνουν οι παρακάτω μετατροπές:

εκ. = μ.	31.008 χιλ. = δεκ.
83 μ. = χιλ.	4.090 εκ. = χιλ.
23,94 δεκ. = χιλ.	0,43 μ. = εκ.
0,718 μ. = εκ.	117 εκ. = δεκ.
64,3 μ. = δεκ.	250 χιλ. = μ.
777 μ. = εκ.	6000 δεκ. = μ.
90 χιλ. = μ.	34,9 μ. = χιλ.
0,763 μ. = δεκ.	593 δεκ. = μ.
882,1 εκ. = μ.	7.653 εκ. = μ.
17,63 μ. = εκ.	13.806 χιλ. = μ.
200 εκ. = χιλ.	3 μ. = χιλ.
14,93 δεκ. = εκ.	4 χιλ. = εκ.
18,05 δεκ. = χιλ.	8 χιλ. = δεκ.
3,47 μ. = εκ.	96 δεκ. = μ.
501 μ. = δεκ.	811 εκ. = χιλ.
9,5 μ. = χιλ.	1,01 μ. = εκ.
999 εκ. = μ.	2,77 μ. = δεκ.
6,005 μ. = εκ.	5.003 χιλ. = δεκ.
800 χιλ. = μ.	0,74 δεκ. = χιλ.
13 μ. = δεκ.	8,414 δεκ. = εκ.

3.40 Να γίνουν οι παρακάτω μετατροπές:

- α) 0,5 cm =m
- β) 20 m =dm
- γ) 36 km =mm
- ε) 97,5 mm =cm

3.41 Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ακμές 1,2 m, 35 dm 140 cm. Να υπολογίσεις το μήκος των ακμών του σε mm.

3.42 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά $a = 2,25m$. Να υπολογίσεις την περίμετρο του τετραγώνου σε mm και σε km.

3.43 Να υπολογίσετε τα εξής:

- α) $\frac{1}{20}$ μιας ημέρας σε ώρες,
- β) $\frac{1}{5}$ μιας ώρας,
- γ) $\frac{6}{9}$ μιας ώρας

3.44 Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $10\text{g} = \dots\dots\text{kg}$

β) $22\text{cm} = \dots\dots\text{m}$

γ) $21 \text{ στρέμματα} = \dots\dots\dots \text{m}^2$

δ) $4 \text{ τόνοι} = \dots\dots\dots\text{kg}$

ε) $22,2\text{cm} = \dots\dots\dots\text{dm}$

στ) $15,02\text{m} = \dots\dots\dots\text{km}$

ζ) $120,3\text{dm} = \dots\dots\dots\text{m}$

η) $283\text{cm} = \dots\dots\dots\text{m}$

3.45 Αν η επιφάνεια ενός κύβου έχει εμβαδόν 43cm^2 . Να βρείτε τον όγκο του κύβου.

3.46 Ολοκληρώστε τις ακόλουθες προτάσεις.

α) $2\text{h}20\text{min} = 0\text{h} = \dots\dots\text{min} = \dots\dots\text{sec}$

β) $28\text{min} = \dots\dots\text{h} = \dots\dots\text{min} = \dots\dots\text{sec}$

γ) $1\text{h}12\text{min} = \dots\dots\text{h} = \dots\dots\text{min} = \dots\dots\text{sec}$

3.47 Έχουμε 3 όμοια αντικείμενα, όμως ένα από αυτά είναι πιο ελαφρύ. Πως μπορούμε να βρούμε ποιο από τα 3 είναι το ελαφρύτερο, αν έχουμε στη διάθεσή μας μία ζυγαριά χωρίς την χρήση σταθμών;
(Σημείωση: μπορώ να κάνω μόνο 2 μετρήσεις.)

3.48 Έχουμε 3 τρένα τα οποία φεύγουν από το σταθμό της Αθήνας για Πάτρα :

1^ο) σε 2,5 h και 100min

2^ο) σε 4h και 25min και 10sec

3^ο) σε 400min

4^ο) σε 72000sec

3.49 Να βρείτε πιο τρένο πρέπει να πάρουμε αν θέλουμε να φτάσουμε όσο το δυνατόν πιο σύντομα στην Πάτρα.

3.50 Ένας ποδοσφαιρικός αγώνας διαρκεί 90min και είμαστε στο 15^ο λεπτό. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) Τι ώρα θα τελειώσει ένας αγώνας που ξεκίνησε στις 19:15

β) Πόσα δευτερόλεπτα κρατάει ένας αγώνας;

γ) Σε έναν τελικό ποδοσφαιρικού αγώνα, έχουμε παράταση, η οποία κρατάει 30 λεπτά παραπάνω από την κανονική διάρκεια. Υπολογίστε τη διάρκεια του ποδοσφαιρικού αυτού αγώνα σε δευτερόλεπτα και ώρες.

δ) Υπολογίστε ακόμα και τι ώρα θα τελειώσει ο συγκεκριμένος τελικός, αν υποθέσουμε ότι θα μεσολαβήσουν 2 διαλλείματα των 15 λεπτών. (Ένα στο ημίχρονο και ένα πριν την παράταση).

Κριτήριο Αξιολόγησης 3^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

- A) i. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι
 ii. Αν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα ποιο είναι μεγαλύτερο
- B) Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς:
- Στο ψηφίο των δεκάδων: 2245
 - Στο ψηφίο των εκατοστών: 17,997
 - Στο ψηφίο των μονάδων: 239,994

Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Στρέμματα	dm^2	m^2	cm^2
0,003			
	250		
		0,1	
			36000

Μονάδες 5

Θέμα 3ο

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{2,5 + 1,5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2}{3,6 + 2,4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)^2}, \quad B = \frac{2,5 + \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}, \quad \Gamma = \frac{A + \frac{1}{B}}{B + \frac{1}{A}}$$

Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Τρία παιδιά ανακάλυψαν ένα <<θησαυρό>> και τον μοιράστηκαν.

Ο Α πήρε το $\frac{1}{4}$ της περιουσίας, ο Β πήρε $\frac{1}{3}$ της περιουσίας και ο Γ πήρε 5 Ευρώ.

Πόση ήταν η περιουσία και πόσα ευρώ πήρε ο Α και ο Β;

Μονάδες 5

Διάρκεια 45 λεπτά

4ο Κεφάλαιο – Εξισώσεις και Προβλήματα

A.4.1 Η Έννοια της Εξίσωσης

$$\begin{aligned} \text{Οι εξισώσεις } & \alpha + x = \beta, x - \alpha = \beta, \alpha - x = \beta, \\ & ax = \beta, \alpha : x = \beta, x : \alpha = \beta \end{aligned}$$

Εξισώσεις α΄ βαθμού και προβλήματα

Θεωρία

Μία ισότητα, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x , ονομάζεται εξίσωση.

Γνωστοί είναι οι όροι που γνωρίζουμε σε μία εξίσωση, ενώ άγνωστοι είναι οι όροι που περιέχουν την μεταβλητή μας.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

- Μία εξίσωση είναι αδύνατη, όταν είναι μορφής $0x = a$, γιατί για κάθε τιμή της μεταβλητής x το πρώτο μέλος ισούται πάντα με 0 , οπότε δεν μπορεί να είναι ποτέ ίση με a . Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση.
- Μία εξίσωση είναι ταυτότητα (αόριστη), όταν είναι της μορφής $0x = 0$, δηλαδή κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.

Ενδεικτική λύση μιας εξίσωσης σε βήματα

- ✓ Αν έχουμε παρονομαστές, τότε με τη βοήθεια του ΕΚΠ τους απαλείφουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ.
- ✓ Στη συνέχεια αν μας έχουν μείνει παρενθέσεις τότε τις βγάζουμε κάνοντας τις πράξεις.
- ✓ Στη συνέχεια πρέπει να χωρίσουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους, μεταφέροντας στο ένα μέλος τους αγνώστους και στο άλλο τους άγνωστους. ΠΡΟΣΟΧΗ όταν μεταφέρουμε είτε γνωστό είτε άγνωστο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζει το πρόσημό του!!!
- ✓ Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- ✓ Μετά διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου
- ✓ Και τέλος κάνουμε τις απλοποιήσεις και βρίσκουμε την τιμή του αγνώστου.
- ✓ Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $0x=0$ τότε η εξίσωση είναι αόριστη.
Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $0x=a$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$, με $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μία μόνο λύση την $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Άλυτες Ασκήσεις

4.1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να αφαιρέσω έναν αριθμό γ και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a - \gamma = \beta - \gamma$ ()

β) Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να πολλαπλασιάσω έναν αριθμό γ (με $\gamma \neq 0$) και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα.
Δηλαδή $a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ ()

γ) Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να προσθέσω έναν αριθμό γ και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a + \gamma = \beta + \gamma$ ()

δ) Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να διαιρέσω έναν αριθμό γ (με $\gamma \neq 0$) και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a : \gamma = \beta : \gamma$ ()

4.2 Στην παρακάτω εξίσωση να γράψετε ποιο είναι το 1^ο μέλος της και ποιο το 2^ο.

$$5 \cdot x - 1 = 20 + 2 \cdot x$$

4.3 Με ποιον τρόπο μπορούμε να μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο μέλος;

4.4 Πότε λέμε ότι μία εξίσωση είναι αδύνατη;

4.5 Πότε λέμε ότι μία εξίσωση είναι ταυτότητα;

4.6 Να γράψετε με μαθηματικές εκφράσεις τις προτάσεις:

α) το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2

β) το εξαπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 10

γ) ένας αριθμός αυξημένος κατά το διπλάσιό του

δ) ένας αριθμός αυξημένος κατά τα $\frac{4}{5}$ αυτού

4.7 Να γράψετε με μαθηματικές εκφράσεις τις προτάσεις:

α) το τριπλάσιο ενός αριθμού ισούται με το 10

β) το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2 είναι μεγαλύτερο του 12

γ) το εξαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2 είναι μικρότερο από τον αριθμό αυτόν

δ) σε έναν αριθμό προσθέτουμε το 5 και βρίσκουμε 15

ε) από έναν αριθμό αφαιρούμε το 5 και βρίσκουμε 21

4.8 Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

α) $x + 2 > 14$

β) $2x + 4 = 10$

γ) $x < 12$

δ) $4x - 10$

ε) $3x - 20 = 28$

στ) $4x + 4 > 4$

4.9 Να εκφράσετε συμβολικά:

- α) την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διπλάσιο μήκος από το πλάτος του
β) την περίμετρο ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a

4.10 Να γράψετε με συντομότερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

α) $x + x + x + x + x + x =$

β) $4 \cdot x + 3 \cdot x + 2 \cdot x =$

γ) $2,5 \cdot x + 1,5 \cdot x + 3,5 \cdot x =$

δ) $10 \cdot a + 3 \cdot a - 4 \cdot a =$

ε) $2 \cdot a + 3 \cdot \beta - \alpha - 2 \cdot \beta =$

στ) $120 \cdot y - 35 \cdot y + 20 \cdot y - 12 \cdot y =$

4.11 Είναι ο αριθμός 25 λύση της εξίσωσης $2 \cdot x + 30 = 3 \cdot x + 5$;

4.12 Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς 0,1,4,12 είναι λύσεις της εξίσωσης $2 + x + 3 = 5 + x$. Τι συμπεραίνεται για αυτή την εξίσωση;

4.13 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι αόριστη και ποιά αδύνατη

α) $0 \cdot x = 0$

β) $2 \cdot x = 0$

γ) $x + 5 = 5 + x$

δ) $2x + 1 = 2x - 1$

4.14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + 10 = 15$

β) $x + 1,5 = 0,5$

γ) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

δ) $6 + x = 8 - 1$

4.15 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x - 20 = 34$

β) $5,5 - x = 8$

γ) $\frac{5}{4} - x = 1$

δ) $x - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$

4.16 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3 \cdot x = 3$

β) $x : 2 = 6$

γ) $16,6 : x = 4$

δ) $\frac{2}{5} \cdot x = 4$

ε) $x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$

4.17 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{x} = \frac{10}{2}$

β) $\frac{4}{5} = \frac{x}{2}$

γ) $\frac{6}{x} = \frac{12}{5}$

4.18 Στην εξίσωση $x = 3 + a$ το a και το x είναι φυσικοί αριθμοί. Να βρείτε:

α) ποιές από τις τιμές 0,1,3,4,6 μπορεί να πάρει ο x

β) για ποιά τιμή του a το x ισούται με 10;

4.19 Να γράψετε πιο σύντομα τις παραστάσεις:

α) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

β) $\frac{a}{4} - \frac{a}{5} + \frac{a}{6}$

γ) $\frac{4x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x}{3}$

δ) $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{5}$

4.20 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x+4}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{4}$

β) $\frac{2}{3} + \frac{x+2}{6} = 1$

γ) $\frac{x+4}{4} + \frac{1}{3} = 4$

δ) $\frac{4}{9} + \frac{x+2}{6} = \frac{1}{3}$

4.21 Για ποια τιμή του φυσικού x δεν έχουν νόημα τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{2}{x}$

β) $\frac{4}{x-4}$

γ) $\frac{5}{6 \cdot x}$

4.22 Αν ο x είναι φυσικός αριθμός και ισχύει ότι $20 < x$ και $x > 17$, να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x .

4.23 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x + 4 = 12$

β) $4x - 5 = 7$

γ) $1,5x + 2 = 5$

δ) $6x - 4 = 22$

4.24 Να βρείτε ποιος αριθμός, όταν διαιρεθεί με το 24 δίνει το τετράγωνο του κλάσματος $\frac{1}{2}$

4.25 Αν στον αντίστροφο ενός αριθμού προσθέσουμε το 2 θα βρούμε τον αντίστροφο του $\frac{6}{15}$

4.26 Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

1) $2\beta + 3\beta - 2\beta$

2) $5\omega + 13\omega - 32\omega$

3) $3\alpha - 4\alpha - 12\alpha - 30\alpha$

4.27 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Η εξίσωση $5x = 5$ έχει λύση την $x=1$ ()

β) Η εξίσωση $3x - 2 = 2$ έχει λύση την $x=3$ ()

γ) Η εξίσωση $1x - 3x = 2$ έχει λύση την $x=1$ ()

δ) Η εξίσωση $2x = 0$ είναι αδύνατη ()

ε) Μία από τις λύσεις της εξίσωσης $6x = 18$ είναι η $x=3$ ()

στ) Η εξίσωση $0x = 145$ έχει λύση την $x=0$ ()

ζ) Η εξίσωση $2x = 2$ έχει λύση την $x=1$ ()

η) Η εξίσωση $2x - 2 = 2$ έχει λύση την $x=3$ ()

θ) Η εξίσωση $2x - 5x = 2$ έχει λύση την $x=1$ ()

ι) Η εξίσωση $2x - 5x = 2$ έχει λύση την $x=1$ ()

ια) Η εξίσωση $2x - 5x = 2$ έχει λύση την $x=1$ ()

ιβ) Μία από τις λύσεις της εξίσωσης

$$0x = 15 \text{ είναι η } x=15 \text{ ()}$$

ιγ) Η εξίσωση $5x = 0$ έχει λύση την $x=0$ ()

4.28 Ποιος είναι ο αριθμός x , που επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;

1) $x + 5 = 7,1$

2) $x + 5 = 12$

3) $2 \cdot x = 8$

4) $3 \cdot x = 12$

5) $\frac{x}{3} = 6$

6) $\frac{6}{x} = 2$, με $x \neq 0$

7) $\frac{12}{x} = 6$, με $x \neq 0$

8) $\frac{2}{x} = 20$, με $x \neq 0$

9) $\frac{x}{5} = 5$

10) $\frac{x}{7} = 10$

11) $x - 7 = 30$

12) $x - 5 = 21$

4.29 Ο αριθμός 2 επαληθεύει την εξίσωση $x+22=25$;

4.30 Ο αριθμός 21 είναι η λύση της εξίσωσης $x+5=25$;

4.31 Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις:

α) $3 \cdot x + 2 \cdot x + 1 \cdot x =$

β) $3 \cdot x + 2 \cdot x + 1 \cdot x - 6 \cdot x =$

γ) $3 \cdot \omega + 2 \cdot \omega + 1 \cdot \omega =$

δ) $15 \cdot \alpha + 15 \cdot \beta - \alpha - \beta =$

4.32 Αν οι εξισώσεις $3 + x = 4$ και $3 \cdot x = \beta$ έχουν την ίδια λύση (ρίζα) να βρείτε τον αριθμό β .

4.33 Αν οι εξισώσεις $3 + x = 14$ και $\alpha \cdot x = 22$ έχουν την ίδια λύση (ρίζα) να βρείτε τον αριθμό α .

4.34 Δίνεται η παρακάτω εξίσωση:

$$6 \cdot x + 30 \cdot x - 4 = 36 - 4 \cdot x$$

Για ποια τιμή του x η παραπάνω εξίσωση έχει λύση, δηλαδή το x είναι ρίζα της εξίσωσης;

- α) 1 0 β) 0 γ) 2 δ) 30 ε) Καμία από τις παραπάνω

4.35 Αν $x = 12$, $y = 0$ και $z = 5$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = x + 18 \cdot (2 \cdot x - 39 \cdot y + 2) - (5 \cdot z - 4 \cdot x) : \omega - 81 \cdot y \cdot z$$

4.36 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x + 11 = 20$

β) $8x + 10 = 5 + 5$

γ) $\frac{3}{x-9} = 0$

δ) $2 \cdot \frac{x-1}{3} = 20$

ε) $\frac{2z-10}{9} = 0$

στ) $\frac{x-2}{123} = 0$

ζ) $6 \cdot \frac{2}{t} - 5 = 31$

η) $38 + \frac{6(y+2)}{5} = 50$

θ) $0x + 3 = 9$

ι) $0x + 26 = 5 + 21$

4.37 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1) $x + 6 = 6$

2) $8x + 6 = 3 + 3$

3) $\frac{5}{x-2} = 0$

4) $3x \cdot \frac{x-2}{5} = 30$

5) $\frac{5z-20}{18} = 0$

6) $\frac{x-1}{91} = 0$

7) $6x \cdot \frac{15}{t} - 4 = 26$

8) $38 + \frac{6(y+2)}{5} = 50$

9) $0x + 2 = 12$

10) $0x + 17 = 4 + 13$

4.38 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1) $8+x=17$

2) $x-2,5=5,7$

3) $3,4-x=0$

4) $3,4-x=2,3$

5) $x+\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

6) $x-2\frac{1}{3}=3\frac{4}{5}$

7) $5,4-x=2\cdot(7-2^2)-4$

4.39 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1) $3x=81$

2) $x\cdot 2=6$

3) $x\cdot\frac{6}{5}=\frac{4}{15}$

4) $\frac{x}{3}=2\frac{1}{6}$

5) $x:\frac{3}{4}=1$

6) $\frac{30}{x}=6$

4.40 Αν οι εξισώσεις $15-x=12$ και $3x+1+a=40-x$ έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τον αριθμό α.

4.41 Αν οι εξισώσεις $19-x=15$ και $4x+1+a=30-x$ έχουν την ίδια λύση, να βρείτε τον αριθμό α.

4.42 Να λυθεί η εξίσωση $(3^2 - 2^3) \cdot 8 - x = 2 \cdot 5 - 2^3$ και να κάνετε επαλήθευση.

4.43 Αν το 10 είναι η λύση της εξίσωσης $x^3 - 10x^2 + x - 10 = 1$ και να κάνετε επαλήθευση.

4.44 Αν το 4 είναι η λύση της εξίσωσης $x^3 - 4x^2 + x - 4 = -0$ και να κάνετε επαλήθευση.

4.45 Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\frac{10}{x} + 2x - 2 = 9$$

Ομοίως για τον αριθμό 3 και τον αριθμό 4.

4.46 Να εξετάσετε αν ο αριθμός 5 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\frac{20}{x} + 3x - 1 = 18$$

Ομοίως για τον αριθμό 6 και τον αριθμό 3.

4.47 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x - 2 \cdot (3x+12) = 11 + x$

β) $x - (x+2) = 6 + 2x$

γ) $\frac{2\omega}{3} = \frac{2\omega - 9 + 2\omega}{3}$

δ) $\frac{12}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2x}{3}$

4.48 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $10 \cdot x - 2 = 40 + 4 \cdot x$

β) $6 \cdot x - 3 \cdot x + 6 = 15 + 3 \cdot x$

γ) $x - x + 2 = 5 - x$

δ) $3 \cdot x - 2 = 1$

ε) $-5 \cdot x - 1 = 43 + 5 \cdot x$

στ) $x - (3 \cdot x + 2) = 6 + 4 \cdot x$

η) $4 \cdot x - 4 \cdot (x+2) = 20 + 2 \cdot x$

θ) $\frac{3}{5}x = \frac{2 \cdot x - 9 + 2 \cdot x}{5}$

ι) $4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{5}x$

ια) $3 \cdot x + 2 \cdot (3 \cdot x + 12) - 34 = -10 + 9 \cdot x$

4.49 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x - 7 = 14$

β) $3x + 2 = 5x - 6$

γ) $2(x - 8) = -x - 4$

δ) $4x + 2 - 9(x - 1) = 3(x + 5)$

ε) $4\psi - 3 = 2\psi + 8$

$$\sigma\tau) 2(\omega - 1) = -7$$

$$\zeta) 2(\omega - 1) = -7$$

$$\eta) \frac{x}{3} - 5 = \frac{4x}{9} - 6$$

$$\theta) 5(x - 3) - 2(x + 4) = x - 7$$

$$\iota) 10 + 5x = 5^2$$

$$\text{ια)} \frac{5\omega - 2}{7} = \frac{1 - \omega}{2}$$

$$\text{ιβ)} \frac{4 - 5x}{12} = \frac{3x - 3}{2}$$

$$\text{ιγ)} 5 - \frac{x+1}{3} = 2 + \frac{5x+2}{6}$$

$$\text{ιδ)} \frac{4 - 5x}{12} - \frac{3x - 3}{2} = 2x - 6$$

4.50 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2x+3}{3} - \frac{3x-5}{12} = \frac{x-3}{4} + 4$$

$$\beta) \frac{4-x}{2} - \frac{2x-2}{3} = \frac{x+12}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\gamma) \frac{1}{4}(x+x+\frac{1}{3}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2}-2x) = \frac{1}{4}(3x-x+1)$$

$$\delta) \frac{1}{2}(x-\frac{1}{3}) + \frac{x-\frac{1}{2}}{3} - \frac{3x}{-2} = \frac{7x}{3}$$

$$\epsilon) \frac{2x+3}{3} - \frac{3x-5}{12} = \frac{x-3}{4} + 2$$

$$\sigma\tau) \frac{x+1}{2} - \frac{2x-4}{6} = \frac{2x-1}{3}$$

$$\zeta) \frac{x+2}{5} - \frac{x-3}{10} = \frac{x-2}{2}$$

4.51 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Η εξίσωση $3x-5=8$, έχει για λύση την $x=2$ (...)

β) Η εξίσωση $x+5=8$, είναι αδύνατη (...)

γ) Η εξίσωση $-2x+5=9$, έχει ρίζα το -2 (...)

δ) Η εξίσωση $3x=0$, είναι αδύνατη (...)

ε) Η εξίσωση $3x-x=x$, είναι ταυτότητα (...)

4.52 Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις λύσεις τους στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $x+a=b$	α) $x=a:b$
2. $x-a=b$	β) $x=b-a$
3. $a \cdot x=b$	γ) $x=a-b$
4. $x:a=b$	δ) $x=b+a$
5. $a-x=b$	ε) $x=a \cdot b$
6. $\alpha : x=b$	στ) $x=b:\alpha$

4.53 Να κάνετε την κατάλληλη αντιστοίχιση:

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $(8-3-1) \cdot x=4$	a. αδύνατη
2. $(9-9) \cdot x=0$	b. $x=8$
3. $4:x=4:2$	c. $x=10$
4. $\frac{x+4}{4} + \frac{1}{4} = 2$	d. $x=6$
5. $10-2x=-15+3x$	e. $x=5$
6. $3 \cdot (x-2)=12$	f. $x=3$
7. $\frac{x+10}{20} = 1$	g. $x=2$
8. $\frac{x-8}{4} = 0$	h. Αόριστη ή ταυτότητα
9. $(3-3) \cdot x=4$	i. $x=1$

A.4.2 Επίλυση Προβλημάτων

Πρόβλημα ονομάζουμε την κατάσταση , που δημιουργείται , όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθεια μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.

Λύση ενός προβλήματος είναι η επίτευξη του στόχου.

Επίλυση ενός προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία , με την οποία επιτυγχάνεται η λύση.

Μεθοδολογία για την επίλυση προβλημάτων

- Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και τον ονομάζουμε με ένα γράμμα x , y , ω .
- Εκφράζουμε τα στοιχεία του προβλήματος με τη βοήθεια αυτού του αγνώστου
- Περιγράφουμε με μία εξίσωση το πρόβλημα
- Επιλύουμε την εξίσωση του προβλήματος
- Επαληθεύουμε τη λύση που βρήκαμε

Σημείωση

Υπάρχουν προβλήματα που δεν έχουν λύση ή δε λύνονται με εξισώσεις

Λυμένες Ασκήσεις

Να βρείτε τις λύσεις στα παρακάτω προβλήματα χρησιμοποιώντας εξισώσεις.

α) Ένας πελάτης πήγε σε ένα βουλκανιζατέρ και αγόρασε 2 σετ ελαστικών για τα δύο αυτοκίνητα, που έχει, προς 50 ευρώ το κάθε ελαστικό, αντί για 60 που είχε αρχική τιμή το κάθε ελαστικό, μετά από έκπτωση, που του έκανε ο πωλητής. Πόσα χρήματα κέρδισε από την έκπτωση ο πελάτης;

Λύση

Ο πελάτης αγόρασε : $2 \cdot 4 = 8$ ελαστικά και πλήρωσε : $8 \cdot 50 = 400$ ευρώ.

Ενώ χωρίς την έκπτωση έπρεπε να πληρώσει $8 \cdot 60 = 480$ ευρώ.

Άρα ο πελάτης κέρδισε $400 - 480 = 80$ ευρώ

β) Ο Γιώργος μετά από 8 χρόνια θα είναι 26 χρονών. Πόσων χρονών είναι σήμερα;

Λύση

Θα υποθέσουμε ότι η ηλικία που έχει σήμερα ο Γιώργος είναι ίση με τη μεταβλητή y . Άρα μπορούμε να φτιάξουμε τις εξής εξισώσεις:

$$x + 8 = 26 \Leftrightarrow$$

$$x = 26 - 8 \Leftrightarrow$$

$$x = 18 \text{ χρονών}$$

γ) Αν αφαιρέσουμε τον αριθμό 3 στο τριπλάσιο ενός φυσικού αριθμού βρίσκουμε 0. Ποιος είναι ο αριθμός; (Με εξίσωση)

Λύση

Θα υποθέσουμε ότι η μεταβλητή z απεικονίζει το φυσικό αυτό αριθμό. Οπότε έχουμε:

$$3z - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3z = 0 - 3 \Leftrightarrow$$

$$3z = 3 \Leftrightarrow z = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \text{Άρα ο φυσικός αριθμός είναι } z = 1$$

Άλυτες Ασκήσεις

4.2.1 Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου έχει περίμετρο 50m. Το μήκος της βάσης του είναι κατά 10m μικρότερο από το μήκος των άλλων δύο. Αν x είναι το μήκος των άλλων δύο πλευρών του τότε:

- α) Να βρείτε το μήκος του και την περιμέτρό του με την βοήθεια του x .
- β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ισοσκελούς τριγώνου και
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του.

4.2.2 Να εκφράσετε τις παρακάτω εκφράσεις με τη χρήση μίας ή δύο μεταβλητών:

- α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού, που είναι μεγαλύτερο από το 12.
- β) Το μισό από ότι είναι μία ομάδα ποδοσφαίρου 5x5 αυξημένο κατά 0.5.
- γ) Το εξαπλάσιο ενός οποιουδήποτε αριθμού αυξημένο κατά 999.
- δ) Το διπλάσιο ενός οποιουδήποτε αριθμού.

4.2.3 Η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου έχει περίμετρο 50m και η περίμετρος ενός τετραγώνου έχει μήκος το μισό από το μήκος του ισοπλεύρου τριγώνου.

- α) Να βρείτε το μήκος του και την περιμέτρό των δύο γεωμετρικών σχημάτων με την βοήθεια του x .
- β) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδόν τους.

4.2.4 Οι γονείς του Γιώργου του δώσανε λεφτά για να πάει να αγοράσει ότι θέλει σαν συγχαρητήρια που έγραψε 20 στα μαθηματικά. Ο Γιώργος πήγε και αγόρασε μία φωτογραφική μηχανή, η οποία κόστιζε 50 ευρώ. Μαζί με τη μηχανή αγόρασε και διάφορα αξεσουάρ και το ποσό έφτασε τα 75 ευρώ. Το κατάστημα του έκανε έκπτωση 6 ευρώ και έτσι του Γιώργου του περίσσεψαν 31 ευρώ. Να περιγράψετε με τη βοήθεια μίας μεταβλητής.

4.2.5 Δίνονται οι εξισώσεις :

α) $x = \frac{100}{2} + 100$

β) $x + 50 = 100$

γ) $3x - 25 = 50$

Να τις περιγράψετε έτσι ώστε να απεικονίζουν ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

- 4.54** Σ' ένα τεστ Μαθηματικών με 10 ερωτήσεις, κάθε σωστή απάντηση παίρνει 5 πόντους, ενώ η κάθε λανθασμένη απάντηση -3 πόντους. Ο Γιώργος πήρε 26 πόντους. Μπορείτε να βρείτε πόσες ερωτήσεις ήταν σωστές και πόσες λανθασμένες;
- 4.55** Σε μία οικογένεια η μητέρα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο της. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από του γιου. Να βρείτε πόσο χρονών είναι η μητέρα και ο γιος.
- 4.56** Σ' ένα ξενοδοχείο υπάρχουν 50 δωμάτια, από τα οποία μερικά είναι τρίκλινα και μερικά δίκλινα. Όταν είναι πλήρες έχει 120 άτομα. Να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα.
- 4.57** Η Ιωάννα έγραψε 15 και 19 σε δύο διαγωνίσματα Μαθηματικών. Να βρείτε τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 17 και μετά να βρείτε αν μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19.
- 4.58** Ένας μαθητής είναι 14 ετών και ένας καθηγητής είναι 31 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του καθηγητή θα είναι διπλάσια από την ηλικία του μαθητή;
- 4.59** Έχουμε 13 κέρματα των 20 και των 50 λεπτών, που η συνολική τους αξία είναι 5 ευρώ. Πόσα είναι τα κέρματα των 20 λεπτών και πόσα τα κέρματα των 50 λεπτών;
- 4.60** Σε μία οικογένεια η μητέρα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο της. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από του γιου. Να βρείτε πόσο χρονών είναι η μητέρα και ο γιος.
- 4.61** Η ηλικία του πατέρα είναι τριπλάσια της ηλικίας της κόρης. Σε 10 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια της κόρης. Πόσων ετών είναι ο πατέρας και πόσων ετών είναι η κόρη;
- 4.62** Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες μαζί;

Κριτήριο Αξιολόγησης 4^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές και (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α. Η εξίσωση $14x=0$ έχει λύση τον αριθμό 0 ()

β. Η εξίσωση $0x=25$ είναι ταυτότητα ()

γ. Η εξίσωση $0x=0$ είναι αδύνατη ()

δ. Με βάση την επιμεριστική ιδιότητα είναι σωστές οι παρακάτω προτάσεις;

$$α(β+γ)=αβ+αγ \quad ()$$

$$α(β-γ)=αβ-αγ \quad ()$$

ε. Πότε λέμε ότι μία εξίσωση είναι ταυτότητα και πότε λέμε ότι είναι αδύνατη;

Μονάδες 2.5

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $13x + 15 = 0$

β) $2x + 4 = 2(x - 1)$

γ) $x - 2(x - 1) = 3 - (x - 5)$

δ) $12x + 7 = 2x - 11$

ε) $1 - (5x - 1) = x - 6(x - 2)$

Μονάδες 7.5

ΘΕΜΑ 3ο

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\frac{x}{2} - 1 = x$

β) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-2}{6} = \frac{x}{2}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Αν η μεταβλητή β είναι ίση με 0 να λύσετε την εξίσωση $\beta x + 1 + \frac{x-2}{2} - \frac{3x-1}{4} = x$.

Μονάδες 5

Διάρκεια 60 λεπτά

5ο Κεφάλαιο – Ποσοστά

A.5.1 Ποσοστά

Ονομάζονται τα κλάσματα της μορφής $\frac{a}{100}$, όπου το a είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Συμβολισμός :

$$a \% = a \text{ τοις εκατό}$$

$$a \text{‰} = a \text{ τοις χιλίοις}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 81 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα κλάσματα

Λύση

$$\alpha) \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\beta) \frac{3}{2} = \frac{150}{100} = 150\%$$

$$\gamma) \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\delta) \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$$

$$\epsilon) \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Άσκηση 6/σελ. 81 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ένα μπουκάλι με οινόπνευμα παρέμεινε ανοιχτό και εξατμίστηκε το 22% του όγκου του. Το μπουκάλι περιείχε αρχικά 0,610 lt. Πόσα lt οινόπνεύματος εξατμίστηκαν;

Λύση

Θα βρούμε πόσα lt είναι τα 22% του 0,610lt

Οπότε έχουμε ότι :

$$22\% \text{ του } 0,610\text{lt} = \frac{22}{100} \cdot 0,610 = \frac{22 \cdot 0,610}{100} = \frac{13,42}{100} = 0,1342\text{lt}$$

Άρα εξατμίστηκαν 0,1342lt οινόπνεύματος

Άλυτες Ασκήσεις

5.1 Να γράψετε με τη μορφή ποσοστών τα παρακάτω κλάσματα.

i. $\frac{1}{2}$

vi. $\frac{2,5}{10}$

ii. $\frac{3}{8}$

vii. $\frac{3,42}{100}$

iii. $\frac{2}{5}$

viii. $\frac{5,5}{250}$

iv. $\frac{13}{25}$

ix. $\frac{17}{20}$

v. $\frac{19}{100}$

x. $\frac{23}{50}$

5.2 Να γράψετε με τη μορφή ποσοστών τα παρακάτω κλάσματα.

i. $\frac{3}{20}$

vi. $\frac{11}{13}$

xi. $\frac{3,47}{126}$

ii. $\frac{7}{50}$

vii. $\frac{73}{32}$

xii. $\frac{3,75}{5}$

iii. $\frac{38}{5}$

viii. $\frac{55}{41}$

xiii. $\frac{1,3}{6,55}$

iv. $\frac{4}{7}$

ix. $\frac{70,58}{10,4}$

v. $\frac{1}{3}$

x. $\frac{1,5}{3}$

5.3 Να γράψετε με μορφή ποσοστών τους παρακάτω δεκαδικούς.

i. 0,8

vi. 0,05

ii. 1,17

vii. 0,568

iii. 0,82

viii. 0,001

iv. 32,52

ix. 901,08

v. 36,08

x. 1.075,005

5.4 Να γράψετε ως κλάσματα τα παρακάτω ποσοστά.

i.	5%	vi.	255,8%
ii.	20%	vii.	0,28%
iii.	80,6%	viii.	27,8%
iv.	32,57%	ix.	358%
v.	110%	x.	7.258%

5.5 Να γράψετε ως κλάσματα τα παρακάτω ποσοστά.

- i. 52%
- ii. 125%
- iii. 550%
- iv. 3%
- v. $110,5\%$
- vi. $1,25\%$

5.6 Να υπολογίσετε:

- i. Το 15% του 70
- ii. Το 23% του 88
- iii. Το 3,5% του 48
- iv. Το 12,8% του 30
- v. Το 12% του 2
- vi. Το 75% του 8,8
- vii. Το 0,2% του 2.000

5.7 Να υπολογίσετε:

- i. Το 300% του 25
- ii. Το 150% του 3,25
- iii. Το 200% του 7,15
- iv. Το 39% του 500
- v. Το 45% το 180
- vi. Το 5% του 739
- vii. Το $0,35\%$ του 1.990

5.8 Να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό που αντιπροσωπεύει.

i.	Το 4 στο 80	vi.	Το 23,1 στο 14,5
ii.	Το 70 στο 280	vii.	Το 22,8 στο 45,25
iii.	Το 3,8 στο 12	viii.	Το 8 στο 15
iv.	Το 5 στο 25	ix.	Το 7 στο 140
v.	Το 18 στο 32	x.	Το 3 στο 56

5.9 Να υπολογίσετε:

- i. το 8% του 1m.
- ii. το 18% του 1kg.
- iii. το 30% του 1l.
- iv. το 0,5% του στρέμματος.

- v. το 25% των 5000 ευρώ
- vi. το 38% των 5 ℓ .
- vii. το 50% των 22km.
- viii. το 100% των 7 στρεμμάτων.

- 5.10** Ένα σχολείο έχει 165 μαθητές. Το 40% αυτών είναι αγόρια. Πόσα αγόρια έχει το σχολείο;
- 5.11** Ο μηνιαίος μισθός ενός υπαλλήλου είναι 950 ευρώ. Αν ο μισθός του αυξηθεί κατά 1,5%, να υπολογίσετε την αύξηση.
- 5.12** Αν ένα είδος γάλατος έχει 4% λιπαρά, να υπολογίσετε τα λιπαρά που καταναλώνουμε αν πιούμε ένα ποτήρι των 250ml από αυτό το γάλα.
- 5.13** Ο Αχιλλέας είχε μαζέψει 225 ευρώ. Ξόδεψε το 20% των χρημάτων του για να αγοράσει ένα δώρο στο φίλο του. Πόσα χρήματα του έμειναν;
- 5.14** Η Υακίνθη πήγε για φαγητό με τη φίλη της σε μία πιτσαρία. Ο λογαριασμός ήταν 20 ευρώ. Αποφάσισαν να αφήσουν 15% φιλοδώρημα. Πόσο κόστισε το γεύμα τους;
- 5.15** Ο Κώστας μάζεψε τα φετινά Χριστούγεννα 20% περισσότερα χρήματα από ότι πέρυσι. Πόσα χρήματα είχε μαζέψει πέρυσι αν φέτος μάζεψε 78 ευρώ;
- 5.16** Η Σοφία αγόρασε ένα κινητό τηλέφωνο 144 ευρώ με έκπτωση 40%. Ποια ήταν η αρχική αξία του κινητού τηλεφώνου;

Α.5.2 Προβλήματα Με Ποσοστά

Συνοπτικό Τυπολόγιο

- Τόκος=Κεφάλαιο · Επιτόκιο
- ΦΠΑ= Τιμή προϊόντος · Ποσοστό του φόρου

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 83 (Βιβλίο Οργανισμού)

Επιχειρηματίας αγόρασε 400 μετοχές μιας εταιρείας , προς 50€ την κάθε μετοχή. Σε ένα μήνα η μετοχή έπεσε κατά 8 % και το επόμενο δίμηνο ανέβηκε κατά 5 % το μήνα.

- α) Ποια ήταν η τιμή της μετοχής στο τέλος του τρίτου μήνα ;
- β) Η επένδυση του επιχειρηματία ήταν κερδοφόρα ή όχι ;
- γ) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους ή ζημίας του , επί του αρχικού κεφαλαίου;

Λύση

α) τον πρώτο μήνα η μετοχή έπεσε κατά 8 %

$$\text{Δηλαδή } \frac{8}{100} \cdot 50 = 4 \text{ €}, \text{ άρα η τιμή της έγινε } 50 - 4 = 46 \text{ €}$$

Τον δεύτερο μήνα η μετοχή ανέβηκε κατά 5 %

$$\text{Δηλαδή } \frac{5}{100} \cdot 46 = 2,3 \text{ €}, \text{ άρα η τιμή της έγινε } 46 + 2,3 = 48,3 \text{ €}$$

Τον τρίτο μήνα η μετοχή ανέβηκε κατά 5%

$$\text{Δηλαδή } \frac{5}{100} \cdot 48,3 = 2,415 \text{ €}, \text{ άρα η τιμή της ανέβηκε στα } 48,3 + 2,415 = 50,715 \text{ €}$$

β) η επένδυση του επιχειρηματία ήταν κερδοφόρα διότι:

Αγόρασε 400 μετοχές με 50€ η κάθε μία άρα η συνολική τους αξία ήταν

$$400 \cdot 50 = 20.000 \text{ €}$$

Στο τέλος του τρίτου μήνα η τιμή κάθε μετοχής είναι 50,715€

Άρα η συνολική αξία τους είναι

$$400 \cdot 50,715 = 20.286 \text{ €}$$

Επομένως το κέρδος του θα είναι $20.286 \text{ €} - 20.000 \text{ €} = 286 \text{ €}$

Άσκηση

Ένας ιδιωτικός υπάλληλος θέλει να καταθέσει σε μία τράπεζα 40000 ευρώ. Η συμφωνία είναι για δύο χρόνια. Πηγαίνει σε δύο τράπεζες. Η πρώτη τράπεζα του προσφέρει σταθερό επιτόκιο 4% και για τα δύο χρόνια. Η δεύτερη του προσφέρει επιτόκιο 2% την πρώτη χρονιά

και την δεύτερη χρονιά 5%. Ποια τράπεζα τον συμφέρει περισσότερο;
(Να σημειωθεί ότι οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται, δηλαδή προστίθενται στο κεφάλαιο.)

Λύση

Πρώτη τράπεζα:

Σταθερό επιτόκιο 4%

Στο τέλος της πρώτης χρονιάς θα έχει κεφάλαιο 40.000 ευρώ επί 4%. Άρα 1600 ευρώ επιπλέον. Το τελικό κεφάλαιο για την πρώτη χρονιά γίνεται 41600 ευρώ.

Οπότε στο τέλος της δεύτερης χρονιάς το κεφάλαιο, λόγω της κεφαλαιοποίησης, θα είναι 41600 ευρώ επί 4%. Άρα 1864 ευρώ επιπλέον. Το τελικό κεφάλαιο στη δεύτερη χρονιά θα είναι $41600 + 1864 = 43464$ ευρώ.

Άρα από την πρώτη τράπεζα κερδίζει από το επιτόκιο 3464 ευρώ.

Δεύτερη τράπεζα:

Επιτόκιο 1^{ης} χρονιάς : 2%

Στο τέλος της πρώτης χρονιάς θα έχει κεφάλαιο 40.000 ευρώ επί 2%. Άρα 800 ευρώ επιπλέον. Το τελικό κεφάλαιο για την πρώτη χρονιά γίνεται 40800 ευρώ.

Επιτόκιο 2^{ης} χρονιάς : 5%

Οπότε στο τέλος της δεύτερης χρονιάς το κεφάλαιο, λόγω της κεφαλαιοποίησης, θα είναι 40800 ευρώ επί 5%. Άρα 2040 ευρώ επιπλέον.

Το τελικό κεφάλαιο στη δεύτερη χρονιά θα είναι $40800 + 2040 = 42840$ ευρώ.

Άρα από την πρώτη τράπεζα κερδίζει από το επιτόκιο 2840 ευρώ.

Άρα το συμφέρει η πρώτη τράπεζα, καθώς έχει κέρδος : $3464 - 2840 = 624$ ευρώ.

Άλυτες Ασκήσεις

- 5.17** Ένας έμπορος πουλάει ένα εμπόρευμα αξίας 850 ευρώ με κέρδος 25%. Σε ποια τιμή το πουλάει;
- 5.18** Σε περίοδο εκπτώσεων αγοράσαμε ένα προϊόν αξίας 15.000 ευρώ με έκπτωση 22%
- α) πόσα χρήματα ήταν η έκπτωση ;
 - β) πόσο τελικά αγοράσαμε το προϊόν ;
- 5.19** Τηλεόραση πουλήθηκε με έκπτωση 15% και ο αγοραστής ωφελήθηκε 90 ευρώ. Ποια είναι η αξία της τηλεόρασης πριν από την έκπτωση;
- 5.20** Έμπορος αγόρασε εμπορεύματα αξίας 36.000 ευρώ αντί 29.920 ευρώ. Πόσο % ήταν η έκπτωση που του έκαναν;
- 5.21** Ο Βασίλης ήταν 48 κιλά και σε ένα χρόνο το βάρος του αυξήθηκε σε 54 κιλά. Να βρείτε το ποσοστό της αύξησης.
- 5.22** Αν καταθέσουμε στην τράπεζα 500.000 ευρώ με επιτόκιο 4% το χρόνο, να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα έχουμε ύστερα από:
- i) ένα χρόνο,
 - ii) δύομισι χρόνια, αν γνωρίζουμε ότι ο τόκος κεφαλαιοποιείται κάθε χρόνο.
- 5.23** Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 14cm. Αυξάνουμε την πλευρά του τετραγώνου κατά 15%. Να υπολογίσετε:
- i) Το μήκος της πλευράς μετά την αύξηση.
 - ii) Το ποσοστό αύξησης του εμβαδού.
- 5.24** Μια μονάδα αφαλάτωσης θαλασσινού νερού, αποσπάει 3% αλάτι της ποσότητας νερού. Αν σε μια δεξαμενή της περιέχονται 150t, βρείτε πόσα κιλά αλάτι θα πάρουμε.
- 5.25** Από 100kg γάλα παίρνουμε 6kg βούτυρο. Να βρείτε:
- i) από 350kg γάλα πόσο βούτυρο θα πάρουμε.
 - ii) για να πάρουμε 4,5 Kg βούτυρο πόσο γάλα χρειαζόμαστε.
- 5.26** Καταθέτουμε σε μια τράπεζα κεφάλαιο 18.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 8%. Έπειτα από ένα χρόνο, πόσα χρήματα θα έχουμε;
- 5.27** Πόσο κεφάλαιο πρέπει να καταθέτουμε σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 8%, ώστε μετά από ένα χρόνο να έχουμε 22.700 ευρώ;
- 5.28** Για ένα είδος με συντελεστή Φ.Π.Α. 19% πληρώσαμε 91,7 ευρώ. Να υπολογίσετε την αξία του δίχως το Φ.Π.Α.
- 5.29** Για είδη αξίας 900 ευρώ πληρώσαμε μαζί με το Φ.Π.Α. 1.062 ευρώ. Να υπολογιστεί ο Φ.Π.Α.

5.30 Έμπορος πούλησε το 20% της αξίας των εμπορευμάτων του με κέρδος 40%, τα 4/5 του υπολοίπου της αξίας των εμπορευμάτων του με κέρδος 10% και το νέο υπόλοιπο με ζημία 20%.

Αν τελικά γνωρίζουμε ότι κέρδισε 1.500 ευρώ, να βρείτε:

- i. Το ποσοστό του κέρδους του εμπόρου από τις παραπάνω πωλήσεις και
- ii. Το ποσό της αξίας των εμπορευμάτων του.

5.31 Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής κοστολογείται 1.230 ευρώ και η αξία του επιβαρύνεται με συντελεστή Φ.Π.Α. 19%, αλλά πωλείται με έκπτωση 10%. Να υπολογίσετε την τιμή πώλησης του υπολογιστή.

5.32 Στην Α΄ γυμνασίου ενός σχολείου το 60% των μαθητών έγραψε πάνω από τη βάση σε ένα διαγώνισμα. Το 40% αυτών έγραψαν άριστα. Αν οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου είναι 75, να βρείτε αυτούς που έγραψαν άριστα.

5.33 Ένα κατάστημα πουλάει τα προϊόντα του με κέρδος 35%. Αν ένα είδος πουλήθηκε 70,2 ευρώ, να βρείτε την τιμή αγοράς του από το κατάστημα.

5.34 Ένας μισθωτός ξοδεύει τα 3/5 του μισθού του για να συντηρήσει την οικογένεια του. Αν ξόδευε 15% περισσότερο θα του περισσεύαν 100 ευρώ. Ποιος είναι ο μισθός του;

5.35 Το σιτάρι χάνει στο άλεσμα το 1/4 του βάρους του, το αλεύρι αυξάνει το βάρος του στο ζύμωμα κατά 50%, ενώ το ζυμάρι χάνει στο ψήσιμο το 20% του βάρους του.

- i) βρείτε πόσα κιλά ψωμί θα πάρουμε από 2t σιτάρι.
- ii) βρείτε πόσα κιλά σιτάρι χρειαζόμαστε για να πάρουμε 4,5 t ψωμί.

5.36 Το εισόδημα ενός υπαλλήλου είναι 24.000 ευρώ. Το 1/4 είναι αφορολόγητο, το 35% φορολογείται με συντελεστή 12% και το υπόλοιπο με συντελεστή 20%. Βρείτε το φόρο που πλήρωσε ο υπάλληλος.

5.37 Να βρεθεί η τελική τιμή ενός προϊόντος στο οποίο γίνεται 3% έκπτωση, αν το προϊόν έχει αρχική τιμή 7,99 ευρώ.

5.38 Αν σε ένα προϊόν, που είχε αρχική τιμή 1200 ευρώ, ένας πελάτης το πήρε 1100 ευρώ, επειδή αγόρασε και άλλα πράγματα. Να βρεθεί πόσο της εκατό έκπτωση του έκανε η διευθύντρια του καταστήματος στο συγκριμένο προϊόν.

5.39 Να βρεθεί η αρχική τιμή ενός προϊόντος στο οποίο γίνεται 90 ευρώ, αν στο προϊόν έχει γίνει έκπτωση 10%.

5.40 Σε ένα κατάστημα με ηλεκτρονικά είδη ένας πελάτης θέλει να αγοράσει μία τηλεόραση, της οποίας το κόστος είναι 1299 ευρώ μαζί με το ΦΠΑ. Αν ο πελάτης την αγοράσει σήμερα θα πληρώσει ΦΠΑ 23%. Επειδή όμως ο πελάτης θα πληρωθεί από τη δουλεία

του την επόμενη μέρα και ο φόρος θα πάει από 23% στο 24%, θα αναγκαστεί να πληρώσει κάτι παραπάνω. Πόσο θα πληρώσει ο πελάτης με το νέο ΦΠΑ;

- 5.41** Ένας πατέρας θέλει να κάνει δώρο στο γιό του ένα αυτοκίνητο για τα γενέθλιά του. Το αυτοκίνητο πωλείται από το μαγαζί 14000 ευρώ. Ο πατέρας καταφέρνει να του κάνουν έκπτωση 500 ευρώ. Αν η εταιρία αγοράζει το αυτοκίνητο 12000 ευρώ. Πόσο της % κερδοφορία είχε η εταιρία πριν την έκπτωση και μετά;
- 5.42** Μία εταιρία θέλει να αγοράσει δύο υπολογιστές αξίας 599 ευρώ και 1999 ευρώ, έναν τώρα και έναν σε ένα μήνα. Το μαγαζί, από το οποίο θέλει να αγοράσει τους υπολογιστές προτίθεται να τους κάνει έκπτωση 7% στη συνολική τιμή, μόνο στην περίπτωση που τους αγοράσουν και τους δύο τώρα. Πόσο θα πληρώσει η εταιρία αν πάρει και τους δύο υπολογιστές τώρα αντί να τους αγοράσει ξεχωριστά και πόσο κέρδος έχει;
- 5.43** Στις 5/9/09 ένα αυτοκίνητο έχει καθαρή αξία 25000 Ευρώ και επιπλέον Φ.Π.Α. 19% . Στις 5/12/09 η καθαρή αξία αυξήθηκε 10% όμως ο Φ.Π.Α. έγινε 8%. Τέλος στις 2/2/10 η καθαρή αξία μειώθηκε 15% σε σχέση με την καθαρή αξία που είχε το αυτοκίνητο στις 5/12/09 και ο Φ.Π.Α. αυξήθηκε 50% . Ποια από τις παραπάνω ημερομηνίες έπρεπε να αγοράσει κάποιος το αυτοκίνητο ;
- 5.44** α) Ένας έμπορος αγοράζει από τον προμηθευτή του ένα προϊόν Α με 16 ευρώ και το πουλάει με κέρδος 30% στην τιμή αγοράς. Να ληφθεί υπόψη ότι στην τιμή πώλησης του προϊόντος στον καταναλωτή προστίθεται και ο ΦΠΑ 10%.
- Ποια είναι η τελική τιμή πώλησης του προϊόντος Α.
 - Αν ο έμπορος κάνει έκπτωση στον πελάτη του 5% , ποια θα είναι η νέα τιμή πώλησης του προϊόντος Α, (αν γνωρίζουμε ότι η έκπτωση γίνεται πάντα στην τιμή προ ΦΠΑ).
- β) Αν η τελική τιμή που ο έμπορος πουλάει ένα προϊόν Β είναι 363 ευρώ και ο ΦΠΑ του προϊόντος αυτού είναι 10%, να βρεθεί η τιμή πώλησης του προϊόντος προ ΦΠΑ. (αποφορολόγηση).
- 5.45** Αγοράσαμε ένα ψυγείο που κόστιζε μετρητοίς 1200 ευρώ χωρίς το Φ.Π.Α.
- Πόσο κοστίζει το ψυγείο, αν το αγοράσουμε μετρητοίς, συμπεριλαμβανομένου του Φ.Π.Α 25%;
- Αν αποφασίσουμε να πληρώσουμε το 50% προκαταβολή και το υπόλοιπο σε 10 μηνιαίες δόσεις με επιτόκιο 5% για το σύνολο του ποσού των δόσεων, τότε να υπολογίσετε:
- Πόσα χρήματα θα δώσουμε ως προκαταβολή, αν μαζί με την προκαταβολή δώσουμε ολόκληρο το ποσό του Φ.Π.Α.
 - Ποιο θα είναι το ποσό της κάθε δόσης;

iv. Πόσο τελικά θα μας κοστίσει το ψυγείο, αν δεν πληρώσουμε όλο το ποσό μετρητοίς, αλλά ακολουθήσουμε τον τρόπο με την προκαταβολή και τις δόσεις που προαναφέραμε;

5.46 Διαθέτουμε ένα ποσό 18.000 ευρώ και θέλουμε να το επενδύσουμε για δύο χρόνια. Η τράπεζα Α μας προτείνει να καταθέσουμε τα χρήματα και να τα εισπράξουμε ύστερα από δύο χρόνια με συνολικό τόκο για τα δυο χρόνια 10%. Η τράπεζα Β μας προτείνει να καταθέσουμε τα χρήματα για τον πρώτο χρόνο με επιτόκιο 5% και στη συνέχεια να καταθέσουμε και πάλι τα χρήματα μαζί με τον αρχικό τόκο για ένα χρόνο με επιτόκιο 5%.

Να βρείτε σε ποια από τις δύο τράπεζες θα εισπράξουμε στο τέλος των δύο χρόνων περισσότερα χρήματα.

5.47 Τρεις συνέταιροι επένδυσαν για τη σύσταση μιας βιοτεχνίας τα εξής ποσά:

ο πρώτος 4.500€, ο δεύτερος τα $\frac{4}{3}$ των χρημάτων του πρώτου και

ο τρίτος επένδυσε ένα ποσό μεγαλύτερο από του δεύτερου κατά το $\frac{1}{4}$ του ποσού αυτού.

Το πρώτο τρίμηνο λειτουργίας της βιοτεχνίας τα συνολικά έσοδα ήταν 12.000€.

Πριν μοιραστούν τα καθαρά κέρδη οι συνέταιροι, όμως έπρεπε:

- Να πληρώσουν τους εργαζόμενους, με τη μισθοδοσία να φτάνει στο $\frac{1}{3}$ των εσόδων του τριμήνου της βιοτεχνίας.
- Να πληρώσουν τα λειτουργικά έξοδα της βιοτεχνίας (ρεύμα, νερό, τηλέφωνο) σε ποσοστό 10% των εσόδων του τριμήνου.
- Να αποδώσουν ΦΠΑ.

i. Να βρεθούν τα ακριβή χρήματα για μισθοδοσία και λειτουργικά έξοδα.

ii. Αν πρέπει να αποδώσουν ΦΠΑ με ποσοστό 15% επί των εσόδων του τριμήνου, χωρίς τα λειτουργικά έξοδα και τη μισθοδοσία, να βρεθούν τα χρήματα του ΦΠΑ.

iii. Τέλος, οι τρεις συνέταιροι θα μοιραστούν τα έσοδα της βιοτεχνίας, χωρίς μισθοδοσία, λειτουργικά έξοδα και ΦΠΑ. Αν το μοίρασμα γίνει ανάλογα με τα αρχικά χρήματα που επένδυσε ο καθένας στην αρχή της σύστασης της βιοτεχνίας, να βρείτε πόσα χρήματα θα εισπράξει ο καθένας.

5.48 Διαθέτουμε ένα ποσό 10.000 ευρώ και θέλουμε να το καταθέσουμε σε μία τράπεζα με προνομιακό επιτόκιο.

Η τράπεζα Α μας δίνει ετήσιο επιτόκιο 10%.

Η τράπεζα Β μας δίνει εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%.

Ο τόκος που θα λάβουμε αν αφήσουμε τα χρήματα στην τράπεζα Α για ένα χρόνο, θα είναι ο ίδιος με τον τόκο που θα λάβουμε από την τράπεζα Β, αν τα αφήσουμε για δύο εξάμηνα σε αυτήν, δεδομένου ότι ο τόκος κεφαλαιοποιείται;

5.49 Αγοράζουμε ένα πλυντήριο ρούχων το οποίο κοστίζει 500 ευρώ χωρίς Φ.Π.Α. Το κατάστημα μας κάνει έκπτωση 10% στη τιμή προ ΦΠΑ. Το ποσοστό του Φ.Π.Α. είναι 20%. Να βρεθεί η τελική τιμή του πλυντηρίου μετά την έκπτωση και τον υπολογισμό του Φ.Π.Α. Δίνουμε 240 ευρώ προκαταβολή και τα υπόλοιπα σε 3 μηνιαίες δόσεις με τόκο 4%. Να βρεθεί το ποσό της κάθε δόσης και πόσο τελικά μας κόστισε το πλυντήριο.

5.50 Αγοράζουμε ένα φορητό ηλεκτρονικό υπολογιστή, ο οποίος κοστίζει 650 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή την τιμή ο Φ.Π.Α που είναι 25%. Το κατάστημα μάς κάνει έκπτωση 30% στη τιμή χωρίς τον ΦΠΑ.

i. Να βρεθεί η τιμή του Η/Υ χωρίς το ποσό του Φ.Π.Α.

ii. Να βρεθεί η τελική τιμή του υπολογιστή μετά την έκπτωση αν σ' αυτή συμπεριλαμβάνεται και ο αντίστοιχος Φ.Π.Α που αντιστοιχεί στην νέα τιμή του Η/Υ (μετά την έκπτωση).

iii. Να στρογγυλοποιήσετε την τελική τιμή του Η/Υ στο ψηφίο των μονάδων.

iv. Δίνουμε 69 ευρώ προκαταβολή και τα υπόλοιπα σε 2 μηνιαίες δόσεις με τόκο 2% για κάθε μηνιαία δόση. Να βρεθεί το ποσό της κάθε δόσης.

Κριτήριο Αξιολόγησης 5^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρεθούν τα παρακάτω ποσοστά:

- i. Το 20% του 3000
- ii. Το 100% του 365
- iii. Το 35% του 654

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Μία μπλούζα είχε 50 ευρώ και στη θερινή περίοδο έγινε αύξηση στην τιμή της κατά 20%. Τη φθινοπωρινή περίοδο έγινε μείωση στην τιμή της ξανά κατά 20%. Ποια είναι η τελική τιμή της μπλούζας;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα ψυγείο κόστιζε αρχικά 600€. Στις 10 Σεπτεμβρίου αυξήθηκε η τιμή του κατά 10% και ένα μήνα μετά, η νέα τιμή του αυξήθηκε πάλι κατά 10%. Είναι σωστό να πούμε ότι η αρχική τιμή αυξήθηκε κατά 20%; Αν όχι, μπορείτε να βρείτε το ποσοστό της αύξησης;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Ένας ηλεκτρολόγος είχε έσοδα 61.500 ευρώ για το 2011 και πρέπει να αποδώσει ΦΠΑ 23%, που παρακρατά από τους πελάτες του. Πόσο είναι το καθαρό εισόδημά του;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 5ο

Ένας υπάλληλος (Τάκης) κατέθεσε σε μία τράπεζα το ποσό των 20.000 ευρώ. Η τράπεζα του έδωσε επιτόκιο 4%, το χρόνο. Να βρείτε :

- α) το ποσό των τόκων στο τέλος του 1ου έτους.
- β) το νέο κεφάλαιο στο τέλος του 1ου έτους.
- γ) το συνολικό κεφάλαιο μετά από 15 μήνες (Στους 12 μήνες γίνεται κεφαλοποίηση).
- δ) το συνολικό κεφάλαιο στο τέλος του 2ου έτους (Στους 12 μήνες γίνεται κεφαλοποίηση).

Μονάδες 4

Διάρκεια 60 λεπτά

6^ο Κεφάλαιο - Ανάλογα Ποσά - Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

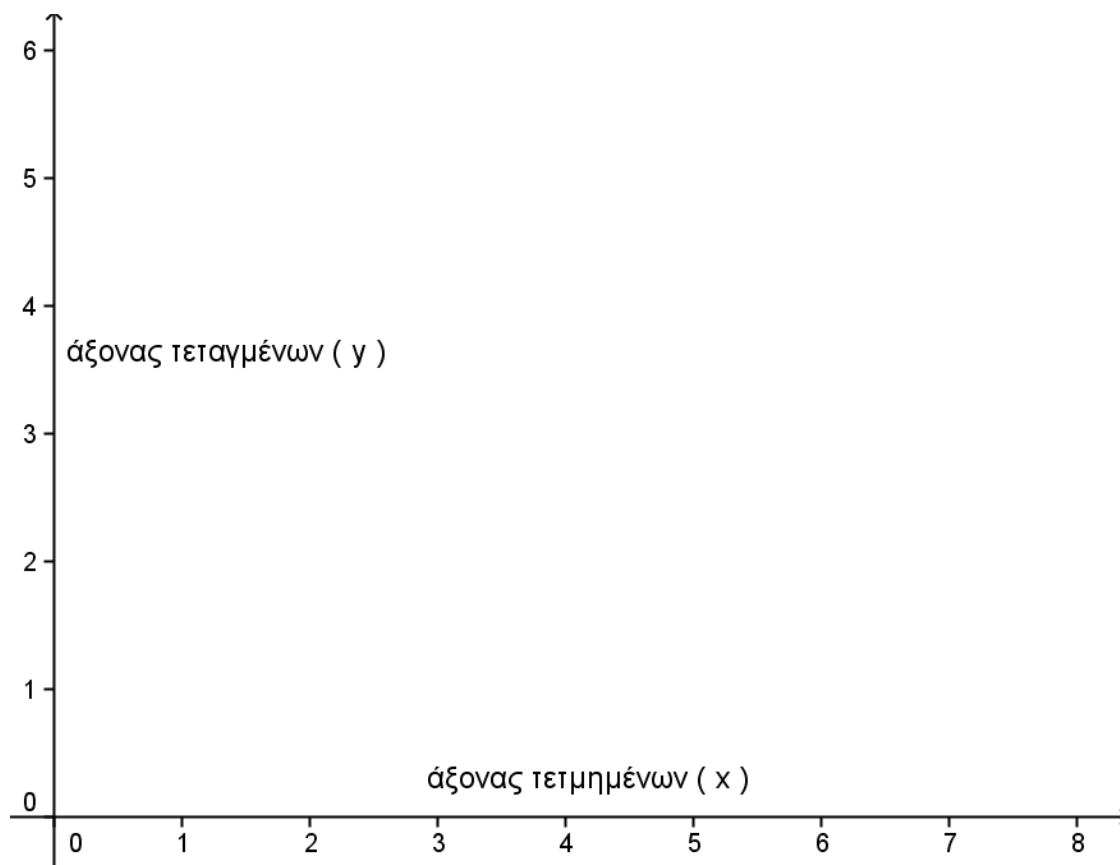
A.6.1 Παράσταση Αριθμών Στο Επίπεδο

Κάθε σημείο στο επίπεδο αναπαρίσταται με ένα ζεύγος αριθμών (x, y) .

Το x λέγεται **τετμημένη**

Το y λέγεται **τεταγμένη**

Το (x,y) λέγεται διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων :που σημαίνει ότι η σειρά έχει σημασία .Δηλαδή η τετμημένη x μπαίνει πάντα πρώτη και μετά η τεταγμένη y .



Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 4/σελ. 89 (Βιβλίο Οργανισμού)

Στο σχήμα βλέπουμε τμήμα ενός πίνακα απουσιών ανά τρίμηνο, για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ενός σχολείου. Κάθε θέση του πίνακα ορίζεται από το ζεύγος (γράμμα στήλης, αριθμός γραμμής).

- α) Σε ποια θέση βρίσκεται το όνομα του μαθητή Γεωργίου;
- β) Τι αντιπροσωπεύει ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση C8;
- γ) Ποιος αριθμός πρέπει να γραφεί στη θέση D12 και ποιος στη θέση E13;

Λύση

- α) E5
- β) το πλήθος των δικαιολογημένων απουσιών του μαθητή Αντωνίου στο 2^ο τρίμηνο
- γ) D12 → είναι το σύνολο των δικαιολογημένων απουσιών του μαθητή Βέλλιου δηλαδή $0 + 6 + 0 = 6$
E13 → είναι το άθροισμα των αδικαιολόγητων απουσιών του μαθητή Γεωργίου
Δηλαδή $20 + 4 + 3 = 27$

Άλυτες Ασκήσεις

6.1 Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία A(1,3), B(2,4), Γ(7, 2), Δ(3,3) και E(2,0,5).

6.2 Να πάρετε στο επίπεδο ένα σύστημα αξόνων και στη συνέχεια να σχεδιάσετε την τεθλασμένη γραμμή ABΓΔΕΖΑ, της οποίας οι συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Δ, E, Z δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Σημείο	Τετμημένη	Τεταγμένη
A	1	-6
B	-1	4
Γ	2	0,5
Δ	0	9
E	3	4
Z	4	8

6.3 Να παραστήσετε γραφικά τα σημεία:

- (1, 1,5) (2, 3) (3, 45) (4,6)
- (1, 50) (2, 100) (3, 150) (4, 200) (5, 250)

6.4 Να παραστήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία A(0,4) και B(3,0) και να υπολογίσετε την απόστασή τους από την αρχή των αξόνων.

- 6.5** Σε ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε τα σημεία $A(0,1)$, $B(0,2)$, $\Gamma(0,3)$ και $\Delta(0,6)$. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη θέση των σημείων αυτών;
- 6.6** Σε ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε τα σημεία $A(1,0)$, $B(2,0)$, $\Gamma(3,0)$ και $\Delta(5,0)$. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη θέση των σημείων αυτών;
- 6.7** Κατασκευάστε δύο κάθετους άξονες Ox και Oy και πάρτε τα σημεία: $A(5,1)$, $B(6,1)$, $\Gamma(7,1)$. Τι παρατηρείτε;
- 6.8** Σε ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε τα σημεία $A(2,1)$, $B(1,3)$, $\Gamma(2,4)$. Αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$, τι σχήμα δημιουργείται;
- 6.9** Σε ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,1)$, $\Gamma(3,3)$ και $\Delta(1,3)$. Αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$, τι σχήμα δημιουργείται;
- 6.10** Σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Πάνω στο οποίο να τοποθετηθούν τα σημεία $A(4,8)$, $B(2,2)$, $\Gamma(8,2)$. Τι σχήμα σχηματίζουμε αν φτιάξουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$;
- 6.11** Σας δίνεται η περσινή βαθμολογία δύο μαθητών, του Γιάννη και του Μάρκου, στο μάθημα των μαθηματικών. Ο Γιάννης έχει γράψει στο πρώτο τεστ 15, στο δεύτερο 20, στο τρίτο 18, στο τέταρτο 16, στο πέμπτο 12 και στο τελευταίο 10. Άρα έχουμε τα σημεία :

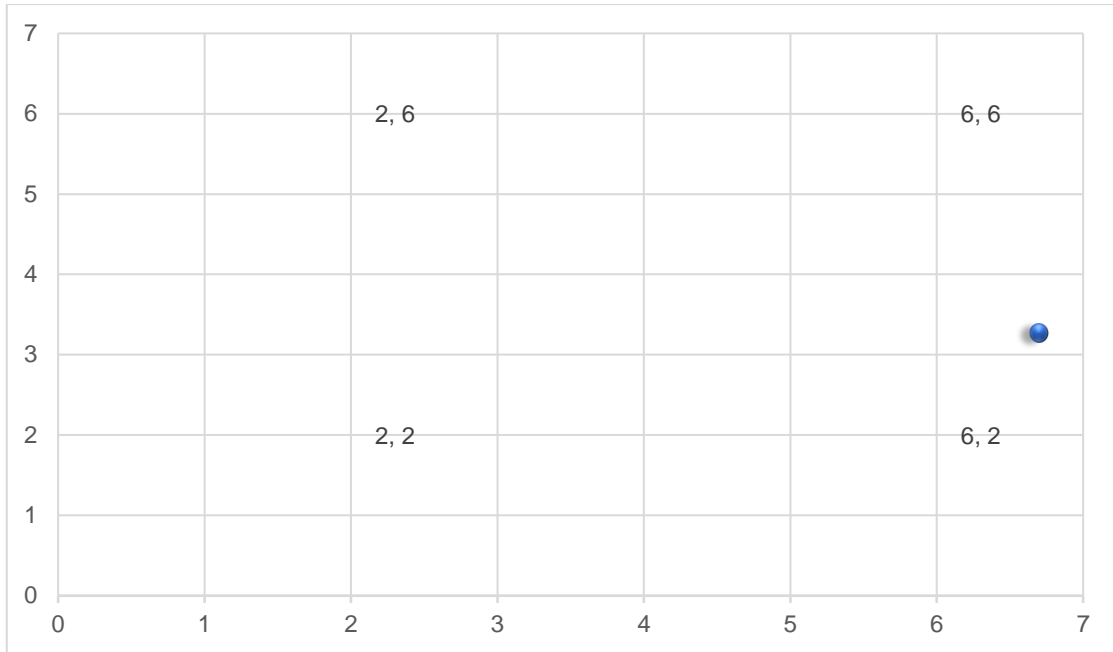
$(1,15)$, $(2,20)$, $(3,18)$, $(4,16)$, $(5,12)$, $(6,10)$

Ο Μάρκος έχει γράψει στα τεστ : στο πρώτο τεστ 10, στο δεύτερο 12, στο τρίτο 15, στο τέταρτο 17, στο πέμπτο 18 και στο τελευταίο, 19 Άρα έχουμε τα σημεία :

$(1,10)$, $(2,12)$, $(3,15)$, $(4,17)$, $(5,18)$, $(6,19)$

Φτιάξτε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο θα απεικονίζονται οι βαθμολογίες των μαθητών. Στη συνέχεια ενώστε με ευθύγραμμα τμήματα τις βαθμολογίες του κάθε μαθητή και δείτε ποιος είχε μεγαλύτερη εξέλιξη με την πάροδο του χρόνου.

- 6.12** Να βρείτε το εμβαδόν του σχήματος στο παρακάτω ορθοκανονικό σχήμα, αφού ενώσετε τα σημεία $(2,6)$ με $(6,6)$ και με $(2,2)$ και το $(6,2)$ με το $(2,2)$ με ευθύγραμμα τμήματα.



A.6.2 Λόγος Δύο Αριθμών

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης είναι το πηλίκο των μέτρων τους .

Τι είναι η αναλογία;

Αναλογία λέγεται η ισότητα δύο λόγων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, που ισούται με $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Τι είναι η κλίμακα;

Κλίμακα ονομάζεται ο σταθερός λόγος της απόστασης δύο σημείων πάνω στον χάρτη προς την πραγματική τους απόσταση , όταν αυτές οι αποστάσεις έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης.

Τύπος Κλίμακας : $\text{κλίμακα} = \frac{\text{μήκος σε σχέδιο}}{\text{πραγματικό μήκος}}$

Παράδειγμα

Αν έχουμε κλίμακα 1: 1.000.000 (cm) σημαίνει ότι δύο σημεία που απέχουν στην εικόνα 1cm στην πραγματικότητα απέχουν 1.000.000cm.

Παρατηρήσεις

1^η) Αν η κλίμακα είναι μεγαλύτερη του 1 τότε έχουμε μεγέθυνση.

2^η) Αν η κλίμακα είναι μικρότερη του 1 τότε έχουμε σμίκρυνση.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 92 (Βιβλίο Οργανισμού)

Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχουν σμικρυνθεί όλα τα αντικείμενα της φωτογραφίας;

Λύση

Μετράμε τον λόγο του ύψους του ανθρώπου στη φωτογραφία προς το ύψος του στην πραγματικότητα και πρέπει να είναι στην ίδια μονάδα μέτρησης

Άρα, $1,76 \text{ m} = 176 \text{ cm}$

Άρα, $\frac{4}{176} = \frac{4:4}{176:4} = \frac{1}{44}$

Άρα, όλα τα αντικείμενα έχουν σμικρυνθεί κατά 44 φορές.

Άσκηση 6/σελ. 92 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να συμπληρωθεί ο πίνακας :

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της κλίμακας

$$\text{κλίμακα} = \frac{\text{μήκος σε σχέδιο}}{\text{πραγματικό μήκος}}$$

Άρα $\frac{1}{5} = \frac{4}{x}$ έστω x το πραγματικό μήκος

Κάνουμε χιαστί

$$1 \cdot x = 5 \cdot 4$$

$$x = 20 \text{ cm}$$

Ομοίως: $\frac{3}{8} = \frac{\omega}{24}$, όπου ω το μήκος σε σχέδιο

$$8 \cdot \omega = 3 \cdot 24$$

$$8 \cdot \omega = 72$$

$$\omega = 72 : 8$$

$$\omega = 9 \text{ m}$$

$\frac{1}{30} = \frac{12}{y}$, όπου y είναι το πραγματικό μήκος

$$1 \cdot y = 30 \cdot 12$$

$$y = 360 \text{ cm}$$

Οι μονάδες στα μήκη πρέπει να είναι ίδιες για να βρούμε τον λόγο άρα τα 10 m είναι 1.000 cm
άρα

$$\frac{2}{1000} = \frac{2:2}{1000:2} = \frac{1}{500} = \text{κλίμακα}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{3,5}{a}$$

$a \cdot 1 = 100 \cdot 3,5$, όπου a μήκος στην πραγματικότητα σε cm

$$a = 350 \text{ cm}$$

Κλίμακα	1 : 5	3 : 8	1 : 30	1:500	1 : 100
Μήκος σε σχέδιο	4cm	9 m	12cm	2 cm	3,5 cm
Πραγματικό μήκος	20 cm	24m	360 cm	10 m	350 cm

Άλυτες Ασκήσεις

6.13 Να γράψετε το λόγο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, αλλά και το λόγο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, σε κάθε περίπτωση.

- i) $AB=5\text{cm}, \Gamma\Delta=10\text{cm}$
- ii) $AB=7\text{cm}, \Gamma\Delta=3,5\text{cm}$
- iii) $AB=12\text{cm}, \Gamma\Delta=\frac{3}{4} AB$
- iv) $AB=18\text{cm}, \Gamma\Delta=\frac{5}{2} AB$

6.14 Να βρεθούν οι άγνωστοι όροι των παρακάτω αναλογιών:

α) $\frac{x}{10} = \frac{6}{12}$

β) $\frac{4}{x} = \frac{3}{27}$

γ) $\frac{3}{4} = \frac{x}{40}$

δ) $\frac{40}{20} = \frac{6}{x}$

6.15 Η απόσταση Αθήνα – Βόλος είναι 325 χλμ. Τι μήκος έχει η απόσταση σε ένα χάρτη με κλίμακα $\frac{1}{1.000.000}$;

6.16 Σε έναν χάρτη η απόσταση μεταξύ δύο πόλεων είναι 50 εκατοστά. Αν η πραγματική τους απόσταση είναι 50 χλμ., ποια είναι η κλίμακα του χάρτη;

6.17 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

Κλίμακα	Μήκος στο σχέδιο	Πραγματικό μήκος
1:4	10cm	40cm
3:4	45cm	
1:20		3cm
	8cm	36cm

Κλίμακα	Απόσταση στο χάρτη	Πραγματική απόσταση
1:100.000	40cm	40km
1:300.000	35cm	
1:800.000		280.000m
	15cm	75cm

6.18 Σε χάρτη με κλίμακα 1:400.000 ένας δρόμος έχει μήκος 10cm. Να βρείτε το πραγματικό μήκος του δρόμου.

6.19 Αν ισχύει ότι $\frac{x}{y} = 2$ να βρείτε:

α) το $\frac{y}{x}$ β) το $\frac{x+y}{x}$ γ) το $\frac{x-y}{y}$ δ) το $\frac{x+y}{x-y}$

6.20 Η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1:200.000. Να βρείτε την απόσταση δύο πόλεων στο χάρτη, αν η πραγματική απόσταση είναι 30km.

6.21 Η πραγματική απόσταση δύο πόλεων είναι 150km, ενώ η απόσταση τους στο χάρτη είναι 30cm . Να βρείτε την κλίμακα του χάρτη.

6.22 Οι διαστάσεις ενός οικοπέδου που έχει σχήμα ορθογωνίου είναι 40m και 70m. Να βρείτε τις διαστάσεις με τις οποίες πρέπει να σχεδιαστεί, αν 2cm στο σχέδιο αντιπροσωπεύουν 5m. Ποια είναι η κλίμακα που επιλέξαμε;

6.23 Να βρείτε το λόγο της περιμέτρου ισόπλευρου τριγώνου προς την πλευρά του.

6.24 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), η βάση είναι διπλάσια από κάθε μία από τις ίσες πλευρές του. Να βρείτε με ποιους αριθμούς ισούνται οι λόγοι $\frac{AB}{AG}, \frac{AB}{BG}, \frac{BG}{AG}$ των πλευρών του.

6.25 Σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν διαστάσεις α, β το πρώτο και x, y το δεύτερο, οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους είναι ίσοι και ισχύει $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{1}{3}$. Αν η περίμετρος του πρώτου ορθογωνίου είναι $\Pi_1=6cm$, να υπολογίσετε την περίμετρο (Π_2) του δεύτερου ορθογωνίου.

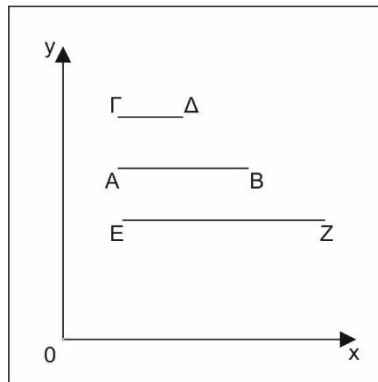
6.26 Μας δίνεται ένας χάρτης. Ο χάρτης αυτός έχει κλίμακα 1:1000. Μετράμε σε αυτό το χαρτί μία απόσταση ίση με 10cm. Πόσο είναι η πραγματική απόσταση;

6.27 Ποιοι είναι οι λόγοι των παρακάτω ευθύγραμμων τμημάτων αν το ΓΔ είναι το μισό του ΑΒ και το ΕΖ είναι 3 φορές το ΓΔ.

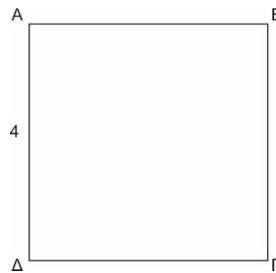
α) $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$
β) $\frac{\Gamma\Delta}{EZ}$

γ) $\frac{EZ}{\Gamma\Delta}$

δ) $\frac{AB}{EZ}$



6.28 Μας δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ, με πλευρά 4cm. Να φτιάξετε ένα άλλο τετράγωνο, έτσι ώστε οι πλευρές του καινούριου τετράγωνο να έχουν λόγο ως προς το πρώτο τετράγωνο 1:3



Α.6.3 Ανάλογα Ποσά – Ιδιότητες Ανάλογων Ποσών

Ορισμός

Δύο ποσά x , y ονομάζονται ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό τότε πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.

Ο λόγος των δύο ποσών που είναι ανάλογα είναι **σταθερός** και ίσος με **a** .

$$\frac{y}{x} = a = \text{συντελεστής αναλογίας}$$

Κάνοντας χιαστί προκύπτει η σχέση με την οποία συνδέονται δύο ανάλογα ποσά: $y = a \cdot x$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 3/σελ. 98 (Βιβλίο Οργανισμού)

Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα.

Λύση

α)

X	3	5	7
Y	8	10	12

Για να εξετάσουμε αν ποσά είναι ανάλογα πρέπει να εξετάσουμε τους λόγους

$$\frac{y}{x} = \text{να είναι ίδιοι σε κάθε στήλη, άρα } \frac{8}{3} = \frac{10}{5} = \frac{12}{7}, \text{ που όμως δεν ισχύει.}$$

Άρα δεν είναι ανάλογα τα ποσά.

β)

X	3	4	6	11
Y	0,9	1,2	1,8	3,3

$$\frac{y}{x} = \frac{0,9}{3} = 0,3$$

$$\frac{1,2}{4} = 0,3$$

$$\frac{1,8}{6} = 0,3$$

$$\frac{3,3}{11} = 0,3$$

Άρα, τα ποσά είναι ανάλογα αφού ο λόγος είναι σταθερός.

Άλυτες Ασκήσεις

6.29 Βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αναφέρονται σε ανάλογα ποσά. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Η κατανάλωση του νερού και η αξία κατανάλωσης.

β) Η περίμετρος ενός ισόπλευρου τριγώνου και η περίμετρος του.

γ) Ο αριθμός των εργατών και ο χρόνος που χρειάζεται ένα έργο για να ολοκληρωθεί.

6.30 Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι πίνακες ανάλογων ποσών.

x	5	12	18
y	10	24	36

x	2	40	9,6	0,56
y	0,25	5	1,2	0,07

x	5	20
y	4	16

x	1	30	5	2	45
y	3	90	20	6	120

x	7	14	25	50	100
y	10	20	40	80	120

x	3	6	9	15
y	8	16	24	40

6.31 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες ώστε να γίνουν πίνακες ανάλογων ποσών.

x	5		3	8	
y	20	28			60

x	2	7			0,6
-----	---	---	--	--	-----

y	15		45	75	
-----	----	--	----	----	--

x	4kg	9gr	200gr		600gr
y	30			75	

x	5	7		12	
y	0,6 ευρώ		1,8 ευρώ		2,4 ευρώ

6.32 Να δείξετε ότι οι παρακάτω πίνακες είναι πίνακες ανάλογων ποσών

x	1	2	3	4
y	1,5	3	4,5	6

x	1	2	3	4	5
y	50	100	150	200	250

6.33 Τα ποσά α και β είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\lambda = \frac{2}{5}$.

Να υπολογίσετε τον αριθμό β , αν:

- i) $\alpha=30$
- ii) $\alpha=9$

6.34 Τα ποσά α και β είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\lambda = \frac{4}{3}$. Να υπολογίσετε τον

αριθμό β , αν:

- i) $\alpha=6$
- ii) $\alpha=15$

6.35 Τα ποσά x και y του παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα. Να βρείτε το συντελεστή αναλογίας τους και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x		1,5	3	4,5		11,5
y	7			31,5	70	

6.36 Αν ένα μηχάνημα συσκευάζει σε 3 ώρες 150 κιλά κονσέρβας, να υπολογίσετε πόσες ώρες θα χρειαστεί για να συσκευάσει 537 κιλά.

6.37 Με 10 ευρώ αγοράζουμε 14kg ενός προϊόντος. Να βρείτε:

- i) με 600 ευρώ πόσα κιλά προϊόντος αγοράζουμε;
- ii) 2.800kg του προϊόντος πόσο στοιχίζουν;

6.38 Να συμπληρώσετε τα κενά, αν σας δίνεται ότι το x και y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{3}{5}$.

x	10		75
y		6	

6.39 Δίνονται οι μεταβλητές x και y και τα αντίστοιχα ποσά τους.

x	6	8	30
y	12	16	60

Δείξτε ότι τα ποσά αυτά είναι ανάλογα και να βρείτε το συντελεστή αναλογίας.

6.40 Έχουμε ένα χημικό διάλυμα υδροχλωρίου (HCl), στο οποίο περιέχεται 33% χλώριο (Cl). Πόσα mol περιέχονται σε 400mol διαλύματος;

A.6.4 Γραφική Παράσταση Σχέσης Αναλογίας

Είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο $O(0,0)$.

Παράδειγμα

Να κάνετε την γραφική παράσταση της $y = 2 \cdot x$

Λύση

Πρώτα θα κάνουμε τον πίνακα τιμών, δηλαδή θα δώσουμε τιμές στο x για να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές του y .

x	0	2	4	8
y	0	4	8	16

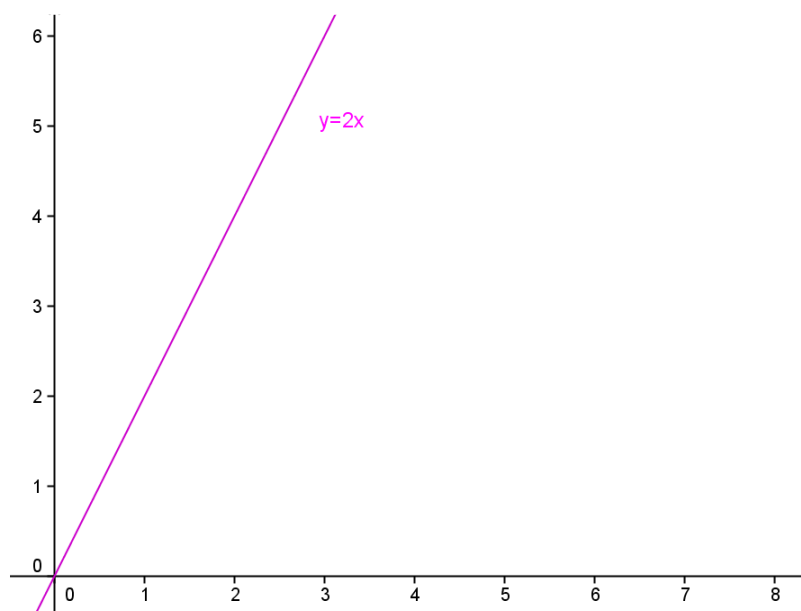
Μεθοδολογία

Για να ελέγξω αν τα ποσά ενός πίνακα είναι ανάλογα ή όχι αρκεί να ελέγξω αν ο λόγος τους $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός.

$$\text{Άρα: } \left. \begin{array}{l} \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{y}{x} = \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{y}{x} = \frac{16}{8} = 2 \end{array} \right\} \text{σταθερός λόγος } \frac{y}{x} = \alpha = 2, \text{ άρα τα ποσά είναι ανάλογα και η σχέση}$$

που τα συνδέει είναι $y = 2x$.

Η γραφική παράσταση είναι:



Παράδειγμα

Αν για 6 κιλά πατάτες πληρώνουμε 6,60€ πόσο θα πληρώσουμε για 12 κιλά πατάτες;

Λύση

Τα ποσά κιλά πατάτες και ευρώ είναι ανάλογα άρα αν $x =$ κιλά πατάτες και $y =$ ευρώ που πληρώνουμε

Για	6κιλά πατ.	Πληρώνουμε	6,60ευρώ
	12 κιλά πατ.		y ;

$$\text{Άρα } y = 6,60 \cdot \frac{12}{6} = 13,2$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 4/σελ. 101 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ένας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12.000 ευρώ για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια. Κάθε φόρμα κοστίζει 40 ευρώ, κάθε μαγιό 20 ευρώ και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50 ευρώ.

α) Να βρεις τις σχέσεις αναλογίας 'χρήματα – κομμάτια από κάθε είδος' και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

β) Ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό, για κάθε είδος. Βρες πόσα κομμάτια από κάθε είδος θα αγοράσει με τα χρήματα που διαθέτει, χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση των σχέσεων που δημιούργησες στο πρώτο ερώτημα της άσκησης.

Λύση

α) Έστω

φ φόρμες τότε θα πληρώσει $y = 40\varphi$

μ μαγιό τότε θα πληρώσει $y = 20\mu$

π παπούτσια τότε θα πληρώσει $y = 50\pi$

για να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των σχέσεων αυτών χρειαζόμαστε 2 τουλάχιστον σημεία και αφού σίγουρα διέρχονται από το $O(0,0)$ χρειαζόμαστε άλλο ένα.

Έστω για την τιμή 100

Για 100 φόρμες θα πληρώσει $y = 40 \cdot 100 = 4.000$

(100, 4.000)

Για 100 μαγιό θα πληρώσει $y = 20 \cdot 100 = 2.000$

(100, 2.000)

Για 100 παπούτσια θα πληρώσει $y = 100 \cdot 50 = 5.000$

(100, 5.000)

Γραφικές παραστάσεις:

β) για κάθε είδος θα πληρώσει $12.000:3 = 4.000$ ευρώ

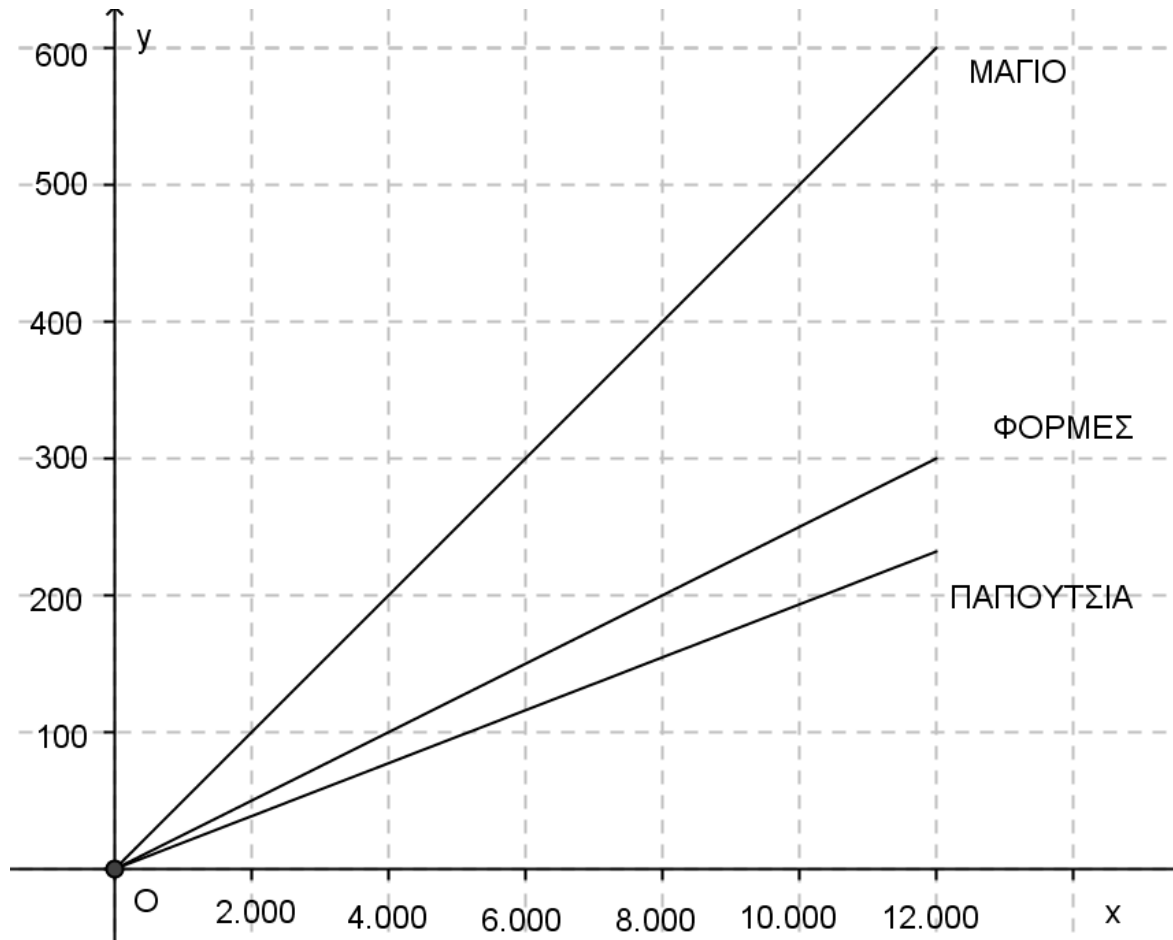
Βρίσκουμε στον άξονα των χρημάτων την τιμή 4.000

Και φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα του αριθμού των κομματιών εκεί που τέμνει την κάθε γραφική παράσταση είναι η τιμή που ψάχνουμε

Για τα παπούτσια $\pi = 4.000 : 50 = 80$

Για τις φόρμες $\varphi = 4.000 : 40 = 100$

Για τα μαγιό $\mu = 4.000 : 20 = 200$



Άλστες Ασκήσεις

6.41 Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις συντεταγμένες των σημείων Α,Β και Γ. Να εξετάσετε αν είναι πίνακας ανάλογων ποσών.

x	1	2	3
y	2	4	6

6.42 Με βάση τον παρακάτω πίνακα, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές και να την παραστήσετε γραφικά.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	6	9	12	15	18	21

6.43 Αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα 60χλμ/ώρα. Να κατασκευάσετε έναν οριζόντιο άξονα Οx όπου θα τοποθετήσετε τις ώρες (κάθε εκατοστό να αντιστοιχίζει σε μία ώρα) και έναν κάθετο άξονα Οy όπου θα τοποθετήσετε τα διαστήματα (κάθε εκατοστό να αντιστοιχίζει σε 60 χλμ.) και να βρείτε γραφικά την απόσταση που θα διανύσει το κινητό σε 6 ώρες.

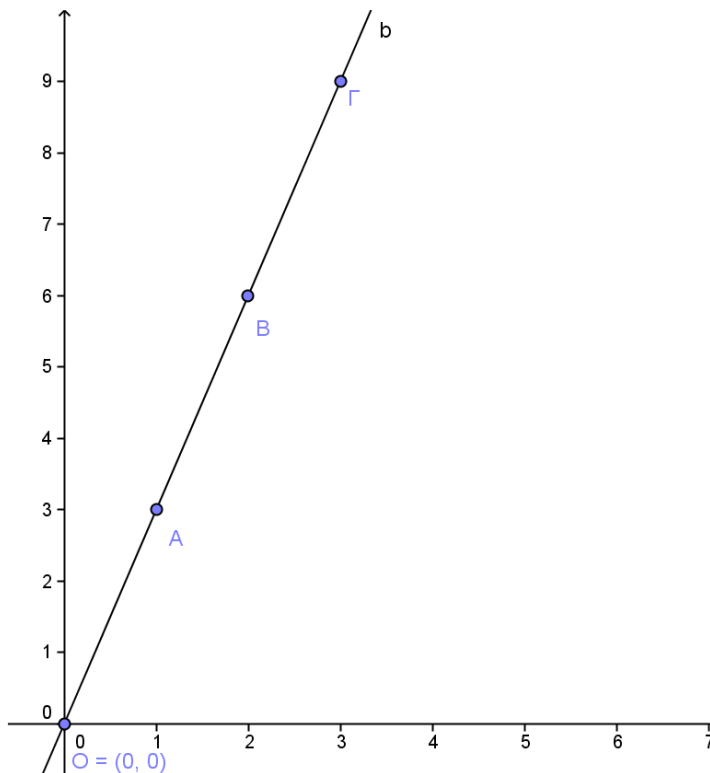
6.44 Η ευθεία ϵ διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(0.5,1)$, $B(2,4)$, $\Gamma(2.5,5)$ και $\Delta(4,8)$.

- Να την παραστήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- Να γράψετε τη σχέση αναλογίας που συνδέει τα ποσά x και y .
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα

x	0,2			8
y		5,2	7	

6.45 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συντεταγμένων των σημείων της ευθείας που παριστάνεται στο σύστημα συντεταγμένων.

x	0	1		3
y			6	



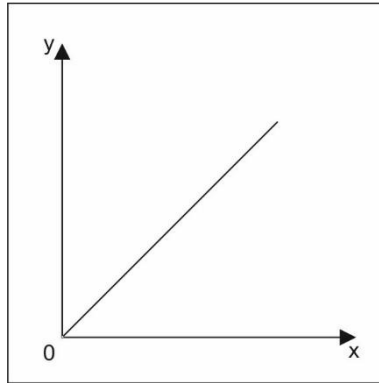
6.46 Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω σχέσεις αναλογίας.

- $y = 0,5x$
- $y = 2x$
- $y = \frac{1}{2}x$
- $y = 3,5x$
- $y = \frac{3}{5}x$

6.47 Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω σχέσεις και να εξετάσετε αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

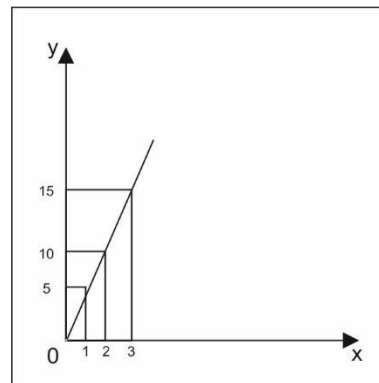
i) $y = 3x + 2$

ii) $y = 2x - 1$



6.48 Δίνεται η γραφική παράσταση των ανάλογων ποσών. Βρείτε το συντελεστή αναλογίας, αφού φτιάξετε τον πίνακα τιμών, με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση.

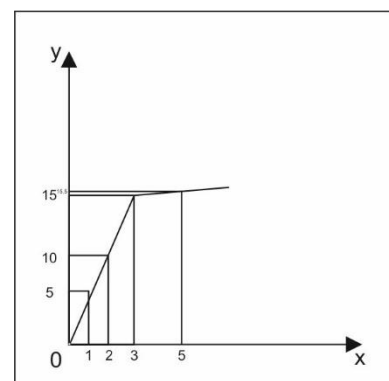
X			
Y			



6.49 Ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν ανάλογα ποσά;

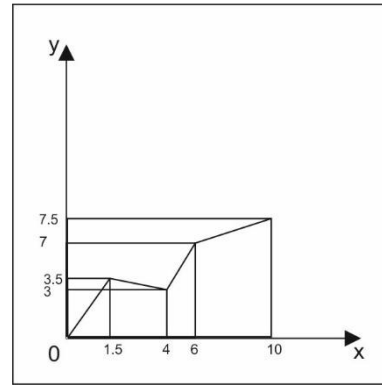
α)

X	1	2	3	5
Y	5	10	15	15.5



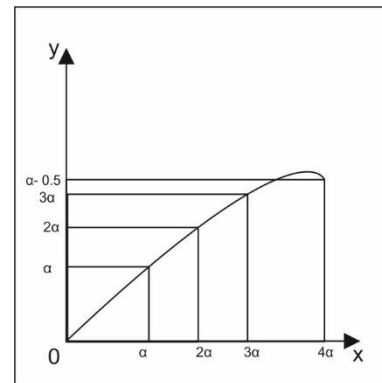
β)

X	1.5	4	6	10
Y	3.5	3	7	7.5



γ)

X	α	2α	3α	4α
Y	α	2α	3α	$\alpha - 0.5$



A.6.5 Προβλήματα Αναλογιών

Για να ελέγξουμε εάν δυο ποσά είναι ανάλογα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

1^ο) Τον ορισμό των αναλόγων ποσών : δηλαδή εξετάζουμε αν οι τιμές του ενός ποσού πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

2^ο) Τη σχέση $y = a \cdot x$: εξετάζουμε αν τα ποσά συνδέονται με μια σχέση αναλογίας

3^ο) Τη σχέση $\frac{y}{x} = a$: δηλαδή αν όλες οι αντίστοιχες τιμές των δυο ποσών έχουν σταθερό λόγο.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 105 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ένας πάσσαλος ύψους 1,2m ρίχνει σκιά 3m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 14m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος – σκιά είναι ανάλογα , να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

Λύση

Έστω x το ύψος του δέντρου και αφού τα ποσά είναι ανάλογα κάνουμε το πίνακα τιμών

	Πάσσαλος	δέντρο
Ύψος	1,2	x
Σκιά	3	14

Άρα

$$\frac{1,2}{3} = \frac{x}{14}$$

$$3 \cdot x = 1,2 \cdot 14$$

$$3 \cdot x = 16,8$$

$$x = 16,8 : 3$$

$$x = 5,6 \text{ m είναι το ύψος του δέντρου.}$$

Άσκηση 2/σελ. 105 (Βιβλίο Οργανισμού)

Το βάρος (η μάζα καλύτερα) στο φεγγάρι και το βάρος στη γη είναι ποσά ανάλογα .Ένας αστροναύτης ζυγίζει στο φεγγάρι 13kg και στη γη 78kg . Πόσο θα ζυγίζει στο φεγγάρι ένα παιδί , που στη γη έχει βάρος 52kg ;

Λύση

Τα ποσά βάρος στο φεγγάρι και βάρος στη γη είναι ανάλογα έστω x το βάρος του παιδιού στο φεγγάρι

	Αστροναύτης	Παιδί
Βάρος στη γη	78	52
Βάρος στο φεγγάρι	13	x

$$\frac{78}{13} = \frac{52}{x}$$

$$78 \cdot x = 13 \cdot 52$$

$$78 \cdot x = 676$$

$$x = 676 : 78$$

$$x = 8,666666667 \text{ περίπου}$$

$$x = 8,67 \text{ Kg στο φεγγάρι.}$$

Άλυτες Ασκήσεις

6.50 Αν το άθροισμα 2 αριθμών είναι 27 και ο λόγος τους $\frac{1}{2}$, να βρείτε τους δύο αριθμούς.

6.51 Αν έχουμε σήμερα ένα κεφάλαιο 13.000 ευρώ στην τράπεζα, μετά από ένα χρόνο θα έχουμε 15.800 ευρώ. Να βρείτε:

- Τι καταθέσεις πρέπει να έχουμε για να έχουμε μετά από ένα χρόνο 18.000 ευρώ;
- Πόσο είναι το επιτόκιο;

6.52 Ένας κτηνοτρόφος από 150kg γάλα παράγει 22kg τυρί. Να βρείτε πόσα kg γάλα χρειάζεται για να παράγει τυρί που θα γεμίσει 8 βαρέλια των 54kg;
(υπολογίστε το με προσέγγιση δεκάτου)

6.53 Τα 200gr ενός προϊόντος κοστίζουν 300 λεπτά. Πόσα ευρώ θα πληρώσουμε, αν αγοράσουμε τα $\frac{3}{4}$ του κιλού από το προϊόν αυτό;

6.54 Ένα τρίγωνο με βάση β και ύψος υ έχει εμβαδό E . Αν θέλουμε να τριπλασιάσουμε το εμβαδό του, κρατώντας σταθερή τη βάση του, πόσο πρέπει να αυξήσουμε το ύψος του;

6.55 Αν η περίμετρος Π_1 ενός τριγώνου με πλευρές $\alpha=5\text{cm}$, $\beta=3\text{cm}$ και $\gamma=4,5\text{cm}$ είναι ανάλογη με την περίμετρο Π_2 άλλου τριγώνου, με συντελεστή αναλογίας $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{1}{3}$, να υπολογίσετε την περίμετρο του δεύτερου τριγώνου.

6.56 Έστω α , β , γ οι πλευρές ενός τριγώνου με περίμετρο $\Pi=12,6\text{cm}$ και α' , β' , γ' οι πλευρές άλλου τριγώνου με περίμετρο Π' . Αν ισχύει $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = 3$, να υπολογίσετε την περίμετρο Π' του δεύτερου τριγώνου. Είναι τα δύο τρίγωνα όμοια σχήματα;

6.57 Ένας πατέρας θέλει να πάει ταξίδι με το γιό του στη Θεσσαλονίκη. Η Θεσσαλονίκη απέχει 505 km. Έχει υπολογίσει ότι για 200km πρέπει να βάλει 20λίτρα βενζίνης. Πόσα λίτρα θα χρειαστεί για να φτάσει μέχρι τη Θεσσαλονίκη; Και πόσο το κόστος αν το λίτρο έχει 1,6 ευρώ;

6.58 Ένας εργολάβος έχει υπολογίσει ότι για να φτιάξει σπίτι μεγέθους 100τ.μ. θα χρειαστεί 20ευρώ ανά τ.μ. Αν θέλει να προσθέσει ένα δωμάτιο στο σπίτι μεγέθους 25τ.μ. πόσα χρήματα θα χρειαστεί;

6.59 Ένα κατάστημα πουλάει μία τηλεόραση, από την οποία βγάζει κέρδος 70%. Την συγκεκριμένη τηλεόραση το κατάστημα την αγοράσει από τον προμηθευτή σε τιμή 300 ευρώ. Πόσο πουλάει το κατάστημα την τηλεόραση προκειμένου να βγάλει 70% κέρδος; (Να επιλυθεί με τη μέθοδο των ανάλογων ποσών)

Δίνεται για βοήθεια ο παρακάτω πίνακας:

	Τιμή προϊόντος	
Πόσα κοστίζει στο κατάστημα η TV	100	300
Πόσο είναι το κέρδος του καταστήματος από την TV	70	x

6.60 Την περίοδο του καλοκαιριού υπάρχουν οι λεγόμενες καλοκαιρινές εκπτώσεις. Αν αγοράσουμε το παντελόνι, που έχει αρχική τιμή 240 ευρώ, με έκπτωση 6%. Πόσο θα το αγοράσουμε αν δεν προλάβουμε τις καλοκαιρινές εκπτώσεις;

Δίνεται για βοήθεια ο παρακάτω πίνακας:

	Τιμή προϊόντος	
Αρχική τιμή	100	240
Τιμή μετά την έκπτωση 6%	94	x

A.6.6 Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

Ορισμός

Δύο μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα, όταν η μεταβολή τους είναι τέτοια ώστε:

Όταν το ένα μέγεθος πολλαπλασιάζεται επί έναν αριθμό, το άλλο διαιρείται με τον ίδιο ακριβώς αριθμό.

Ερώτηση:

Πως καταλαβαίνουμε από τις τιμές αν τα ποσά που έχουμε είναι αντιστρόφως ανάλογα;

Απάντηση:

Όταν, λοιπόν, έχουμε δύο ποσά που είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των τιμών τους παραμένει πάντα σταθερό και ίσο με a .

$$x \cdot y = a \text{ ή } y = \frac{a}{x}$$

Ερώτηση:

Πως καταλαβαίνουμε από μία γραφική παράσταση αν τα ποσά που έχουμε είναι αντιστρόφως ανάλογα;

Απάντηση:

Όταν οι μεταβλητές μου είναι αντίστροφοι αριθμοί, τότε θα παριστάνουν μία καμπύλη.

Σημείωση: Η υπερβολή αυτή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy . Αυτό συμβαίνει, επειδή οι συντρεγμένες δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0 .

Μεθοδολογία

Για να εξετάσουμε αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα αρκεί να εξετάσω το γινόμενο τους αν είναι σταθερό και ίσο με a .

Παράδειγμα

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

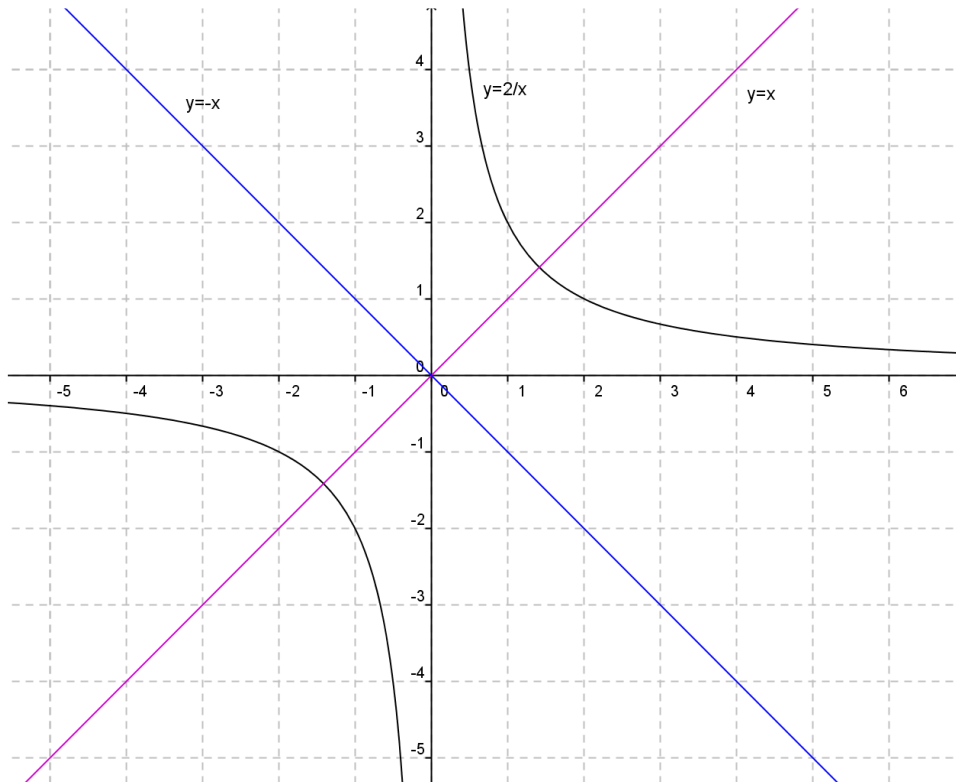
$$\begin{array}{l}
 y \cdot x = 1 \cdot 12 = 12 \\
 y \cdot x = 2 \cdot 6 = 12 \\
 y \cdot x = 3 \cdot 4 = 12 \\
 y \cdot x = 4 \cdot 3 = 12
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} y \cdot x = 1 \cdot 12 = 12 \\ y \cdot x = 2 \cdot 6 = 12 \\ y \cdot x = 3 \cdot 4 = 12 \\ y \cdot x = 4 \cdot 3 = 12 \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{σταθερό γινόμενο} \\
 \text{αντιστρόφως ανάλογα ποσά} \\
 \text{με σχέση } y = \frac{12}{x}
 \end{array}$$

Γραφική Παρασταση Αντιστρόφως Ανάλογων Ποσών

Είναι καμπύλη που ονομάζεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους ανάλογα αν το a είναι θετικό ή αν το a είναι αρνητικό.

Η υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων $y = x$ και $y = -x$ (περισσότερες λεπτομέρειες στην επόμενη τάξη, Β΄ Γυμνασίου)

Παράδειγμα



Παράδειγμα

Εξετάστε αν τα ποσά x, y του πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	2	4	10	40
y	10	5	2	$\frac{1}{2}$

$$y \cdot x = 2 \cdot 10 = 20$$

$$y \cdot x = 4 \cdot 5 = 20$$

$$y \cdot x = 10 \cdot 2 = 20$$

$$y \cdot x = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Άρα, σταθερό γινόμενο $x \cdot y = 20 = a$, άρα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά με

εξίσωση: $y = \frac{20}{x}$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 3/σελ. 109 (Βιβλίο Οργανισμού)

Εξέτασε τους παρακάτω πίνακες :Ποιοι από αυτούς είναι πίνακες τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών;

Λύση

α)

x	1	2	3	4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Για να είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά πρέπει το γινόμενο $y \cdot x = \text{να είναι σταθερό, δηλαδή}$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \quad ,$$

Άρα το γινόμενο είναι σταθερό, οπότε τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

β)

X	0,25	0,4	0,5
Y	10	6,25	5

$$0,25 \cdot 10 = 2,5$$

$$0,4 \cdot 6,25 = 2,5$$

$$0,5 \cdot 5 = 2,5 \quad ,$$

Άρα το γινόμενο είναι σταθερό, οπότε τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

γ)

x	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{58}$	$\frac{7}{10}$	4
y	100	29	$\frac{10}{7}$	1

$$\frac{1}{100} \cdot 100 = 1$$

$$\frac{2}{58} \cdot 29 = \frac{58}{58} = 1$$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{70}{70} = 1$$

$$4 \cdot 1 = 4$$

Άρα το γινόμενο δεν είναι σταθερό, οπότε τα ποσά δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα.

δ)

x	3	6	9
y	9	5	3

$$3 \cdot 9 = 27$$

$$6 \cdot 5 = 30$$

$$9 \cdot 3 = 27$$

Άρα το γινόμενο δεν είναι σταθερό, οπότε τα ποσά δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Άσκηση 5/σελ. 109 (Βιβλίο Οργανισμού)

Για την αναδάσωση μιας πλαγιάς, εργάστηκαν 20 εργάτες για 10 ημέρες. Πόσοι εργάτες, ίδιας απόδοσης, χρειάζονται για να αναδασώσουν την έκταση αυτή σε 8 ημέρες;

Λύση

Τα ποσά εργάτες και ημέρες είναι αντιστρόφως ανάλογα, άρα πρέπει τα γινόμενα (εργάτες) · (ημέρες) να είναι σταθερό και ίσο με $20 \cdot 10 = 200$

Άρα, αν έστω x οι εργάτες που χρειάζονται για την αναδάσωση σε 8 ημέρες τότε:

$$8 \cdot x = 200$$

$$x = 200 : 8$$

$$x = 25 \text{ εργάτες}$$

Άλυτες Ασκήσεις

6.61 Να εξετάσετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι πίνακας αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

x	1	2	4	6	8
y	120	60	30	20	15

6.62 Να εξετάσετε αν ο παρακάτω πίνακας είναι πίνακας αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

x	2	4	6	7	8
y	50	25	20	15	12

6.63 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε τα ποσά x,y να είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	1	2	...	4	...
y	12	...	4	...	1

6.64 Για να τελειώσουν το χτίσιμο ενός μικρού σπιτιού 2 οικοδόμοι δουλεύουν 30 ώρες. Σε πόσες ώρες θα χτίσουν το σπίτι 5 οικοδόμοι;

6.65 Ο Γιωργάκης αποφάσισε να πάει διακοπές στη Σάμο. Υπολόγισε λοιπόν ότι αν ξοδεύει 50€ την ημέρα μπορεί να μείνει στο νησί για 15 ημέρες. Αν θέλει να κάτσει 5 ημέρες

παραπάνω χωρίς να ξοδέψει άλλα χρήματα, κατά πόσο πρέπει να μειώσει τα καθημερινά έξοδά του;

6.66 Ένα αυτοκίνητο διανύει μία διαδρομή με ταχύτητα 90km την ώρα και φτάνει στον προορισμό του σε 2,5 ώρες. Αν θέλουμε να μειώσουμε τον χρόνο ταξιδιού στις 2 ώρες, με ποια ταχύτητα πρέπει να ταξιδέψουμε;

6.67 Οι παρακάτω πίνακες δείχνουν τις τιμές που παίρνουν κάποιες μεταβλητές. Ποιες από αυτές αναφέρονται σε αντιστρόφως ανάλογα ποσά;

x	α	2α	3α	4α
y	$1/\alpha$	$1/2\alpha$	$1/3\alpha$	$1/5\alpha$

x	5	$2/5$	$6/10$	3
y	$1/5$	$5/2$	2	4

x	5	$2/5$	7	8
y	$1/5$	$5/2$	$1/7$	$1/8$

x	0.5	0.25	1,25	2.5
y	2	4	$5/4$	$2/5$

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

6.68 Σε ένα διαστημικό ταξίδι τα τρόφιμα είναι περιορισμένα σε αριθμό. Για να επιβιώσει ένας αστροναύτης πρέπει να καταναλώνει 300 γραμμάρια φαγητού. Λόγω τεχνικών προβλημάτων το ταξίδι του πρέπει να διαρκέσει 10 μέρες παραπάνω από το προβλεπόμενο. Αν η προβλεπόμενη διάρκεια ταξιδιού ήταν 40 μέρες. Πόσα γραμμάρια πρέπει να γίνει η μερίδα του φαγητού του προκειμένου να καταφέρει να επιβιώσει;

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Θεωρίας βου κεφαλαίου...

Α. Ερωτήσεις Ανάπτυξης

1. Τι ονομάζουμε διατεταγμένο ζεύγος;
2. Τι ονομάζουμε λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων;
3. Πότε λέμε ότι δύο σχήματα είναι όμοια;
4. Τι καλούμε αναλογία;
5. Πότε δύο ποσά είναι ανάλογα;
6. Τι είναι ο συντελεστής αναλογίας;
7. Γράψτε τη σχέση ισότητας που συνδέει δύο ανάλογα ποσά.
8. Τι μορφή έχει η γραφική παράσταση μιας σχέσης αναλογίας των ποσών x και y ;
9. Πότε δύο ποσά λέμε ότι είναι αντιστρόφως ανάλογα; Γράψτε τη σχέση ισότητας που συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
10. Τι μορφή έχει η γραφική παράσταση της σχέσης δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y ;
11. Η γραφική παράσταση μιας σχέσης αντιστρόφως ανάλογων ποσών διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Β. Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

1. Αν $3 \cdot x = 5 \cdot y$, τότε $\frac{3}{5} = \frac{x}{y}$.
2. Αν για δύο παραλληλόγραμμα με διαστάσεις a , β και a' , β' αντίστοιχα ισχύει $\frac{a}{a'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{1}{2}$, τότε $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{1}{2}$ όπου Π και Π' οι περιμέτροι αντίστοιχα.
3. Τα ποσά x και y που συνδέονται με τη σχέση $y = \frac{1}{2} \cdot x$, είναι ανάλογα.
4. Η γραφική παράσταση μιας σχέσης αναλογίας είναι μία ευθεία που δεν διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων.
5. Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι ανάλογη με την πλευρά του.
6. Η περίμετρος και το εμβαδό είναι ποσά ανάλογα.
7. Αν για τα μεγέθη x και y , ισχύει η σχέση $y = \frac{x}{a}$, τότε τα μεγέθη είναι ανάλογα.
8. Αν για τα μεγέθη x και y , ισχύει η σχέση $y = \frac{a}{x}$, τότε τα μεγέθη είναι ανάλογα.

Γ. Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Ο ημιάξονας Ox λέγεται ημιάξονας των _____.
2. Ο ημιάξονας Oy λέγεται ημιάξονας των _____.
3. Η αρχή των αξόνων έχει συντεταγμένες _____.
4. Σε ένα ορθογώνιο με εμβαδό E αν διπλασιάσουμε το πλάτος, για να παραμείνει το εμβαδό σταθερό πρέπει να _____ το μήκος.
5. Τα σημεία που παριστάνουν τα ζεύγη (x,y) δύο ανάλογων μεγεθών, αν τα ενώσουμε σχηματίζεται μία _____ με αρχή το σημείο _____.

6. Η σχέση $\frac{y}{x} = \alpha$ συνδέει δύο _____ ποσά, ενώ η σχέση $y = \alpha x$ συνδέει δύο _____ ποσά.

Δ. Αντιστοίχιση

Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α με την πρόταση της στήλης Β με την οποία ταιριάζει.

A	B
$y = \frac{2}{3}x + 1$	Τα μεγέθη x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα.
$y = \frac{2}{3}x$	Αν $x=1$ η γραφική παράσταση της σχέσης διέρχεται από το σημείο (1,2).
$x \cdot y = 1$	Τα μεγέθη x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{2}{3}$.
$\frac{y}{x} = 2$	Η γραφική παράσταση της σχέσης είναι ευθεία γραμμή που δεν διέρχεται από το σημείο (0,0).

Κριτήριο Αξιολόγησης 6^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

- i. Πότε δύο ποσά λέγονται ανάλογα;
- ii. Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;
- iii. Τι γνωρίζεται για τη γραφική παράσταση της $y = a \cdot x$;
- iv. Τι γνωρίζετε για την γραφική παράσταση της $y = \frac{a}{x}$;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων, με μονάδα το 1cm και να τοποθετήσετε τα σημεία A(2,3) , B(0,2), Γ(0,3), Δ(3,3).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει σταθερό εμβαδόν 24 cm^2 . Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου προκύπτει από το γινόμενο μήκος επί πλάτος και έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθ. παρ. να βρεθούν:

- i. Η σχέση που συνδέει τα x, y
- ii. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

x	1		3	
y		12		6

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Το νερό αποτελείται από υδρογόνο και οξυγόνο με αναλογία μαζών $\frac{1}{8}$. Πόση μάζα υδρογόνου και πόση μάζα οξυγόνου περιέχονται σε 90 γραμμάρια νερού;

Μονάδες 5

Διάρκεια 30 λεπτά

Συνδυαστικές Ασκήσεις - Ανάλογα Ποσά και Αντιστρόφως Ανάλογα

1. Ένα μπουκάλι γάλα πουλιέται στο σούπερ μάρκετ 1,45€. Αν μια μέρα το σούπερ μάρκετ έχει το συγκεκριμένο γάλα σε προσφορά, πουλώντας το με έκπτωση 30%, πόσο θα το αγοράσουμε;
2. Ένας επιπλοποιός για να κατασκευάσει ένα τραπεζάκι χρειάζεται να δαπανήσει 25€. Πόσο πρέπει να το πουλήσει για να βγάλει κέρδος 20% ;
3. Ένα μπλουζάκι πουλιέται 22€. Αν στην περίοδο των εκπτώσεων η τιμή του είναι 18€, να βρείτε το ποσοστό της έκπτωσης.
4. Αν ένα ψυγείο πουλιέται 750€ μαζί με το Φ.Π.Α. (24%), ποια είναι η τιμή του ψυγείου χωρίς το Φ.Π.Α.;
5. Σε μία τάξη 32 παιδιών, το 75% είναι κορίτσια. Αν το 25% των κοριτσιών είναι ξανθά, να βρείτε: α) πόσα είναι τα ξανθά κορίτσια στην τάξη; β) ποιο είναι το ποσοστό των ξανθών κοριτσιών στην τάξη;
6. Σε μια πόλη 80000 κατοίκων, οι 35000 είναι άνδρες. Να βρείτε το ποσοστό των γυναικών στην πόλη.
7. Ένα φόρεμα πουλιέται σε ένα κατάστημα με έκπτωση 20%. Επειδή όμως κανένας δεν το αγόραζε, ο καταστηματάρχης αποφάσισε να κάνει νέα έκπτωση 10% . Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό της έκπτωσης σε σχέση με την αρχική τιμή του φορέματος;
8. Ένας επιχειρηματίας καταθέτει στην τράπεζα 120000€ με επιτόκιο 10%. Πόσα χρήματα θα έχει στο λογαριασμό του έπειτα από 2 χρόνια; (Στο τέλος κάθε χρόνου γίνεται κεφαλαιοποίηση των τόκων)
9. Ένας έμπορος θέλει να καταθέσει 15000€ στην τράπεζα για 2 χρόνια. Ρώτησε σε δύο τράπεζες, ποιο είναι το επιτόκιο που του προσφέρουν. Η τράπεζα Α του προσέφερε επιτόκιο 12% για τον πρώτο χρόνο και 8% για τον δεύτερο χρόνο. Η τράπεζα Β του προσέφερε σταθερό επιτόκιο 10% και για τα δύο χρόνια. Σε ποια τράπεζα τον συμφέρει να καταθέσει τα χρήματά του;
10. Αγοράσαμε με έκπτωση 20% έναν εκτυπωτή και πληρώσαμε 65 €. Ποια ήταν η τιμή του εκτυπωτή πριν τις εκπτώσεις;
11. Ένα φόρεμα κοστίζει την περίοδο των εκπτώσεων 42 €. Αν η έκπτωση ήταν 30%, να υπολογιστεί πόσο κόστιζε το φόρεμα πριν τις εκπτώσεις.
12. Η τιμή ενός κινητού τηλεφώνου αυξήθηκε κατά 25% και κοστίζει τώρα 155 €. Ποια ήταν η αρχική τιμή του κινητού;

13. Μία τηλεόραση κοστίζει 492 € μαζί με το Φ.Π.Α. Αν ο Φ.Π.Α. είναι 23%, να βρεθεί η τιμή της τηλεόρασης χωρίς το Φ.Π.Α.
14. Ένας manάβης αγόρασε 2500 κιλά κρεμμύδια και πλήρωσε 500€. Τα 1500 κιλά τα πούλησε με κέρδος 35% και τα υπόλοιπα με ζημία 10%. Να βρεθεί αν κέρδισε ή ζημιώσε και πόσο.
15. Η τιμή ενός προϊόντος την 1/1/2014 ήταν 500 €. Στις 15/1/2014 έγινε αύξηση της τιμής του κατά 25%. Στις 20/1/2014 η τιμή του μειώνεται κατά 25%. Η τιμή του προϊόντος επανήλθε στην αρχική της τιμή;
16. Ένα γυμνάσιο έχει 160 μαθητές. Το 40% αυτών είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Το 37,5% των υπολοίπων μαθητών, είναι μαθητές της Β΄ τάξης. Να υπολογίσετε πόσοι είναι οι μαθητές της Γ΄ τάξης.
17. Η Α΄ τάξη ενός γυμνασίου έχει 136 αγόρια από τα οποία το 62,5% ασχολείται με τον αθλητισμό. Το 40% των παιδιών που αθλούνται ασχολείται με το μπάσκετ και τα υπόλοιπα με το ποδόσφαιρο. Να βρείτε ποιο είναι το ποσοστό των παιδιών της τάξης που ασχολείται με το ποδόσφαιρο.
18. Ένα συνεργείο που αποτελείτο από 160 εργάτες είχε τρόφιμα για 20 ημέρες. Ύστερα από 3 ημέρες ήρθαν στην ομάδα του συνεργείου άλλοι 40 εργάτες, που είχαν μαζί τους τρόφιμα για 2 ημέρες. Πόσες ημέρες θα περάσουν όλοι μαζί με τα τρόφιμα που διαθέτουν;
19. Ένας φοιτητής υπολογίζει ότι με τα 640 ευρώ που έχει μπορεί να περάσει 40 ημέρες. Αν όμως θελήσει να περάσει με αυτά τα χρήματα 2 μήνες, πόσα ευρώ λιγότερα πρέπει να ξοδεύει την ημέρα;
20. Οι 12 εργάτες, όταν εργάζονται για 8 ώρες την ημέρα, τελειώνουν ένα έργο σε 6 ημέρες. Πόσοι εργάτες της ίδιας απόδοσης θα τελειώσουν το έργο σε 4 ημέρες, εργαζόμενοι μία ώρα περισσότερο την ημέρα;
21. Το πετρέλαιο στη δεξαμενή του σχολείου μας φτάνει για 20 ημέρες, αν γίνεται κατανάλωση 90 λίτρων την ημέρα. Αν μειώσουμε την ημερήσια κατανάλωση κατά το 1/3 της αρχικής, για πόσες ημέρες θα φτάσει το πετρέλαιο;

7^ο Κεφάλαιο – Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

Α.7.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί Αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη Σημείου

Άξονας πραγματικών αριθμών

Οι αριθμοί απεικονίζονται ως σημεία μιας ευθείας :



Τα σημεία αυτά ονομάζονται τετμημένες και συμβολίζονται με το γράμμα x . Δεξιά του άξονα βρίσκονται τα θετικά και αριστερά του άξονα βρίσκονται τα αρνητικά. Για τους θετικούς αριθμούς: όσο πιο μακριά βρίσκονται από το μηδέν τόσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός. Για τους αρνητικούς: όσο πιο κοντά στο μηδέν βρίσκονται τόσο πιο μεγάλοι είναι.

Παράδειγμα

$$15 < 35$$

$$-8 < -4$$

Ομόσημοι και ετερόσημοι

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί, που έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ενώ ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Ακέραιοι αριθμοί

Ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί μαζί τους αντίστοιχους αρνητικούς.

Ρητοί αριθμοί

Είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί μαζί.

Απόλυτη τιμή

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται $|a|$.

Αντίθετοι αριθμοί

Ονομάζονται οι δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή

Παρατηρήσεις

1^η) Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός

Για παράδειγμα $|+2|=+2$

2^η) Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του

Για παράδειγμα $|-2|=+2$

3^η) Η απόλυτη τιμή του 0 είναι το 0.

4^η) Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 117 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να κατατάξεις τους παρακάτω αριθμούς σε δυο ομάδες, τους θετικούς και τους αρνητικούς :

-3,1, +5, +8, -20, 7, -3, 18

Λύση

Θετικοί $\rightarrow +5, +8, 7, 18$

Αρνητικοί $\rightarrow -3,1, -20, -3$

Άσκηση 4/σελ. 117 (Βιβλίο Οργανισμού)

Στα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν να βρεις ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι είναι ετερόσημοι:

Λύση

α) 3 και +3 \rightarrow ομόσημοι

β) 0 και 5 \rightarrow ομόσημοι

γ) -2 και -4 \rightarrow ομόσημοι

δ) 7 και +9 \rightarrow ομόσημοι

ε) -2 και 1 \rightarrow ετερόσημοι

στ) 17 και -20 \rightarrow ετερόσημοι

ζ) -9 και -3,2 \rightarrow ομόσημοι

η) -10,5 και 11 \rightarrow ετερόσημοι

θ) 0 και -100 \rightarrow ετερόσημοι

ι) +6,7 και +12,3 \rightarrow ομόσημοι

Άσκηση 5/σελ. 117 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να εκφράσεις με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω προτάσεις:

Λύση

α) Κατάθεση 50.000 € $\rightarrow +50.000$ €

β) Ανάλυση 78.000 € $\rightarrow -78.000$ €

γ) Αύξηση μισθού κατά 500 € $\rightarrow +500$ €

δ) Μείωση επιτοκίου κατά 1 μονάδα $\rightarrow -1$

ε) 30 μέτρα αριστερά $\rightarrow -30$ μέτρα

Άλυτες Ασκήσεις

7.1 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ακέραιους είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί.

$$2, -3, -1, -512, 618, 578, -100, 138$$

7.2 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ρητούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί.

$$-1,8, -2,3, 1,78, 5, -\frac{7}{2}, +\frac{5}{5}, \frac{1}{3}, -0,75$$

7.3 Από τους παρακάτω ρητούς αριθμούς να σημειώσετε τους αρνητικούς ακεραίους.

$$-\frac{8}{5}, 7, -4, -\frac{15}{3}, -2,15, -13,8$$

7.4 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ομόσημοι.

$$-13, +5, -6, +7, -\frac{1}{9}, +8,1, -7,6, \frac{6}{7}, -1,25, -10$$

7.5 Δίνονται τα παρακάτω ζεύγη αριθμών.

i. $(-3, 8)$

ii. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$

iii. $(7, -1)$

iv. $(-2, 10)$

v. $(2, 2)$

vi. $\left(-5, \frac{1}{6}\right)$

vii. $(-4, 3)$

viii. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)$

ix. $(7, 3)$

x. $(-7, 8, 5, 2)$

Να βρείτε τα ζεύγη που αποτελούνται:

α) από ετερόσημους αριθμούς

β) από ομόσημους θετικούς αριθμούς

γ) από ομόσημους αρνητικούς αριθμούς.

7.6 Να παραστήσετε με σημεία ενός άξονα τους αριθμούς.

i. 5, 3,2, -6, 3, 3,8, -0,5, 1,5, 3,5

ii. -50, -150, 200, 350, 400, -300

7.7 Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε τρίγωνο με κορυφές $A(0,1)$ $B(-2,1)$ $\Gamma(3,4)$

7.8 Σε σύστημα αξόνων να βρείτε τα σημεία $A(-2,2)$, $B(-2,-2)$, $\Delta(2,2)$. Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται;

7.9 Σε σύστημα αξόνων να βρείτε τα σημεία $A(3,4)$, $B(-4,4)$, $\Gamma(-4,-2)$, $\Delta(3,-2)$. Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ΑΒΓΔ$; Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

7.10 Να βρείτε την απόλυτη τιμή των ρητών αριθμών :

α) +3,55

β) -5,6

γ) +2

δ) -823

ε) -20,05

στ) $-a$, όπου a ένας ρητός αριθμός

7.11 Να συγκρίνεται τους παρακάτω αριθμούς :

α) +41 και +38

β) -5,6 και 3,1

γ) +2 και -2

δ) -823 και -65

ε) -20,05 και -0,9

στ) -20,05 και -19,11

7.12 Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε αύξουσα σειρά

+41, +38, -5,6, 3,1, 2, -2, -20, -10, -9, -8, -7,6

7.13 Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε φθίνουσα σειρά

3,5,6,7,8,-8,-5,-3,-2,-1,100,534,-543,-213

Α.7.2 Απόλυτη Τιμή Ρητού – Αντίθετοι Ρητοί – Σύγκριση Ρητών

Ορισμός

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

Αντίθετοι αριθμοί

Ονομάζονται οι δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή

Παρατήρηση

1^η) Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός

Παράδειγμα

$$|+2|=+2$$

2^η) Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του

Παράδειγμα

$$|-2|=+2$$

3^η) Η απόλυτη τιμή του 0 είναι το 0 .

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 4/σελ. 121 (Βιβλίο Οργανισμού)

Βρες την απόλυτη τιμή των ρητών

Λύση

α) $+7,25$

$$|+7,25| = 7,25$$

β) $-2,5$

$$|-2,5| = 2,5$$

γ) $+16$

$$|+16| = 16$$

δ) $-20,05$

$$|-20,05| = 20,05$$

ε) -58

$$|-58| = 58$$

Άσκηση 5/σελ. 121 (Βιβλίο Οργανισμού)

Βρες τους αριθμούς που έχουν ως απόλυτη τιμή

Λύση

α) 100

Αν $|x| = 100$ τότε $x = +100$ ή $x = -100$

β) 21,7

Αν $|α| = 21,7$ τότε $α = +21,7$ ή $α = -21,7$

γ) 0

Αν $|β| = 0$ τότε $β = 0$

δ) 7,03

Αν $|ω| = 7,03$ τότε $ω = +7,03$ ή $ω = -7,03$

ε) 5,2

Αν $|γ| = 5,2$ τότε $γ = +5,2$ ή $γ = -5,2$

Άσκηση 6/σελ. 121 (Βιβλίο Οργανισμού)

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Λύση

Αριθμός	1	+2	-19	+8	-12	+7
		-2				-7
Αντίθετος	-1	-2	+19	-8	12	-7
		+2				+7
Απόλυτη τιμή	1	2	19	8	12	7

Άσκηση 11/σελ. 121 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να γράψεις τους αριθμούς :

-2,+7,+15,-3,0, -4,+5,-8 και -10

σε αύξουσα σειρά.

Λύση

$-10 < -8 < -4 < -3 < -2 < 0 < +5 < +7 < +15$

Άσκηση 2/σελ. 125 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα αθροίσματα:

Λύση

α) $(+4,05) + (+6,15) = +10,2$

β) $(+5,03) + (+4,07) = +9,1$

γ) $(+2,7) + (+97,3) = +100$

δ) $(+2,6) + (+11,4) = +14$

ε) $(+7,25) + (8,75) = +16$

στ) $(-3,5) + (-2,5) = -6$

ζ) $(-1,3) + (-5,2) = -6,5$

η) $(-7,15) + (-4,85) = -12$

θ) $(-5,25) + (-9,75) = -15$

ι) $(-13,7) + (-6,3) = -20$

Άλυτες Ασκήσεις

7.14 Να βρείτε την απόλυτη τιμή των παρακάτω αριθμών.

$$-25, +8, -16, 0, +7, -6, -15, 29, -8,2, 6.125, -\frac{258}{8}, +\frac{17}{3}, -3,75$$

7.15 Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή.

i. 7 ii. 20 iii. 12 iv. -2

7.16 Από τους παρακάτω αριθμούς βρείτε ποιοι έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

$$-5, 13, -8, 15, 5, 7, 8, -13, 7, -2$$

7.17 Να βρείτε όλους τους ακέραιους που έχουν απόλυτη τιμή.

- i. Μικρότερη του 5
- ii. Μικρότερη ή ίση του 6
- iii. Μεγαλύτερη από 2 και μικρότερη ή ίση του 7
- iv. Μεγαλύτερη ή ίση από το 3 και μικρότερη από το 9

7.18 Να βρείτε :

- i. 3 αρνητικούς που έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 5
- ii. 4 θετικούς που έχουν απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 8
- iii. 5 θετικούς ρητούς με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 10
- iv. 6 αρνητικούς ρητούς με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 6

7.19 Η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν είναι 6 μονάδες. Πόσες μονάδες απέχει αυτός ο αριθμός από τον αντίθετό του;

7.20 Δύο αντίθετοι αριθμοί απέχουν 16 μονάδες. Ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί;

7.21 Να βρείτε :

- i. Τους ακέραιους για τους οποίους ισχύει $3 < |x| < 6$
- ii. Τους αρνητικούς ακεραίους για τους οποίους ισχύει $6 < |x| < 10$
- iii. Τους ακέραιους για τους οποίους ισχύει
 - α) $|x|=17$
 - β) $|x|=0$
 - γ) $|x|=-2$

7.22 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$A = |-8| + |-2| + |+3| - |+1,2| - |-3,6|$$

$$B = |-13| - |-8| + |+5| + |-9|$$

$$\Gamma = |-20| + |-1,25| - 3 \cdot \left| -\frac{2}{7} \right| + |+20|$$

7.23 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων.

$$A = 2|x|+5|-x|-3 \quad , \quad \text{για } x=-2$$

$$B = ||x|+2|-3||x|-1| \quad , \quad \text{για } x=2$$

$$\Gamma = 3||x|-1|+2||x|+|y||-|y| \quad , \quad \text{για } x=2, \quad y=-1$$

7.24 Να βρείτε τους αντίθετους των αριθμών.

$$5, 16, -\frac{1}{16}, \frac{2}{8}, -\frac{3}{13}, -7, 0, -3, -2, 1, 10, 13,8, -0,02$$

7.25 Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι αντίθετοι;

$$0,5, -3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 3, 0,75$$

7.26 Να βρείτε τον α στις παρακάτω ισότητες:

i. $(-6)-(+3)+(-1)+\alpha = 0$

ii. $(-5)+(-12)+(-8)-(-4)+\alpha = +21$

7.27 Τι συμπεραίνετε για τους ρητούς α και β , αν:

A) $\alpha+\beta=0$

B) $\alpha+\beta=\alpha$

Γ) $\alpha+0=\beta$

7.28 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	9				
-x		-6			
-(-x)			-3		
x				4	
-x					8

7.29 Να συγκρίνετε τους αριθμούς

i. -15 και $-3,5$

ii. -18 και $1,35$

iii. 2005 και 2003

iv. $-6,5$ και $1,7$

v. $-5,2$ και $-5,4$

vi. 0 και $-8,3$

7.30 Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους παρακάτω αριθμούς.

$$-\frac{1}{2}, \quad +\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{3}, \quad 0, \quad -6, \quad -\frac{5}{12}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}$$

7.31 Δίνονται οι ρητοί αριθμοί.

-9, 5, -3,8, 0, 0,25, -12,5, 7,2

Να βρείτε :

- α) ποιοι από τους αριθμούς είναι μικρότεροι του $-3,5$
- β) ποιοι από τους αριθμούς είναι μεγαλύτεροι του $0,25$

7.32 Να γράψετε 3 ρητούς που είναι :

- i. μεγαλύτεροι από το -4 και μικρότεροι από το 5
- ii. μεγαλύτεροι του $-12,84$ και μικρότεροι του $-12,75$

7.33 Να βρείτε το μεγαλύτερο αρνητικό ακέραιο καθώς και το μικρότερο θετικό ακέραιο για τον οποίο ισχύει $|x| > 5$.

7.34 Να γράψετε τους ακεραίους α για τους οποίους ισχύει:

- i. $-9 < \alpha \leq 3$
- ii. $-7 \leq \alpha < 3$
- iii. $|\alpha| < -3$
- iv. $|\alpha| < -3$

A.7.3 Πρόσθεση Ρητών Αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς (ρητούς) αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα τους βάζουμε το πρόσημό τους.

Παράδειγμα

i) $(+2)+(+7)=(+9)$

ii) $(-2)+(-7)=(-9)$

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς (ρητούς) αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα

i) $(-2)+(+7)=(+5)$, το πρόσημο του μεγαλύτερου είναι το (+) άρα και το αποτέλεσμα μου θα έχει το ίδιο πρόσημο.

ii) $(-2)+(+8)=(+6)$, το πρόσημο του μεγαλύτερου είναι το (+) άρα και το αποτέλεσμα μου θα έχει το ίδιο πρόσημο.

iii) $(+2)+(-8)=(-6)$, το πρόσημο του μεγαλύτερου είναι το (-) άρα και το αποτέλεσμα μου θα έχει το ίδιο πρόσημο.

Να επισημάνουμε ότι οι ιδιότητες της πρόσθεσης συνεχίζουν να ισχύουν

- Αντιμεταθετική : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Προσεταιριστική: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- Ουδέτερο στοιχείο το μηδέν: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- Αντίθετο στοιχείο το $-\alpha$: $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

Άλυτες Ασκήσεις

7.35 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

$(-2)+(+7)=$

$(-23)+(+7)=$

$(-12)+(+7)=$

$(-12)+(+10)=$

$(-15)+(+7)=$

$(-172)+(+27)=$

7.36 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

i. $(-7)+(+4)$

ii. $(-20)+(+8)$

iii. $(+5)+(-2)$

iv. $(1,15)+(+1,3)$

v. $(-15,2)+(+7,8)$

- vi. $(-1,9)+(1,3)$
- vii. $(-8)+(-14)$
- viii. $(+8)+(+53)$
- ix. $(+21,4)+(-16,2)$

7.37 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

- | | |
|--|---|
| i. $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$ | ii. $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ |
| iii. $\left(+5\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{3}{4}\right)$ | iv. $\left(-3\frac{1}{5}\right)+\left(+7\frac{1}{2}\right)$ |
| v. $\left(+\frac{13}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$ | vi. $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)$ |
| vii. $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$ | viii. $(-13)+\left(-\frac{2}{3}\right)$ |
| ix. $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{6}{8}\right)$ | x. $(-5,2)+\left(-\frac{3}{5}\right)$ |

7.38 Να προσθέσετε καθέναν από τους αριθμούς -17 , $+4$, -3 , $\frac{1}{2}$ με τους αριθμούς 17 ,

$\frac{-8}{2}$, $\frac{-7}{4}$, $-\frac{3}{8}$, -8 . Ποιοι από τους αριθμούς έχουν άθροισμα μηδέν ;

7.39 Από τα παρακάτω ζεύγη αριθμών, ποια έχουν το ίδιο άθροισμα ;

- i. $(-13, 5)$
- ii. $(-20, +15)$
- iii. $(5, +5)$
- iv. $(-9, +10)$
- v. $(-27, +22)$

7.40 Ποιόν αριθμό πρέπει να προσθέσουμε;

- i. Στον -13 για να βρούμε άθροισμα 44
- ii. Στον 8 για να βρούμε άθροισμα 0
- iii. Στον 0 για να βρούμε άθροισμα -9
- iv. Στον -7 για να βρούμε άθροισμα $+21$

- v. Στον -8 για να βρούμε άθροισμα -2
- vi. Στον 3 για να βρούμε άθροισμα -8
- vii. Στον -16,5 για να βρούμε άθροισμα +4
- viii. Στον -6 για να βρούμε άθροισμα 1,5

7.41 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα.

- i. $(-8)+(+10)+(-13)$
- ii. $(+15)+(-4)+(+7)+(-10)$
- iii. $(-12)+(-17)+(+15)+(-3)+(-9)$
- iv. $\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(-2\frac{5}{7}\right)+\left(+3\frac{1}{28}\right)$
- v. $\frac{3}{4}+\left(-1\frac{5}{9}\right)+\left(+1\frac{7}{18}\right)+(-3)$
- vi. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(3\frac{3}{4}\right)+\left(-2\frac{4}{12}\right)$

7.42 Να αντικαταστήσετε με κατάλληλα πρόσημα τα * για να προκύψουν αληθείς ισότητες.

- i. $(* 13) + (-7) = +6$
- ii. $(-5) + (* 8) = +3$
- iii. $(* 21) + (-20) = - 41$
- iv. $(-20) + (* 5) = -15$

Α.7.4 Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Η αφαίρεση ορίζεται ως η πρόσθεση του αντιθέτου στοιχείου

Δηλαδή $a - b = a + (-b)$

Τι συμβαίνει στα πρόσημα όταν θέλουμε να κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων σε μία παράσταση;

- Αν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει τον πρόσημο πλην (-) τότε η παρένθεση φεύγει αλλάζοντας τα πρόσημα σε όλους τους όρους που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση.

Παράδειγμα

i. $-(x + 3) = -x - 3$

ii. $x + (+2 - 7x + 5) = x + 2 - 7x + 5$

- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει το συν (+) ή κανένα πρόσημο τότε η παρένθεση φεύγει αφήνοντας τους όρους της παρένθεσης με τα πρόσημα που είχαν.

Παράδειγμα

i. $+(-3) + (+2) = -3 + 2 = -1$

ii. $x - (+2 - 7x + 5) = x - 2 + 7x - 5$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 128 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα αθροίσματα:

Λύση

α) $5 - (-7) = 5 + 7 = 12$

β) $-8 - (+8) = -8 - 8 = -16$

γ) $-2 - (-15,2) = -2 + 15,2 = +13,2$

δ) $14,55 - 18,45 = -3,9$

ε) $-\frac{2}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 0$

Άσκηση 3/σελ. 128 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα αθροίσματα:

Λύση

α) $|+3| + |-2| + |-9| = +3 + 2 + 9 = +14$

β) $|-20| + |-10| - |+10| = +20 + 10 - 10 = +20$

γ) $|-3| - |-2| + |-5| - |+6| = +3 - 2 + 5 - 6 = +3 + 5 - 2 - 6 = +8 - 8 = 0$

Ολιγόλεπτη δοκιμασία...(διάρκεια 10 λεπτά)

ΘΕΜΑ 1^ο

Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(+8) + (-12)$

ii. $(-4) - (+6)$

iii. $2,4 - 4,2$

ΘΕΜΑ 2^ο

Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = -\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Άλυτες Ασκήσεις

7.43 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$-2+(+7-2-6-7)=$

$(-2+3-76+82)+7=$

$-12-(19-91-18)=$

$+12-(19-91-18)=$

$-12+(19-91-18)=$

$12+(19-91-18)=$

$21+(89-37-25)=$

$48+(15-17)=$

7.44 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$50+(10-18)=$

$(-12) \cdot (-71)=$

$(-23) \cdot (+7)=$

$(-12) \cdot (+7)=$

$(-12) \cdot (+10)=$

$(-15) \cdot (+7)=$

$(-172) \cdot (+27)=$

$(-12) : (-3)=$

$(+21) : (+7)=$

$(-12) : (+6)=$

7.45 Να βρείτε τις διαφορές.

$$-\frac{4}{2} - \frac{5}{2} =$$

$$19-91-18=$$

$$-\frac{4}{2} + \frac{5}{2} =$$

$$-8+5-7+3-6=$$

$$+\frac{4}{7} - \frac{3}{2} =$$

$$-82+51-7+13-16=$$

7.46 Να βρείτε τις διαφορές.

$$-3\frac{4}{2} - 9\frac{5}{2} =$$

$$1-9-1+90=$$

$$-1\frac{4}{2} + 2\frac{5}{2} =$$

$$-82+53-71+31-16=$$

$$+2\frac{4}{7} - 5\frac{3}{2} =$$

$$-812+111-743+32-146=$$

7.47 Να βρείτε τις διαφορές.

i. $(-9)-(+5)$

ii. $0-(-18)$

iii. $(-17)-(-2)$

iv. $(-22)-(+7)$

v. $(-17)-(-4)$

vi. $(+13,3)-(-10,5)$

vii. $(-21,4)-(+12,8)$

viii. $(-4,3)-(+4,3)$

ix. $(+7,2)-(-11,3)$

x. $(-8,3)-(-1,7)$

7.48 Να βρείτε τις διαφορές.

i. $\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{2}{5}\right)$

ii. $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right)$

iii. $\left(-\frac{39}{8}\right) - (-5)$

iv. $\left(-\frac{5}{4}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right)$

v. $\left(-3\frac{2}{5}\right) - \left(+2\frac{1}{3}\right)$

vi. $-5 - \left(-3\frac{1}{4}\right)$

vii. $-\frac{2}{3} - \left(+2\frac{3}{4}\right)$

viii. $\left(+\frac{3}{4}\right) - \left(2\frac{1}{3}\right)$

7.49 Να λυθούν οι εξισώσεις.

i. $x - (-9) = 15$

ii. $(+13) + x = -25$

iii. $(-25) - x = -38$

iv. $x - (+9) = -13$

v. $(-39) - x = 52$

vi. $(-18,2) - x = -5,8$

vii. $(-4) + x = -15$

7.50 Να αντικαταστήσετε με κατάλληλα πρόσημα τα * για να προκύψουν αληθείς ισότητες.

i. $(-5) - (* 5) = 0$

ii. $(* 5) - (-8) = +13$

iii. $(-6) - (* 2) = -4$

7.51 Να υπολογίσετε τις διαφορές $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$ όταν :

i. $\alpha = -8$

$\beta = -3$

ii. $\alpha = -5,2$

$\beta = 1,6$

iii. $\alpha = -6$

$\beta = 7$

iv. $\alpha = -2,7$

$\beta = 6,3$

v. $\alpha = +6,8$

$\beta = -3,5$

vi. $\alpha = -3,1$

$\beta = 4,9$

Είναι η αφαίρεση των ρητών πράξη αντιμεταθετική;

7.52 Να υπολογίσετε τα αλγεβρικά αθροίσματα.

i. $(-19) + (-25) - (+7) - (-8)$

ii. $\left(+\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{7}{12}\right)$

iii. $3\frac{3}{4} - \left(-2\frac{1}{2}\right) + \left(-5\frac{1}{2}\right)$

iv. $-\frac{3}{5} - \left(-2\frac{1}{4}\right) + \left(-5\frac{3}{10}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

v. $\left(-3\frac{1}{4}\right) - \left(-2\frac{1}{3}\right) + \left(+1\frac{1}{2}\right) - \left(2\frac{5}{6}\right)$

7.53 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x - y - \omega$, $x - y + \omega$, $y - \omega - x$, $\omega + y - x$ σε καθεμία από τις παραστάσεις.

i. $x = -15$

$y = 13$

$\omega = -22$

ii. $x = -9$

$y = 3$

$\omega = -2$

$$\text{iii. } x=3,8 \quad y=-6,3 \quad \omega=+4,5$$

7.54 Αν $\alpha=-3$, $\beta=-9$, $\gamma=+15$, $\delta=-32$ να υπολογιστούν :

$$A = \alpha - \beta - \gamma + \delta$$

$$B = \beta + \gamma - \delta - \alpha$$

$$\Gamma = \beta + \gamma + \delta - \alpha$$

$$\Delta = \alpha - \beta - \gamma - \delta$$

Να δείξετε ότι $A+B+\Gamma+\Delta=0$

7.55 Να κάνετε τις πράξεις αφού βγάλετε τις παρενθέσεις:

$$\text{i) } (-5+7-3) - (4-2-12) + [-7+3-(-5+2-8)]$$

$$\text{ii) } -(-0,6+4) + (2,3-4,7-0,5) - 9 - (5,7-2,3+3)$$

$$\text{iii) } \frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \right) + \left(-2\frac{1}{3} - 2 \right)$$

7.56 Αν $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{7}{12}$, $\delta = -\frac{5}{6}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$A = \alpha - (\beta - \gamma + \delta)$$

$$B = \beta - \alpha - \gamma + \delta$$

Και να δείξετε ότι $A+B=0$

7.57 Να υπολογίσετε τα x , y , ω , z , ϕ ώστε το τετράγωνο να είναι μαγικό.

-9	2	+4	x
+2	-4	-3	ω
Φ	0	+1	-5
+3	-7	y	+6

7.58 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων.

$$A = \frac{15}{8} : \frac{3}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{16}$$

$$B = \frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}} : \frac{3}{10}$$

7.59 Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στο -10 , για να βρούμε άθροισμα ίσο με:

α) -8 β) $+5$ γ) $+\frac{1}{5}$ δ) $-8,3$ ε) $-5,5 + \frac{2}{3}$ στ) $7 + \left(-\frac{8}{5}\right)$

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

7.60 Να αποδείξετε ότι $(\kappa-\lambda)-(\mu-\lambda)-(\kappa-\mu) = 0$

7.61 Αφού βγάλετε τις παρενθέσεις και τις αγκύλες και αν $\alpha = -2$, $\beta = 4\frac{1}{3}$, $\gamma = 1$, να

βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = (\alpha - \beta) - (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha)$$

$$B = (\alpha + \beta - \gamma) + (\beta - \alpha)$$

$$\Gamma = (\alpha - \beta) - [-5 + (\beta - \gamma) + \gamma - \beta] - \alpha$$

$$\Delta = \alpha + \{\beta - [\gamma + \alpha - (\gamma - \beta + 1)] - 1\}$$

7.62 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις για A, B από την παραπάνω άσκηση 2.

$$\Gamma = -A + B \qquad \Delta = |B - A| - A + B \qquad E = \frac{\Gamma}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$$

7.63 Να υπολογίσετε την παράσταση $\Gamma = A - B - |A - B|$

$$A = -(-2) - |-3 - (+4)|$$

$$B = (3^2 - 2^3) + \frac{8}{10} - \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{5}$$

7.64 Υπολογίστε την παράσταση $\Gamma = |A - B|$

$$A = \frac{2}{3} : \frac{4}{9} - \left(+\frac{1}{5}\right)$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} : \frac{1}{6}$$

7.65 Να συγκρίνετε τις τιμές ο αντίθετος του A και ο αντίθετος του B, αν A και B, οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων, αντίστοιχα:

$$A = \left(-2\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$B = \frac{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}}$$

A.7.5 Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών

Πολλαπλασιασμός ετερόσημων αριθμών

Για να πολλαπλασιάσω δύο ομόσημους αριθμούς πολλαπλασιάζω τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο συν (+)

Παράδειγμα

$$(+2) \cdot (+3) = +6$$

$$(-2) \cdot (-4) = +8$$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο πλην (-)

Παράδειγμα

$$(+4) \cdot (-3) = -12$$

Για να υπολογίσουμε το γινόμενο περισσότερων από δύο παραγόντων τότε πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο:

Βάζουμε + αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα

$$(+2) \cdot (-3) \cdot (-2) = +12$$

Βάζουμε - αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττός αριθμός.

Παράδειγμα

$$(+3) \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-1) = -12$$

Πιο συνοπτικά ισχύει ότι :

1) Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

$$(+)\cdot(+)= (+)$$

$$(-)\cdot(-)= (+)$$

2) Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

$$(+)\cdot(-)= (-)$$

$$(-)\cdot(+)= (-)$$

Να επισημάνουμε ότι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού συνεχίζουν να ισχύουν

• Αντιμεταθετική:

$$a \cdot \beta = \beta \cdot a$$

- Προσεταιριστική: $(a \cdot \beta) \cdot \gamma = a \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- Ουδέτερο στοιχείο το 1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$
- Αντίστροφο στοιχείο το $\frac{1}{a}$: $\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a \cdot 1}{a} = \frac{a}{a} = 1$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 132 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα γινόμενα :

Λύση

$$\alpha) (-1)(-1) = +1$$

$$\beta) -3(-10) = +30$$

$$\gamma) -1,2(-0,5) = +0,6$$

$$\delta) 0(-10.589) = 0$$

$$\epsilon) 1(-20.015) = - 20.015$$

$$\sigma\tau) -0,725(+1.000) = - 725$$

$$\zeta) \frac{12}{25} \cdot \left(-\frac{15}{24}\right) = -\frac{12 \cdot 15}{25 \cdot 24} = -\frac{180}{600} = -0,3$$

Άσκηση 6/σελ. 132 (Βιβλίο Οργανισμού)

Κάνε τις πράξεις:

Λύση

$$\alpha) (5 + \alpha)(2 + \beta) = (5 + \alpha) \cdot 2 + (5 + \alpha) \cdot \beta = 10 + 2 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta + \alpha \cdot \beta$$

$$\begin{aligned} \beta) (\alpha + 7)(\alpha - 7) &= (\alpha + 7) \cdot \alpha + (\alpha + 7) \cdot (-7) = \\ &= \alpha \cdot \alpha + 7 \cdot \alpha + \alpha \cdot (-7) + 7 \cdot (-7) = \\ &= \alpha^2 + 7\alpha - 7\alpha - 49 = \alpha^2 - 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) (\alpha - 3)(\beta - 3) &= (\alpha - 3) \cdot \beta + (\alpha - 3) \cdot (-3) = \\ &= \alpha \cdot \beta - 3 \cdot \beta + \alpha \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) = \\ &= \alpha \cdot \beta - 3 \cdot \beta - 3 \cdot \alpha + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) (\gamma + 8)(\delta + 5) &= (\gamma + 8) \cdot \delta + (\gamma + 8) \cdot 5 = \gamma \cdot \delta + 8 \cdot \delta + 5 \cdot \gamma + 5 \cdot 8 = \\ &= \gamma \cdot \delta + 8 \cdot \delta + 5 \cdot \gamma + 40 \end{aligned}$$

Άσκηση 7/σελ. 132 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τα γινόμενα:

Λύση

$$\alpha) (-1)(-1) = + 1$$

$$\beta) (-1)(-1)(-1) = - 1$$

$$\gamma) (-1)(-1)(-1)(-1) = + 1$$

Ολιγόλεπτη δοκιμασία...(διάρκεια 10 λεπτά)

ΘΕΜΑ 1^ο

Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- i. Το γινόμενο δυο αρνητικών αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός.
- ii. Το γινόμενο δυο ετερόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός.
- iii. Ο αντίστροφος του $-\frac{2}{3}$ είναι ο $+\frac{2}{3}$.
- iv. Όλοι οι αριθμοί έχουν τον αντίστρόφό τους.

ΘΕΜΑ 2^ο

Να συμπληρωθούν τα κενά με το κατάλληλο πρόσημο ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

- i. $(-2) \cdot (\dots\dots 4) = +8$
- ii. $(+3) \cdot (\dots\dots 6) = -18$
- iii. $(-4) \cdot (\dots\dots 5) = -20$
- iv. $(+7) \cdot (\dots\dots 2) = +14$

ΘΕΜΑ 3^ο

Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = -2, 2 + 2, 5 \cdot (-0, 4) - (-0, 2) \cdot (-0, 3)$$

Άλυτες Ασκήσεις

7.66 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$150 \cdot (120-128) =$	$(10) \cdot (-71) =$
$(-43) \cdot (+71) =$	$(-1) \cdot (+2) =$
$(-10) \cdot (+10) =$	$(-135) \cdot (+1) =$
$(-3) \cdot (+2) =$	$(-8) \cdot (-3) =$
$(+31) \cdot (-1) =$	$(-5) \cdot (+2) =$

7.67 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$20+(1-12) =$	$(-32) \cdot (-2) =$
$(-34) \cdot (+3) =$	$(-11) \cdot (+14) =$
$(-2) \cdot (+10) =$	$(-112) \cdot (+1) =$
$(-3) \cdot (+11) =$	$(-26) \cdot (-13) =$
$(+33) \cdot (+11) =$	$(-36) \cdot (+6) =$

7.68 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$$-2 \cdot (5-9)=$$

$$(-23) \cdot (+7)=$$

$$(+12) \cdot (+10)=$$

$$(-59) \cdot (+2)=$$

$$(+108) \cdot (+2)=$$

$$(12) \cdot (-2)=$$

$$(-4) \cdot (+3)=$$

$$(-1) \cdot (-7)=$$

$$(-225) \cdot (-15)=$$

$$(-64) \cdot (+8)=$$

7.69 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$$-\frac{3}{12} - \frac{2}{1} =$$

$$10-21-14=$$

$$-2\frac{4}{2} + 3\frac{5}{2} =$$

$$-9+1-2+4-0=$$

$$+\frac{14}{6} - \frac{13}{12} =$$

$$-812+511-17+123-116=$$

7.70 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις.

$$(-2) \cdot (5-9) \cdot (+2)=$$

$$(-23) \cdot (+7) \cdot (+2)=$$

$$(+12) \cdot (+10) \cdot (-1)=$$

$$(-59) \cdot (+2) \cdot (-2)=$$

$$(+108) \cdot (+27) \cdot (-2)=$$

$$(12) \cdot (-2) \cdot (+3)=$$

$$(-4) \cdot (-3) \cdot (+3)=$$

$$(-1) \cdot (-7) \cdot (-3)=$$

$$(-1) \cdot (-15) \cdot (+3)=$$

$$(-2) \cdot (+8) \cdot (-3)=$$

7.71 Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

i. $(+5) \cdot (+2)$

ii. $(+6) \cdot (-2)$

iii. $(-2) \cdot (-4)$

iv. $-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

v. $(-1) \cdot 4$

vi. $(-2) \cdot 0$

vii. $(-3) \cdot 1$

viii. $1 \cdot (-2)$

ix. $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{9}\right)$

$$x. \left(-\frac{8}{5}\right) \cdot \left(-\frac{25}{16}\right)$$

7.72 Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

$$i. (-0,2) \cdot (-5,2)$$

$$ii. \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$iii. \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$iv. 0,6 \cdot (-10)$$

7.73 Με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να απλοποιήσετε τη γραφή των παραστάσεων

$$i. A = 0,8x + 1,2x$$

$$ii. B = 0,3x - 0,8x$$

$$iii. \Gamma = -2x + 3x - 1,5x$$

$$iv. \Delta = -x + x$$

$$v. E = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x$$

7.74 Με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να απλοποιήσετε τη γραφή των παραστάσεων

$$i. 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$

$$ii. -2 \cdot 7 - 5 \cdot 7$$

$$iii. -\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 5$$

$$iv. 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-6)$$

$$v. (-3) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-7)$$

7.75 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

$$i. -3 \cdot (-1 - 5)$$

$$ii. -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 3\right)$$

$$iii. 7 \cdot (3 - 8)$$

$$iv. -5 \cdot \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{5}\right)$$

$$v. -\frac{2}{3} \cdot (2 - 3,5)$$

$$vi. (-4 - 2) \cdot (-4 - 8)$$

$$vii. (-2 + \beta) \cdot (\alpha + 4)$$

- viii. $(-5 + \beta) \cdot (-3 + \alpha)$
- ix. $(-3 + \alpha) \cdot (2 + \beta)$
- x. $(-2 + \alpha) \cdot (-3 - \beta)$

7.76 Όταν το $x=6$, να υπολογίσετε με δύο τρόπους τις τιμές των παραστάσεων :

- i. $A = 9x - 2x$
- ii. $B = -12x + 3x$
- iii. $\Gamma = 7,2x - 3,4x$
- iv. $\Delta = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}x$

7.77 Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να απλουστεύσετε τις παραστάσεις:

$$A = 3(\kappa - \lambda) - 4(\kappa - 2) + 3(\lambda + 2)$$

$$B = 5(\kappa + \lambda + \mu) - 2(\kappa + \mu) - 3(\lambda - \mu)$$

$$\Gamma = (\alpha + \beta)\gamma - \alpha(-\beta + \gamma)$$

7.78 Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς :

- i. $x \cdot (\alpha + \beta)$
- ii. $x \cdot (\alpha - \beta)$
- iii. $(x + \alpha) \cdot (\alpha + \beta)$
- iv. $(x + \alpha) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$
- v. $(x + \alpha) \cdot (\alpha + \beta - \gamma)$
- vi. $(x + \alpha) \cdot (\alpha - \beta - \gamma)$
- vii. $(-x) \cdot (\alpha + \beta - \gamma)$
- viii. $(-x + \alpha) \cdot (\alpha - \beta - \gamma)$
- ix. $(x + y + \omega) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$
- x. $(x + y - \omega) \cdot (\alpha - \beta - \gamma)$

7.79 Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι αντίστροφοι:

$$-0.5, 6, -\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -7, -\frac{6}{8}, -2, -\frac{1}{7}$$

7.80 Να βρείτε τους αντίθετους και τους αντίστροφους των παρακάτω αριθμών:

$$3, -5, -2.8, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}, \frac{7}{3}, \frac{5}{10}, -9, 0.7$$

7.81 Να συμπληρωθεί ο πίνακας :

A	-3	0	-2/3
B	2	1	-1/2
Γ	-1	-2	3
A·Γ			
B·Γ			
A·Γ+B·Γ			
(A+B)·Γ			
A·(B+Γ)			

7.82 Αν είναι $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$ και $\delta=0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = \alpha\beta + \gamma\delta$$

$$B = \beta(\gamma + \delta)$$

$$\Gamma = \alpha\delta - \beta\delta$$

$$\Delta = \beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma$$

13. Να κάνετε τις πράξεις :

- i. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma - (-\gamma + \beta) \cdot \alpha$
- ii. $(x - y) \cdot \alpha + x \cdot (y - x)$
- iii. $-2 \cdot (x + 2y) + -3 \cdot (-\alpha + \beta) + 3 \cdot (x + \alpha + y)$
- iv. $-8 \cdot x(-3y + 4z) + (-7y - 8z) \cdot 5x$
- v. $(x + 3) \cdot (x - 5) \cdot (6 + x)$
- vi. $(-5 + x) \cdot (-x + 8) \cdot (2x + 2)$

7.83 Να κάνετε γινόμενο το παρακάτω άθροισμα $A = \alpha\beta + \alpha - \beta - 1$

7.84 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

- i. $3 \cdot x = 1$
- ii. $\frac{1}{3} \cdot x = 1$
- iii. $-2 \cdot x = 2$
- iv. $-\frac{1}{3} \cdot x = 2$

7.85 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = \left[\left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{2}{4} \right] \cdot \left(-2 + \frac{3}{5} \right)$$

$$B = \left[-3 + \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) + 3 \right] \cdot \left(-\frac{13}{5} \right)$$

$$\Gamma = \left[13 - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) + \frac{1}{4} \right] \cdot (-5)$$

7.86 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = 6 \cdot (-1) + 2 \cdot \left[-2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \cdot (-1 - 8) \right]$$

$$B = (-5) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 5 \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{4} \right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} - \left[2 + \left(\frac{2}{3} - 4 \right) \right] \right\} + 2 \cdot \left\{ \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \right] \right\}$$

7.87 Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

Επί	1	-1	0	y	-y
1					
-1					
0					
x					
-x					

όταν οι αριθμοί x ,y είναι αντίστροφοι

7.88 Να αποδείξετε ότι :

i. $(-\alpha + \beta - \gamma) \cdot \delta = -\alpha\delta + \beta\delta - \gamma\delta$

ii. $(\alpha - \beta) \cdot (-\gamma + \delta) = -\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma - \beta\delta$

7.89 Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = -[(x-2) \cdot 3 - 3x] + [-1 - (-2+10)] \cdot (2-5)$$

7.90 i) Αν $x - y = \frac{1}{2}$ και $\alpha - \beta = -2$, να αποδείξετε ότι η παρακάτω παράσταση είναι ίση με μηδέν.

$$A = 2x + \alpha x + \beta y - \beta x - \alpha y - 2y$$

ii) Αν $A = 2x - 5(x - y)$ και $B = 5y - [-(\alpha - 3) + \alpha]x$, να δείξετε ότι $A=B$

7.91 Ποια είναι τα πρόσημα των α και β αν:

α) $\alpha\beta > 0$ β) $\alpha\beta < 0$ γ) $(-5)\alpha > 0$ δ) $3\beta < 0$ ε) $(-4)\beta < 0$

7.92 Αν $\alpha=2$, $\beta=1$ και $\gamma=-1$, να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$\frac{\alpha(\beta+5) - 3\gamma}{\beta\gamma - \alpha}$$

7.93 Αν $\alpha=-1$ και $\beta=2$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = 3\alpha + 5\beta - 2\alpha + 7\alpha - 3\beta$$

$$B = \alpha + 3(-5) - 4\alpha - 2\beta + [\beta - (-4 + 2 - 3\alpha)]$$

7.94 Να βρεθεί το x , ώστε οι παρακάτω παραστάσεις να πάρουν την τιμή 20:

$$A = (-1)(+5)x(-2)$$

$$B = \left(\frac{-1}{5}\right)x \cdot 5(-4+3)(-10)$$

$$\Gamma = (-2)(+6)(-8)\left(-\frac{1}{4}\right)x$$

7.95 Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

i. $(-6) \cdot (-2) \cdot (-2)$

ii. $(-3) \cdot (-2) \cdot 0 \cdot (-1)$

iii. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 6$

iv. $(-2) \cdot (-3) \cdot (+2) \cdot (-1)$

v. $(-8) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (+2)$

7.96 Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

- i. $(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)(-2)$
- ii. $2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-3\frac{2}{5}\right)4.2$
- iii. $(-3.2)\left(+\frac{1}{2}\right)(-0.1)\left(-2\frac{3}{4}\right)(-2)$
- iv. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
- v. $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$
- vi. $\frac{1}{7}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)(-3)\frac{1}{5}(-7)$
- vii. $\left[(-2)(-3)\left(+\frac{6}{5}\right)\right](-5)$
- viii. $\left[(-3)(-3)(-3)\right] \cdot \left[(-2)(-2)\right]$
- ix. $\left[(-2)(-3-2)(-1)\right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)(-1)\right]$
- x. $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{2}{3}\right)\left[-4+2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\right] \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)$

7.97 Να βρείτε τι πρόσημο έχει ο x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $(-1)(+3)(-3)(-2)x = -72$
- ii. $(+2)(-4)(-4)\left(+\frac{1}{2}\right)(-8)x = (-10)(-2)$
- iii. $(-3) \cdot x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -8$
- iv. $0.1 \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -4$
- v. $x \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{8}\right) \cdot (-2) < 0$
- vi. $(-1)\left(+\frac{1}{2}\right)(-x) = -5$

7.98 Αν είναι $a = -\frac{1}{3}$, $\beta = 5$, $\gamma = -\frac{3}{10}$, $\delta = -6$, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

:

$$A = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$$

$$B = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \cdot \delta$$

7.99 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

- i. $[-2 - (-1)][-1 - (-1) + (3 - 2)(2 - 3)]$
- ii. $-1(4 - 3)[(2 - 1)(4 - 5)] - [2 + (5 - 8) - 2](-1)$
- iii. $(2 - 4)\{2 - [(3 - 2)(-3)(2 - 3)] - 4\}$
- iv. $\{2 - [2 + 1 - (3 - 2) + 3 - (3 - 4)(4 - 5)(8 - 9)] - 1\}$

7.100 Αν $x \cdot y = -2$ να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = -\frac{3}{2}x(-2)y$$

$$B = (-0,5)(-10)(-y) + 3(-x)$$

$$\Gamma = (-4)(-2)\left(-\frac{1}{8}\right)x(-7)y\frac{2}{14}$$

7.101 Αν

$$A = (-1) \cdot (-2) \cdot (+4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-5) \cdot (-8) \quad \text{και} \quad B = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{78}{3}\right) \cdot (-1)$$

, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $A \cdot B$ χωρίς να κάνετε τις πράξεις .

7.102 Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \alpha - \beta \cdot \gamma$, όταν $\alpha > 0$ και $\beta \cdot \gamma < 0$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το πρόσημο των παραστάσεων $A, A \cdot A, -2^A$.

7.103 Αν $x - y = 4$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = -\{-[-(-x)]\} - [-(-y)]$

7.104 Αν $\beta - \alpha = 5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = -\{-[-(\beta + \gamma - \alpha)]\} + \{-[-(\alpha - \beta + \gamma)]\}$$

7.105 Να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση :

$$A = \left(-\frac{1}{4}\right)(x - 2)(-8 + 4) - 4(x - 2)\left(-\frac{1}{4}\right) \quad \text{αν} \quad x = -\frac{3}{2}$$

7.106 Αν είναι $-3\{-[-2(-x)]\} > 0$, να συγκρίνετε με το μηδέν τον αριθμό x .

7.107 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = (x + 1) \cdot (y + 1) \cdot z - z \cdot (x + y + 1), \text{ αν είναι } x \cdot y \cdot z = 10$$

7.108 Αν $(2 - x) \cdot (z - 5) \cdot (y - 4) < 0$, βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές

- i. $x < 2, z > 5$ και $y < 4$
- ii. $x < 2, z > 5$ και $y > 4$
- iii. $x < 2, z < 5$ και $y < 4$
- iv. $x > 2, z < 5$ και $y > 4$

7.109 Αν $x + z = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$ (με a μη μηδενικό αριθμό) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (x + z)(-y + 1)(-a) - \left\{ y \left[-\frac{1}{2}(2x + 2z)(-a) \right] \right\}$$

A.7.6 Διαίρεση Ρητών Αριθμών

Διαίρεση ετερόσημων αριθμών

Για να **διαιρέσουμε** δυο ρητούς αριθμούς διαιρούμε τις **απόλυτες** τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο συν (-)

Παράδειγμα

$$(+8) : (-4) = -2$$

$$(-64) : (+16) = -8$$

Διαίρεση ομόσημων αριθμών

Για να **διαιρέσουμε** δυο ρητούς αριθμούς διαιρούμε τις **απόλυτες** τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο συν (+)

Παράδειγμα

$$(-4) : (-4) = +1$$

$$(+16) : (+4) = +4$$

Πιο συνοπτικά ισχύει ότι :

1) Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

2) Το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 134 (Βιβλίο Οργανισμού)

Κάνε τις διαιρέσεις :

Λύση

$$\alpha) (+15,15) : (+3) = +5,05$$

$$\beta) (-4,5) : (-1,5) = +3$$

$$\gamma) (-81) : (+0,9) = -90$$

$$\delta) 49 : (-7) = -7$$

Άσκηση 2/σελ. 134 (Βιβλίο Οργανισμού)

Άσκηση 5/σελ. 134 (Βιβλίο Οργανισμού)

Λύσε τις εξισώσεις:

Λύση

α) $-3x = 74$

$$x = 74 : (-3)$$

$$x = -\frac{74}{3}$$

β) $-0,14x = -49$

$$x = -49 : (-0,14)$$

$$x = + 350$$

γ) $x \cdot (-2) = 12$

$$x = 12 : (-2)$$

$$x = - 6$$

δ)

$$\frac{2}{3} \cdot x = -\frac{4}{6}$$

$$x = \left(-\frac{4}{6}\right) : \frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{12}{12}$$

$$x = -1$$

Άλυτες Ασκήσεις

7.110 Να υπολογίσετε τα πηλικά :

i. $(+49) : (+7)$

ii. $(+10) : (+10)$

iii. $(-81) : (-27)$

iv. $(-7) : (-1)$

v. $(+40) : (+5)$

7.111 Να υπολογίσετε τα πηλικά :

i. $(+18) : (-9)$

ii. $(-12) : (+3)$

iii. $(-22) : (+11)$

iv. $(-16) : (+4)$

- v. $(-200):(+25)$
- vi. $(-10):(+2.5)$
- vii. $3.5:(-5)$
- viii. $(-9.6):6$
- ix. $(-2.7):(-2)$
- x. $2.5:(-5)$

7.112 Να υπολογίσετε τα πηλίκα :

- i. $\left(-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{2}{15}\right)$
- ii. $(-2):\left(+\frac{1}{2}\right)$
- iii. $\left(-\frac{4}{7}\right):(-2)$
- iv. $\left(+\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)$
- v. $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(-\frac{2}{9}\right)$
- vi. $\left(-\frac{6}{5}\right):\frac{1}{10}$
- vii. $\frac{2}{20}:\left(-\frac{5}{4}\right)$
- viii. $\left(\frac{+100}{-25}\right):\left(\frac{-2}{+5}\right)$
- ix. $\left(\frac{-48}{-6}\right):\left(\frac{-3}{+2}\right)$
- x. $\left(\frac{-5}{+4}\right):\left(\frac{5}{-8}\right)$

7.113 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

- i. $\frac{-2}{1} + \frac{-2}{-1}$
- ii. $\frac{-2}{3} + \frac{1}{-2}$
- iii. $\frac{-3}{8} + \frac{-5}{4}$
- iv. $\frac{5}{3} + \frac{-2}{6} - \frac{+3}{2}$
- v. $\frac{-8}{3} - \frac{-2}{4} + \frac{4}{-12}$

$$\begin{aligned} \text{vi.} \quad & \frac{-1}{2} + \frac{2}{8} - \frac{1}{-4} + \frac{2}{-16} \\ \text{vii.} \quad & \frac{-2}{3} + \frac{-1}{6} - \frac{2}{12} - \frac{3}{-4} \\ \text{viii.} \quad & \frac{-3}{4} + \frac{-2}{2} + \frac{-8}{-8} - \frac{9}{-9} - \frac{13}{13} \end{aligned}$$

7.114 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & (-2) + (-3) : (-1) - (-7) \\ \text{ii.} \quad & [3(-2) - (-8)] \cdot (-7) - (-2)(-5) + 3 : (-1) \\ \text{iii.} \quad & \frac{(-1)(-2) + (-3)(-4) - (-2)(-3)}{(-2)(-3) : (-1) - (-3)(-2) : (-6) + (-2)} \\ \text{iv.} \quad & \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{15}\right) : \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\right) \\ \text{v.} \quad & \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{4}\right) : \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{10} - \frac{3}{2}\right) \\ \text{vi.} \quad & \left(\frac{-6}{5} + \frac{3}{-2}\right) : \left(\frac{-2}{4}\right) \\ \text{vii.} \quad & (-5 + 3) - \left(-3 + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{-2}\right) + \left[\frac{-2}{4} \left(\frac{8}{-3}\right) + 2\right] : \left(-\frac{10}{3}\right) \\ \text{viii.} \quad & \left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{15}{6}\right) + \left(-\frac{12}{5}\right) : \left(\frac{+2}{-9}\right) - 15 : (-2) \\ \text{ix.} \quad & [-4(-3) + (-2)(+6)] : [0,2(-0,4) - 0,3(-0,4)] \\ \text{x.} \quad & \left[\left(\frac{3}{5} : \frac{9}{25}\right) - \left(-\frac{8}{3} : \frac{5}{4}\right)\right] : \left(-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

7.115 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = 7 : 3 + 8 : 3 - 5$$

$$B = -20 : 7 + 31 : 7 + 38 : 7$$

$$\Gamma = (21 - 7) : 2 + (-9 + 3) : (-6)$$

$$\Delta = (x + 1) \cdot 3 + (3x + 2) : (-1)$$

$$E = 2[3 - (-1)] - [10 : (-2)] \cdot \frac{4}{5}$$

$$Z = [5(-8) + 15 - (-4)] : [-(-0.4)(-0.5) - (0.1)]$$

$$H = 8 - [-(-2) \cdot 5] - 10 + [6 : (-3)] \cdot 5$$

7.116 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = \frac{\left(2 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{9}{3} - \frac{2}{6}\right) : \left(3 - \frac{4}{5} + \frac{2}{10}\right)}$$

$$B = \frac{\left(-\frac{4}{2} + 5 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)}{-\frac{4}{7} : \frac{5}{7}}$$

7.117 Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε να ορίζονται οι παρακάτω διαιρέσεις :

i. $\frac{5}{2x}$

ii. $\frac{3}{2x + 1}$

iii. $\frac{-5}{-4x + 2}$

iv. $\frac{-5}{-12x - 4}$

v. $\frac{5x}{(x - 1)(x - 2)}$

7.118 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i. $-7x = 49$

ii. $-6x = -12$

iii. $x(-8) = 32$

iv. $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}$

v. $\frac{2}{8}x = \frac{1}{8}$

vi. $x : (-5) = 45$

- vii. $\frac{x}{10} = -16$
- viii. $\frac{x}{0,5} = -125$
- ix. $\frac{-15}{x} = 30$
- x. $-21 : x = 7$
- xi. $(-x) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$
- xii. $-3 : x = -9$

7.119 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων Α,Β,Γ:

$$A = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}, B = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}, \Gamma = (2\alpha + \beta) : \gamma, \text{ αν}$$

$$\alpha = -8 + 5 - 12 + 13$$

$$\beta = 0,5(-4) + 5\left(\frac{1}{2} - 0,5\right)$$

$$\gamma = \frac{-5 - 7 + 3}{-6}$$

7.120 Αν $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

7.121 Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{x}{y}$ όταν είναι :

i. $\frac{3x}{24} = y$

ii. $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = -5$

iii. $\frac{7}{-3y} : \frac{-21}{3x} = \frac{5}{6}$

7.122 Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

α	B	γ	$\alpha : (\beta \cdot \gamma)$	$(\alpha : \beta) \cdot \gamma$
-16	-2	4		
-5	7	-3		

7.123 Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

α	B	γ	$\alpha : (\beta : \gamma)$	$(\alpha : \beta) : \gamma$
-20	5	4		
-6	2	-8		

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

7.124 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\frac{x}{y} + \frac{2}{x} : \frac{2}{y} - \frac{7x}{y}}{-5\left(\frac{x}{y} + 3\right) + (5x) : y}$$

όταν ο λόγος $\frac{x}{y} = -3$.

7.125 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{-3\left(-2 + \frac{5}{3}\right) + 16 : (3 - 5)}{\left[\frac{1}{3} : \left(-\frac{1}{6}\right)\right] \cdot (-3) - 7 \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right)} \cdot \frac{[(-1) : (3 \cdot 5)] \cdot (-3)}{\left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right] : \frac{1}{6}}$$

7.126 Αν $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{3}{4}$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{a + 2a - 3}{-\beta + 3\beta} \quad \text{και} \quad B = \frac{-a}{\beta} - \frac{\beta}{-a}$$

7.127 Αν είναι $x = \frac{5 - 3\alpha}{-7\alpha + 5}$, $y = \frac{-x + 3}{-x}$ να υπολογίσετε το y όταν $\alpha = 1$.

7.128 Να βρείτε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, αν οι α, β είναι δύο θετικοί αριθμοί και αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + 5}{\beta + 2}$$

7.129 Για τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y, α να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\frac{x+y}{\alpha}}{\frac{x+y}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+x}}$$

αν $x=3\alpha$ και $y=2\alpha$.

7.130 i. Θεωρούμε την παράσταση $A = \frac{2\alpha + \beta}{\beta}, \beta \neq 0$

a. Να αποδείξετε ότι $A = \frac{2\alpha}{\beta} + 1$

b. Αν η τιμή του λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι -2 να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$B = 2A : (-2) \text{ ισούται με } 3.$$

ii. Θεωρούμε την παράσταση $A = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ με $\gamma \neq 0, \alpha$ και β ομόσημοι και α

$+\beta \neq 0$

a. Να αποδείξετε ότι

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

b. Αν $A=0$, να βρείτε το πρόσημο του γ .

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 136 (Βιβλίο Οργανισμού)

Βρες τη δεκαδική μορφή των ρητών :

Λύση

$$\alpha) -\frac{15}{10} = -1,5$$

$$\beta) \frac{5}{8} = 0,625$$

$$\gamma) \frac{13}{14} = 0,9285714$$

$$\delta) \frac{20}{11} = 1,8\overline{1}$$

$$\epsilon) \frac{32}{31} = 1,032258064516129$$

Άλυτες Ασκήσεις

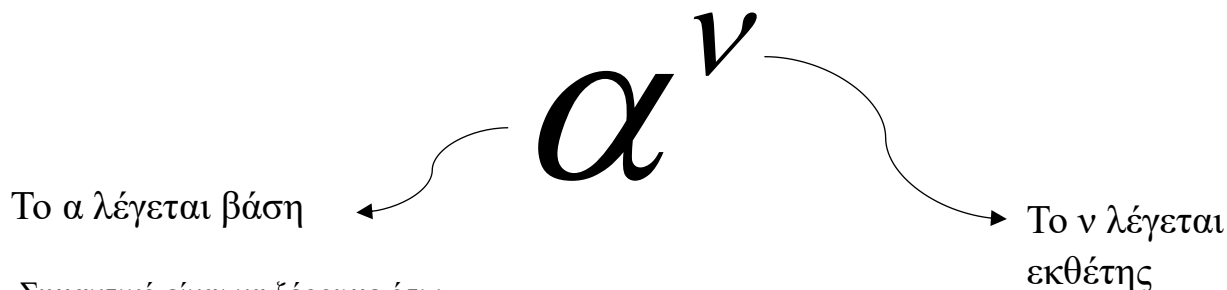
7.131 Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους αριθμούς $0,77777777\dots$ και τον $-1,53535353\dots$

7.132 Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους αριθμούς: $4,25$, $0,0054$ και $8,2$.

7.133 Βρείτε τη δεκαδική μορφή των ρητών $\frac{3}{1000}$, $\frac{367}{1000}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{77}{45}$.

Α.7.8 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Φυσικό

Ορισμός



Σημαντικό είναι να ξέρουμε ότι :

$$a^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha}_{\text{ο πολλαπλασιασμός επαναλαμβάνεται } n \text{ φορές}}$$

Απλές Ιδιότητες

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

$$(-a)^n = \begin{cases} +a^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος αριθμός} \\ -a^n, & \text{αν } n \text{ περιττός αριθμός} \end{cases}$$

Ιδιότητες

Παραδείγματα

$$a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu} \quad \longrightarrow \quad 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$\frac{a^v}{a^\mu} = a^v : a^\mu = a^{v-\mu} \quad \longrightarrow \quad \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10} : 2^9 = 2^{10-9}$$

$$(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu} \quad \longrightarrow \quad (2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v \quad \longrightarrow \quad (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι οι δύο παρακάτω ιδιότητες ισχύουν μόνο για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση.

$$1\eta) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

$$2\eta) (\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$$

Παράδειγμα

Η πράξη :

$$(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2 = 4+9=13$$

Ενώ η πράξη με βάση την προτεραιότητα των δυνάμεων θα πρέπει να γίνει κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, δηλαδή ως εξής:

$$(2+3)^2 = (5)^2 = 25$$

Αντίστοιχα ισχύει και για την αφαίρεση

Η πράξη :

$$(2-3)^3 \neq 2^3 - 3^3 = 8-27=-19$$

Ενώ η πράξη με βάση την προτεραιότητα των δυνάμεων θα πρέπει να γίνει κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, δηλαδή ως εξής:

$$(2-3)^3 = (-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 3/σελ. 139 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων :

Λύση

$$A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$$

$$A = -1 + (+1) + (-1) + (+1) + (-1)$$

$$A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$$A = -1$$

$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3$$

$$B = 32 \cdot 625 - 25 \cdot 1.024 + 87,5 \cdot 64$$

$$B = 20.000 - 25.600 + 5.600$$

$$B = 20.000 + 5.600 - 25.600$$

$$B = 25.600 - 25.600$$

$$B = 0$$

$$\Gamma = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

$$\Gamma = -\frac{-6^5}{3^5} - \frac{8^4}{4^4} + \frac{10^3}{-5^3}$$

$$\Gamma = +\frac{6^5}{3^5} - \left(\frac{8}{4}\right)^4 - \left(\frac{10}{5}\right)^3$$

$$\Gamma = +\left(\frac{6}{3}\right)^5 - 2^4 - 2^3$$

$$\Gamma = 2^5 - 2^4 - 2^3$$

$$\Gamma = 32 - 16 - 8$$

$$\Gamma = 16 - 8$$

$$\Gamma = 8$$

Άλυτες Ασκήσεις

7.134 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

i. -2^3

ii. $(-1)^2$

iii. -3^4

iv. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

v. $(-4)^3$

7.135 Να υπολογίσετε τις ακόλουθες δυνάμεις:

α) $(-3)^3$

β) -6^4

γ) $(-5)^{10}$

δ) $(-6)^3$

ε) $(-2)^5$

7.136 Να υπολογίσετε τις ακόλουθες δυνάμεις:

α) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$

β) $\left(\frac{-5}{4}\right)^2$

γ) $\left(\frac{(-2)^2}{2}\right)^3$

δ) $\left(\frac{(-2)^3}{2}\right)^2$

ε) $\left(-\frac{5}{8}\right)^2$

7.137 Να υπολογίσετε τις ακόλουθες δυνάμεις:

α) $(-\frac{5}{3})^2$

β) $(\frac{-5}{4})^2$

γ) $(\frac{(-2)^2}{2})^3$

δ) $(\frac{(-2)^3}{2})^2$

ε) $(\frac{(-2)^3}{(-2)^3})^2$

ε) $(\frac{(-2)^5}{(-2)^3})^2$

7.138 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

$(\frac{a}{b})^v = (\frac{a}{b})^v$	
$(\frac{a}{b})^v = (\frac{b}{a})^v$	
$(ab)^v = a^v b^v$	
$(\frac{a^3}{2})^v = \frac{a^{3v}}{2^v}$	
$(a^\mu)^v = a^{\mu v}$	
$(\frac{a}{b})^v = (\frac{a^v}{b^v})^v$	
$a^\mu b^v = a^\mu b^v$	
$a^\mu a^v = (aa^v)^v$	

7.139 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

i. $(\frac{4}{3})^2$

ii. $(-\frac{5}{2})^4$

iii. 1522^1

iv. $(-0.5)^5$

v. $(-0.2)^4$

7.140 Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων τις παρακάτω παραστάσεις :

- i. $(-3)^2 \cdot 9$
- ii. $-(-2^4) \cdot (-2)^3$
- iii. $\frac{1}{-8} \cdot (-2)^5$
- iv. $2^5 2^7 2$
- v. $(-6)^2 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)^4$
- vi. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^4$
- vii. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right]^5 : \left(-\frac{3}{2}\right)$
- viii. $(2^5 2^3) : 6^4$
- ix. $(-3)^4 [(-3)^3]^2 : (-3)^3$
- x. $3^4 2^3 5^3 5^5 (3^2)^3$

7.141 Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων τις παρακάτω:

- α) $3^6 : 3^4$ β) $(-4)^7 : (-4)^5$ γ) $\frac{(-3)^8}{(-3)^5}$ δ) $-2^8 : 2^6$
- ε) $(-5)^{13} : [(-5)^{11}]$ στ) $\frac{-4^7}{-4^3}$ ζ) $\frac{6^{13}}{-6^{10}}$ η) $\frac{-(-3)^{14}}{(-3)^{10}}$
- θ) $-3^{12} : (-3^7)$ ι) $-(-4)^3 : (-4^2)$

7.142 Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων:

- | | |
|--|--|
| α) $(5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4) : 5^6$ | η) $2^3 \cdot 8^2$ |
| β) $3^2 \cdot 3^4 \cdot (3^2)^3$ | θ) $9^5 : 3^2$ |
| γ) $[(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^{10}] : [(-2)^3]^2$ | ι) $(6^2 : 3^2) \cdot 2^5$ |
| δ) $(-a)^5 \cdot (-a) \cdot (-a)^6$ | ια) $(3^7 : 3^4) \cdot (4^{10} : 4^7)$ |
| ε) $[(-0,1)^{13} : (-0,1)^7] \cdot (-0,1)^2$ | ιβ) $(8^5 : 8^3) : (2^{13} : 2^{11})$ |
| στ) $3^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot 3^3 \cdot (5^2)^6$ | ιγ) $(9^5 : 3^5) \cdot (6^3 : 2^3)$ |
| ζ) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ | ιδ) $(2^5 \cdot 6^5 \cdot 4^5) : 12^5$ |

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$B = \left(-\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot 6$$

$$\Gamma = [-(0.5)^3] \cdot 2^3 \cdot (-4)^3 \cdot (-0.25)^3$$

$$\Delta = 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 3^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$Z = \left(-\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^7 (-4)^7 (-1)^7$$

7.143 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = \frac{20^5}{10^5}$$

$$B = [-(0.2)]^{10} : (0.2)^{10}$$

$$\Gamma = (-1.5)^3 : (0.5)^3$$

$$\Delta = (-12)^3 : 4^3$$

$$E = (-3,6)^2 : (-3)^2$$

$$Z = \frac{(-36)^2}{9^2}$$

$$H = \frac{(-27)^3}{(-9)^3}$$

7.144 Να κάνετε τις πράξεις :

i. $\frac{(-14)^6}{7^6} + \frac{(-9)^3}{-3^3} - (1.5)^2$

ii. $\frac{(-5)^9 \cdot 2^{10}}{2^9 \cdot 5^7} + 2 \cdot (-5)^2$

iii. $[(-3)^3 : 3 - (-2)^4 : (-2^3)] : \frac{1}{-2^3}$

iv. $(-1)^3 \cdot \left[\frac{1}{2}(-3)^2 - \frac{1}{4}(-2)^3 \right] + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{9}\right) - 2$

v. $\{(-7)^3 [-(-7^2)^3]\} : (-49) [-(-7)^2] - (-7^{11})$

$$\text{vi. } \frac{4}{5} \cdot \frac{(-5)^2}{8} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{1}{6^2} - \frac{5}{2^2}$$

$$\text{vii. } \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[-3^2 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3}\right) + (3:2)^2 \cdot \frac{4}{9} + 3^3\right]$$

$$\text{viii. } (-5+7)^2 + (-4+6)^2 \cdot (-5+4) - (6-5)^8 : \frac{1}{8}$$

$$\text{ix. } \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-5) \cdot \frac{3^2 4^2 5}{12^2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{x. } \frac{6^3 7^2 3^5}{9^3 7^3 2^3} + (-3)^3 \left[\frac{1}{3^2} : 3\right]$$

7.145 Να γραφεί:

α) το 8^2 ως δύναμη με βάση το 2

β) το 4^5 ως δύναμη με βάση το 2

γ) το 16^2 ως δύναμη με βάση το 2 και ως δύναμη με βάση το 4

δ) το 9^4 ως δύναμη με βάση το 3

7.146 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 3^5 \cdot x = 6^5 \quad \beta) \frac{x}{2^6} = 2^3 \quad \gamma) (-3)^2 \cdot x = (-3)^5 \quad \delta) \left(\frac{1}{2}\right)^6 x = (-2)^6$$

7.147 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = \frac{-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - (-1)^3} : \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$B = (-1)^{11} + (-1)^{22} + (-1)^{23} + (-1)^{48}$$

$$\Gamma = 2^2 + 2^3 + 2^4 - 2^5 + (-2)^6$$

$$\Delta = \frac{(-3)^3 + 2^5 + (-2)^3}{(-4)^2 - 5^2} \cdot \frac{2^4 + (-3)^3}{-2 \cdot (-2)^3}$$

$$E = -\frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - (-6) \cdot 3^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4$$

$$Z = (-7+5)^3 \cdot \left[-(6-2)^2 + 3^3\right]$$

7.148 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων Q

$$A = (x+1)^2$$

$$B = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{όταν } x = (-2)^2 + 3^3 + (-2)^5 + (-1)^7$$

7.149 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων Q

$$A = \frac{(-15)^2}{9 \cdot 25} + \frac{(-18)^3}{8 \cdot 3^6}$$

$$B = \frac{60^2}{144} - \frac{3^9 \cdot 2^5}{3^8 \cdot 4} + (-1)^{148}$$

7.150 Αν $x=3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = 4(x-1)^{2x} - x^x + (-x+1)^2 \cdot (-x)^{x-1}$$

7.151 Αν $x=-3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = (x+2)^{1000} + (x+3)^{2000} + (x+4)^{3000}$$

7.152 Αν $x= -3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{(x+1)^5 - 2^4 \cdot (x+2) \cdot (2-x)^2}{x^2 - \left(2 + \frac{x}{3}\right)^5} \cdot \frac{(2-x)^2}{7x-4}$$

7.153 Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = (\alpha + \beta)^{10} - (\alpha - \beta)^{10} + (\beta - \alpha)^{10} - (-\beta - \alpha)^{10}$$

7.154 i. Να αποδείξετε ότι $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

ii. Να αποδείξετε ότι $2^{v+1} - 2^v = 2^v$

iii. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = (-1)^v + (-1)^{v+1}$

7.155 Αν $x \cdot y \cdot \omega = -2$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\left(-\frac{1}{2} \cdot x^3 \cdot y \cdot \omega^2\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \omega\right) = x^2$

ii. $\left(-4 \cdot x \cdot y^2 \cdot \omega^3\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y\right) \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot \omega\right) = -12 \cdot x \cdot y^2$

iii. $\frac{\left[(-2 \cdot x^2 \cdot y \cdot \omega^3)^2\right]^3}{(4 \cdot x^2 \cdot \omega^4)^3} = 64$

7.156 Να αποδείξετε ότι αν στον κύβο του αριθμού 4 προσθέσουμε το εικοσαπλάσιο του, το αποτέλεσμα διαιρείται με το 48.

7.157 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = 3^{4\nu+1} + 10 \cdot 3^{4\nu} - 13$ διαιρείται ακριβώς από τον αριθμό 13.

7.158 Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $(x + y)^\nu - x^\nu - y^\nu$, ν περιττός για $x = -y$, είναι μηδέν .

A.7.9 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Ακέραιο

Σε αυτή την ενότητα πρέπει να δώσουμε στις ιδιότητες :

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v}$$

Παράδειγμα

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Και

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v = \frac{\beta^v}{\alpha^v}$$

Παράδειγμα

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2/σελ. 142 (Βιβλίο Οργανισμού)

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

Λύση

$$A = (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2$$

$$A = (-1)^{+3} + (-1)^{+2} + (-1)^{+1} + 1 + (-1) + (+1)$$

$$A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$$

$$A = 0$$

$$B = [(-2)^2]^5 \cdot [(-3)^2]^{-2} + [(-23,5)^2 \cdot (23,5)^{-2}]^5$$

$$B = (-2)^{10} \cdot (-3)^{-4} + (-23,5)^{10} \cdot (23,5)^{-10}$$

$$B = 2^{10} \cdot \frac{1}{(-3)^4} + 23,5^{10} \cdot 23,5^{-10}$$

$$B = 1024 \cdot \frac{1}{81} + 23,5^{10-10}$$

$$B = \frac{1024}{81} + 23,5^0$$

$$B = \frac{1024}{81} + 1$$

$$B = \frac{1024 + 81}{81}$$

$$B = \frac{1.105}{81}$$

$$\Gamma = \frac{(-6)^{-5}}{12^{-5}} + \frac{16^{-4}}{(-32)^{-4}} - \frac{5^{-3}}{(-10)^{-3}}$$

$$\Gamma = \left(\frac{-6}{12}\right)^{-5} + \left(\frac{16}{-32}\right)^{-4} - \left(\frac{5}{-10}\right)^{-3}$$

$$\Gamma = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\Gamma = (-2)^{+5} + (-2)^{+4} - (-2)^{+3}$$

$$\Gamma = -32 + (+16) - (-8)$$

$$\Gamma = -32 + 16 + 8$$

$$\Gamma = -16 + 8$$

$$\Gamma = -8$$

Άλστες Ασκήσεις

7.159 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις :

i. 15^{-1}

ii. $(-2)^{-2}$

iii. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

iv. $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$

v. 1025^0

vi. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

vii. 0.3^{-3}

viii. $(-5)^{-4}$

ix. -5^{-2}

x. $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{6}$

7.160 Να συγκρίνετε με το μηδέν τους παρακάτω αριθμούς :

$$7^{-1}, (-7)^{-1}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-20}, -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-19}, (-1)^0, -1^0$$

7.161 Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

i. $3^{-5} \cdot 3^{-2}$

ii. $(-5)^5 \cdot (-5)^3$

iii. $\left(-\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

iv. $3^{-2} \cdot 2^5 \cdot 3^3 \cdot 2^{-7}$

- v. $6^{-5} \cdot 49^{-2} \cdot 4^{-8} \cdot 4^9 \cdot 7^5 \cdot 36^3$
 vi. $(-2)^{-2} \cdot (-2)^{-3} \cdot 8^{-1}$
 vii. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 8$

7.162 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = 2^{x-4} - 6 \cdot 4^{x-3} + 1^{x-2} - 5^{x-2}, \alpha \nu \quad x = 1$$

$$B = 2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x^{-x} + x^x - 3 \cdot (-1)^{-3}, \alpha \nu \quad x = -2$$

$$\Gamma = (-1)^{-2} + 2 \cdot (-2)^{-1} - 3 \cdot (-3)^{-3}$$

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{x-2} + (-1)^{x-1} - (-1)^x \alpha \nu \quad x = 1$$

$$E = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} - \left(-\frac{x}{3}\right)^x + (5+x) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1} + (2-x)^{x+2}, \alpha \nu \quad x = -2$$

$$Z = \left(-\frac{1}{2}\right)^x + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x+1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{x+2} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{x+3} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{x+4}, \alpha \nu \quad x = -4$$

$$H = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) \alpha \nu \quad x = 3^{-3}, y = 2^{-5}, z = -7^{-2}$$

7.163 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = (-1)^{-2} + (-1)^{-3} + (-1)^0 + (-1)^3 + (-1)^6$$

$$B = \left[-3^2 + (-5)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^{-1}\right]^0$$

$$\Gamma = 8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + (-9)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-2}$$

$$\Delta = \left[\frac{(-1)^4 + 3^3}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 2}\right]^{-8}$$

7.164 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\frac{2^{-7} \cdot 10^5 \cdot (-7)^{-4} \cdot 6^{-8} \cdot 5^{10} \cdot 8^{-2}}{10^3 \cdot 2^{-10} \cdot (-5)^{11} \cdot (-7)^{-4} \cdot 8^{-1}}$

ii. $\left(\frac{x^4}{y^3}\right) \cdot \left(\frac{-3y^3}{x^4}\right)^{-3}, x, y \neq 0$

$$\text{iii. } \left(\frac{2}{6}x^{-1}y^3\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-2x^2}{y^3}\right)^{-4}$$

7.165 Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot 32 - \left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$$

$$B = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right]^2 + 3^{10} \cdot 9^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-12} \cdot 81^{-1}$$

7.166 Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } \left(-\frac{1}{27}\right)^{-6} = 3^{18} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-9}$$

$$\text{ii. } \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]^{-10} = 256^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-40}$$

7.167 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{i. } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot x = -8$$

$$\text{ii. } \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} : x = 3^0$$

$$\text{iii. } \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot x = 5^3$$

7.168 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{i. } 2^{25} = 2^5 \cdot 2^{-x+2}$$

$$\text{ii. } (0.2)^{-3} \cdot 5x = 25^4$$

$$\text{iii. } (-3)^{-x+2} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{-x} = 27$$

7.169 Αν ισχύει $A = \left(\frac{xyz}{xy + yz + zx}\right)^{-1}$, $B = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ να δείξετε ότι $A=B$.

7.170 Αν α, β, x είναι μη μηδενικοί ρητοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha = \beta$, τότε να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{\alpha^3 \cdot \beta^2 \cdot x}{\alpha^4 \cdot \beta \cdot x^2} = -2$$

Α.7.10 Τυποποιημένη Μορφή Μεγάλων και Μικρών Αριθμών

Αυτή τη γραφή την χρησιμοποιούμε για να γράψουμε πιο σύντομα πολύ μεγάλους αριθμούς κατά απόλυτη τιμή. Τους γράφουμε με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10. Δηλαδή στη μορφή $a \cdot 10^{-n}$ όπου a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 και n φυσικό αριθμό.

Παραδείγματα

$$2.000.000 = 2 \cdot 10^6$$

$$3.500.000.000 = 3,5 \cdot 10^9$$

$$0,00000022 = 2,2 \cdot 10^{-7}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 143 (Βιβλίο Οργανισμού)

Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς :

α) Η απόσταση Γης – Σελήνης είναι 384.400.000 m.

β) Η ηλικία της Γης είναι 4.500.000.000 έτη.

γ) Η απόσταση Γης – Ήλιου είναι 149.600.000 Km.

Λύση

α) $3,844 \cdot 10^8$ m

β) $4,5 \cdot 10^9$ έτη

γ) $1,496 \cdot 10^8$ Km

Άλυτες Ασκήσεις

7.171 Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

i. $123 \cdot 10^8$

ii. $223,4 \cdot 10^{-10}$

iii. $2.023 \cdot 10^{23}$

iv. $0,323 \cdot 10^{-9}$

7.172 Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

i. 1.200.000.000.000

ii. 34.000.000

iii. 100.000.000.000

iv. 0,00000023

v. 0,00000000313

vi. 0,00000000000005

7.173 Να κάνετε τις πράξεις:

i. $237.000.000 \cdot 5.000.000$

ii. $0,00000002 \cdot 0,00000023$

iii. $13.500.000.000 : 3.000.000$

iv. $0,0000001 : 0,00004$

7.174 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $8 \cdot 10^7$ και $5 \cdot 10^9$

ii. $2 \cdot 10^{-6}$ και $1,5 \cdot 10^{-7}$

iii. $18 \cdot 10^6$ και $18.000.000$

iv. $123 \cdot 10^4$ και $5 \cdot 10^5$

v. $0,23 \cdot 10^{10}$ και $83 \cdot 10^8$

7.175 Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς που ακολουθούν:

i. $(8 \cdot 10^7)^2$

ii. $(\frac{2}{5} \cdot 10^7)^{-2}$

iii. $(2 \cdot 10^{-4})^{-2}$

iv. $(0,23 \cdot 10^5)^3$

7.176 Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

i. $A = \frac{123 \cdot 10^5 - 0,23 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{10}}$

ii. $B = \frac{(256 \cdot 10^8) \cdot (0,008 \cdot 10^{-5})}{2 \cdot 10^{-10}}$

Κριτήριο Αξιολόγησης 7^{ου} Κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

- i. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ομόσημους αριθμούς;
- ii. Πώς πολλαπλασιάζουμε δυο ετερόσημους αριθμούς;
- iii. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού;
- iv. Πότε δυο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-2)^{-2} =$

ii. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

iii. $4^4 \cdot 4^3 =$

iv. $(-2^3)^5 =$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε.

i. $2^3 \cdot 2^2 = 2^6$

ii. $(a^2)^4 = a^8$

iii. $(a+1)^3 = a^3 + 1^3$

iv. $3+3+3+3 = 3^4$

v. $2011^0 = 1$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Να γραφεί το γινόμενο

$2^2 \cdot 3^3 \cdot (5^{-4} \cdot 2^4)^2 \cdot (3^2)^2 \cdot 7^{-3} \cdot (5^2)^4 \cdot (2 \cdot 7)^4$ υπό τη μορφή δύναμης : $2^{\dots} \cdot 3^{\dots} \cdot 5^{\dots} \cdot 7^{\dots}$

Μονάδες 5

Διάρκεια 40 λεπτά

Επαναληπτικές Ασκήσεις – Ανά Κεφάλαιο

Επαναληπτικές Ασκήσεις 1^{ου} Κεφαλαίου

1.
 - i. Να γράψετε έναν τριψήφιο αριθμό που να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 3.
 - ii. Να γράψετε έναν τετραψήφιο αριθμό που να διαιρείται ταυτόχρονα με το 4, το 5 και το 9.
 - iii. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = (4 \cdot 4 + 1) \cdot 0,1 + 44 : 4 + (3^2 - 2^3)^{2013}$$

2.
 - i. Να αναλυθεί ο αριθμός 11.520 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
 - ii. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση:

$$A = 5^3 - 2^4 + 3 \cdot 4 - (2^3 - 7)^4 + 15 \cdot 2^3$$

3.
 - i. Αν $\alpha=2$, $\beta=1$ και $\gamma=4$, να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$A = 2 \cdot \alpha^4 - \beta \cdot \gamma^2 + \beta^2 \cdot \alpha$$
 - ii. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ (27,36,81) και το Ε.Κ.Π (12,15,40)

4.
 - i. Αν έχουμε 64 κόκκινα τριαντάφυλλα, 52 ροζ και 124 άσπρα, πόσες το πολύ όμοιες ανθοδέσμες μπορούμε να φτιάξουμε με όλα αυτά τα λουλούδια και πόσα λουλούδια από το κάθε είδος θα έχει η κάθε ανθοδέσμη;
 - ii. Είναι οι παρακάτω σχέσεις Ευκλείδειες Διαιρέσεις; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$19 = 3 \cdot 4 + 7$$

$$25 = 5 \cdot 4 + 5$$

$$38 = 4 \cdot 9 + 2$$

5.
 - i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (32 - 18 : 3) \cdot 2 - (24 : 12 - 4) \cdot 3 + 2^3 - (4 - 3) \cdot 2$$
 - ii. Να βρεθεί ο αντίστροφος του A.

6. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π και ο Μ.Κ.Δ των αριθμών i) 3,4,8 και ii) 6,8,24.

7. Να συμπληρωθούν στους παρακάτω αριθμούς τα τετράγωνα, ώστε αυτοί να διαιρούνται με το 3. i) $24 \square 5$ ii) $1 \square 37$.

8. Να συμπληρωθούν στους παρακάτω αριθμούς τα τετράγωνα, ώστε αυτοί να διαιρούνται με το 2 και το 9 συγχρόνως. i) $2 \square 4 \square$ ii) $6 2 \square \square$.
9. Να συμπληρωθούν στους παρακάτω αριθμούς τα τετράγωνα, ώστε αυτοί να διαιρούνται με το 3 και το 5 συγχρόνως. i) $3 8 \square \square$ ii) $\square 4 \square$.
10. Να αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων οι αριθμοί 128, 232 και 1440
11. Ένας ανθοπώλης έχει 60 τουλίπες, 80 τριαντάφυλλα και 120 ηλίανθους. Πόσες το πολύ όμοιες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει και πόσα λουλούδια από κάθε είδος θα έχει η κάθε μία.
12. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = 5 \cdot 2^4 - (3^2 - 4^2) + (5 \cdot 0,2)^{2013}$

Επαναληπτικές Ασκήσεις 2^{ου} Κεφαλαίου

1.

- i. Οι μαθητές της Α΄ τάξης ενός Γυμνασίου είναι τα $\frac{4}{9}$ του συνόλου των παιδιών του Γυμνασίου. Αν ο αριθμός των μαθητών της Α΄ τάξης είναι 64, να υπολογίσετε τον αριθμό όλων των παιδιών του Γυμνασίου.
- ii. Μία βρύση Α γεμίζει μία δεξαμενή σε 5 ώρες, ενώ μία βρύση Β γεμίζει τη δεξαμενή σε 6 ώρες. Τι μέρος της δεξαμενής γεμίζει η κάθε βρύση σε 1 ώρα;

2.

- i. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης: $2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) + 2\frac{1}{3}$
- ii. Ένας αγρότης έχει $2\frac{1}{4}$ στρέμματα πατάτες, $6\frac{2}{5}$ στρέμματα πιπεριές και $4\frac{2}{7}$ στρέμματα κολοκυθάκια. Πόσα στρέμματα είναι συνολικά η παραγωγή του;

3.

- i. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{2}, 5, 0$
- ii. Αγοράσαμε μία τηλεόραση που κόστιζε 1.500 ευρώ. Πληρώσαμε το $\frac{1}{3}$ ως προκαταβολή και το $\frac{1}{4}$ του υπόλοιπου ποσού τον επόμενο μήνα. Τι ποσό οφείλουμε ακόμα;

4.

- i. Να γίνουν οι πράξεις:

$$A = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{1}{6} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Gamma = \left(4 - \frac{1}{4}\right) : 4$$

- ii. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των Α, Β και Γ.

5.

- i. Να γίνουν οι πράξεις, ώστε να φτάσετε σε μία πιο απλή μορφή:

$$(\alpha) \frac{2}{\frac{5}{\frac{1}{3}}} = \quad (\beta) \frac{\frac{2}{3}}{6} = \quad (\gamma) \frac{4}{\frac{1}{\frac{3}{3}}} = \quad (\delta) \frac{0}{\frac{1}{\frac{3}{3}}} =$$

ii. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(\alpha) 2\frac{1}{3} : \frac{2}{4} = \quad (\beta) \frac{4}{3} : 3\frac{1}{6} = \quad (\gamma) 4\frac{1}{2} : 3\frac{1}{8} =$$

6.

i. Να γίνουν οι πράξεις, ώστε να φτάσετε σε μία πιο απλή μορφή:

$$(\alpha) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) : \frac{2}{3} + \frac{1}{5} : \frac{1}{3} - \frac{2}{5} : \frac{1}{6}$$

$$(\beta) \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} : \frac{2}{3}} \quad (\gamma) \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}} \quad (\delta) \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{5}} \quad (\epsilon) \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right)}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)}$$

iii. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{12}{18}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, 1, \frac{1}{4}, \frac{15}{12}$$

7.

i. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 30cm και πλάτος τα $\frac{1}{5}$ του μήκους του. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρό του ορθογωνίου.

iv. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ανάγωγα:

$$\frac{12}{18}, \frac{36}{108}, \frac{10}{15}, \frac{15}{60}$$

8. Ένας μανάβης αγόρασε 250 κιλά πατάτες προς 0,15 ευρώ το κιλό. Πούλησε τα $\frac{1}{4}$ των πατατών προς 0,25 ευρώ το κιλό, τα $\frac{2}{3}$ των υπολοίπων προς 0,18 ευρώ το κιλό και τα υπόλοιπα κιλά προς 0,10 ευρώ το κιλό. Να βρείτε αν κέρδισε ή ζημιώθηκε ο μανάβης.

9.

i. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{3} \right) : 2\frac{2}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{3} - \frac{2}{4} : \frac{1}{6}$$

$$\beta) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{2\frac{1}{4} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right)}$$

$$\gamma) \frac{4\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5}}{4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3}}$$

$$\delta) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)^2 + \left(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4} \right) : \frac{1}{2}$$

ii. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω κλάσματα σε έναν άξονα:

$$\frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \frac{23}{4}$$

10. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή ως Λανθασμένες :

- i. Ο αντίστροφος του $3\frac{1}{6}$ είναι ο αριθμός $\frac{19}{6}$.
- ii. Ο αντίστροφος του $4\frac{2}{6}$ είναι ο αριθμός $\frac{3}{13}$.
- iii. Ο αντίστροφος του $\frac{3}{2}$ είναι ο αριθμός 1,5.
- iv. Ο αντίστροφος του 4 είναι ο αριθμός $\frac{3}{12}$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις 3^{ου} Κεφαλαίου

1. Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικούς:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{12}{10}, \frac{8}{5}, \frac{15}{100}, 1\frac{3}{6}, \frac{15}{12}$$

2. Να μετατραπούν οι παρακάτω δεκαδικοί αριθμοί ως κλάσματα:

i) 3,9

ii) 82,4

iii) 0,0003

iv) 3,703

3. Ένας μανάβης αγόρασε 40 κιλά βερίκοκα προς 0,20 ευρώ το κιλό. Πούλησε τα 20 κιλά προς 0,25 ευρώ το κιλό και τα υπόλοιπα προς 0,18 ευρώ το κιλό. Να βρείτε αν κέρδισε ή ζημιώθηκε.
4. Ένας μανάβης αγόρασε 250 κιλά μήλα και τα μοίρασε σε σακούλες των 5 κιλών και τα πούλησε προς 3,20 ευρώ τη μία σακούλα. Αν κέρδισε συνολικά 46 ευρώ, να βρείτε πόσα ευρώ το κιλό αγόρασε τα μήλα.
5. Να γίνουν οι πράξεις:

$$A = 2,25 + 0,0023 + 22,2$$

$$B = 4 - 2,45$$

$$\Gamma = 4,25 \cdot 0,001$$

$$\Delta = 2,35 : 0,01$$

$$E = 23,456 \cdot 1000$$

$$Z = 2,3 \cdot 10 + 4,3 : 0,001$$

6. Λύστε τα παρακάτω ερωτήματα

i. Να μετατρέψετε τη ποσότητα μήκους 30dm σε: m, cm, mm, km

ii. Να μετατρέψετε τη ποσότητα εμβαδού 0,23 dm² σε: m², cm², mm², στρέμματα, km²

iii. Να μετατρέψετε τη ποσότητα όγκου 30lt σε: m³, ml, cm³, mm³

7. Να μετατρέψετε τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας (45λεπτών) σε δευτερόλεπτα και ημέρες.
8. Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 4 ημέρες. Ένας δεύτερος εργάτης τελειώνει το ίδιο έργο σε 6 ημέρες και ένας τρίτος σε 12 ημέρες. Αν δουλέψουν και οι τρεις μαζί σε πόσες ημέρες θα ολοκληρώσουν το συγκεκριμένο έργο;

9. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

m^3	dm^3	cm^3	mm^3	lt	mlt
0,03					
	4,6				
		32,2			
			33		
				260	
					750

10. Φορτηγό μεταφέρει 4 κουτιά που το ένα ζυγίζει 206,2kg, το δεύτερο ζυγίζει 2,4 τόνους, το τρίτο ζυγίζει 123.400gr και το τέταρτο 24kg. Να βρεθεί πόσο ζυγίζει συνολικά το φορτίο του φορτηγού σε τόνους και kg.

Επαναληπτικές Ασκήσεις 4^{ου} Κεφαλαίου

1. Να παραστήσετε τις παρακάτω εκφράσεις με μεταβλητές:
 - i. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2
 - ii. Το μισό ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 3 ισούται με 12
 - iii. Ένας αριθμός μειωμένος κατά το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού
 - iv. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά το τριπλάσιο του ίδιου αριθμού ισούται με 44.
2. Να εκφράσεις με μία μεταβλητή:
 - i. Τη περίμετρο ενός τετραγώνου
 - ii. Τη περίμετρο ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος διπλάσιο από το πλάτος του.
 - iii. Το εμβαδόν ενός τριγώνου με τη μισή σε μήκος βάση από το αντίστοιχο σε αυτή τη βάση ύψος.
3. Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω εκφράσεις:
 - i. $x + 2 = 8$
 - ii. $2 \cdot x + 4 = 20$
 - iii. $2 > x + 1$
 - iv. $3 = \frac{x}{2} - 1$
4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
 - α) $x + 5 = 8$
 - β) $2x + 2 = 10$
 - γ) $24 : x = 3$
 - δ) $4 - x = \frac{1}{4}$
5. Να γράψετε απλούστερα τις παρακάτω εκφράσεις:
 - α) $2x + 3x + 5x$
 - β) $8y + 3y - 5y$
 - γ) $10\omega - 3\omega + \omega$
 - δ) $\alpha + \alpha + \alpha$
6. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
 - i. Η λύση της εξίσωσης $2 \cdot x = 0$ είναι το 0.
 - ii. Η παρακάτω έκφραση είναι εξίσωση: $2x + 4$
 - iii. Η παρακάτω εξίσωση είναι αδύνατη: $10 \cdot x = 0$
 - iv. Η παρακάτω εξίσωση $2 : x = 1$ έχει λύση το 1

ν. Η παρακάτω εξίσωση είναι αόριστη: $0 \cdot x = 0$

7. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{4} + \frac{1}{2} = 3$

β) $\frac{x+1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{3}{4}$

γ) $2 \cdot x + 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - x$

δ) $4 + \frac{2x}{3} = x - \frac{2}{5}$

ε) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} = 1$

8. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί αριθμοί που έχουν άθροισμα ίσο με 159.

Επαναληπτικές Ασκήσεις 5^{ου} Κεφαλαίου

- Ένα αγαθό με συντελεστή Φ.Π.Α 23% κοστίζει 250 ευρώ.
 - Να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε τελικά για το αγαθό αυτό.
 - Αν στα 250 ευρώ συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α, να βρείτε τη τιμή του αγαθού χωρίς Φ.Π.Α.
- Το ετήσιο επιτόκιο καταθέσεων μιας τράπεζας είναι 2,5%. Να βρείτε:
 - Πόσο τόκο θα εισπράξουμε για ένα αρχικό κεφάλαιο 12.000 ευρώ σε 2 χρόνια, αν γνωρίζουμε ότι ο τόκος κεφαλαιοποιείται.
 - Τι αρχικό κεφάλαιο θα απέδιδε τον πρώτο χρόνο 375 ευρώ τόκο;
- Ο Γιάννης αγόρασε ένα ψυγείο πληρώνοντας το 40% προκαταβολή και το υπόλοιπο σε 5 άτοκες μηνιαίες δόσεις. Αν ο Γιάννης έδωσε για προκαταβολή 600 ευρώ, να βρείτε:
 - Πόσο κοστίζει το ψυγείο.
 - Το ποσό της κάθε δόσης.
- Το όριο του αφορολόγητου είναι 5.000 ευρώ. Από αυτό το ποσό και μέχρι τις 15.000 ευρώ ο φόρος είναι 10%, ενώ από τις 15.000 ευρώ και μέχρι τις 25.000 ευρώ ο φόρος γίνεται 20%. Να υπολογίσετε το φόρο των εισοδημάτων:
 - 13.000 ευρώ
 - 18.000 ευρώ
 - Αν για εισοδήματα μεγαλύτερα των 25.000 ευρώ ο φόρος γίνεται 40%, να υπολογίσετε το φόρο του εισοδήματος για 45.000 ευρώ.
- Ένα κουτάκι χυμού πορτοκαλιού του εμπορίου 250gr αποτελείται από 20% φυσικό χυμό πορτοκάλι και 22gr ζάχαρη, ενώ το υπόλοιπο είναι νερό. Να βρείτε:
 - Πόσα gr φυσικό χυμό πορτοκάλι περιέχει το κουτί
 - Το ποσοστό % της ζάχαρης στο κουτάκι χυμού
 - Τα gr και το ποσοστό του νερού στο κουτάκι χυμού
- Να γράψετε με μορφή ποσοστών (%) τα παρακάτω:
$$\frac{1}{2} = \dots \quad \frac{3}{4} = \dots \quad \frac{3}{5} = \dots \quad \frac{4}{100} = \dots \quad \frac{22}{1000} = \dots$$
- Να γράψετε τα ποσοστά ως κλάσματα:
$$20\% = \dots \quad 9\% = \dots \quad 25\% = \dots \quad 250\% = \dots \quad 76\% = \dots$$
- Να υπολογίσετε τα ποσοστά:

το 20% του 30 =
το 10% του 25 =
το 12% του 30000 =
το 20% της μιας ώρας =

9. Δύο υπάλληλοι μιας εταιρείας αμείβονται με 900 ευρώ το μήνα. Ο πρώτος όμως έκανε μεταπτυχιακές σπουδές και θα πάρει αύξηση 15% στο μισθό του, ενώ ο δεύτερος λόγω μειωμένης αποδοτικότητας θα υποστεί μείωση ίση με το 7,5% του νέου μισθού του πρώτου υπαλλήλου. Να βρεθούν τα ποσά των νέων μισθών των υπαλλήλων.
10. Σε ένα κατάστημα ένα πουκάμισο κοστίζει 65 ευρώ και πωλείται με έκπτωση 25%.
- Ποια είναι η τιμή του πουκαμίσου;
 - Αν πληρώσουμε για το πουκάμισο 45,50 ευρώ, πόση έκπτωση μας έκαναν;
 - Αν η τιμή των 65 ευρώ ήταν η τελική μετά την έκπτωση 25%, πόση θα ήταν η αρχική τιμή του πουκαμίσου;
11. Καταθέτουμε στη τράπεζα κεφάλαιο 22.500 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα έχουμε μετά από 2,5 χρόνια, αν γνωρίζουμε ότι ο τόκος κεφαλαιοποιείται στο τέλος κάθε χρόνου.
12. Μια τηλεόραση κόστιζε αρχικά 1.500 ευρώ. Στο κατάστημα Α στις 20 Νοεμβρίου αυξήθηκε η τιμή της κατά 10% και στις 20 Δεκεμβρίου η νέα τιμή αυξήθηκε κατά 10% πάλι. Στο κατάστημα Β, η τιμή της ίδιας τηλεόρασης αυξήθηκε κατά 20% στις 20 Νοεμβρίου. Αν θέλω να αγοράσω την τηλεόραση στις 31 Δεκεμβρίου (Δώρο για την Πρωτοχρονιά) , ποιο μαγαζί μου προτείνετε και γιατί;
13. Ένα αγαθό με συντελεστή Φ.Π.Α 25% κοστίζει 1.250 ευρώ.
- Να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε τελικά για το αγαθό αυτό.
 - Αν στα 1.250 ευρώ συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α, να βρείτε τη τιμή του αγαθού χωρίς Φ.Π.Α.
14. Το ετήσιο επιτόκιο καταθέσεων μιας τράπεζας είναι 10%. Να βρείτε:
- Πόσο τόκο θα εισπράξουμε για ένα αρχικό κεφάλαιο 14.000 ευρώ σε 2 χρόνια, αν γνωρίζουμε ότι ο τόκος κεφαλαιοποιείται.
 - Τι αρχικό κεφάλαιο θα απέδιδε τον πρώτο χρόνο 1.800 ευρώ τόκο;
15. Η Μαρία αγόρασε ένα ψυγείο πληρώνοντας το 50% προκαταβολή και το υπόλοιπο σε 3 μηνιαίες δόσεις με τόκο 2%. Αν η Μαρία έδωσε για προκαταβολή 600 ευρώ, να βρείτε:
- Πόσο κοστίζει το ψυγείο.
 - Το ποσό της κάθε δόσης.

Επαναληπτικές Ασκήσεις 6^{ου} Κεφαλαίου

1. Να λύσετε τα παρακάτω ερωτήματα

 - Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιάξονων και να τοποθετήσετε τα σημεία $A(2,4)$, $B(1,1)$, $\Gamma(0,3)$, $\Delta(4,0)$.
 - Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιάξονων με μονάδα μέτρησης 0,5 cm και να τοποθετήσετε τα σημεία: $A(3,2)$, $B(2,0)$, $\Gamma(4,0)$, $\Delta(2,5, 1)$

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
Έστω το σημείο $A(x,y)$:

 - Ο αριθμός x λέγεταιτου A .
 - Ο αριθμός y λέγεταιτου A .
 - Το ζεύγος (x,y) λέγεταιτου A .
 - Ο ημιάξονας Ox λέγεται ημιάξονας των
 - Ο ημιάξονας Oy λέγεται ημιάξονας των
 - Αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στον ημιάξονα Ox , έχει 0.
 - Αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στον ημιάξονα Oy , έχει 0.
 - Η αρχή των αξόνων O έχει συντεταγμένες το ζεύγος (..... ,).

3. Σε μία φωτογραφία, το ύψος ενός δέντρου είναι 10cm, ενώ στην πραγματικότητα έχει ύψος 2m. Να βρείτε ποια είναι η σμίκρυνση των αντικειμένων στην φωτογραφία.

4. Σε χάρτη με κλίμακα 1:500.000 απόσταση δύο πόλεων είναι 18cm, να βρείτε τη πραγματική απόσταση των δύο πόλεων σε km.

5. Στο παρακάτω πίνακα τα ποσά x,y είναι ανάλογα. Να υπολογίσετε το συντελεστή αναλογίας και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	4		5
y		20	4

6. Να εξετάσετε αν τα ποσά που δίνονται στον παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα:

x	4	5	22	12	18	15
y	8	10	44	6	6	5

7. Να συμπληρώσετε το παρακάτω πίνακα, αν γνωρίζετε ότι τα ποσά x,y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{3}{2}$:

x	0	3	$\frac{5}{2}$			15
y				6	$\frac{1}{2}$	

8. Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(1, \frac{2}{5}), (\frac{2}{3}, \frac{4}{25}), (5, 2)$ αναπαριστούν σημεία της γραφικής παράστασης μιας αναλογίας.

9. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω σχέσεων:

i) $y = 2x + 1$

ii) $y = 2x$

iii) $y = 2x - 1$

Τι παρατηρείτε;

10. Να αντιστοιχίσετε κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες με τις σχέσεις που δίνονται:

(α) $y=3x$, (β) $y=x+1$, (γ) $y=2x+1$

x	0	2	4	6
y	1	3	5	7

x	0	1	3	6
y	0	3	9	18

x	0	3	2	6
y	1	7	5	13

11. Ένα κατάστημα αγόρασε 20 πουκάμισα με 35 ευρώ το ένα και τα πούλησε με κέρδος 50%. Τα τελευταία 4 πουκάμισα όμως τα πούλησε στις εκπτώσεις, με έκπτωση 30%. Να βρείτε το ποσό που κέρδισε το μαγαζί αυτό από την πώληση των πουκαμίσων.

12. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα των αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y και στη συνέχεια να γίνει η γραφική τους παράσταση:

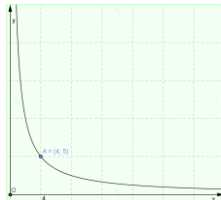
x	1	2	4	6	8
y	4				

- 13.** Δύο εργάτες τελειώνουν ένα έργο και πήραν 1.400 ευρώ και οι δύο μαζί. Αν το ημερομίσθιο του πρώτου είναι 65 ευρώ και του δεύτερου 75 ευρώ και εργάστηκαν τις ίδιες μέρες, να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;
- 14.** Ένα ολοκληρώνεται από 20 εργάτες σε 10 ημέρες. Μετά από 4 ημέρες από την έναρξη των εργασιών όμως αποχώρησαν 5 εργάτες. Να βρείτε σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το υπόλοιπο του αρχικού έργου οι υπόλοιποι εργάτες.
- 15.** Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση των ποσών x , y . Να βρεθεί ποια είναι η σχέση των δύο ποσών και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:



x	2			0
y		600	30	

16. Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση των ποσών x , y . Να βρεθεί ποια είναι η σχέση των δύο ποσών και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:



x	4			1
y		100	140	

Επαναληπτικές Ασκήσεις 7^{ου} Κεφαλαίου

1. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή τον αριθμό 5.
2. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α με τετμημένη -2 από την αρχή των αξόνων.
3. Αν $|α| = -α$, τότε να βρεθεί το πρόσημο του αριθμού α.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός α	2				-4		0		$-\frac{1}{4}$
Αντίθετος του αριθμού α		3				$-\frac{2}{3}$		9	
Αντίστροφος του αριθμού α									
Απόλυτη τιμή του αριθμού α			8						

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες αιτιολογώντας την απάντησή σας:
 - i. Το άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.
 - ii. Αν το άθροισμα ομόσημων ρητών είναι θετικός αριθμός, τότε οι ρητοί είναι θετικοί.
 - iii. Αν το άθροισμα ομόσημων ρητών είναι αρνητικός, τότε οι ρητοί είναι αρνητικοί.
 - iv. Αν $α + β = 0$, τότε α και β αντίθετοι αριθμοί.
 - v. Αν $α \cdot β = 6$, τότε οι αριθμοί α και β είναι πάντα θετικοί.
 - vi. Αν $α \cdot β = -2$, τότε οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.
 - vii. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

6. Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $|-3| + |-2| + |3| =$

- ii. $|-3| - |-2| - |3| + \left|-\frac{2}{3}\right| =$

- iii. $|-2,5| - |-2,5| - |4,5| + \left|-\frac{1}{5}\right| =$

7. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

- i. $\frac{x+2}{4} - \frac{1}{2} = 5$

- ii. $\frac{x-1}{5} - \frac{2}{4} = \frac{x}{2}$

iii. $\frac{1}{3} - \frac{x-2}{4} = 1$

iv. $\frac{1}{6} - \frac{x}{9} = \frac{x-1}{3}$

8. Να συμπληρώσετε τα κενά (...), ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

i. $(+...) + (-2) = \dots 14$

ii. $(-...) + (+8) = \dots 10$

iii. $(25) + (\dots) = +13$

iv. $(...) + (-8) = -15$

9. Αν $x = \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(+\frac{2}{5}\right)$, $y = \left(-2\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$, $z = \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις

παραστάσεις:

$$A = x - y$$

$$B = x + y$$

$$\Gamma = x + y + z$$

$$\Delta = A + B + \Gamma$$

10. Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:

i. $(-6)^4$

ii. $(-3)^{14}$

iii. -4^4

iv. $-(-7)^3$

11. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

i. 470.000

ii. 125.000.000

iii. 0,000025

iv. 0,0000000584

12. Να υπολογίσετε τη τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-12} - (-1)^{10}$$

$$B = [(-2)^2]^{-3} \cdot [(-3)^3]^2 + [(-22,2)^2 \cdot (+22,2)^{-2}]^{14}$$

$$\Gamma = \frac{(-4)^{-4}}{8^{-4}} + \frac{12^{-5}}{(-24)^{-5}} - \frac{3^{-3}}{(-6)^{-3}}$$

$$\Delta = (6 - 4)^2 \cdot (2 + 2)^2$$

13. Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας δύναμης:

$$A = \left(-\frac{1}{6}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-12} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{10}$$

$$B = (4^4 : 4^5) \cdot \frac{2^6}{2^2} \cdot (3^{10} : 3^6)$$

$$\Gamma = \frac{(-4)^{-4} \cdot 8^{-4}}{32^{-4}} +$$

$$\Delta = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-3} : \frac{32}{27}$$

Συνδυαστικές Ασκήσεις - Σε όλα τα Κεφάλαια

1. Δίνεται ο αριθμός 39867528,2478. Να στρογγυλοποιηθεί ως προς

 - Τα δέκατα
 - Τα χιλιοστά
 - Τις εκατοντάδες
 - Εκατοντάδες χιλιάδων

2. Στα παρακάτω ερωτήματα να αναλύσετε τον κάθε αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και κατόπιν να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ.

 - 30, 50, 180
 - 45, 100, 260
 - 350, 420, 780

3. Να γίνουν οι πράξεις

 - $10 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 0,002009 =$
 - $3 + 2 \cdot \left(-0,4 + \frac{1}{4}\right)^2 =$
 - $\left[23 - \left(7,2 - \frac{21}{5}\right)\right]^4 =$
 - $(-3 + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 4 - 3 \cdot \left(-0,6 + \frac{2}{3}\right) =$
 - $24 : 6 \cdot (4^2 - 2 \cdot 6) - (4^3 - 8 \cdot 7)^2 : \left(\frac{2^5 - 4 \cdot 8}{71} + 4\right) =$

4. Αν $\alpha + \beta = 5$ υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$A = (2 \cdot \alpha + 3) \cdot 4 + 3 \cdot (\alpha + 2 \cdot \beta) + 5 \cdot (\beta - 1)$$

$$B = \alpha + 2 \cdot \beta + 2 \cdot (2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta) + 3 \cdot (3 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta) + 6 \cdot \alpha - 1$$

$$\Gamma = \alpha \cdot (\alpha - \beta) - \beta \cdot (\beta - \alpha) + \alpha \cdot (3 - \alpha) + \beta \cdot (\beta + 5) - 2 \cdot \beta$$

Να γίνουν οι πράξεις

$$A = -3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^{-1}$$

$$B = 4 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-2}$$

$$\Gamma = \left[-3 + 2^{-2} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\Delta = \frac{A^{-1} + B^{-2} + \Gamma}{A \cdot B^{-1} \cdot \Gamma^{-3}}$$

$$E = \frac{1}{A^{-1} + \frac{1}{B^{-1} + \frac{1}{\Gamma^{-1}}}}$$

5. Σε μια ευκλείδεια διαίρεση είναι (διαιρέτης) $\delta=5$ και (πηλίκο) $\pi=7$ ποιος μπορεί να είναι ο (διααιρετέος) Δ (5 περιπτώσεις).

6. Σε μία ευκλείδεια διαίρεση ο διαιρέτης είναι 5 και το υπόλοιπο είναι όσο το πηλίκο. Αν ο διααιρετέος είναι 24 βρείτε δ , π , ν .

7. Να συγκρίνεται τα κλάσματα

$$\frac{3}{7} \dots \frac{3}{5}$$

$$\frac{17}{18} \dots \frac{13}{18}$$

$$\frac{23}{21} \dots \frac{25}{19}$$

$$\frac{13}{25} \dots \frac{11}{15}$$

8. Στα παρακάτω κλάσματα να παρεμβάλλετε ένα άλλο κλάσμα

$$\frac{1}{2} < - < \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} < - < \frac{7}{8}$$

$$\frac{3}{5} < - < \frac{4}{5}$$

$$\frac{7}{9} < - < \frac{8}{9}$$

9. Να βρείτε έναν αριθμό που βρίσκεται μεταξύ των δύο δοσμένων αριθμών:

i. 0,34.....0,43

ii. 0,99.....1

iii. 0,98.....0,100

iv. 1,399.....0,400

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3x + 2 = 9$

ii. $8x - 23 = 9$

iii. $17 - 3x = 12$

iv. $12,4 \cdot x - \frac{1}{4} = 13,1$

v. $\frac{3}{4} \cdot x - 12,2 = \frac{4}{5}$

vi. $\frac{3x + 2}{2} + 2 = \frac{17}{3}$

11. Μία δεξαμενή νερού γεμίζει από δυο βρύσες από την Α και την Β. Η Α γεμίζει μόνης της την δεξαμενή σε 5 ώρες. Η Β γεμίζει μόνη της την δεξαμενή σε 7 ώρες. Πόσες ώρες θα χρειαστεί για να γεμίσει η δεξαμενή αν ανοίξουμε και τις δύο βρύσες ταυτόχρονα;

12. Αν στο παραπάνω πρόβλημα η Α γεμίζει την δεξαμενή και η Β την αδειάζει πόσο χρόνο θα χρειαστούμε για να γεμίσουμε την δεξαμενή αν ανοίξουμε ταυτόχρονα και τις δυο βρύσες;

13. Σε μία ανθοκομική έκθεση αποφάσισαν να δωρίσουν στους επισκέπτες μία ανθοδέσμη. Διαθέτουν 300 τριαντάφυλλα, 180 γαρδένιες και 210 κρίνα. Πόσες όμοιες ανθοδέσμες θα φτιάξουν και πόσα λουλούδια από το κάθε είδος λουλουδιών θα περιέχει κάθε ανθοδέσμη;

14. Να βρεθεί ο αριθμός, του οποίου το διπλάσιο αυξημένο κατά 15 δίνει αποτέλεσμα 75.

15. Μία περιουσία μοιράζεται σε τρεις δικαιούχους στον Α, στον Β και στον Γ. Ο Α πήρε 120.000 ευρώ, ο Β πήρε τα διπλάσια από τον Γ και ο Γ πήρε 40.000 ευρώ λιγότερα από τον Α. Πόση ήταν η περιουσία και πόσα ευρώ πήρε ο κάθε δικαιούχος;

16. Τρία άτομα μοιράστηκαν εξίσου μια κληρονομιά που αποτελείται από ένα διαμέρισμα, από ένα οικόπεδο και από κάποια μετρητά σε ευρώ. Ο Α πήρε το διαμέρισμα και έδωσε στον Β 40.000 ευρώ, ο Β πήρε το οικόπεδο και πήρε ακόμα από τον Γ 30.000 ευρώ. Πόσο κοστίζει το διαμέρισμα, πόσο κοστίζει το οικόπεδο, αν είναι γνωστό ότι ο Γ πήρε 200.000 ευρώ.

17. Ο Αντώνης αγόρασε βιβλία, τετράδια και μία σχολική τσάντα. Τα βιβλία στοιχίζουν τριπλάσια τιμή από τα τετράδια, η τσάντα έχει διπλάσια τιμή από τα βιβλία. Πλήρωσε συνολικά 245 ευρώ. Πόσο κόστιζε το κάθε είδος;

18. Ο Πέτρος καταθέτει στην τράπεζα 1500 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 12%. Αν οι τόκοι του πρώτου έτους προστεθούν στο κεφάλαιο του, να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει, αν κάνει ανάληψη όλων των χρημάτων του στο τέλος του δεύτερου έτους και σε 18 μήνες.

19. Τα $\frac{3}{5}$ από ένα κεφάλαιο τοκίστηκαν σε τράπεζα με 15% και τα υπόλοιπα, που ήταν 22.000 ευρώ κατατέθηκαν σε άλλη τράπεζα με επιτόκιο 10%. Πόσο τόκο θα αποφέρει το κεφάλαιο συνολικά;

20. Η Μαρία πλήρωσε τα $\frac{2}{5}$ από το χρέος της, μετά το $\frac{1}{4}$ και τελικά το $\frac{1}{10}$ και όλα μαζί ήταν 54.000 ευρώ. Πόσα χρήματα οφείλει μαζί με τους τόκους, αν τα εξοφλήσει σε ένα χρόνο με επιτόκιο 12%;

21. Ο Στέφανος αγόρασε ένα ψυγείο αξίας 1400 ευρώ. Πλήρωσε το 20% μετρητοίς και το υπόλοιπο σε 4 δόσεις. Αν ο μηνιαίος τόκος ήταν 2%, να βρεθεί (α) το ποσό κάθε δόσης, (β) το ποσό κάθε δόσης μαζί με τον τόκο, (γ) πόσο στοίχησε τελικά το ψυγείο;

22. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y αν ισχύουν οι σχέσεις $2x+1=7$ και $7-2y=3$.

Στη συνέχεια να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$A = (x^3 + x^2 - 6xy) : (y^3 + 2xy - 8)$$

$$B = (x - y)(x^2 - y^2)(x^3 - y^3 + 1)$$

23. Αν x είναι η ρίζα της εξίσωσης $x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ και y είναι ο ΜΚΔ(4,48), τότε :

i. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ και

$$B = x^2 - (3^2 - x^3)^{2013} - 2y - 1$$

ii. Να συγκριθούν οι αριθμοί $A, B, 1$.

24. Αν $A = (-6) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(2 - \frac{5}{2}\right) : \frac{1}{2}$, $B = A - 2$ και $\kappa + \lambda = 2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Gamma = (B - A)^3 + 4(\kappa - 1) + 4\lambda$.

25. Δίνεται ότι τα ποσά x, y του παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα.

x		1		3	5	
y	0	2	4			12

i. Να υπολογιστεί ο συντελεστής αναλογίας τους και στη συνέχεια να γράψετε τη σχέση αναλογίας που συνδέει τα ποσά x και y .

ii. Να συμπληρωθεί ο πίνακας .

26. Να υπολογιστούν τα αποτελέσματα των παρακάτω αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων :

$$A = \frac{1}{4} : \frac{1}{8} - (3^3 - 2^4 - 2 \cdot 5)^{2013} + \left(\frac{17}{4} - \frac{25}{20} \right)$$

$$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\Gamma = \frac{3}{5} \cdot \left(3 - 1\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{7}{2} - 2\frac{3}{4} \right)$$

$$\Delta = (-3)^{x-4} + (-3)^{x-3} + (-3)^{x-2} - (-1)^x \text{ για } x=4 .$$

27. Σε μία έρευνα ρωτήθηκαν 120 κάτοικοι του Χαϊδαρίου αν είναι ευχαριστημένοι από τις πολιτιστικές εκδηλώσεις του δήμου τους. Αν το 30% απάντησε αρνητικά , να βρείτε πόσοι άνθρωποι είναι ευχαριστημένοι και πόσοι είναι δυσαρεστημένοι .

28. Από τους 180 μαθητές της Α΄ γυμνασίου ενός σχολείου οι 36 συμμετείχαν στην ομάδα των μαθηματικών , 18 στην ομάδα φωτογραφίας και 9 στην περιβαλλοντική ομάδα. Να υπολογιστεί το ποσοστό των μαθητών που συμμετείχε σε κάθε ομάδα .

29. Έστω
$$A = \frac{\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right)^2}{\left(1\frac{2}{3} - \frac{2^2}{3^2 - 3} \right)^{2021}} : \frac{2\frac{2}{3} + \frac{2^3 + 4}{6^2}}{\left[\frac{4^2 - 3 \cdot 2^2}{2(3^2 - 2^3)} \right]^2}$$

$$B = [-15 - (7 - 10)] : \left[(-2) \cdot (+2) \cdot \left(+\frac{1}{4} \right) \cdot (-8) + (-2) \right]$$

$$\Gamma = \left[(4^2 - 2^1 \cdot 5) : 3 \right]^2 + 5^2 : \left[(3 \cdot 5^2 - 35) : 2^3 \right] - 3$$

Να δείξετε ότι $A = \frac{3}{4}$, $B = -2$ και $\Gamma = 6$.

30. Κάνοντας τις πράξεις να δείξετε ότι η τιμή της παρακάτω παράστασης είναι: $A = \frac{1}{9}$

$$A = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{2}{27} \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \frac{4}{9} - 2^3 \right]$$

31. Κάντε τις πράξεις:

$$A = (-2) + (-3) - [(-2) - (-3) - (+6)]$$

$$B = (-3) - (-3,5) - [(-3,4) - (+2,6)] - (-1,5) -$$

$$\Gamma = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) + (+2,5) - \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)$$

32. Αν $a = \frac{2}{5} \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \right] - \frac{6}{4} : \left(\frac{3}{2}\right)^2$, να δείξετε ότι: $a = \frac{1}{3}$

Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $\left(a^{-2} + \frac{1}{a}\right) \cdot x + 3 = 27$

33. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$x = \left(2021^0 + 1^{2021}\right)^3$$

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 3^3 + 1^{-1}$$

$$z = \left(-\frac{3}{4} + 0,5\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

- i. Να δείξετε ότι $x = 8$, $y = -10$, $z = \frac{1}{2}$
- ii. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = z^{-2} + y^3 : \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$$

34. Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{1}{3} \cdot \left[2010^0 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^{-1} + 2^3 \right] - \frac{2}{3} : \frac{1}{6}$$

α) Να δείξετε ότι: $K = -\frac{5}{4}$

β) Να λυθεί η εξίσωση με άγνωστο τον x [όπου ο K είναι ο αριθμός που βρήκατε στο (α) ερώτημα]

$$\left(K^{-2} - \frac{1}{K} \right) \cdot x = (-30)^2$$

35. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2 \cdot x + 4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

36. Σε ένα φυτώριο που διαθέτουν 36 ορχιδέες, 60 τριαντάφυλλα και 168 τουλίπες θέλουν να φτιάξουν όμοιες ανθοδέσμες.

i. Πόσες το πολύ όμοιες ανθοδέσμες μπορούν να φτιάξουν και από πόσα λουλούδια από το κάθε είδος θα αποτελούνται;

Ένας ανθοπώλης θα αγοράσει όλες τις παραπάνω όμοιες ανθοδέσμες προς 10 ευρώ τη μία και στην συνέχεια θα τις πουλήσει με κέρδος 40%.

- ii. Ποια είναι η τιμή πώλησης των ανθοδεσμών από τον ανθοπώλη;
- iii. Ποια θα είναι η είσπραξη του ανθοπώλη, αν πουλήσει όλες τις ανθοδέσμες;
- iv. Τι φόρο θα αποδώσει για την είσπραξή του στο κράτος, αν ο ΦΠΑ είναι 25%;

Αν αποταμιεύσει τα χρήματα της είσπραξής του από την πώληση των ανθοδεσμών σε μία τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 5%,

v. να βρείτε πόσα χρήματα θα έχει στην τράπεζα μετά από δύομισι χρόνια, δεδομένου ότι ο τόκος κεφαλαιοποιείται.

(όπου είναι απαραίτητο να γίνει στρογγυλοποίηση σε δύο δεκαδικά ψηφία)

37. Δίνονται οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha = \frac{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(0,5 + \frac{1}{2}\right)^{2013}} : \frac{\frac{1}{4} - 2^2}{3^3}$$

$$\beta = \left\{ 5^2 + 2 - 15 \cdot \left[2^5 - (4^2 - 3^2) - (2 \cdot 6^2 - 4^3) - 10 \right] \right\} : 3$$

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2^3}}{1 - \frac{5}{6}} \cdot \frac{4}{3 \cdot (-3^4 + 2^4)^0}$$

Να δείξετε ότι:

$$\alpha = -\frac{81}{5}, \quad \beta = -26, \quad \gamma = -15$$

Στην συνέχεια, να υπολογίσετε τη τιμή της παρακάτω παράστασης δ:

$$\delta = (\beta - \gamma)^2 - \alpha, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ και } \gamma \text{ οι τιμές που δίνονται παραπάνω.}$$

38. Κάνοντας τις πράξεις να δείξετε ότι η τιμή της παρακάτω παράστασης είναι: $A = \frac{1}{9}$

$$A = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{2}{27} \cdot \left[2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \frac{4}{9} - 2^3 \right]$$

Επανάληψη Θεωρίας Άλγεβρας σε 46 Ερωτήσεις - Απαντήσεις

Άλγεβρα 1ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 1 : Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης των φυσικών;

Απάντηση

Το άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με το 0 ισούται με τον ίδιο αριθμό.

$$a+0=a$$

Αντιμεταθετική ιδιότητα. Με βάση την οποία μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος.

$$a+\beta=\beta+a$$

Προσεταιριστική ιδιότητα.

$$(a+\beta)+\gamma=a+(\beta+\gamma)$$

Ερώτηση 2 : Πως ορίζεται η πράξη της αφαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς και πότε μπορεί αυτή να εκτελεστεί;

Απάντηση

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, Μ (μειωτέος) και Α (αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στο Α δίνει το Μ.

Ερώτηση 3 : Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των φυσικών;

Απάντηση

i) Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με τη μονάδα ισούται με τον ίδιο αριθμό.

$$a \cdot 1=a$$

ii) Αντιμεταθετική ιδιότητα.

$$a \cdot \beta=\beta \cdot a$$

iii) Προσεταιριστική ιδιότητα.

$$(a \cdot \beta) \cdot \gamma=a \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

iv) Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με την πρόσθεση.

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

v) Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με την αφαίρεση.

$$a \cdot (\beta - \gamma) = a \cdot \beta - a \cdot \gamma$$

vi) Το γινόμενο ενός φυσικού με το 0 ισούται με το 0.

$$a \cdot 0 = 0$$

Ερώτηση 4 : Τι λέει η επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση;

Απάντηση

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με την πρόσθεση.

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με την αφαίρεση.

$$a \cdot (\beta - \gamma) = a \cdot \beta - a \cdot \gamma$$

Ερώτηση 5 : Τι ονομάζεται νιοστή δύναμη ενός φυσικού αριθμού a , πως συμβολίζεται και πως ονομάζονται τα μέρη της;

Απάντηση

Το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$, που έχει n παράγοντες ίσους με το a , λέγεται δύναμη του a στη ω ή νιοστή δύναμη του a και συμβολίζεται με a^n .

Ο αριθμός a λέγεται βάση της δύναμης και ο n λέγεται εκθέτης.

Ερώτηση 6 : Τι ονομάζεται αριθμητική παράσταση και τι τιμή της αριθμητικής παράστασης;

Απάντηση

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Το τελικό αποτέλεσμα που μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση το λέμε τιμή της.

Ερώτηση 7 : Τι ονομάζεται ευκλείδεια διαίρεση;

Απάντηση

Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ , έτσι ώστε να ισχύει : $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$.

Ο αριθμός Δ λέγεται διαιρετέος, ο δ λέγεται διαιρέτης, ο αριθμός π ονομάζεται πηλίκο και το υ υπόλοιπο της διαίρεσης.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη : $\upsilon < \delta$.

Η διαίρεση της παραπάνω μορφή ονομάζεται ευκλείδεια διαίρεση.

Ερώτηση 8 : Πότε η ευκλείδεια διαίρεση λέγεται τέλεια και ποιες είναι οι ιδιότητές της;

Απάντηση

Αν το υπόλοιπο υ είναι ίσο με 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία τέλεια διαίρεση : $\Delta = \delta \cdot \pi + 0$, δηλαδή $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$.

Οι ιδιότητες της είναι οι εξής:

- i) Ο διαιρέτης δ μίας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0.
- ii) Όταν $\Delta = \delta$, τότε το πηλίκο είναι ίσο με 1, $\pi = 1$.
- iii) Όταν ο διαιρέτης $\delta = 1$, τότε το πηλίκο $\pi = \Delta$.
- iv) Όταν ο διαιρετέος $\Delta = 0$, τότε το πηλίκο $\pi = 0$.

Ερώτηση 9 : Τι ονομάζονται πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

Απάντηση

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Ερώτηση 10 : Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

Απάντηση

- i) Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- ii) Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.
- iii) Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

Ερώτηση 11 : Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων αριθμών διαφορετικών του μηδενός;

Απάντηση

Το μικρότερο και διαφορετικό του μηδενός από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών, διαφορετικών του μηδενός, το ονομάζουμε Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των αριθμών αυτών.

Ερώτηση 12 : Τι ονομάζονται διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού;

Απάντηση

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

Ερώτηση 13 : Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι;

Απάντηση

Ένας αριθμός, εκτός του 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1, λέγεται πρώτος αριθμός, διαφορετικά λέγεται σύνθετος.

Ερώτηση 14 : Τι ονομάζεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ);

Απάντηση

Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των α και β και συμβολίζεται με $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.

Ερώτηση 15 : Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους;

Απάντηση

Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους αν $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$.

Ερώτηση 16 : Ποια είναι τα κριτήρια διαιρετότητας;

Απάντηση

Κριτήρια Διαιρετότητας των 2,3,4,5,9,10,25

- Ένας αριθμός διαιρείται με το 2, αν λήγει σε 0,2,4,6,8.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 3, αν το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού διαιρείται με το 3.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού διαιρείται με το 9.
- Ένας αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το 4 ή και το 25, αν τα δύο τελευταία του ψηφία είναι 0.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 και 5.
- Ένας αριθμός διαιρείται με το 10, αν λήγει σε ένα μηδενικό.

Άλγεβρα 2ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 17 : Τι ονομάζεται κλασματική μονάδα;

Απάντηση

Το σύμβολο $\frac{1}{\nu}$, με $\nu \neq 0$ που εκφράζει το ένα από τα ν ίσα μέρη, στα οποία χωρίζεται μία ποσότητα, ονομάζεται κλασματική μονάδα.

Ερώτηση 18 : Τι ονομάζεται κλάσμα ή κλασματικός αριθμός και τι διακρίνουμε σε αυτόν;

Απάντηση

Κλάσμα ή κλασματικός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{\nu}$, με κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$, $\nu \neq 0$ εκφράζει τα κ μέρη από τα ω ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μία ποσότητα. Γενικά: $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa \cdot \frac{1}{\nu}$, με κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Ερώτηση 19 : Τι παριστάνει ένα κλάσμα;

Απάντηση

Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή.

Δηλαδή : $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$, με $\nu \neq 0$

Ερώτηση 20 : Μπορεί ένας φυσικός αριθμός να γραφτεί σαν κλάσμα;

Απάντηση

Κάθε φυσικός αριθμός κ μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, γιατί

$$\kappa = \kappa : 1 = \frac{\kappa}{1}$$

Ερώτηση 21 : Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα;

Απάντηση

Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Άρα $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta$.

Ερώτηση 22 : Τι μπορείτε να πείτε για τα «χιαστί» γινόμενα των ισοδύναμων κλασμάτων;

Απάντηση

Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα, τότε τα «χιαστί» γινόμενα τους $\alpha \cdot \delta$ και $\gamma \cdot \beta$ είναι ίσα και αντιστρόφως. Άρα $\alpha \cdot \delta = \gamma \cdot \beta$. Δηλαδή αν: $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha \cdot \delta = \gamma \cdot \beta$.

Ερώτηση 23 : Πότε δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται ομώνυμα και πότε ετερόνυμα;

Απάντηση

Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται ομώνυμα και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται ετερόνυμα.

Ερώτηση 24 : Πως συγκρίνουμε δύο κλάσματα;

Απάντηση

- Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.
- Για να συγκρίνουμε δύο ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.
- Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

Ερώτηση 25 : Τι ονομάζεται μεικτός αριθμός;

Απάντηση

Ο συμβολισμός αυτός που παριστάνει το άθροισμα ενός ακεραίου με έναν κλάσμα μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται μεικτός αριθμός.

Ερώτηση 26 : Πότε δύο κλάσματα λέγονται αντίστροφα;

Απάντηση

Δύο κλάσματα λέγονται αντίστροφα όταν έχουν γινόμενο 1.

Ερώτηση 27 : Πότε ένα κλάσμα λέγεται σύνθετο;

Απάντηση

Ένα κλάσμα λέγεται σύνθετο, όταν τουλάχιστον ένας όρος του είναι κλάσμα.

Άλγεβρα 3^ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 28 : Πότε ένα κλάσμα λέγεται δεκαδικό;

Απάντηση

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που είναι παρονομαστή μια δύναμη του 10.

Ερώτηση 29 : Πως κάθε κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός;

Απάντηση

Κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.

Άλγεβρα 4ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 30 : Τι ονομάζεται εξίσωση; Τι λύση της (ή ρίζα της); Και τι επίλυση μιας εξίσωσης;

Απάντηση

Εξίσωση μ' έναν άγνωστο είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς με ένα γράμμα (άγνωστος).

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι όταν ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Η διαδικασία, μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

Ερώτηση 31 : Πότε μία εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη; Και πότε λέγεται αδύνατη;

Απάντηση

Μία εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

Μία εξίσωση λέγεται αδύνατη, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

Άλγεβρα 5ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 32 : Τι ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό ή απλά ποσοστό και τι ποσοστό επί τοις χιλίοις.

Απάντηση

Το σύμβολο $a\%$ ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με το $\frac{a}{100}$.

Το σύμβολο $a/οο$ ονομάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις ή και είναι ίσο με το $\frac{a}{1000}$.

Άλγεβρα 7ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 33 : Τι είναι τα πρόσημα και πως χαρακτηρίζονται οι αριθμοί από αυτά;

Απάντηση

Τα σύμβολα «+», «-», λέγονται πρόσημα. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν ως θετικούς ή αρνητικούς.

Ερώτηση 34 : Πότε δύο αριθμοί λέγονται ομόσημοι και πότε ετερόσημοι;

Απάντηση

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Ερώτηση 35 : Ποιοι είναι οι ακέραιοι και ποιοι οι ρητοί αριθμοί;

Απάντηση

Ακέραιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Ερώτηση 36 : Τι εκφράζει η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a και πως συμβολίζεται;

Απάντηση

Ρητοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Ερώτηση 37 : Πότε δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

Απάντηση

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

Ερώτηση 38 : Ποιος είναι ο αντίθετος του αριθμού x ;

Απάντηση

Ο αντίθετος του αριθμού x είναι ο αριθμός $-x$.

Ερώτηση 39 : Πως ορίζεται η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού;

Απάντηση

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
- Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

Ερώτηση 40 : Πως προσθέτουμε δύο ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Ερώτηση 41 : Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης των ρητών;

Απάντηση

Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$a+b=\beta+a$$

Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$(α+β)+γ=α+(β+γ)$$

Άθροισμα με το μηδέν:

$$α+0=α$$

Άθροισμα αντιθέτων αριθμών:

$$α+(-α)=(-α)+α=0$$

Ερώτηση 42 : Πως αφαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β.

$$α-β=α+(-β)$$

Ερώτηση 43 : Πως πολλαπλασιάζουμε δύο ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε το πρόσημο «+».

$$\text{Δηλαδή } (+) \cdot (+) = (+) \text{ και } (-) \cdot (-) = (+)$$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε το πρόσημο «-».

$$\text{Δηλαδή } (-) \cdot (+) = (-) \text{ και } (+) \cdot (-) = (-)$$

Ερώτηση 44 : Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των ρητών;

Απάντηση

Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$α \cdot β = β \cdot α$$

Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$(α \cdot β) \cdot γ = α \cdot (β \cdot γ)$$

Γινόμενο με το 1:

$$α \cdot 1 = α$$

Γινόμενο με το 0:

$$α \cdot 0 = 0$$

Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση:

$$α \cdot (β + γ) = α \cdot β + α \cdot γ$$

Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την αφαίρεση:

$$α \cdot (β - γ) = α \cdot β - α \cdot γ$$

Ερώτηση 45 : Πότε δύο ρητοί λέγονται αντίστροφοι;

Απάντηση

Δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα:

$$α \cdot β = 1$$

Καθένας από τους α και β λέγεται αντίστροφος του άλλου.

Ερώτηση 46 : Πως διαιρούμε δυο ρητούς αριθμούς;

Απάντηση

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε :

Το πρόσημο + αν είναι ομόσημοι. Δηλαδή:

$$(+) : (+) = (+)$$

Το πρόσημο - αν είναι ετερόσημοι. Δηλαδή:

$$(-) : (+) = (-) \text{ και } (+) : (-) = (-)$$

Eclass - Online Test Ανά Κεφάλαιο

Link του μαθήματος της Άλγεβρας στο e-class :

<https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/courses/MIDDLESCHOOLA102/>

Link Online Test - 1^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=91

Link Online Test - 2^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=92

Link Online Test - 3^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=93

Link Online Test - 4^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=94

Link Online Test - 5^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=95

Link Online Test - 6^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=96

Link Online Test - 7^ο Κεφαλαίου :

https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/exercise_submit.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=97

Link Online Διαγωνίσματος - Εφ'όλης της ύλης :

<https://eclass.politropiarmonia.gr/openeclasse/modules/exercise/admin.php?course=MIDDLESCHOOLA102&exerciseId=98>