



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΝΔΟΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

I. Στοιχεία Εξεταζόμενου – Εξέτασης

Όνοματεπώνυμο Μαθητή	
Ημερομηνία Εξέτασης	Κυριακή, 10 Απριλίου 2016
Εξεταζόμενο Μάθημα	Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής
Τάξη	Γ' Γενικού Λυκείου
Διάρκεια Εξέτασης	3 ώρες
Σύνολο Σελίδων	Τρεις [3] Σελίδες
Εισηγητές	1. Βατίστα Φλώρα 2. Δημάκος Ηλίας

II. Θέματα εξέτασης**Θέμα Α**

A.1.1 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να δείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 12

A.1.2 Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

A.2 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ και συνεχής στο (a, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, \beta]$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Μονάδα 1

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδα 1

ε. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδα 1

Θέμα Β

Έστω f μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε όλο το \mathbb{R} , με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & , x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} & , x > 3 \end{cases}$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha = -1/9$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο

$A(4, f(4))$.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$.

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 5

Γ.2 Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ.3 Να αποδείξετε ότι: $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

Μονάδες 6

Γ.4 Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνεται μία συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = k x e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

Δ.1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 6

Δ.2 Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

Μονάδες 6

Δ.3 Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Μονάδες 6

Δ.4 Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στην αρχή της κόλλας αναφοράς να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Από κάτω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: **τρεις (3) ώρες** μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **45 λεπτά** μετά την παράδοση των θεμάτων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ ΚΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ**