

Σχολικό Έτος 2021-2022

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Course Site : <https://free.openeclass.org/courses/SC728/>



Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	2
Θέματα Επανάληψης	4
E.1.1 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Φυσικό	4
E.1.2 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Ακέραιο	13
Κεφάλαιο 1 ^ο Εξισώσεις – Ανισώσεις	17
A.1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις	17
A.1.2 Εξισώσεις α' βαθμού	25
A.1.3 Επίλυση Τύπων	42
A.1.4 Επίλυση Προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	44
A.1.5 Ανισώσεις α' βαθμού	50
Επαναληπτικές ασκήσεις 1 ^{ου} κεφαλαίου	62
Κριτήριο αξιολόγησης εξισώσεις - ανισώσεις (60 λεπτά)	65
Κεφάλαιο 2 ^ο Πραγματικοί αριθμοί	66
A.2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	66
A.2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	76
A.2.3 Προβλήματα	81
Επαναληπτικές ασκήσεις 2 ^{ου} κεφαλαίου	83
Κριτήριο αξιολόγησης εξισώσεις - ανισώσεις - ρίζες (60 λεπτά)	85
Κεφάλαιο 3 ^ο Συναρτήσεις	87
A.3.1 Η έννοια της συνάρτησης	87
Κριτήριο αξιολόγησης συναρτήσεις (15 λεπτά)	94
A.3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης	95
A.3.3 Η συνάρτηση $y = \alpha x$	107
A.3.4 Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$	116
A.3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$	125
Επαναληπτικές ασκήσεις 3 ^{ου} κεφαλαίου	131
Κριτήριο αξιολόγησης συναρτήσεων (60 λεπτά)	135
Κεφάλαιο 4 ^ο Περιγραφική Στατιστική	138
4.1 Βασικές έννοιες της στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα	138
Κριτήριο αξιολόγησης (10 λεπτά)	140
4.2 Γραφικές Παραστάσεις	141
4.3 Κατανομή Συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	147
4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	153
4.5 Μέση Τιμή - Διάμεσος	155
Κριτήριο αξιολόγησης στατιστικής (60 λεπτά)	161
Συνδιαστικά προβλήματα στην στατιστική	163
Επαναληπτικές ασκήσεις ανά κεφάλαιο	165

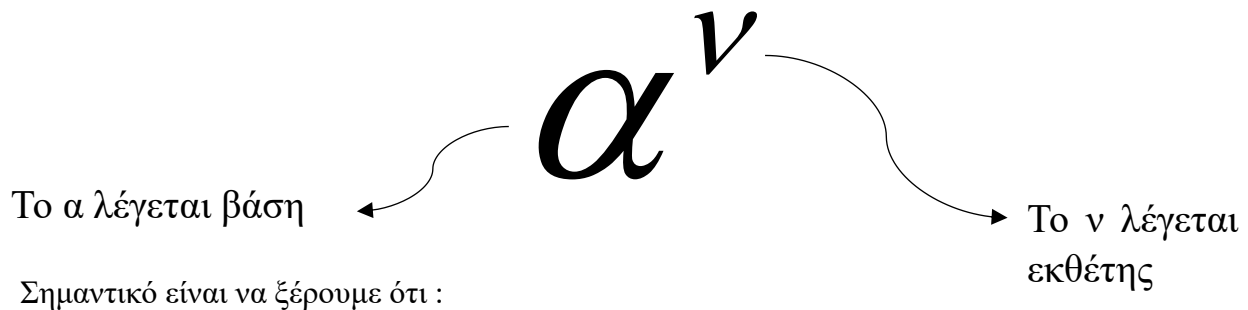
Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Κεφάλαιο 1 ^ο – Αλγεβρικές παραστάσεις – Εξισώσεις - Ανισώσεις	165
Κεφάλαιο 2 ^ο - Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού – Άρρητοι αριθμοί ...	169
Κεφάλαιο 3 ^ο – Συναρτήσεις – Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά – Υπερβολή	170
Κεφάλαιο 4 ^ο – Στατιστική	173
Επαναληπτικές ασκήσεις σε όλη την ύλη.....	177
1 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)	183
2 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)	186
3 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)	187
4 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)	190
5 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη(2 ώρες)	193
6 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη(2 ώρες)	196
7 ^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη(2 ώρες)	199
Θέματα σε όλη την ύλη για τη Β' Γυμνασίου στα Μαθηματικά	202
Απαντήσεις Θεμάτων	206
Επανάληψη θεωρίας άλγεβρας σε 29 ερωτήσεις - απαντήσεις.....	212
Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών	220

Θέματα Επανάληψης

Ε.1.1 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Φυσικό

Ορισμός



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{ο πολλαπλασιασμός επαναλαμβάνεται } n \text{ φορές}}$$

Απλές Ιδιότητες

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

$$(-a)^n = \begin{cases} +a^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος αριθμός} \\ -a^n, & \text{αν } n \text{ περιττός αριθμός} \end{cases}$$

Ιδιότητες

Παραδείγματα

$$a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu} \longrightarrow 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$\frac{a^\nu}{a^\mu} = a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu} \longrightarrow \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10} : 2^9 = 2^{10-9}$$

$$(a^\nu)^\mu = a^{\nu \cdot \mu} \longrightarrow (2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{b^\nu} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$(a \cdot b)^\nu = a^\nu \cdot b^\nu \longrightarrow (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι οι δύο παρακάτω ιδιότητες ισχύουν μόνο για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση.

$$\rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

$$\rightarrow (\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$$

Παράδειγμα

Η πράξη :

$$(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2 = 4+9=13$$

Ενώ η πράξη με βάση την προτεραιότητα των δυνάμεων θα πρέπει να γίνει κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, δηλαδή ως εξής:

$$(2+3)^2 = (5)^2 = 25$$

Αντίστοιχα ισχύει και για την αφαίρεση

Η πράξη :

$$(2-3)^3 \neq 2^3 - 3^3 = 8-27=-19$$

Ενώ η πράξη με βάση την προτεραιότητα των δυνάμεων θα πρέπει να γίνει κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, δηλαδή ως εξής:

$$(2-3)^3 = (-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$$

Λυμένες Ασκήσεις

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων :

Λύση

$$A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$$

$$A = -1 + (+1) + (-1) + (+1) + (-1)$$

$$A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$$A = -1$$

$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3$$

$$B = 32 \cdot 625 - 25 \cdot 1.024 + 87,5 \cdot 64$$

$$B = 20.000 - 25.600 + 5.600$$

$$B = 20.000 + 5.600 - 25.600$$

$$B = 25.600 - 25.600$$

$$B = 0$$

$$\Gamma = -\frac{(-6)^5}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

$$\Gamma = -\frac{-6^5}{3^5} - \frac{8^4}{4^4} + \frac{10^3}{-5^3}$$

$$\Gamma = +\frac{6^5}{3^5} - \left(\frac{8}{4}\right)^4 - \left(\frac{10}{5}\right)^3$$

$$\Gamma = +\left(\frac{6}{3}\right)^5 - 2^4 - 2^3$$

$$\Gamma = 2^5 - 2^4 - 2^3$$

$$\Gamma = 32 - 16 - 8$$

$$\Gamma = 16 - 8$$

$$\Gamma = 8$$

Άλυτες Ασκήσεις

1.1 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

- i. -2^3
- ii. $(-1)^2$
- iii. -3^4
- iv. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$
- v. $(-4)^3$

1.2 Να υπολογίσετε τις ακόλουθες δυνάμεις:

- α) $(-3)^3$
- β) -6^4
- γ) $(-5)^{10}$
- δ) $(-6)^3$
- ε) $(-2)^5$

1.3 Να υπολογίσετε τις ακόλουθες δυνάμεις:

- α) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$
- β) $\left(\frac{-5}{4}\right)^2$
- γ) $\left(\frac{(-2)^2}{2}\right)^3$
- δ) $\left(\frac{(-2)^3}{2}\right)^2$
- ε) $\left(-\frac{5}{8}\right)^2$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

1.4 Να υπολογίσετε τις ακόλουθες δυνάμεις:

α) $(-\frac{5}{3})^2$

β) $(\frac{-5}{4})^2$

γ) $(\frac{(-2)^2}{2})^3$

δ) $(\frac{(-2)^3}{2})^2$

ε) $(\frac{(-2)^3}{(-2)^3})^2$

ε) $(\frac{(-2)^5}{(-2)^3})^2$

1.5 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

$(\frac{a}{b})^v = (\frac{a}{b})^v$	
$(\frac{a}{b})^v = (\frac{b}{a})^v$	
$(ab)^v = a^vb^v$	
$(\frac{a^3}{2})^v = \frac{a^{3v}}{2^v}$	
$(a^\mu)^v = a^{v\mu}$	
$(\frac{a}{b})^v = (\frac{a^v}{b^v})^v$	
$a^\mu b^v = a^\mu b^v$	
$a^\mu a^v = (aa^v)^v$	

1.6 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις

i. $(\frac{4}{3})^2$

ii. $(-\frac{5}{2})^4$

iii. 1522^1

iv. $(-0.5)^5$

v. $(-0.2)^4$

1.7 Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων τις παρακάτω παραστάσεις :

- i. $(-3)^2 \cdot 9$
- ii. $-(-2^4) \cdot (-2)^3$
- iii. $\frac{1}{-8} \cdot (-2)^5$
- iv. $2^5 2^7 2$
- v. $(-6)^2 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)^4$
- vi. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^4$
- vii. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right]^5 : \left(-\frac{3}{2}\right)$
- viii. $(2^5 2^3) : 6^4$
- ix. $(-3)^4 [(-3)^3]^2 : (-3)^3$
- x. $3^4 2^3 5^3 5^5 (3^2)^3$

1.8 Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων τις παρακάτω:

- α) $3^6 : 3^4$
- β) $(-4)^7 : (-4)^5$
- γ) $\frac{(-3)^8}{(-3)^5}$
- δ) $-2^8 : 2^6$
- ε) $(-5)^{13} : [(-5)^{11}]$
- στ) $\frac{-4^7}{-4^3}$
- ζ) $\frac{6^{13}}{-6^{10}}$
- η) $\frac{-(-3)^{14}}{(-3)^{10}}$
- θ) $-3^{12} : (-3^7)$
- ι) $-(-4)^3 : (-4^2)$

1.9 Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων:

- α) $(5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4) : 5^6$
- β) $3^2 \cdot 3^4 \cdot (3^2)^3$
- γ) $[(-2)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^{10}] : [(-2)^3]^2$
- δ) $(-a)^5 \cdot (-a) \cdot (-a)^6$
- ε) $[(-0,1)^{13} : (-0,1)^7] \cdot (-0,1)^2$
- στ) $3^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \cdot 3^3 \cdot (5^2)^6$
- ζ) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$
- η) $2^3 \cdot 8^2$
- θ) $9^5 : 3^2$
- ι) $(6^2 : 3^2) \cdot 2^5$
- ια) $(3^7 : 3^4) \cdot (4^{10} : 4^7)$
- ιβ) $(8^5 : 8^3) : (2^{13} : 2^{11})$
- ιγ) $(9^5 : 3^5) \cdot (6^3 : 2^3)$
- ιδ) $(2^5 \cdot 6^5 \cdot 4^5) : 12^5$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$B = \left(-\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot 6$$

$$\Gamma = \left[-(0.5)^3\right] \cdot 2^3 \cdot (-4)^3 \cdot (-0.25)^3$$

$$\Delta = 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 3^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$Z = \left(-\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^7 (-4)^7 (-1)^7$$

1.10 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$A = \frac{20^5}{10^5}$$

$$B = \left[-(0.2)\right]^{10} : (0.2)^{10}$$

$$\Gamma = (-1.5)^3 : (0.5)^3$$

$$\Delta = (-12)^3 : 4^3$$

$$E = (-3,6)^2 : (-3)^2$$

$$Z = \frac{(-36)^2}{9^2}$$

$$H = \frac{(-27)^3}{(-9)^3}$$

1.11 Να κάνετε τις πράξεις :

$$\text{i.} \quad \frac{(-14)^6}{7^6} + \frac{(-9)^3}{-3^3} - (1.5)^2$$

$$\text{ii.} \quad \frac{(-5)^9 \cdot 2^{10}}{2^9 \cdot 5^7} + 2 \cdot (-5)^2$$

$$\text{iii.} \quad \left[(-3)^3 : 3 - (-2)^4 : (-2^3)\right] : \frac{1}{-2^3}$$

$$\text{iv.} \quad (-1)^3 \cdot \left[\frac{1}{2}(-3)^2 - \frac{1}{4}(-2)^3\right] + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{9}\right) - 2$$

$$\begin{array}{ll}
\text{v.} & \{(-7)^3[-(-7^2)^3]2\}:(-49)[-(-7)^2]-(-7^{11}) \\
\text{vi.} & \frac{4}{5} \cdot \frac{(-5)^2}{8} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{1}{6^2} - \frac{5}{2^2} \\
\text{vii.} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[-3^2\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3}\right) + (3:2)^2 \cdot \frac{4}{9} + 3^3\right] \\
\text{viii.} & (-5+7)^2 + (-4+6)^2 \cdot (-5+4) - (6-5)^8 : \frac{1}{8} \\
\text{ix.} & \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-5) \cdot \frac{3^2 4^2 5}{12^2} + \frac{1}{4} \\
\text{x.} & \frac{6^3 7^2 3^5}{9^3 7^3 2^3} + (-3)^3 \left[\frac{1}{3^2} : 3\right]
\end{array}$$

1.12 Να γραφεί:

α) το 8^2 ως δύναμη με βάση το 2

β) το 4^5 ως δύναμη με βάση το 2

γ) το 16^2 ως δύναμη με βάση το 2 και ως δύναμη με βάση το 4

δ) το 9^4 ως δύναμη με βάση το 3

1.13 Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 3^5 \cdot x = 6^5 \quad \beta) \frac{x}{2^6} = 2^3 \quad \gamma) (-3)^2 \cdot x = (-3)^5 \quad \delta) \left(\frac{1}{2}\right)^6 x = (-2)^6$$

1.14 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - (-1)^3} : \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\
B &= (-1)^{11} + (-1)^{22} + (-1)^{23} + (-1)^{48} \\
\Gamma &= 2^2 + 2^3 + 2^4 - 2^5 + (-2)^6 \\
\Delta &= \frac{(-3)^3 + 2^5 + (-2)^3}{(-4)^2 - 5^2} \cdot \frac{2^4 + (-3)^3}{-2 \cdot (-2)^3} \\
E &= -\frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - (-6) \cdot 3^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \\
Z &= (-7+5)^3 \cdot \left[-(6-2)^2 + 3^3\right]
\end{aligned}$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

1.15 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων Q

$$A = (x+1)^2$$

$$B = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{όταν } x = (-2)^2 + 3^3 + (-2)^5 + (-1)^7$$

1.16 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων Q

$$A = \frac{(-15)^2}{9 \cdot 25} + \frac{(-18)^3}{8 \cdot 3^6}$$

$$B = \frac{60^2}{144} - \frac{3^9 \cdot 2^5}{3^8 \cdot 4} + (-1)^{148}$$

1.17 Αν $x=3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = 4(x-1)^{2x} - x^x + (-x+1)^2 \cdot (-x)^{x-1}$$

1.18 Αν $x=-3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = (x+2)^{1000} + (x+3)^{2000} + (x+4)^{3000}$$

1.19 Αν $x= -3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{(x+1)^5 - 2^4 \cdot (x+2)}{x^2 - \left(2 + \frac{x}{3}\right)^5} \cdot \frac{(2-x)^2}{7x-4}$$

1.20 Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = (\alpha + \beta)^{10} - (\alpha - \beta)^{10} + (\beta - \alpha)^{10} - (-\beta - \alpha)^{10}$$

1.21 i. Να αποδείξετε ότι $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

ii. Να αποδείξετε ότι $2^{v+1} - 2^v = 2^v$

iii. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = (-1)^v + (-1)^{v+1}$

1.22 Αν $x \cdot y \cdot \omega = -2$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\left(-\frac{1}{2} \cdot x^3 \cdot y \cdot \omega^2\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \omega\right) = x^2$

ii. $\left(-4 \cdot x \cdot y^2 \cdot \omega^3\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y\right) \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot \omega\right) = -12 \cdot x \cdot y^2$

$$\text{iii. } \frac{\left[\left(-2 \cdot x^2 \cdot y \cdot \omega^3 \right)^2 \right]^3}{\left(4 \cdot x^2 \cdot \omega^4 \right)^3} = 64$$

- 1.23** Να αποδείξετε ότι αν στον κύβο του αριθμού 4 προσθέσουμε το εικοσαπλάσιο του, το αποτέλεσμα διαιρείται με το 48.
- 1.24** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = 3^{4\nu+1} + 10 \cdot 3^{4\nu} - 13$ διαιρείται ακριβώς από τον αριθμό 13.
- 1.25** Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $(x + y)^\nu - x^\nu - y^\nu$, ν περιττός για $x = -y$, είναι μηδέν .

Ε.1.2 Δυνάμεις Ρητών Αριθμών Με Εκθέτη Ακέραιο

Σε αυτή την ενότητα πρέπει να δώσουμε στις ιδιότητες :

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v}$$

Παράδειγμα

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Και

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v = \frac{\beta^v}{\alpha^v}$$

Παράδειγμα

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

Λύση

$$A = (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2$$

$$A = (-1)^{+3} + (-1)^{+2} + (-1)^{+1} + 1 + (-1) + (+1)$$

$$A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$$

$$A = 0$$

$$B = [(-2)^2]^5 \cdot [(-3)^2]^{-2} + [(-23,5)^2 \cdot (23,5)^{-2}]^5$$

$$B = (-2)^{10} \cdot (-3)^{-4} + (-23,5)^{10} \cdot (23,5)^{-10}$$

$$B = 2^{10} \cdot \frac{1}{(-3)^4} + 23,5^{10} \cdot 23,5^{-10}$$

$$B = 1024 \cdot \frac{1}{81} + 23,5^{10-10}$$

$$B = \frac{1024}{81} + 23,5^0$$

$$B = \frac{1024}{81} + 1$$

$$B = \frac{1024+81}{81}$$

$$B = \frac{1.105}{81}$$

$$\Gamma = \frac{(-6)^{-5}}{12^{-5}} + \frac{16^{-4}}{(-32)^{-4}} - \frac{5^{-3}}{(-10)^{-3}}$$

$$\Gamma = \left(\frac{-6}{12}\right)^{-5} + \left(\frac{16}{-32}\right)^{-4} - \left(\frac{5}{-10}\right)^{-3}$$

$$\Gamma = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\Gamma = (-2)^{+5} + (-2)^{+4} - (-2)^{+3}$$

$$\Gamma = -32 + (+16) - (-8)$$

$$\Gamma = -32 + 16 + 8$$

$$\Gamma = -16 + 8$$

$$\Gamma = -8$$

Άλυτες Ασκήσεις

1.26 Να υπολογίσετε τις δυνάμεις :

i. 15^{-1}

ii. $(-2)^{-2}$

iii. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

iv. $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$

v. 1025^0

vi. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

vii. 0.3^{-3}

viii. $(-5)^{-4}$

ix. -5^{-2}

x. $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{6}$

1.27 Να συγκρίνετε με το μηδέν τους παρακάτω αριθμούς :

$$7^{-1}, (-7)^{-1}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-20}, -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-19}, (-1)^0, -1^0$$

1.28 Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

i. $3^{-5} \cdot 3^{-2}$

ii. $(-5)^5 \cdot (-5)^3$

iii. $\left(-\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

iv. $3^{-2} \cdot 2^5 \cdot 3^3 \cdot 2^{-7}$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

v. $6^{-5} \cdot 49^{-2} \cdot 4^{-8} \cdot 4^9 \cdot 7^5 \cdot 36^3$

vi. $(-2)^{-2} \cdot (-2)^{-3} \cdot 8^{-1}$

vii. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 8$

1.29 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = 2^{x-4} - 6 \cdot 4^{x-3} + 1^{x-2} - 5^{x-2}, \alpha \nu \quad x = 1$$

$$B = 2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x^{-x} + x^x - 3 \cdot (-1)^{-3}, \alpha \nu \quad x = -2$$

$$\Gamma = (-1)^{-2} + 2 \cdot (-2)^{-1} - 3 \cdot (-3)^{-3}$$

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{x-2} + (-1)^{x-1} - (-1)^x \alpha \nu \quad x = 1$$

$$E = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} - \left(-\frac{x}{3}\right)^x + (5+x) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1} + (2-x)^{x+2}, \alpha \nu \quad x = -2$$

$$Z = \left(-\frac{1}{2}\right)^x + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x+1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{x+2} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{x+3} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{x+4}, \alpha \nu \quad x = -4$$

$$H = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) \alpha \nu \quad x = 3^{-3}, y = 2^{-5}, z = -7^{-2}$$

1.30 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = (-1)^{-2} + (-1)^{-3} + (-1)^0 + (-1)^3 + (-1)^6$$

$$B = \left[-3^2 + (-5)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^{-1} \right]^0$$

$$\Gamma = 8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + (-9)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-2}$$

$$\Delta = \left[\frac{(-1)^4 + 3^3}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 2} \right]^{-8}$$

1.31 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\frac{2^{-7} \cdot 10^5 \cdot (-7)^{-4} \cdot 6^{-8} \cdot 5^{10} \cdot 8^{-2}}{10^3 \cdot 2^{-10} \cdot (-5)^{11} \cdot (-7)^{-4} \cdot 8^{-1}}$

ii. $\left(\frac{x^4}{y^3}\right) \cdot \left(\frac{-3y^3}{x^4}\right)^{-3}, x, y \neq 0$

$$\text{iii.} \quad \left(\frac{2}{6}x^{-1}y^3\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-2x^2}{y^3}\right)^{-4}$$

1.32 Να γράψετε με την μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις :

$$A = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot 32 - \left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$$

$$B = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right]^2 + 3^{10} \cdot 9^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-12} \cdot 81^{-1}$$

1.33 Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i.} \quad \left(-\frac{1}{27}\right)^{-6} = 3^{18} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-9}$$

$$\text{ii.} \quad \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]^{-10} = 256^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-40}$$

1.34 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{i.} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot x = -8$$

$$\text{ii.} \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} : x = 3^0$$

$$\text{iii.} \quad \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot x = 5^3$$

1.35 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{i.} \quad 2^{25} = 2^5 \cdot 2^{-x+2}$$

$$\text{ii.} \quad (0.2)^{-3} \cdot 5x = 25^4$$

$$\text{iii.} \quad (-3)^{-x+2} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{-x} = 27$$

1.36 Αν ισχύει $A = \left(\frac{xyz}{xy + yz + zx}\right)^{-1}$, $B = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ να δείξετε ότι $A=B$.

1.37 Αν α , β , x είναι μη μηδενικοί ρητοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha = \beta$, τότε να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{\alpha^3 \cdot \beta^2 \cdot x}{\alpha^4 \cdot \beta \cdot x^2} = -2$$

Κεφάλαιο 1^ο Εξισώσεις – Ανισώσεις

Α.1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

Στα μαθηματικά τις περισσότερες φορές για να παραστήσουμε ένα στοιχείο χρησιμοποιούμε ένα γράμμα του αγγλικού αλφάβητου όπως x,y,t,z, κλπ. Το γράμμα αυτό το ονομάζουμε **μεταβλητή**.

Άρα, λοιπόν, μεταβλητή είναι ένα γράμμα (x,y,t,z) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

Μέχρι τώρα έχουμε δει αριθμητικές παραστάσεις, στις οποίες χρησιμοποιούνται μόνο αριθμοί και σύμβολα των πράξεων. Αν στις αριθμητικές παραστάσεις βάλουμε και μεταβλητές τότε η παράστασή μας θα ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Πως όμως θα μπορέσουμε να εκτελέσουμε τις πράξεις έχοντας μεταβλητές μέσα στην παράστασή μας; Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση βρίσκεται στην επιμεριστική ιδιότητα.

Ας θυμηθούμε πρώτα τον «κανόνα» της επιμεριστικής ιδιότητας.

Επιμεριστική ιδιότητα με πρόσθεση :

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Επιμεριστική ιδιότητα με αφαίρεση :

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Παράδειγμα

$$\text{i)} \quad 2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = 2 \cdot x + 6$$

$$\text{ii)} \quad 5 \cdot (2 - \omega) = 5 \cdot 2 - 5 \cdot \omega = 10 - 5 \cdot \omega$$

$$\text{iii)} \quad 3 \cdot (-\omega - 1) = -3 \cdot \omega - 3$$

Παράδειγμα αλγεβρικής παράστασης με χρήση επιμεριστικής ιδιότητας

$$A = 5 \cdot x - 3 \cdot x + x$$

$$A = x(5 - 3 + 1)$$

$$A = x(2 + 1)$$

$$A = x \cdot 3$$

$$A = 3 \cdot x$$

Η διαδικασία κατά την οποία απλουστεύουμε μία αλγεβρική παράσταση ονομάζεται «**αναγωγή ομοίων όρων**».

Να θυμηθούμε τώρα κάποιες ιδιότητες του «=», τις οποίες τις χρησιμοποιούμε διαρκώς.

Ιδιότητες της ισότητας:

1. Ανακλαστική ή ταυτοτική: $\alpha = \alpha$ (το α ίσο με τον εαυτό του)
2. Συμμετρική: $\alpha = \beta$ και $\beta = \alpha$ (η ισότητα δεν έχει φορά για να διαβαστεί σωστά)
3. Μεταβατική: Αν $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma$ τότε και $\alpha = \gamma$ (και τελικά, όλα ίσα μεταξύ τους $\alpha = \beta = \gamma$)

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 14 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

- α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12.
- β) Το άθροισμα δύο αριθμών πολλαπλασιασμένο επί 9.
- γ) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το μήκος του είναι 2m μεγαλύτερο από το πλάτος του.

Λύση

- α) Έστω x ο αριθμός, άρα το τριπλάσιό του είναι το $3x$
αυξημένο κατά 12 είναι: $3x + 12$
- β) έστω δυο αριθμοί x και y
το άθροισμά τους είναι $x + y$
πολλαπλασιασμένο επί 9 είναι: $9 \cdot (x + y)$
- γ) έστω x πλάτος του ορθογωνίου άρα το μήκος του είναι $x+2$
άρα η περίμετρος είναι: $\Pi = x + x+2 + x + x + 2 = 4x + 4$

Άσκηση 2/σελ. 14 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

- α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 5 κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.
- β) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.

Λύση

- α) έστω x η τιμή του ενός κιλού πατάτες
άρα τα 5 κιλά πατάτες κοστίζουν: $5x$
- β) έστω y η αναγραφόμενη τιμή
άρα ο ΦΠΑ που αναλογεί σε αυτήν την τιμή είναι : $\frac{19}{100} \cdot y = 0,19y$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

άρα η τελική τιμή του προϊόντος είναι
 $y + 0,19y = (1 + 0,19)y = 1,19y$

Άσκηση 3/σελ. 14 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $20x - 4x + x = (20 - 4 + 1)x = 17x$

β) $-7a - 8a - a = (-7 - 8 - 1)a = -16a$

γ) $14y + 12y + y = (14 + 12 + 1)y = 27y$

δ) $14\omega - 12\omega - \omega + 3\omega = (14 - 12 - 1 + 3)\omega = 4\omega$

ε) $-6x + 3 + 4x - 2 = -6x + 4x + 3 - 2 = -2x + 1$

στ) $\beta - 2\beta + 3\beta - 4\beta = -\beta - \beta = -2\beta$

Άλυτές Ασκήσεις

1.1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή ως Λανθασμένες

1. Η αριθμητική παράσταση $3 \cdot (x + 4)$ εκφράζει το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4
2. Το εξάπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 12 συμβολίζεται ως $12 - 6 \cdot \alpha$
3. Έστω κ ο αριθμός των παιδιών μιας οικογένειας τότε μπορεί να πάρει την τιμή -1
4. Η παράσταση $B = 5x + 2(x + 1) + x$ ισούται με $B = 8x + 1$

1.2 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$A = 3(x - 1) + 5x + 4x - x$, $B = 4(y + 2) : 2 - y + \frac{8y}{4}$ και αν $x + y = 3$, τότε να υπολογίσετε την αλγεβρική παράσταση : $A = 2(x + 1) + 2(4 + y) - 3(x + y)$

1.3 Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Gamma = -4(a - 2\beta) - (-\alpha - \beta) - 2\alpha\beta$

1.4 Αν $\alpha\beta = -2$ να απλοποιηθεί η τιμή της παράστασης

$$A = -\alpha(2\beta + 1) - (-\beta\alpha - \alpha) - 3\alpha\beta + \beta(-\alpha + 1) - \beta$$

1.5 Αν $xy = -2$ να απλοποιηθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 3x(y - 2) + 2(x + xy) - 3(yx + 1) + 4x$$

1.6 Χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή, η οποία θα συμβολίζει έναν αριθμό να εκφράσετε συμβολικά:

- i. Το διπλάσιο του αριθμού
- ii. Το τριπλάσιο του αριθμού
- iii. Τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού
- iv. Το άθροισμα του αριθμού και του 8

- v. Τον αριθμό ελαττωμένο κατά 5
- vi. Το τριπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 4

1.7 Να γραφτούν οι παρακάτω εκφράσεις με τη βοήθεια μεταβλητών:

- i. Ένας αριθμός αυξημένος κατά 5
- ii. Το δεκαπλάσιο ενός αριθμού
- iii. Το τριπλάσιο ενός αριθμού ισούται με 12
- iv. Το οκταπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 92
- v. Αν σ' έναν αριθμό προσθέσουμε 5 τότε βρίσκουμε 64
- vi. Αν από το 17 αφαιρέσουμε έναν αριθμό τότε βρίσκουμε 13
- vii. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 6
- viii. Σ' έναν αριθμό προσθέτουμε το διπλάσιό του και βρίσκουμε 72
- ix. Το πενταπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του 3

1.8 Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω εκφράσεις:

- i. $x \leq 2$
- ii. $7x = 50$
- iii. $x + 34 = 52$
- iv. $4x > 16$
- v. $3x - 2$
- vi. $4x + 2 = 8$
- vii. $\frac{1}{2}x - 3 = 9$
- viii. $3x + 2 < 10$
- ix. $2x - 5 = x + 4$

1.9 Να παραστήσετε με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:

- i. τους άρτιους αριθμούς,
- ii. τους περιττούς αριθμούς,
- iii. το άθροισμα δύο διαδοχικών άρτιων,
- iv. το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών.

1.10 Αν κ είναι φυσικός αριθμός και ισχύει $25 < \kappa$ και $\kappa \leq 29$, να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή κ .

1.11 Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας μεταβλητής τα παρακάτω:

- i) την περίμετρο και το εμβαδόν τετραγώνου
- ii) την περίμετρο και το εμβαδόν ορθογωνίου

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

- iii) την περίμετρο και το εμβαδόν ορθογωνίου με μήκος τριπλάσιο από το πλάτος του
- iv) την περίμετρο και το εμβαδόν ορθογωνίου με μήκος κατά 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος του
- v) την περίμετρο ισοσκελούς τριγώνου
- vi) την περίμετρο ισοσκελούς τριγώνου στο οποίο η καθεμία από τις ίσες πλευρές είναι διπλάσια της βάσης

1.12 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- i) $4x - 2x + 6x - x + 5x$
- ii) $8y - 3y + y - 5y$
- iii) $4x - 12 + 3x + 5 - 2x$
- iv) $9x + 7 - 3x - 10 + 5x$
- v) $5x - 6y + 6x + 5y$
- vi) $11x - 2y + 8 - 3x + 4y - 12 - 5x + 10$
- vii) $4xy - 5x + 6y - xy + 7x + 3y + 8xy$

1.13 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- i) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}x$
- ii) $\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x - y + \frac{2}{3}x$
- iii) $\frac{x}{5} + \frac{2x}{5} - \frac{x}{3} + \frac{2y}{5} - \frac{2y}{3}$
- iv) $\frac{x-2}{4} + \frac{x-1}{5} - \frac{3x}{10}$
- v) $\frac{x+1}{2} - \frac{y-3}{4} + \frac{x+2}{4} + \frac{y+5}{6}$
- vi) $3x + \frac{2x}{5} - 2y + \frac{x-1}{10} - 8y - \frac{x}{2}$

1.14 Αφού απλοποιήσετε τις παραστάσεις να υπολογίσετε τις τιμές τους:

$$A = 3(4x+5) - 2x + \frac{1}{2}(4x-6), \text{ όταν } x=7$$

$$B = 5(2x+3y) - 4(x-2y) + 7x - 5y, \text{ όταν } x=0,3 \text{ και } y=0,04$$

$$\Gamma = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right) - \frac{5}{6}\left(3x + \frac{1}{2}y\right) \text{ όταν } x=\frac{1}{3} \text{ και } y=\frac{2}{5}$$

$$\Delta = x(y+z) - y(x+z) + 3z(2x-4y), \text{ όταν } x=2, y=3 \text{ και } z=4$$

1.15 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3(3x+6y) + 8y + 6(x-2y) - 3x - 2y \text{ όταν } x+y=10$$

1.16 Να γράψετε το γινόμενο τριών διαδοχικών περιττών αριθμών από τους οποίους ο μεσαίος να είναι ο $2x+1$.

1.17 Χρησιμοποιώντας δύο μεταβλητές, μια για την τιμή ενός κιλού αχλάδια και μια για την τιμή ενός κιλού μήλα, να εκφράσετε συμβολικά πόσο θα πληρώσουμε αν αγοράσουμε:

α) 3 κιλά αχλάδια και 4 κιλά μήλα

β) 8 κιλά αχλάδια και 2 κιλά μήλα

1.18 Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι διπλάσιο από το πλάτος του.

i) Να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου, συμβολίζοντας με x το πλάτος.

ii) Να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου, συμβολίζοντας με w το μήκος.

1.19 Ο Νίκος είναι 2 χρόνια μεγαλύτερος από τη Σία. Συμβολίζοντας με x την ηλικία του Νίκου, να εκφράσετε:

α) Την ηλικία της Σίας

β) Το άθροισμα των ηλικιών του Νίκου και της Σίας μετά από 5 χρόνια.

1.20 Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου είναι 62 χλμ/ώρα. Συμβολίζοντας με t το χρόνο, να εκφράσετε το διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο σε t ώρες.

1.21 Αν η τιμή ενός τετραδίου με 50 φύλλα είναι x ευρώ και η τιμή ενός τετραδίου με 150 φύλλα είναι 2 ευρώ μεγαλύτερη, να εκφράσετε το ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 4 τετράδια των 50 φύλλων και 3 τετράδια των 150 φύλλων.

1.22 Έστω x ένας αριθμός. Να εκφράσετε συμβολικά την πρόταση «Το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά τα $5/7$ του αριθμού».

1.23 Να γράψετε απλούστερα τις παραστάσεις:

i) $3x + 2x + 5x$

ii) $2x + 4x + x$

iii) $x + 5x + 2x$

iv) $6x + 3 + 2 + 2x + 1$

v) $x + 5x + 5 + 7x$

vi) $3x - 2x + 5x$

vii) $2x - 4x - x$

viii) $x - 5x + 2x$

ix) $6x - 3 - 2x + 1$

x) $x - 5x - 5 + 7x$

1.24 Να υπολογίσετε την τιμή του A , αν $x = 128713,9$:

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

i) $A = 4x + x + 2x + 3x$

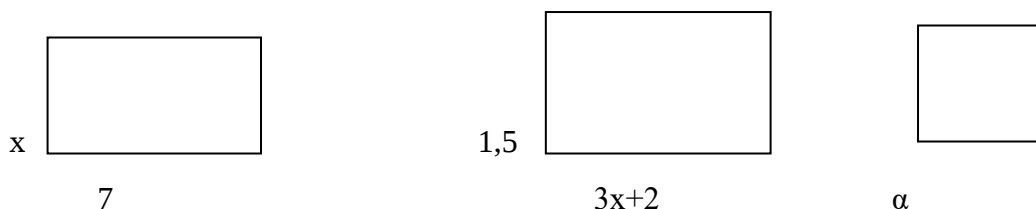
ii) $A = 3x - x + 5x - 7x$

1.25 Να υπολογίσετε την τιμή του A , αν $x = 178,23$:

α) $A = 2x + 3x + 5x + 0,7$

β) $A = 2x - 5x + 3x - 0,3$

1.26 Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές που είναι σημειωμένες σε καθένα από τα σχήματα, να γράψετε συμβολικά την περίμετρο καθενός από αυτά.



1.27 Για μια τυρόπιτα πληρώνουμε x ευρώ και για ένα αναψυκτικό 0,5 ευρώ λιγότερα. Για 4 τυρόπιτες και 2 αναψυκτικά πόσα πληρώνουμε;

1.28 Χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων αριθμών είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.

1.29 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $3(2x+5y)$

β) $-2(3x+4)$

γ) $-5(-2x+4y-3)$

δ) $7(x-2y)$

ε) $-2(2x+4y+3z-2w)$

1.30 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $2(y+5)$

β) $-2(3x+4)$

γ) $-(2-x-5y+31z-21w)$

δ) $10(-x-12y)$

ε) $-(12x+14y+13z-12w)$

1.31 Να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση:

$$A = 1 - 2(4x - 3y - z) - (x - z - 5), \text{ για } x = -5 \text{ και } y = -2$$

1.32 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$$\alpha) \frac{3x-y}{3} - \frac{x-1}{6} - 2y$$

$$\beta) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{7} - 3x \right)$$

1.33 Αν ισχύει ότι $x-y=-3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3x-2y}{2} - \frac{2x-1}{4}$$

1.34 Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (4x + 5y) - 36x + 35y + (8 : 2 - 2)^2$$

Διαγωνισμός ΕΜΕ "Ο Ευκλείδης" 2009 – Β' Γυμνασίου

A.1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

Κάθε ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό που τον συμβολίζουμε με x, y, ω κτλ ονομάζεται εξίσωση.

Ανάλογα με τη δύναμη στην οποία είναι υψωμένος ο άγνωστος η εξίσωση παίρνει διαφορετική ονομασία. Για παράδειγμα, αν ο άγνωστος μας είναι υψωμένος στην δύναμη 1, τότε η εξίσωσή μας ονομάζεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού. Αντίστοιχα, αν ο άγνωστος μας είναι υψωμένος στην δύναμη 2, τότε η εξίσωσή μας ονομάζεται εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

Παράδειγμα εξίσωσης 1^{ου} βαθμού : $x + 2(x - 2) = 5 - 3x$

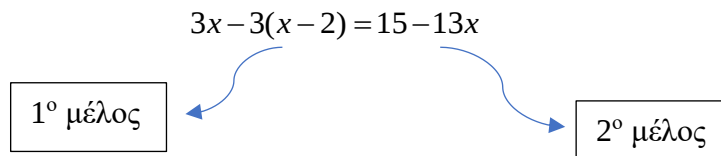
Παράδειγμα εξίσωσης 2^{ου} βαθμού : $3x^2 + 2(4x - 12) = 13 + 2x$

Σημείωση

Όλες οι παραπάνω εξισώσεις περιέχουν έναν άγνωστο. Εμείς φέτος θα ασχοληθούμε κυρίως με εξισώσεις 1^{ου} βαθμού.

Τι πρέπει να γνωρίζουμε για τις εξισώσεις;

Κάθε εξίσωση αποτελείται από δύο μέλη.



Στην προκειμένη περίπτωση το 1^ο μέλος είναι : $3x - 3(x - 2)$ και το δεύτερο μέλος : $15 - 13x$.

Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης λέμε τον αριθμό εκείνο που όταν μπει στη θέση της μεταβλητής μας τότε την επαληθεύει.

Για παράδειγμα :

$$x + 2(x - 2) = 8 - 3x$$

$$2 + 2(2 - 2) = 8 - 3 \cdot 2$$

$$2 = 8 - 6$$

$$2 = 2, \text{ που ισχύει!}$$

Άρα το 2 είναι η λύση της συγκεκριμένης εξίσωσης.

Μία εξίσωση δεν είναι υποχρεωτικό να έχει πάντα λύση. Άρα, λοιπόν, τις εξισώσεις τις διαχωρίζουμε στις εξής κατηγορίες, σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα.

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Αν } a \neq 0 \text{ μοναδική λύση : } x = \frac{b}{a} \\ \text{Αν } a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \text{ τότε } 0x = 0 \text{ ταυτότητα ή αόριστη ή άπειρες λύσεις} \\ b \neq 0, \text{ τότε } 0x = b \text{ αδύνατη} \end{cases} \end{cases}$$

Μεθοδολογία επίλυσης α' βαθμού εξίσωσης – χωρίς κλάσματα.

Βήματα

- ✓ Αν έχουμε παρενθέσεις τότε τις «βγάζουμε», με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
- ✓ Μετά χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους, μεταφέροντας στο ένα μέλος τους αγνώστους και στο άλλο τους γνωστούς.

Σημείωση : όταν μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζει το πρόσημό του!

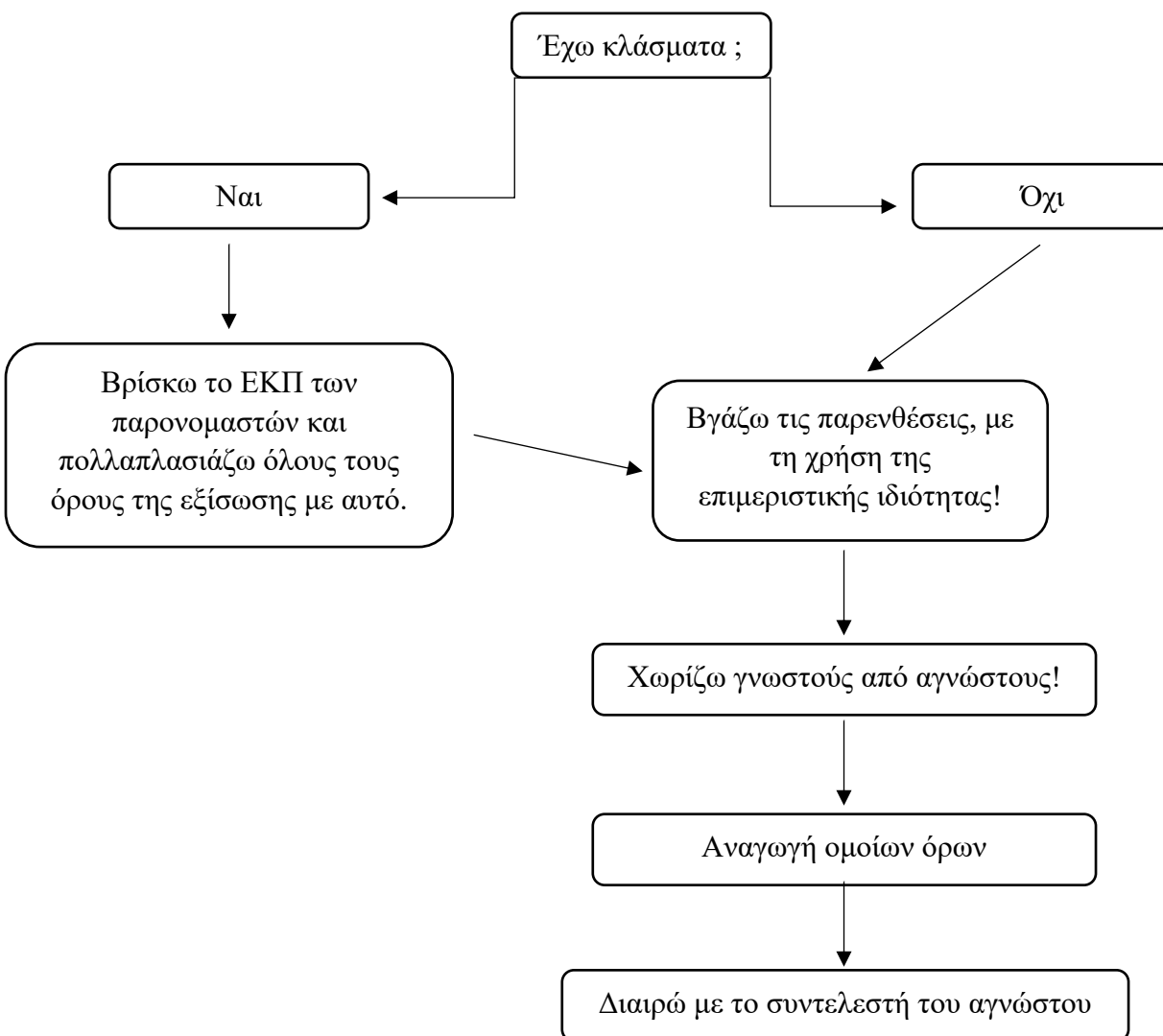
Συνήθως βάζουμε τους αγνώστους στο 1ο μέλος και τους γνωστούς στο 2ο.

- ✓ Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- ✓ Τέλος, διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.
- ✓ Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $0x=0$ τότε η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα ή έχει άπειρες λύσεις.
- ✓ Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $0x=\beta$, με $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $a \cdot x = \beta$, με $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μία μόνο λύση την $x = \frac{\beta}{a}$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι πάντα σε απλοποιημένη μορφή.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Σε σχεδιάγραμμα



Στο παραπάνω σχεδιάγραμμα παρατηρούμε ότι αν έχουμε κλασματική εξίσωση τότε απλά «μπαίνει» άλλο ένα βήμα στη μεθοδολογία μας.

Μεθοδολογία επίλυσης α' βαθμού εξίσωσης – με κλάσματα.

Βήματα

- ✓ Αν έχουμε παρονομαστές, τότε με τη βοήθεια του ΕΚΠ τους απαλείφουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ.
- ✓ Στη συνέχεια αν μας έχουν μείνει παρενθέσεις τότε τις βγάζουμε κάνοντας τις πράξεις.
- ✓ Μετά χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους, μεταφέροντας στο ένα μέλος τους αγνώστους και στο άλλο τους γνωστούς.

Σημείωση : όταν μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζει το πρόσημό του!

Συνήθως βάζουμε τους αγνώστους στο 1ο μέλος και τους γνωστούς στο 2ο.

- ✓ Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- ✓ Μετά διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου
- ✓ Και τέλος κάνουμε τις απλοποιήσεις και βρίσκουμε την τιμή του αγνώστου.
- ✓ Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $0x=0$ τότε η εξίσωση είναι αόριστη.
Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $0x=a$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι της μορφής $a \cdot x = \beta$, με $a \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μία μόνο λύση την $x = \frac{\beta}{a}$.

Λυμένες Ασκήσεις

Εφαρμογή

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$5(x-3) - 2(x+4) = x-7$$

Βγάζω τις παρενθέσεις, με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας!

$$5x-15-2x-8 = x-7$$

Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους!

$$5x-2x-x = -7+8+15$$

Αναγωγή ομοίων όρων

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

Διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου

$$x = 8$$

Απλοποίηση τελικού αποτελέσματα

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Εφαρμογή

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$\frac{x+1}{2} - \frac{2x-4}{6} = \frac{2x-1}{3} \xRightarrow{\text{Ε.Κ.Π}(2,3)=6}$ $\cancel{6}^3 \cdot \frac{x+1}{2} - \cancel{6}^1 \cdot \frac{2x-4}{6} = \cancel{6}^2 \cdot \frac{2x-1}{3} \Rightarrow$	Βρίσκω το ΕΚΠ των παρονομαστών και πολλαπλασιάζω όλους τους όρους της εξίσωσης με αυτό.
$3 \cdot (x+1) - 1 \cdot (2x-4) = 2 \cdot (2x-1) \Rightarrow$	Βγάζω τις παρενθέσεις, με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας!
$3x + 3 - 2x + 4 = 4x - 2 \Rightarrow$	Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους!
$3x - 2x - 4x = -2 - 3 - 4 \Rightarrow$	Αναγωγή ομοίων όρων
$\left. \begin{array}{l} -3x = -9 \Rightarrow \\ x = \frac{-9}{-3} \Rightarrow \end{array} \right\}$	Διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου
$x = 3$	Απλοποίηση τελικού αποτελέσματα

Άσκηση 1/σελ. 20 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι η λύση της εξίσωσης:

α) $-2x + 3 = 21$ $x = -7$

αντικαθιστούμε στην εξίσωση το $x = -7$ και αν καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει τότε είναι λύση της εξίσωσης

άρα $-2(-7) + 3 = 21$

$+14 + 3 = 21$

$+17 = 21$ που δεν ισχύει άρα δεν είναι λύση της εξίσωσης το -7

β) $3x + 5 = 7,5$ $x = 0,5$

$3 \cdot 0,5 + 5 = 7,5$

$1,5 + 5 = 7,5$

$6,5 = 7,5$ που δεν ισχύει άρα δεν είναι λύση της εξίσωσης το $0,5$

γ) $-3x + 4 = 7x - 6$ $x = 1$

$-3 \cdot 1 + 4 = 7 \cdot 1 - 6$

$-3 + 4 = 7 - 6$

$+1 = +1$ που ισχύει άρα το 1 είναι λύση της εξίσωσης.

Άσκηση 2/σελ. 20 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2x + 21 = 4 + x - 5$

$$2x - x = -21 + 4 - 5$$

$$x = -22$$

β) $-9 + 7y + y = 1 - 2y$

$$7y + y + 2y = 1 + 9$$

$$10y = 10$$

$$\frac{10y}{10} = \frac{10}{10}$$

$$y = 1$$

γ) $3t - 3(t + 1) = t + 2(t + 1) + 1$

$$3t - 3t - 3 = t + 2t + 2 + 1$$

$$3t - 3t - t - 2t = +3 + 2 + 1$$

$$-3t = +6$$

$$\frac{-3t}{-3} = \frac{+6}{-3}$$

$$t = -2$$

Άσκηση 3/σελ. 20 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$

$$8x + 4 - 6x + 6 = 3x + 6$$

$$8x - 6x - 3x = -4 - 6 + 6$$

$$-1x = -4$$

$$\frac{-1x}{-1} = \frac{-4}{-1}$$

$$x = +4$$

β) $3(y + 1) + 2(y - 4) = 2y - (y - 6)$

$$3y + 3 + 2y - 8 = 2y - y + 6$$

$$3y + 2y - 2y + y = -3 + 8 + 6$$

$$4y = 11$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{11}{4}$$

$$y = \frac{11}{4}$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

$$\gamma) 6(\omega + 2) + 3 = 3 - 2(\omega - 4)$$

$$6\omega + 12 + 3 = 3 - 2\omega + 8$$

$$6\omega + 2\omega = 3 + 8 - 12 - 3$$

$$8\omega = -4$$

$$\frac{8\omega}{8} = \frac{-4}{8}$$

$$\omega = -\frac{1}{2}$$

Άσκηση 3/σελ. 20 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$a) \frac{2x+3}{2} = \frac{3x-5}{4} \Leftrightarrow$$

$$4 \frac{2x+3}{2} = 4 \frac{3x-5}{4} \Leftrightarrow$$

$$2(2x+3) = 1(3x-5) \Leftrightarrow$$

$$4x+6 = 3x-5 \Leftrightarrow$$

$$x = -11$$

$$\beta) \frac{7x-6}{3} = \frac{5x+2}{4} \Leftrightarrow$$

$$12 \frac{7x-6}{3} = 12 \frac{5x+2}{4} \Leftrightarrow$$

$$4(7x-6) = 3(5x+2) \Leftrightarrow$$

$$28x-24 = 15x+6 \Leftrightarrow$$

$$28x-15x = +24 + 6 \Leftrightarrow$$

$$13x = +30 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{30}{13}$$

$$\gamma) \frac{2(x-1)-2}{4} = \frac{1-3x}{4} \Leftrightarrow$$

$$4 \frac{2(x-1)-2}{4} = 4 \frac{1-3x}{4} \Leftrightarrow$$

$$2(x-1)-2 = 1-3x \Leftrightarrow$$

$$2x-2-2 = 1-3x \Leftrightarrow$$

$$2x+3x = 1+2+2 \Leftrightarrow$$

$$5x = 5 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Άλυτες Ασκήσεις

1.35 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

	Άγνωστος	Άγνωστοι όροι	Γνωστοί όροι	1 ^ο μέλος	2 ^ο μέλος
$3x+2=2x-3$					
$4x-1=3x+2$					
$12-\beta=7-2\beta$					
$7-\frac{1}{2}\delta=2\delta+4$					
$4\kappa-2\kappa=\kappa-7$					

1.36 Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς

- i) 0, 2, 8, 12 είναι λύσεις της εξίσωσης $1+x+3=4+x$
- ii) 3, 4, 5, 6 είναι λύσεις της $x+10=105$
- iii) 2, 3, 4, 7, 8, 9, 102 είναι λύσεις της $0 \cdot x=0$
- iv) 3, 4, 7, 8, 12, 18 είναι λύσεις της $0 \cdot x=18$

1.37 Στη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα να χαρακτηρίσετε την αντίστοιχη εξίσωση ως αόριστη ή αδύνατη.

$0 \cdot x = 18$	
$x-3 = x+7$	
$3x+2x+1= 5x+1$	
$8x+7= 8x+(3 \cdot 3 + 1)$	
$2x-1= 4 \cdot \frac{1}{2} x+1$	
$0 \cdot x = 0$	

1.38 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις επαληθεύονται από τους αντίστοιχους αριθμούς :

- i) $x+6=-2x+15$ από τον $x=3$
- ii) $\frac{2\omega+11}{5}-\frac{\omega+1}{2}=1-\frac{\omega-3}{5}$ από τον $\omega=-1$
- iii) $5(\phi+3)-3(2\phi+1)=-\phi+2(-\phi-1)-1$ από τον $\phi=0$
- iv) $0,375x-1,875=0,12x+1,185$ από τον 12

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

$$v) \frac{x}{3} - \frac{(4x-7)(3x-5)}{15} = \frac{2}{5} - \frac{(4x-9)(x-1)}{5} \text{ από τον } x=2$$

1.39 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\frac{3\alpha-7\beta}{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$3\alpha - 3x = 7\beta.$$

1.40 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i) $2x = 4$
- ii) $6x = 3$
- iii) $2x = 0$
- iv) $4x = 32$
- v) $-7x = 2$
- vi) $-x = 10$
- vii) $5x = -25$
- viii) $4 + x = 34$
- ix) $57 - x = 17$
- x) $6 + x = 106$
- xi) $106 - x = 6$
- xii) $4x + 3 = 7$
- xiii) $-2x + 4 = 0$
- xiv) $5x + 7 = -3$
- xv) $-7x + 2 = 40$
- xvi) $-3x + 4 = 10$
- xvii)

1.41 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i) $-7x + 2 = 3x + 2$
- ii) $3x - 2 = 2x + 8$
- iii) $2\omega - 4 = 3\omega - 4$
- iv) $4\phi - 3 = -3 + \phi$
- v) $7x - 13 = 8x - 2x$
- vi) $27 - 3x = 9 - 27$
- vii) $1,5\kappa - 2,3 = -2,3 + 4\kappa$
- viii) $-y + 2 = -2y + 0,5$
- ix) $9x + 1 - 2x = 100 - 12x - 31 + x$
- x) $13x - 54 + 12x - 36 = 18x + 50 - 7x$
- xi) $4,6 + z = 5,6 - 3z$
- xii) $4x + 3 = 2x + 17$
- xiii) $x + 1 = 2x + 2$
- xiv) $5x + 6 = 3x - 8$
- xv) $9x + 8 - 2x = 3x + 1$

1.42 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i) $3(x+4) = 15$
- ii) $-5(-2x+1) = -45$
- iii) $2(3x+2) = 4 - x$
- iv) $3(x-7) = 2(x+1) - 16$

$$v) 13x - 8(2x - 1) + 7 = 17x + 5(2 - x) - 14x - 4$$

$$vi) 3(8 - 2x) + 7 = 8x + 5(3x - 6) + 25,04$$

1.43 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$i) 3 + 2x = 4(2 + 3x)$$

$$ii) 2(x + 3) - (x - 5) = x + 7$$

$$iii) 3(x + 5) - 2(4x + 3) + (6x - 5) = x + 6$$

$$iv) 5(x + 5) - 3(4 - x) = 5x + 2$$

$$v) 5 + 6(x + 3) = 4(x + 1) - 7$$

$$vi) 10x + 4(-3x + 1) - 1 = 2x - (4x + 1)$$

$$vii) x + 3 + 3(x + 2) = 9 - 2x$$

$$viii) 16(x + 1) + 1 - 2(3 - 2x) = -3(x + 8)$$

1.44 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$i) 3x - 5 = x + 3$$

$$ii) -8x + 9 = -3x + 34$$

$$iii) 5 - 7w + 2w = 12 - 2w - w - 15$$

$$iv) 5y + 3 - 8y = -y + 31 + 2y$$

$$v) 3x + 2(x + 1) = x - 4$$

$$vi) 5 - 2(x - 3) = x - (2x - 8)$$

$$vii) 5y - 3(2 - y) = 2y - 8$$

$$viii) 3 - (x + 1) \cdot 2 = 7 - (x + 2) \cdot 4$$

$$ix) 9 - (x - 5) \cdot 2 = 11 - (4 - x)$$

$$x) 5 - [x - 2(x - 1)] = 4(x - 3)$$

1.45 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$i) 4x - [7(x - 1) - 3] = 5$$

$$ii) 2[4(x - 3) - (3 - x)] = 2(x + 2) - 5(5 - x)$$

$$iii) 4 - 2[x - 3 - (5 - x) \cdot 2] = x - 3(x + 2)$$

$$iv) 4[2(x - 1) - (4x - 9)] = 4 - 17(x - 3)$$

$$v) 15[7 - x - 2(4 - x)] = 2[x + 7 - 2(x + 3)]$$

$$vi) -5 - 3[4 - 3(x + 1)] = 2[-2(1 - x) - (1 - 2x)]$$

$$vii) 7[4x - 5(x - 5)] - 2x = 2[3(x - 8) - 1]$$

1.46 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$i) 7x - 5\{x - [7 - 6(x - 3)]\} = 3x + 1$$

$$ii) x + 2 - \{x - 8 - 2[8 - 3(5 - x) - x]\} = 0$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

$$\text{iii)} x - \{3 + [x - (x + 3)]\} = 10$$

$$\text{iv)} 25x - 19 - [3 - (4x - 5)] = 3x - (6x - 5)$$

1.47 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{x}{7} = \frac{5}{20}$$

$$\text{ii)} \frac{x}{107} = \frac{1}{7}$$

$$\text{iii)} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\text{iv)} \frac{3x}{4} = 12$$

$$\text{v)} \frac{x}{2} = \frac{x+1}{3}$$

$$\text{vi)} \frac{2x-4}{2} = 5x$$

$$\text{vii)} x + 3 = -\frac{x}{4}$$

$$\text{viii)} 2x - 5 = \frac{4x-3}{5}$$

$$\text{ix)} \frac{2x-3}{2} = x - 5$$

$$\text{x)} \frac{3x+7}{15} = \frac{x-1}{5}$$

1.48 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i.} \quad \frac{5x}{2} - 8 = 6x - 22$$

$$\text{ii.} \quad 3x - \frac{2}{3}x = 6x - 22$$

$$\text{iii.} \quad \frac{y}{2} - \frac{y}{7} + \frac{y}{5} = 780$$

$$\text{iv.} \quad \frac{3x}{4} - \frac{8x}{13} + 14 = \frac{2x}{13}$$

$$\text{v.} \quad \frac{5x}{8} - \frac{7x}{12} + \frac{5}{6} = \frac{15x}{24} + 1 - \frac{13x}{8}$$

$$\text{vi.} \quad 19x + \frac{7x-2}{2} = 4x + \frac{35}{2}$$

$$\text{vii.} \quad \frac{5x-6}{5} - \frac{3x}{13} = \frac{x-4}{9}$$

$$\text{viii.} \quad \frac{10x-15}{5} = \frac{x-4}{2}$$

1.49 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i)} x - \frac{5x-12}{4} = 3 - \frac{x}{4}$$

$$\text{ii)} 2x - \frac{5x-12}{4} = 3 + \frac{3x}{4}$$

$$\text{iii)} \frac{1}{2}(x-2) - (x-3) = 1 - (x-2)$$

$$\text{iv)} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}(x+3) = -\frac{1}{6}x - \frac{3}{2}$$

$$\text{v)} \frac{3x+1}{2} - x = \frac{6x-4}{7}$$

$$\text{vi)} \frac{x+1}{3} = \frac{2x-9}{4} + \frac{1}{6}$$

1.50 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{x-6}{2} - \frac{4}{3} = \frac{x+1}{9} + 1$$

$$\text{ii)} \frac{3x-8}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7x+3}{10} - \frac{x}{2}$$

$$\text{iii)} \frac{x-7}{2} - \frac{1}{3} = 1 + \frac{x+9}{9}$$

$$\text{iv)} \frac{4-5x}{12} - \frac{3(x-1)}{3} = \frac{2x-6}{4} + 1$$

$$\text{v)} \frac{3x-5}{2} - \frac{4x-2}{5} = \frac{3(x-3)}{10} + \frac{x-20}{4}$$

$$\text{vi)} \frac{x+3}{2} - \frac{2(6x+4)}{3} = \frac{5(3x-5)}{6} + \frac{1}{2}$$

$$\text{vii)} \frac{4\alpha}{5} - 3 = \frac{7(\alpha-3)}{10} + \frac{4}{5}$$

$$\text{viii)} \frac{\alpha-2}{2} + \frac{\alpha-2}{4} + \frac{\alpha-2}{7} = \alpha - 5$$

$$\text{ix)} \frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{5}\left(x + \frac{4}{3}\right) + \frac{7}{2} = 0$$

$$\text{x)} 3 + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{x}{3}\right) - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(11 - \frac{x}{2}\right)$$

$$\text{xi)} \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\right) = \frac{x+2}{8}$$

$$\text{xii)} \frac{2}{5}\left(5 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{2x+1}{2} + 1\right) = \frac{x+2}{2} + 1$$

1.51 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x+1}{4} = \frac{x-3}{4} - 1$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

$$\text{ii)} \frac{6x-1}{2} + \frac{2x+3}{10} = \frac{16x+1}{5}$$

$$\text{iii)} \frac{2(x+1)}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x+2(x+2)}{6} - \frac{x}{3}$$

$$\text{iv)} \frac{x+5}{2} + 2 = \frac{2(x+7)+1}{10} - 8$$

$$\text{v)} 3\left(1 + \frac{2x}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right) = 9\left(\frac{4x-3}{6} - \frac{3}{2}\right) + 8$$

1.52 Αν $\alpha + \beta = 2$ να λύσετε τη εξίσωση

$$\frac{(\alpha + \beta)^2(x+1) - (\alpha + \beta)(x+1) + x+1}{\alpha + \beta + 1} = (\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta) + 1.$$

1.53 Να βρείτε τον ρητό a ώστε η εξίσωση $(a-3)x = 6$ να είναι αδύνατη.

1.54 Για ποιες τιμές των λ και μ , οι παρακάτω εξισώσεις είναι αόριστες ;

$$\text{i)} (\lambda - 1)x = \mu + 2$$

$$\text{ii)} (3\lambda + 1)x = \mu$$

$$\text{iii)} \lambda x - 1 = \mu - 3x$$

$$\text{iv)} \lambda x - \mu = 7x + 3\mu - 1$$

$$\text{v)} \frac{\lambda - 1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{x + 1}{3}$$

1.55 Δίνεται η εξίσωση $\alpha x + 5 = 3x - 7$.

a) Για ποια τιμή του α η εξίσωση είναι αδύνατη ;

b) Να βρείτε την τιμή του α , αν η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

c) Για $\alpha = 0$ να λύσετε την εξίσωση.

1.56 Αν η παράσταση $\frac{1}{2}x - 1$ είναι διπλάσια από την παράσταση $\frac{1}{3}x - 4$, να βρεθεί η τιμή κάθε παράστασης.

1.57 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

$$\text{i)} \frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$$

$$\text{ii)} \frac{x - \frac{2x+3}{9}}{8} - \frac{x - \frac{1}{3}}{2} = \frac{2x - \frac{5(x+3)}{6}}{4} - \frac{x+1}{3}$$

$$\text{iii)} \frac{\frac{3x-5}{2} - 1}{4} = \frac{4(2x-7)}{9} + \frac{3 - \frac{5(x-2)}{3}}{3} + \frac{13}{24}$$

$$\text{iv)} \frac{x+10}{3} - \frac{3}{5}(3x-4) + \frac{(3x-2)(2x-3)}{6} = x^2 - \frac{8}{15}$$

$$\text{v)} \left(x + \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) - (x+5)(x-3) - \frac{1}{4} = 0$$

1.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} (x-2)^2 - x^2 = 12$$

$$\text{ii)} (x+2)(x+3) - x^2 = 10$$

$$\text{iii)} (x+1)(x-2) - (x-3)(x+2) = 12$$

$$\text{iv)} (2x+1)(x-2) - 2x^2 + 10x = 20$$

$$\text{v)} (3x-2)(2x+1) + 2x - 2 = 6x^2 + 12$$

1.59 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

$$\text{i)} (\alpha-3)(\alpha+2) + (\alpha-3)(\alpha-5) = 2(\alpha+1)(\alpha-1)$$

$$\text{ii)} (3\omega+4)(4\omega-1) - (7\omega-2)(\omega+1) = (5\omega-3)(\omega-2) + 1$$

$$\text{1.60} \text{ Να λυθεί η εξίσωση } \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^{-2} - (-2)^{-1}(x-1) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 x - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 2^{-3}.$$

1.61 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{i)} \frac{2x-1}{3} - \frac{x-2}{6} = -2$$

$$\text{ii)} 3 - \frac{3-2x}{4} = \frac{1-x}{8} - 1$$

$$\text{iii)} 1 - \frac{1+3x}{2} = \frac{4-x}{10} + \frac{3}{2}$$

$$\text{iv)} -\frac{x+1}{2} - \frac{3x-1}{4} = 1$$

$$\text{v)} \frac{2x-1}{3} = \frac{x-5}{0}$$

$$\text{vi)} \frac{2(3x+4)}{7} = \frac{5+x}{3}$$

$$\text{vii)} \frac{6+2(x-1)}{4} = \frac{5-2x}{2}$$

$$\text{viii)} w - \frac{3(w+4)}{10} = 2w - \frac{2(2w+9)}{15}$$

$$\text{ix)} \frac{2(w+2)}{3} - \frac{20-w}{9} = \frac{5w-1}{18} - \frac{3w-13}{6} - 1$$

$$\text{x)} 1 - \left(\frac{y-5}{6} + 2\right) = 3 - \left(1 - \frac{y-7}{9}\right)$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

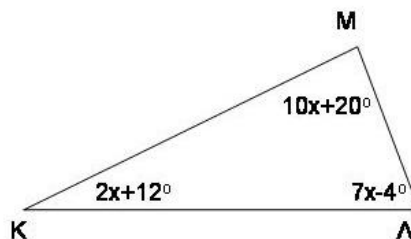
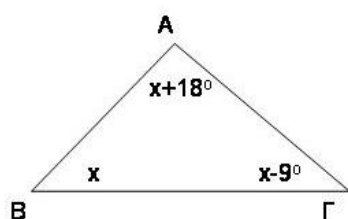
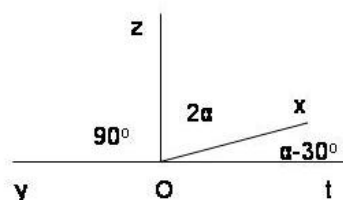
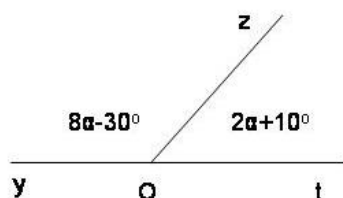
1.62 Αν λ είναι η τιμή της παράστασης $(-1)^{100} + (-1)^{101} + (-1)^{102}$, να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\lambda\chi = 1$

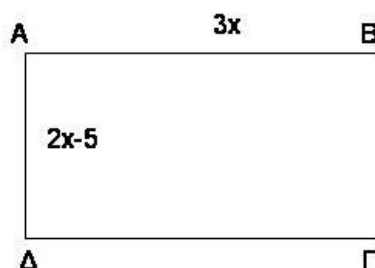
ii) $(\lambda + 1)\chi = 0$

iii) $(\lambda + 1)\chi = \lambda$

1.63 Με τη βοήθεια εξισώσεων, να υπολογίσετε τις παρακάτω γωνίες:

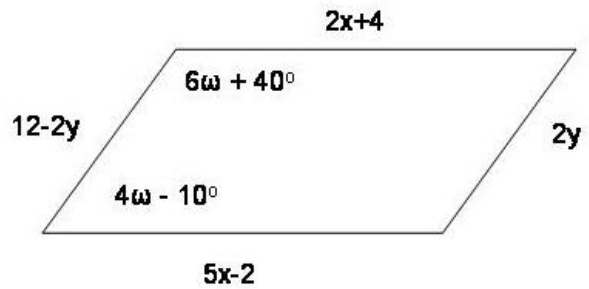


1.64 Αν η περίμετρος του διπλανού ορθογωνίου είναι 140 cm, να βρείτε τις διαστάσεις του.



1.65 Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\alpha = 3x + 7$, $\beta = 5x + 1$ και $\gamma = x + 15$. Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές να βρείτε το x και την περιμέτρώ του.

1.66 Στο παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε τα x , y και ω .



1.67 Αν ο αριθμός α είναι η ρίζα (λύση) της εξίσωσης

$$\frac{3x-1}{5} - 2(x-1) = \frac{1-x}{2} - \frac{2x+1}{10},$$

να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 3\alpha - 2\alpha + (\alpha + 1)$$

$$B = \frac{3}{\alpha} - \frac{\alpha+1}{3} + (\alpha-2)^{3\alpha}$$

1.68 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-2)(x+1) = 0$

β) $(2x-3)(2+x) = 0$

γ) $(4x+3)(5-3x) = 0$

1.69 Στην εξίσωση $3(2x+\dots)-4=5x-7$ ένας αριθμός λείπει! Βρείτε τον αριθμό αν γνωρίζετε ότι λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 7.

Τεστ Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές και (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α. Η εξίσωση $14x=0$ έχει λύση τον αριθμό 0 ()

β. Η εξίσωση $0x=25$ είναι ταυτότητα ()

γ. Η εξίσωση $0x=0$ είναι αδύνατη ()

δ. Με βάση την επιμεριστική ιδιότητα είναι σωστές οι παρακάτω προτάσεις;

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad ()$$

$$\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma \quad ()$$

ε. Πότε λέμε ότι μία εξίσωση είναι ταυτότητα και πότε λέμε ότι είναι αδύνατη;

Μονάδες 2.5

Άσκηση 2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $13x+15=0$

β) $2x+4=2(x-1)$

γ) $x-2(x-1)=3-(x-5)$

δ) $12x+7=2x-11$

ε) $1-(5x-1)=x-6(x-2)$

Μονάδες 7.5

Άσκηση 3

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\frac{x}{2}-1=x$

β) $\frac{x-2}{3}-\frac{x-2}{6}=\frac{x}{2}$

Μονάδες 5

Άσκηση 4

Αν η μεταβλητή β είναι ίση με 0 να λύσετε την εξίσωση $\beta x+1+\frac{x-2}{2}-\frac{3x-1}{4}=x$

.

Μονάδες 5

Διάρκεια ΤΕΣΤ : 30 λεπτά

A.1.3 Επίλυση Τύπων

Διάφορα φυσικά μεγέθη, που συμβολίζονται με μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους με τύπους που τους συναντάμε και στη Φυσική και στη Γεωμετρία. Όταν έναν τύπο τον λύσουμε ως προς μία μεταβλητή που θεωρείται ως άγνωστος τότε κάνουμε επίλυση του τύπου ως προς τον άγνωστο αυτό.

Για παράδειγμα ο τύπος της πυκνότητας είναι

$$\rho = \frac{m}{V}$$

αν θεωρήσουμε ως γνωστά τα μεγέθη m = μάζα του σώματος και το ρ = πυκνότητα του σώματος τότε για να βρούμε τον όγκο :

Κάνουμε χιαστί: $\rho \cdot V = m$

Και διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου :

$$\frac{\rho \cdot V}{\rho} = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Για παράδειγμα ο τύπος του εμβαδού ενός τριγώνου είναι $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$

Αν γνωρίζουμε τη βάση β και το εμβαδόν E του τριγώνου και ζητάμε το ύψος υ τότε:

Κάνουμε χιαστί και έχουμε:

$2 \cdot E = \beta \cdot \upsilon$ και διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου που είναι το β

$$\frac{2E}{\beta} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{\beta}$$

$$\frac{2E}{\beta} = \upsilon$$

Δηλαδή αν την διαβάσουμε ανάποδα έχουμε τη σχέση: $\upsilon = \frac{2E}{\beta}$

Άλυτες Ασκήσεις

1.70 Να επιλυθεί ο τύπος $F = 1,8C + 32$ ως προς C .

1.71 Να επιλυθεί ο τύπος $U = U_0 + \gamma t$ ως προς γ .

1.72 Να επιλυθεί ο τύπος $Q = mc\theta$ ως προς m .

1.73 Να επιλυθεί ο τύπος $R = e \cdot h + p$

α) ως προς e ,

β) ως προς p ,

γ) ως προς h .

1.74 Να λύσετε τους παρακάτω τύπους ως προς την μεταβλητή που ζητείται:

ι) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, ως προς h και r^2

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

ii) $A = 2\pi r(r + h)$, ως προς h

$$\frac{Wu^2}{32r}$$

iii) $P = \frac{Wu^2}{32r}$, ως προς r και u^2

iv) $Pt = \frac{W}{g}(u - y)$, ως προς W και y

v) $(D - a)(d - a) = k^2$, ως προς d

vi) $\frac{1-x}{x-m} = \frac{a}{b}$, ως προς x

vii) $\frac{k-1}{k+1} = \frac{a}{b}$, ως προς k

viii) $l = l_o[1 + a(\theta_2 - \theta_1)]$, ως προς θ_1

ix) $I = \frac{Ne}{R + Np}$, ως προς N

1.75 Αν $S = 4xy + 2y^2$ και $V = xy^2$, να εκφράσετε το V με τους όρους S, y .

1.76 Αν $\pi\rho + 2\rho = \gamma$ και $2\rho = \delta$, να εκφράσετε το δ με τους όρους π και γ .

1.77 Ο μέσος όρος M τεσσάρων αριθμών α, β, γ και δ , δίνεται από τον τύπο

$$M = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4}.$$

Αν είναι $M = 14, \alpha = 15, \beta = 20$ και $\delta = 12$, να υπολογίσετε τον γ .

Α.1.4 Επίλυση Προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

Μεθοδολογία

Διαβάζουμε πολύ καλά το πρόβλημα για να βρούμε ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα.

Στην συνέχεια θέτουμε με μεταβλητή το μέγεθος που θεωρείται άγνωστο.

Μετά εκφράζουμε όλα τα δεδομένα του προβλήματος με την βοήθεια της μεταβλητής αυτής.

Κατασκευάζουμε την εξίσωση ανάλογα με το πρόβλημα.

Τέλος, ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε είναι λογική.

Για παράδειγμα, αν ένα μήκος ενός τοίχου προκύψει αρνητικός αριθμός δεν μπορούμε να το δεχτούμε ως λύση γιατί στην πραγματικότητα το μήκος είναι πάντα θετικός αριθμός.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 30 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, αν η μια είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση

Έστω x η μικρότερη οξεία γωνία του τριγώνου, άρα η άλλη γωνία είναι η $2x$

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 μοίρες

$$\text{Άρα } x + 2x + 90^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ - 90^\circ$$

$$3x = 90^\circ$$

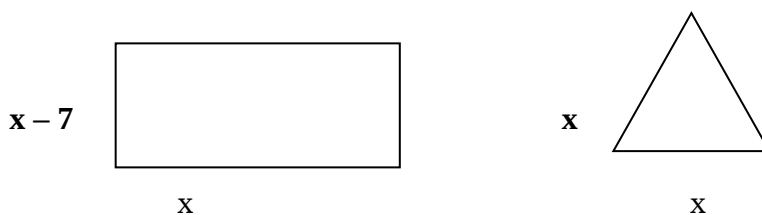
$$\frac{3x}{3} = \frac{90^\circ}{3}$$

$$x = 30^\circ$$

$$\text{Άρα η μια οξεία γωνία είναι } 30^\circ \text{ και η άλλη γωνία είναι } 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Άσκηση 2/σελ. 30 (Βιβλίο Οργανισμού)

Στα παρακάτω σχήματα το ορθογώνιο και το τρίγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.



Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi_1 = x + x - 7 + x + x - 7 = 4x - 14$$

Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

$$\Pi_2 = x + x + x = 3x$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Πρέπει:

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

$$4x - 14 = 3x$$

$$4x - 3x = + 14$$

$$x = 14$$

Άρα το ορθογώνιο έχει μήκος 14 μονάδες μήκους και πλάτος $14 - 7 = 7$ μονάδες μήκους.

Άσκηση 3/σελ. 30 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ένας πατέρας είναι 44 ετών και ο γιός του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιού;

Λύση

Έστω ότι μετά από x έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου του

Τότε η ηλικία του πατέρα θα είναι $44 + x$

Και η ηλικία του γιου θα είναι $8 + x$

Όμως ξέρουμε ότι η ηλικία του πατέρα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου

$$44 + x = 3 \cdot (8 + x)$$

$$44 + x = 24 + 3x$$

$$x - 3x = 24 - 44$$

$$-2x = -20$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-20}{-2}$$

$x = + 10$. Άρα μετά από 10 χρόνια.

Άλυτες Ασκήσεις

1.78 Σ' ένα τεστ Φυσικής με 10 ερωτήσεις, κάθε σωστή απάντηση παίρνει 5 πόντους, ενώ η κάθε λανθασμένη απάντηση -3 πόντους. Ο Γιώργος πήρε 26 πόντους. Μπορείτε να βρείτε πόσες ερωτήσεις ήταν σωστές και πόσες λανθασμένες;

1.79 Σε μία οικογένεια η μητέρα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο της. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από του γιου. Να βρείτε πόσο χρονών είναι η μητέρα και ο γιος.

1.80 Σ' ένα hostel υπάρχουν 50 δωμάτια, από τα οποία μερικά είναι τρίκλινα και μερικά δίκλινα. Όταν είναι πλήρες έχει 120 άτομα. Να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα.

- 1.81** Η Ευφροσύνη έγραψε 15 και 19 σε δύο διαγωνίσματα Φυσικής. Να βρείτε τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 17 και μετά να βρείτε αν μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19.
- 1.82** Ένας μαθητής είναι 14 ετών και ένας καθηγητής είναι 31 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του καθηγητή θα είναι διπλάσια από την ηλικία του μαθητή;
- 1.83** Έχουμε 13 κέρματα των 20 και των 50 λεπτών, που η συνολική τους αξία είναι 5 ευρώ. Πόσα είναι τα κέρματα των 20 λεπτών και πόσα τα κέρματα των 50 λεπτών;
- 1.84** Σε μία οικογένεια η μητέρα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο της. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από του γιου. Να βρείτε πόσο χρονών είναι η μητέρα και ο γιος.
- 1.85** Η ηλικία του πατέρα είναι τριπλάσια της ηλικίας της κόρης. Σε 10 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια της κόρης. Πόσων ετών είναι ο πατέρας και πόσων ετών είναι η κόρη;
- 1.86** Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες μαζί;
- 1.87** Να γράψετε μια εξίσωση η οποία να σας επιτρέπει να βρείτε τον αριθμό x σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) Το τριπλάσιο του x είναι 21.
 - β) Το γινόμενο του x επί 3,2 είναι 9,4.
 - γ) Το διπλάσιο του x είναι 15.
 - δ) Αν αφαιρέσουμε το x από το 8 θα βρούμε -9.
- 1.88** Να παραστήσετε συμβολικά με τη βοήθεια μιας μεταβλητής 4 διαδοχικούς φυσικούς. Αν οι παραπάνω αριθμοί έχουν άθροισμα 180 να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.
- 1.89** Να βρείτε έναν αριθμό που το τριπλάσιό του αυξημένο κατά 20 γίνεται ίσο με το εξαπλάσιο του ελαττωμένο κατά 25.
- 1.90** Να βρείτε έναν αριθμό που το επταπλάσιό του αν ελαττωθεί κατά το μισό του να δίνει τον αριθμό αυτό αυξημένο κατά 22.
- 1.91** Το άθροισμα δύο διαδοχικών ακεραίων είναι 133. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

- 1.92** Η μεγάλη πλευρά ενός ορθογωνίου παρ/μου είναι τετραπλάσια της μικρής πλευράς. Αν η περίμετρος του είναι 150m, να υπολογιστούν οι πλευρές του.
- 1.93** Να εκφράσετε τα παρακάτω προβλήματα με εξισώσεις και να τα λύσετε.
i) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 είναι ίσο με 20. Ποιος είναι ο αριθμός;
ii) Δύο φυσικοί αριθμοί που διαφέρουν κατά 4 έχουν άθροισμα 14. Ποιοι είναι οι αριθμοί;
- 1.94** Ο αριθμός 100 να χωριστεί σε δύο αριθμούς τέτοιους, ώστε ο μεγαλύτερος αυξημένος κατά 5 να ισούται με το εξαπλάσιο του μικρότερου.
- 1.95** Να βρείτε δύο αριθμούς των οποίων το άθροισμα να κάνει 51, τέτοιοι ώστε το $\frac{1}{3}$ του πρώτου και το $\frac{1}{5}$ του δεύτερου να κάνουν τον αριθμό 21.
- 1.96** Σ' ένα διψήφιο αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι κατά 3 μονάδες μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων. Αν τα ψηφία του αναστραφούν τότε προκύπτει ένας αριθμός κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Ποιος είναι ο διψήφιος αριθμός;
- 1.97** Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μια διαφέρει από την άλλη κατά 60 μοίρες να βρείτε τις γωνίες αυτές.
- 1.98** Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου αν η μια οξεία γωνία είναι πενταπλάσια από την άλλη.
- 1.99** Να βρείτε έναν αριθμό που αν προστεθεί στα $\frac{2}{3}$ του εαυτού του γίνεται ο αριθμός 125.
- 1.100** Μια τηλεόραση και ένα βίντεο κοστίζουν 1.800 ευρώ. Η τιμή της τηλεόρασης είναι εντεκαπλάσια από τη τιμή του βίντεο. Πόσο κοστίζει το καθένα;
- 1.101** Αν από το διπλάσιο ενός αριθμού αφαιρέσουμε 10 και διαιρέσουμε το αποτέλεσμα δια 4, θα βρούμε τα $\frac{2}{5}$ του αρχικού αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός;
- 1.102** Το πλάτος ενός ορθογωνίου είναι ίσο με το ένα τρίτο του μήκους του και η περίμετρός του είναι 204 m. Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.
- 1.103** Σ' ένα σκαληνό τρίγωνο η μεσαία πλευρά έχει διαφορά 2 cm από καθεμιά από τις άλλες δύο. Η περίμετρος του τριγώνου είναι 81 cm. Να βρεθούν οι πλευρές του.

- 1.104** Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι 18° μικρότερη από τη γωνία της βάσης. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.
- 1.105** Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι το $\frac{1}{4}$ της κάθε μιας από τις γωνίες που πρόσκεινται στη βάση. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.
- 1.106** Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 13. Η μια πλευρά είναι κατά 2,5 μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρείτε το εμβαδόν του.
- 1.107** Να βρείτε τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ αν η γωνία Β ισούται με το $\frac{1}{2}$ της γωνίας Α και η Γ ισούται με τα $\frac{3}{8}$ της γωνίας Α.
- 1.108** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μια γωνία του είναι τα $\frac{4}{5}$ κάποιας άλλης γωνίας του. Να βρείτε τις γωνίες του.
- 1.109** Ένας πατέρας είναι σήμερα 50 ετών και έχει μια κόρη 28 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία της κόρης του;
- 1.110** Οι ηλικίες δύο αδερφών είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Αν στο γινόμενο των ηλικιών τους αφαιρεθεί η ηλικία του μεγαλύτερου, βρίσκεται ο αριθμός 143. Να βρεθούν οι ηλικίες τους.
- 1.111** Αν μετά από 19 χρόνια έχω τριπλάσια ηλικία από αυτήν που είχα πέρυσι πόσων ετών είμαι σήμερα;
- 1.112** Ένα πεπόνι ζυγίζει 1 κιλό και μισό πεπόνι. Πόσο είναι το βάρος του;
- 1.113** Μια ομάδα ορειβατών από 12 άτομα έχει τροφή για 15 ημέρες. Ύστερα από 5 ημέρες συναντούν άλλους 3 ορειβάτες που δεν έχουν τροφή. Για πόσες ημέρες θα τους φθάσουν τα τρόφιμα;
- 1.114** Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 12 ώρες. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 8 ώρες. Μια αντλία αδειάζει την ίδια δεξαμενή σε 6 ώρες. Αν ανοίξουμε ταυτόχρονα τις δύο βρύσες και την αντλία σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή;
- 1.115** Πόσες κότες και πόσα πρόβατα έχει ένας χωρικός αν όλα τα ζώα έχουν 43 κεφάλια και 122 πόδια;
- 1.116** Σε μία γιορτή, αρχικά, οι άντρες ήταν τριπλάσιοι από τις γυναίκες. Μετά από λίγο έφυγαν τέσσερα ζευγάρια και οι άντρες που έμειναν ήταν επταπλάσιοι από τις γυναίκες. Πόσοι ήταν αρχικά οι άντρες και πόσες ήταν οι γυναίκες;

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

- 1.117** Οι σημερινές ηλικίες του Κώστα και του Θοδωρή έχουν άθροισμα 60 έτη. Πριν 12 χρόνια η ηλικία του Κώστα ήταν διπλάσια από την ηλικία του Θοδωρή. Να βρείτε τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και του Θοδωρή.
- 1.118** Ένα ξενοδοχείο έχει 50 δωμάτια δίκλινα και τρίκλινα. Αν είναι πλήρης με 120 άτομα, πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

A.1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

Κάθε ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό που τον συμβολίζουμε με x, y, ω , κτλ ονομάζεται ανίσωση.

Ανάλογα με τη δύναμη στην οποία είναι υψωμένος ο άγνωστος η ανίσωση παίρνει διαφορετική ονομασία. Για παράδειγμα, αν ο άγνωστος μας είναι υψωμένος στην δύναμη 1, τότε η ανίσωσή μας ονομάζεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού. Αντίστοιχα, αν ο άγνωστος μας είναι υψωμένος στην δύναμη 2, τότε η ανίσωσή μας ονομάζεται ανίσωση 2^{ου} βαθμού.

Παράδειγμα ανίσωσης 1^{ου} βαθμού : $x + 2(x - 2) > 5 - 3x$

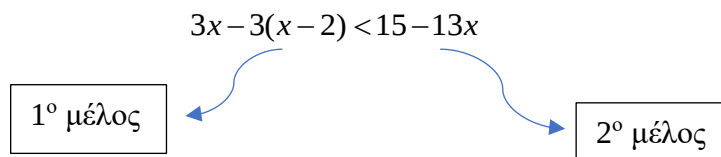
Παράδειγμα ανίσωσης 2^{ου} βαθμού : $3x^2 + 2(4x - 12) > 13 + 2x$

Σημείωση

Όλες οι παραπάνω ανισώσεις περιέχουν έναν άγνωστο. Εμείς φέτος θα ασχοληθούμε κυρίως με ανισώσεις 1^{ου} βαθμού.

Τι πρέπει να γνωρίζουμε για τις ανισώσεις;

Κάθε ανίσωση αποτελείται από δύο μέλη.



Στην προκειμένη περίπτωση το 1^ο μέλος είναι : $3x - 3(x - 2)$ και το δεύτερο μέλος : $15 - 13x$.

Λύση μιας ανίσωσης λέμε τον αριθμό εκείνο που όταν μπει στη θέση της μεταβλητής μας τότε την επαληθεύει.

Για παράδειγμα :

$$x + 2(x - 2) > 8 - 3x$$

$$3 + 2(3 - 2) > 8 - 3 \cdot 3$$

$$3 + 6 - 4 > 8 - 9$$

$$5 > -1, \text{ που ισχύει!}$$

Άρα το 3 είναι μία από τις λύσεις της ανίσωσης.

Μία ανίσωση δεν είναι υποχρεωτικό να έχει πάντα λύση. Άρα, λοιπόν, τις ανισώσεις τις διαχωρίζουμε στις εξής κατηγορίες, σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα.

$$a \cdot x \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Αν } a \neq 0 \text{ μοναδική λύση : } x > \frac{b}{a} \\ \text{Αν } a=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0, \text{ τότε } 0x \geq 0 \text{ ταυτότητα ή αόριστη ή άπειρες λύσεις} \\ b < 0, \text{ τότε } 0x \geq b \text{ αληθεύει για όλα τα } x \in \mathbb{R} \\ b > 0, \text{ τότε } 0x \geq b \text{ αδύνατη} \end{cases} \end{cases}$$

Όσον αφορά τις ανισώσεις έχουμε κάποιες ιδιότητες, που προκύπτουν ανάλογα τις πράξεις που εκτελούμε κάθε φορά.

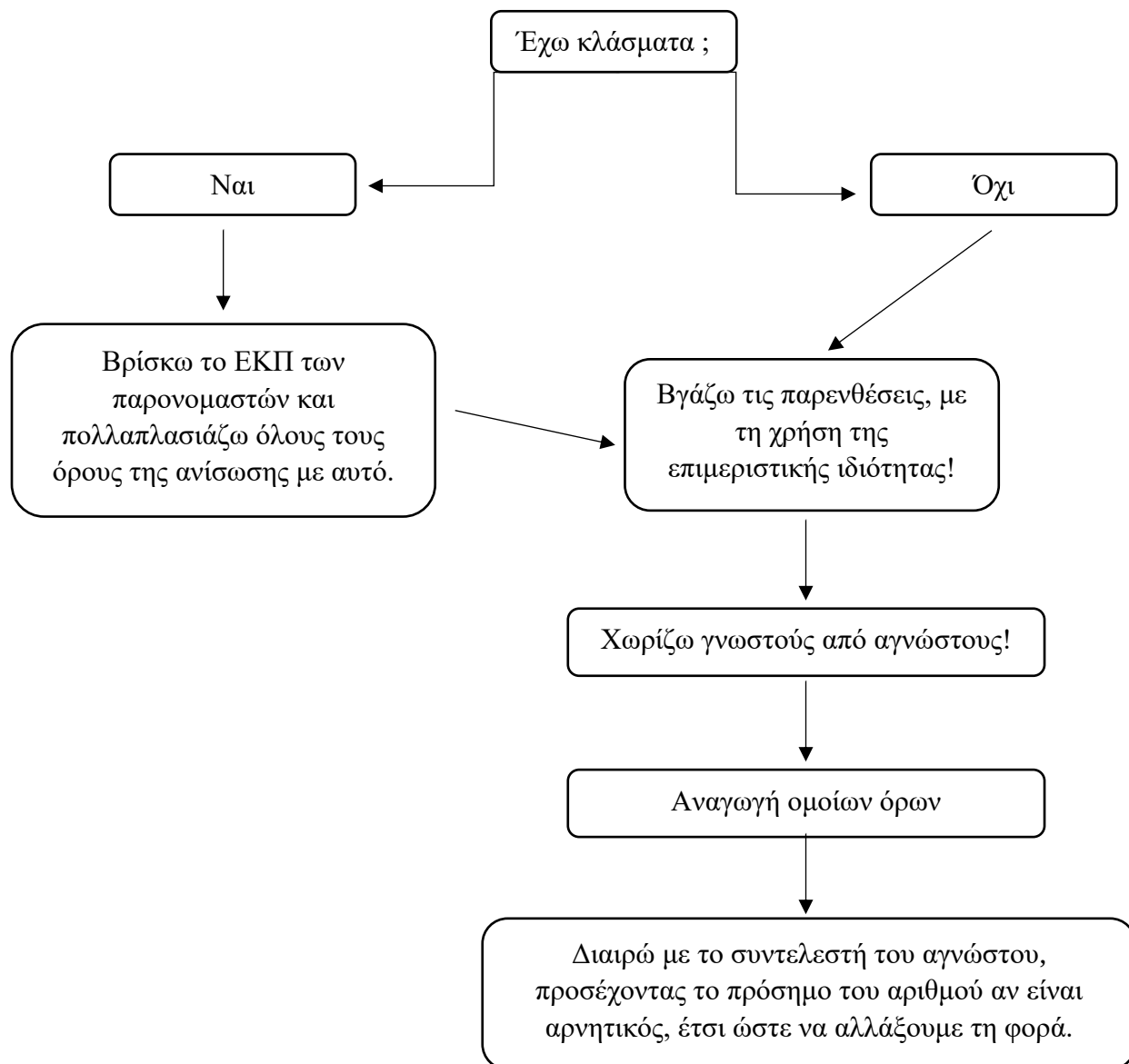
- ✓ Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει ανίσωση με την ίδια φορά.
- ✓ Αν και στα δύο μέλη μιας πολλαπλασιάσουμε με θετικό αριθμό τότε προκύπτει ανίσωση με την ίδια φορά.
- ✓ Αν και στα δύο μέλη μιας πολλαπλασιάσουμε με αρνητικό αριθμό τότε προκύπτει ανίσωση με αντίθετη φορά.
- ✓ Αν και στα δύο μέλη μιας διαιρέσουμε με θετικό αριθμό τότε προκύπτει ανίσωση με την ίδια φορά.
- ✓ Αν και στα δύο μέλη μιας διαιρέσουμε με αρνητικό αριθμό τότε προκύπτει ανίσωση με αντίθετη φορά.

Μεθοδολογία επίλυσης α' βαθμού ανίσωσης – χωρίς κλάσματα.

Ουσιαστικά όσον αφορά τη μεθοδολογία των ανισώσεων, τα βήματα της επίλυσης δεν αλλάζουν εκτός από το τελευταίο.

- ✓ Αν έχουμε παρενθέσεις τότε τις «βγάζουμε», με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.
- ✓ Μετά χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους, μεταφέροντας στο ένα μέλος τους αγνώστους και στο άλλο τους γνωστούς.
Σημείωση : όταν μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζει το πρόσημό του!
Συνήθως βάζουμε τους αγνώστους στο 1ο μέλος και τους γνωστούς στο 2ο.
- ✓ Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- ✓ Τέλος, διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου, προσέχοντας ότι αν είναι αρνητικός αριθμός, τότε θα πρέπει να αλλάξουμε φορά την ανίσωση μας.

Σε σχεδιάγραμμα



Στο παραπάνω σχεδιάγραμμα παρατηρούμε ότι αν έχουμε κλασματική ανίσωση τότε απλά «μπαίνει» άλλο ένα βήμα στη μεθοδολογία μας.

Μεθοδολογία επίλυσης α' βαθμού ανίσωσης – με κλάσματα.

Βήματα

- ✓ Αν έχουμε παρονομαστές, τότε με τη βοήθεια του ΕΚΠ τους απαλείφουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το ΕΚΠ.
- ✓ Στη συνέχεια αν μας έχουν μείνει παρενθέσεις τότε τις βγάζουμε κάνοντας τις πράξεις.
- ✓ Μετά χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους, μεταφέροντας στο ένα μέλος τους αγνώστους και στο άλλο τους γνωστούς.
Σημείωση : όταν μεταφέρουμε έναν όρο από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζει το πρόσημό του!
Συνήθως βάζουμε τους αγνώστους στο 1ο μέλος και τους γνωστούς στο 2ο.
- ✓ Στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

- ✓ Τέλος, διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου, προσέχοντας ότι αν είναι αρνητικός αριθμός, τότε θα πρέπει να αλλάξουμε φορά την ανίσωση μας.

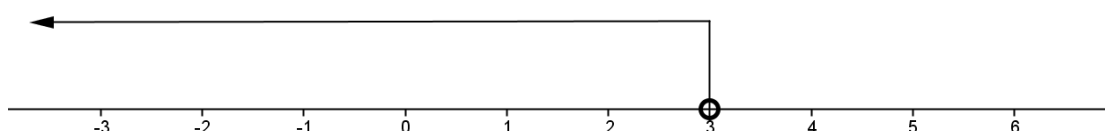
Σημείωση

Τις λύσεις μιας εξίσωσης τις απεικονίζουμε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών :

Εάν ένας αριθμός έχει πάνω του ένα κυκλάκι ανοιχτό τότε αυτός ο αριθμός δεν είναι λύση της ανίσωσης

Εάν ο αριθμός έχει πάνω του κλειστό κυκλάκι τότε αυτός ο αριθμός είναι λύση της ανίσωσης.

Για παράδειγμα, αν στο τέλος μιας ανίσωσης προκύψει $x < 3$, τότε η παράσταση στον άξονα των πραγματικών αριθμών θα ήταν ως εξής:



Παράδειγμα για το παραπάνω σχεδιάγραμμα:

$$3[2(y+1)-(y+4)]-(y-9) < 9 \Rightarrow$$

$$3[2(y+1)-(y+4)]-(y-9) < 9 \Rightarrow$$

$$3[2y+2-y-4]-y+9 < 9 \Rightarrow$$

$$3[y-2]-y+9 < 9 \Rightarrow$$

$$3y-6-y+9 < 9 \Rightarrow$$

$$3y-y < 9+6-9 \Rightarrow$$

$$2y < +6 \Rightarrow$$

$$y < 3$$

Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι μία ανίσωση δεν έχει μόνο μία λύση, αλλά άπειρες.

Πολλές φορές σε μία άσκηση μας ζητείται να δούμε που συμπίπτουν δύο ή και περισσότερες ανισώσεις. Αυτό θα ζητείται ως εξής:

Που συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις: ή Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2 \cdot x + 4 > 2 \quad \text{και} \quad 3 \cdot x - 2 < 2 \cdot x$$

Λύνουμε ξεχωριστά την κάθε ανίσωση :

$$2x+4 > 4 \Leftrightarrow$$

$$2x > 4-4 \Leftrightarrow$$

$$2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

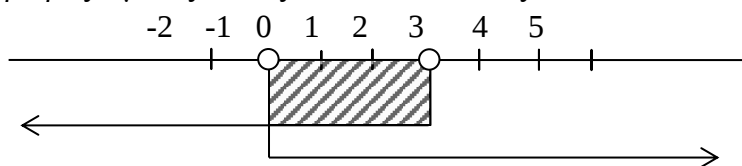
Και

$$3x + 2 < 2x + 5 \Leftrightarrow$$

$$3x - 2x < -2 + 5 \Leftrightarrow$$

$$x < +3$$

Άρα τώρα βάζουμε τις λύσεις πάνω στον ίδιο άξονα:



Άρα οι κοινές λύσεις είναι οι $x > 0$ και $x < 3$ ή σε διαφορετική γραφή $0 < x < 3$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 37 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α)

$$8x + 4 \leq 16 + 5x \Leftrightarrow$$

$$8x - 5x \leq 16 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-3x \leq 12 \Leftrightarrow$$

$$x \leq -4$$

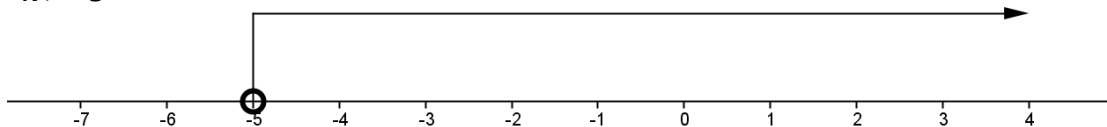


β)

$$x + 3 > -2 \Leftrightarrow$$

$$x > -2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$x > -5$$



γ)

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

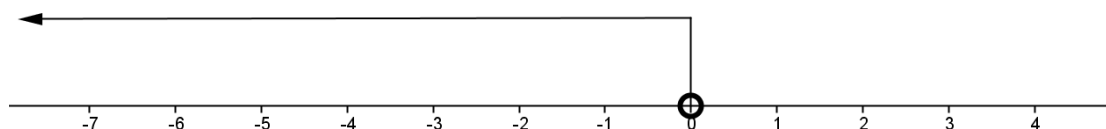
$$-(1-x) > 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$-1+x > 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$x-2x > -1+1 \Leftrightarrow$$

$$-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x < 0$$



δ)

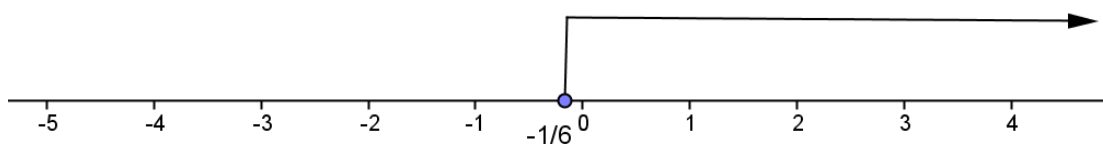
$$-7x+3 \leq 4-x \Leftrightarrow$$

$$-7x+x \leq 4-3 \Leftrightarrow$$

$$-6x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$x \geq \frac{1}{-6} \Leftrightarrow$$

$$x \geq -\frac{1}{6}$$



Άσκηση 3/σελ. 37 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

$$\alpha) \frac{3x-4}{4} - \frac{2-x}{3} > 1$$

$$12 \cdot \frac{3x-4}{4} - 12 \cdot \frac{2-x}{3} > 12 \cdot 1$$

$$3 \cdot (3x-4) - 4 \cdot (2-x) > 12$$

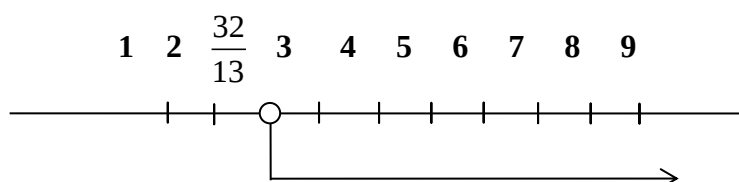
$$9x-12-8+4x > 12$$

$$9x+4x > 12+12+8$$

$$13x > 32$$

$$\frac{13x}{13} > \frac{32}{13}$$

$$x > \frac{32}{13}$$



β)

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) > \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x+2 - \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$4x+4 - 3x - 3 > x \Leftrightarrow$$

$$4x - 3x - x > -4 + 3 \Leftrightarrow$$

$$0x > -1$$

Που ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

γ)

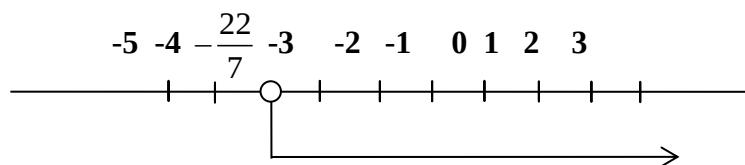
$$x + 3x + \frac{x+2}{2} - \frac{x+1}{3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$6x + 18x + 3(x+2) - 2(x+1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$6x + 18x + 3x + 6 - 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$7x > -22 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > -\frac{22}{7}$$



δ)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} \right) - \frac{x+7}{6} > 2 \Leftrightarrow$$

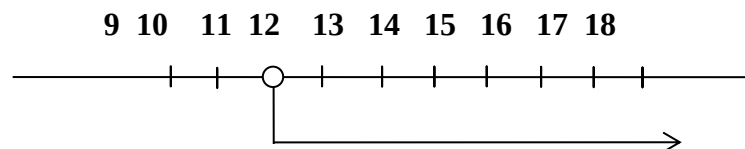
$$\frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{6} - \frac{x+7}{6} > 2 \Leftrightarrow$$

$$3(x+1) + 2(x+1) - 2(x+7) > 24 \Leftrightarrow$$

$$3x + 3 + 2x + 2 - 2x - 14 > 24 \Leftrightarrow$$

$$3x > 33 \Leftrightarrow$$

$$x > 11$$



Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

ε)

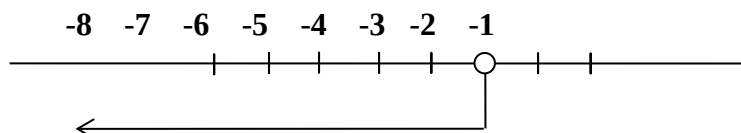
$$\omega - \frac{\omega - 2}{2} > \frac{\omega - 1}{2} - \frac{\omega - 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$4\omega - 4 \frac{\omega - 2}{2} > 4 \frac{\omega - 1}{2} - 4 \frac{\omega - 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$4\omega - 2(\omega - 2) > 2(\omega - 1) - (\omega - 3) \Leftrightarrow$$

$$4\omega - 2\omega + 4 > 2\omega - 2 - \omega + 3 \Leftrightarrow$$

$$\omega < -3$$



στ)

$$t + \frac{t+1}{4} > \frac{2t-1}{7} + \frac{27t}{28} \Leftrightarrow$$

$$28t + 28 \frac{t+1}{4} > 28 \frac{2t-1}{7} + 28 \frac{27t}{28} \Leftrightarrow$$

$$28t + 7(t+1) > 4(2t-1) + 27t \Leftrightarrow$$

$$28t + 7t + 7 > 8t - 4 + 27t \Leftrightarrow$$

$$0t > -11, \text{ που είναι ταυτότητα!}$$

Άλυτες Ασκήσεις

1.119 Σε κάθε τετραγωνάκι του πίνακα βάλτε Α, αν ο αριθμός είναι λύση της αντίστοιχης ανίσωσης και ένα Ψ αν δεν είναι λύση.

	-2	-1	0	1/3	5/4
$3x < 0$					
$2x - 3 \geq 0$					
$2x + 5 > x - 7$					
$5 - x \leq 6 - 3x$					

1.120 Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις τους:

i) $2x > 8$

ii) $-4x > 12$

iii) $17x < 5$

iv) $2,1x \geq -6,3$

v) $3x < -\frac{1}{2}$

vi) $6x - 2 > 7$

vii) $7x \leq 12 - 3x$

viii) $4x - 5 < x + 16$

1.121 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις σε άξονα.

i) $2x - 6 < 0$

ii) $2x < x + 6$

iii) $-2x + 2 < x + 1$

iv) $-\frac{3}{5}x + 7 > 5x$

v) $-5\psi \geq -2$

vi) $-x \geq 0$

vii) $4 \geq -8x$

viii) $-5x \geq 12 + x$

ix) $-4x + 1 \geq -3x + 7$

x) $2x \leq -x$

1.122 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις σε άξονα.

i) $3x + 2 \geq -4$

ii) $-x + 2 < 3x + 10$

iii) $3x + 6 < 0$

iv) $7x - (x - 5) \leq 0$

v) $-3(2x - 4) < 4x - 2$

vi) $-2x + 1 \leq 0$

vii) $3(1 + x) < 3x + 1$

viii) $3(x + 5) + 2x > 0$

ix) $-5x + 3(x + 8) < 3 + 8x$

x) $-15 + 3x \geq 2(x + 4)$

1.123 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i) $5(x - 2) > 3x + 1$

ii) $18 - 5(x + 1) \leq 3(x + 1) - 2$

iii) $7x - 3 < 3(x - 2) + 2(3 - x)$

iv) $3(x - 9) < 2x - (3 + 2x)$

v) $5x - 6 \geq -2(x - 5) + 17x$

1.124 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

i) $2(x + 3) < 2x + 15$

ii) $-3x + 2 \geq -x - 2(3 + x)$

iii) $\frac{\omega + 10}{5} - 1 < \frac{3(\omega + 1) - (\omega - 3)}{10}$

iv) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{5x}{6} < -10$

v) $x - \frac{x}{2} - \frac{3}{10}x - \frac{1}{5}x \geq 1$

1.125 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

i) $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0$

ii) $\frac{1-x}{2} + \frac{2x+1}{3} > 3$

iii) $\frac{3x+1}{4} - 1 < \frac{4-x}{3}$

iv) $7 - \frac{x-2}{3} > \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4}$

v) $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} < \frac{x+18}{6}$

vi) $3x + \frac{x-6}{3} < -2 + \frac{5x}{3}$

vii) $\frac{3(8x+5)}{14} - \frac{3x}{2} \leq \frac{12x-10}{7} + 1$

viii) $\frac{x+\frac{1}{2}}{3} + \frac{x-5}{6} + \frac{x+\frac{2}{3}}{2} - \frac{1}{3} < 0$

ix) $\frac{x}{3} + 1 \leq -\frac{x}{3}$

x) $1 - \frac{1-x}{2} > \frac{2-x}{-4}$

xi) $-\frac{2x-1}{3} + \frac{1-x}{2} < -\frac{1}{12} - 2x$

xii) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \geq -x + 4$

1.126 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων (ή αλλιώς να συναληθεύσετε τις ανισώσεις):

i) $3(x+1) + 2x > x + 2 - (4x-1)$ και $-2(x-3) + 5x \geq 3(x+1) + x - 1$

ii) $2x + 4 > 0$ και $3x - 4 \leq 11$

iii) $x - 5 > 5x - 1$ και $\frac{3}{2}x + 1 > x - 2$

iv) $\frac{x}{3} + 2 > x - \frac{x-4}{3}$ και $\frac{2x}{3} - \frac{1}{3} < \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}$

v) $\frac{x+2}{3} - \frac{x+9}{6} < \frac{x-1}{2} + 2$ και $\frac{x+1}{4} - \frac{2x+3}{5} > \frac{-x+3}{4} - x$

1.127 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

i) $-2 < 2x - 8 < 12$

ii) $-5 \leq \frac{1}{2}x - 3 < 10$

iii) $-2 \leq 3x + 4 < 12$

$$\text{iv)} \frac{3}{4} < \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x \leq \frac{9}{4}$$

1.128 Να λυθούν για τις διάφορες τιμές του λ οι ανισώσεις:

$$\text{i)} \lambda(x-1) > x+2$$

$$\text{ii)} \lambda(x-1) > \lambda$$

$$\text{iii)} 6(x-\lambda) + 2(2x+3) > 2\lambda x$$

$$\text{iv)} \frac{\lambda(x-1)}{2} - \frac{2x-\lambda}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$$

1.129 Να λυθούν οι ανισώσεις.

$$\text{i)} (x-3)(x+5) > 0$$

$$\text{ii)} (x-8)(x-4) < 0$$

1.130 Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις τους:

$$\alpha) \frac{x-2}{5} - \frac{x+2}{3} < 2$$

$$\beta) \frac{2x+3}{3} - \frac{3+x}{4} < 0$$

$$\gamma) \frac{14x+5}{3} \geq x-4$$

$$\delta) \frac{2-3x}{4} - \frac{x+1}{5} > 1$$

1.131 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να τις παραστήσετε γραφικά:

$$\text{i)} 2x-7 > -3 \text{ και } 7-2x \geq -1$$

$$\text{ii)} x-2 \geq 5 \text{ και } 2x+4 < 7$$

$$\text{iii)} -2x-2 < x+1 \text{ και } 3x-3 \leq 5-4(2-x)$$

$$\text{iv)} x+3 < -4x-2 \text{ και } 2(x-3) \geq 3-7x$$

$$\text{v)} x < \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} \text{ και } x - \frac{3}{2} \geq 2x + \frac{4}{3}$$

$$\text{vi)} 5x-7 \leq 3x-4 \text{ και } x - \frac{1}{2} \leq 2(x-1)$$

1.132 Δίνονται οι ανισώσεις :

$$13[2-(2x+5)] > 1-12(x+1) \text{ και } \frac{1}{2} + \frac{x+9}{-4} < \frac{2-x}{-8}$$

α) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

β) Αν a είναι η κοινή ακέραια λύση των ανισώσεων, να λύσετε την ανίσωση :

$$x + 2(x - a) < 11 + a[5 + x - 2(x + 2)]$$

1.133 α) Να λύσετε την ανίσωση :

$$3[3(\alpha + 2) - (\alpha - 2)] - 2[7 - 2(-\alpha - 1)] > 10$$

β) Για τη μικρότερη ακέραια τιμή του a που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x + a}{15} - \frac{x - a}{10} \geq 1 - \frac{a(x + 1)}{5}$$

1.134 α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2x - 1}{3} = \frac{x - 5}{7}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x - \left(\frac{2x - 1}{3} - 1\right) - \frac{5x - 2}{6} \geq 0$.

γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης που βρήκατε στο Δ.1, είναι και λύση της ανίσωσης του Δ.2.

1.135 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να παραστήσετε τις λύσεις τους στην ευθεία των αριθμών.

$$3x - 6 < 0 \quad \text{και} \quad 2x - 1 \leq 5x + 4$$

1.136 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να παραστήσετε τις λύσεις τους στην ευθεία των αριθμών.

$$x + 1 - \frac{16x}{11} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{2(x - 1)}{5} - \frac{9x - 4}{10} \geq -x$$

Επαναληπτικές ασκήσεις 1^{ου} κεφαλαίου

Συνδυαστική άσκηση

1.137 Η παρακάτω εξίσωση :

$$\left(4 - \frac{1-\kappa}{8} + \frac{2\kappa-3}{4}\right) \cdot x = 4\lambda - 2[\lambda + 1 - 2(5-\lambda)]$$

είναι ταυτότητα. Να βρείτε :

α) τους αριθμούς κ και λ ,

β) τους ακέραιους αριθμούς y για τους οποίους ισχύει:

$$\kappa < 3[2(y+1) - (y+4)] - (y-9) \text{ και } 3[2(y+1) - (y+4)] - (y-9) < \lambda$$

A. Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση;
2. Τι ονομάζουμε αλγεβρική παράσταση; Ποιοι είναι οι όροι μιας αλγεβρικής παράστασης;
3. Τι ονομάζουμε εξίσωση;
4. Να αναφέρετε τα βήματα επίλυσης μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού.
5. Ποια εξίσωση λέγεται αδύνατη; Πόσες λύσεις έχει μια τέτοια εξίσωση;
6. Ποια εξίσωση λέγεται αόριστη; Πόσες λύσεις έχει μια τέτοια εξίσωση;
7. Τι ονομάζουμε ανίσωση με έναν άγνωστο;

B. Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

1. Η παράσταση $2x + 5x(-x + 7)$ είναι μια αριθμητική παράσταση.
2. Το γινόμενο $2 \cdot x$ μπορεί να γραφεί $2x$.
3. Η παράσταση $2x - 3x - 12x$ ισούται με $-7x$.
4. Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς x ισούται με $4x$.
5. Αν $\alpha = 5$, τότε $\alpha - 2 = 3$.
6. Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αδύνατη.
7. Η εξίσωση $7x = 0$ είναι αδύνατη.
8. Η εξίσωση $\alpha x = \beta$, με $\alpha \neq 0$ μπορεί να έχει δύο διαφορετικές λύσεις.
9. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$.
10. Αν $x \geq 4$ τότε ο x παίρνει τις τιμές 5, 6, 7, ...
11. Αν $\lambda = 4$, η εξίσωση $(\lambda - 4)x = 5$ είναι αδύνατη.
12. Η ανίσωση $0x < 2$ είναι αόριστη.
13. Η ανίσωση $2x > -4$ επαληθεύεται από τον αριθμό -1.
14. Η ανίσωση $0x < -1$ είναι αόριστη.
15. Αν $\frac{x}{4} > 6$, τότε $x > 24$.
16. Αν $-\frac{x}{4} > 6$, τότε $x > -24$.
17. Η $4x = 0$ επαληθεύεται από άπειρες τιμές του x .

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

18. Η $3x + 5 < 0$ δεν έχει λύση στους θετικούς αριθμούς.
 19. Ο αριθμός 3 είναι λύση της ανίσωσης $2x - 1 > x + 1$.
 20. Ο αριθμός 5 είναι λύση της ανίσωσης $3x + 2 > 2x + 7$.
 21. Ο αριθμός -1 είναι λύση της ανίσωσης $-2x - 1 < 3 + x$.

Γ. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Αν ω ένας περιττός φυσικός αριθμός τότε κυκλώσετε την σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις.

i.ο επόμενος φυσικός αριθμός είναι :

A. $\omega + 1$ B. $\omega + 2$ Γ. $\omega - 1$ Δ. $\omega - 2$

ii.ο προηγούμενος φυσικός αριθμός είναι :

A. $\omega + 1$ B. $\omega + 2$ Γ. $\omega - 1$ Δ. $\omega - 2$

iii.ο επόμενος περιττός φυσικός αριθμός είναι :

A. $\omega + 1$ B. $\omega + 2$ Γ. $\omega - 1$ Δ. $\omega - 2$

iv.ο προηγούμενος άρτιος φυσικός αριθμός είναι :

A. $\omega + 1$ B. $\omega + 2$ Γ. $\omega - 1$ Δ. $\omega - 2$

2. Η εξίσωση $2x = 0$:

A. είναι αδύνατη B. είναι αόριστη Γ. έχει μία λύση

3. Ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης:

A. $\frac{1}{2}(x-2) - (x-3) = 1 - (x-2)$ B. $-\frac{x}{2} = \frac{1-x}{3}$ Γ. καμία από τις προηγούμενες

4. Η εξίσωση $3x - 3x = 0$:

A. καμία B. άπειρες Γ. την $x = 0$.

5. Η $2x - 1 < 2 + x$ επαληθεύεται από τον αριθμό:

A. 0 B. 3 Γ. 5

6. Η ανίσωση $0x > -5$

A. είναι αδύνατη B. είναι αόριστη Γ. έχει λύσεις.

7. Η εξίσωση $3x = 1$ έχει λύση:

A. $x = -3$ B. $x = -\frac{1}{3}$ Γ. $x = 0$ Δ. $x = \frac{1}{3}$

8. Η ανίσωση $0x < -6$ έχει

A. λύση το -7 B. άπειρες λύσεις Γ. καμία λύση Δ. λύση το -6.

Δ. Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενών

1. Μία _____ εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.
2. Μία εξίσωση αν δεν έχει καμία λύση τότε λέγεται _____.
3. Αν $\alpha > \beta$, τότε $-\alpha$ _____ $-\beta$. (συμπληρώνετε το κενό με $<$ ή $>$)
4. Ανίσωση με έναν άγνωστο λέγεται μια _____ που περιέχει έναν άγνωστο x .
5. Αν μια ανίσωση δεν αληθεύει για καμία τιμή του x , τότε λέμε ότι η ανίσωση είναι _____.
6. Αν μια ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του x , τότε λέμε ότι η ανίσωση είναι _____.

Κριτήριο αξιολόγησης εξισώσεις - ανισώσεις (60 λεπτά)

ΘΕΜΑ Α

A.1 Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 4 και το διπλάσιο του ενός είναι ίσο με το τριπλάσιο του άλλου. Να βρείτε τους δυο αριθμούς.

A.2 Να λυθεί η ανίσωση και να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:

$$3x + \frac{x-6}{3} < 5x + 3 < \frac{x}{5} - 2$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3x + 2(2x - 3) < -(-4x - 6) \text{ και } -\frac{2x}{3} + 1 \leq \frac{3x + 2008^0}{2^3}$$

Να βρεθούν οι κοινές τους λύσεις:

B.1. Στο σύνολο των φυσικών αριθμών

B.2. Στο σύνολο των ακεραίων αριθμών

B.3. Στο σύνολο των ρητών αριθμών

Κεφάλαιο 2° Πραγματικοί αριθμοί

A.2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a , ονομάζεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό a .

Η τετραγωνική ρίζα του a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

Σημείωση

Το υπόρριζο πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Η ρίζα είναι ένας αριθμός υψωμένος εις την $\frac{1}{2}$.

Δηλαδή, είτε γράψουμε $\sqrt{a}$ είτε $a^{\frac{1}{2}}$ είναι ακριβώς το ίδιο.

Άρα αν έχουμε

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = \sqrt{13^2} = \left(13^{\frac{1}{2}}\right)^2 \stackrel{(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu}}{=} 13^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 13^{\frac{2}{2}} = 13^1 = 13$$

Δηλαδή, όταν έχουμε μία ρίζα υψωμένη στο τετράγωνο, από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ουσιαστικά πάντα μένει το υπόρριζο.

Για παράδειγμα

- $\sqrt{0} = 0$ γιατί $0^2 = 0$
- $\sqrt{1} = 1$ γιατί $1^1 = 1$
- $\sqrt{4} = 2$ γιατί $2^2 = 4$
- $\sqrt{9} = 3$ γιατί $3^2 = 9$
- $\sqrt{16} = 4$ γιατί $4^2 = 16$
- $\sqrt{25} = 5$ γιατί $5^2 = 25$
- $\sqrt{36} = 6$ γιατί $6^2 = 36$
- $\sqrt{49} = 7$ γιατί $7^2 = 49$
- $\sqrt{64} = 8$ γιατί $8^2 = 64$
- $\sqrt{81} = 9$ γιατί $9^2 = 81$
- $\sqrt{100} = 10$ γιατί $10^2 = 100$

Ιδιότητες ριζών

i) $\sqrt{a^2} = |a|$

ii) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}$ Δεν ισχύει: $\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{\beta} = \sqrt{a + \beta} \\ \sqrt{a} - \sqrt{\beta} = \sqrt{a - \beta} \end{cases}$

iii) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Για παράδειγμα

$$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\sqrt{\frac{4}{100}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \quad \text{γιατί} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 43 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

$$\alpha) \sqrt{81} = 9, \sqrt{0,81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10} = 0,9, \sqrt{8100} = 90$$

$$\beta) \sqrt{4} = 2, \sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = 0,2, \sqrt{400} = 20, \\ \sqrt{40.000} = 200$$

$$\gamma) \sqrt{121} = 11, \sqrt{1,21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = 1,1, \sqrt{12100} = 110, \\ \sqrt{0,0121} = \sqrt{\frac{121}{10.000}} = \frac{11}{100} = 0,11$$

Άσκηση 2/σελ. 43 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

$$\alpha) \sqrt{36} = 6$$

$$\beta) \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\gamma) \sqrt{18 \cdot 18} = \sqrt{324} = 18$$

$$\delta) (\sqrt{18})^2 = 18$$

Άλυτες Ασκήσεις

2.1 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- i) $\sqrt{16} = \dots$
- ii) $\sqrt{25} = \dots$
- iii) $\sqrt{36} = \dots$
- iv) $\sqrt{\dots} = 3$
- v) $\sqrt{49} = \dots$
- vi) $\sqrt{64} = \dots$
- vii) $\sqrt{81} = \dots$
- viii) $\sqrt{100} = \dots$

2.2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- i) $11^2 = \dots$, άρα $\sqrt{121} = \dots$
- ii) $12^2 = \dots$, άρα $\sqrt{144} = \dots$
- iii) $13^2 = \dots$, άρα $\sqrt{169} = \dots$
- iv) $14^2 = \dots$, άρα $\sqrt{196} = \dots$
- v) $15^2 = \dots$, άρα $\sqrt{225} = \dots$
- vi) $16^2 = \dots$, άρα $\sqrt{256} = \dots$

2.3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- i) $\sqrt{8+8} = \dots$
- ii) $\sqrt{\dots} - \sqrt{36} = 11$
- iii) $\sqrt{8 \cdot \dots} = 4$

2.4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i) $\sqrt{16} + \sqrt{9} - \sqrt{25}$
- ii) $2 \cdot \sqrt{9} + 3 \cdot \sqrt{16} + 4 \cdot \sqrt{25}$
- iii) $5 \cdot \sqrt{64} + 10 \cdot \sqrt{36} - 6 \cdot \sqrt{225} - \sqrt{100}$

2.5 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{14 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}} \quad B = \sqrt{22 + \sqrt{11 - \sqrt{4}}} \quad \Gamma = \sqrt{10 + \sqrt{39 - \sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}}}$$

2.6 Να δείξετε ότι:

- i) $\sqrt{(\sqrt{81} + 1) \cdot (\sqrt{64} + \sqrt{4})} = 10$
- ii) $3 \cdot \sqrt{16} + 7 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{100} = 13$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

2.7 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i) $A = \sqrt{4 \cdot 9}$ και $B = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
- ii) $A = \sqrt{9 \cdot 16}$ και $B = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$
- iii) $A = \sqrt{100 \cdot 100}$ και $B = \sqrt{100} \cdot \sqrt{100}$

Τι παρατηρείτε; Να το εκφράσετε συμβολικά.

2.8 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i) $A = \sqrt{\frac{4}{9}}$ και $B = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$
- ii) $A = \sqrt{\frac{1}{25}}$ και $B = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}}$
- iii) $A = \sqrt{\frac{10000}{100}}$ και $B = \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{100}}$

Τι παρατηρείτε; Να το εκφράσετε συμβολικά.

2.9 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i) $A = \sqrt{9} + \sqrt{16}$ και $B = \sqrt{9+16}$
- ii) $A = \sqrt{36} + \sqrt{64}$ και $B = \sqrt{36+64}$
- iii) $A = \sqrt{256} + \sqrt{144}$ και $B = \sqrt{256+144}$

Τι παρατηρείτε; Να το εκφράσετε συμβολικά.

2.10 Να υπολογίσετε:

- i) $\sqrt{(-5)^2}$
- ii) $\sqrt{(-5)^4}$
- iii) $\sqrt{(-9)^2}$
- iv) $\sqrt{(-7)^2}$
- v) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$
- vi) $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-2)(-8)}$

2.11 Με βάση τα συμπεράσματα των ασκήσεων 7 και 8, να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα και πηλίκα:

- i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$
- ii) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$
- iii) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$
- iv) $\sqrt{\frac{1}{4}}$
- v) $\sqrt{\frac{25}{9}}$
- vi) $\sqrt{\frac{144}{16}}$

2.12 Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i) $\alpha^2 = 9$
- ii) $x^2 = 100$
- iii) $x^2 = \frac{25}{16}$
- iv) $x^2 - 7 = 18$
- v) $x^2 = 7^2 - (2^2 + 3^2)$

2.13 Σε κάθε γραμμή του πίνακα που ακολουθεί είναι σημειωμένα τα μήκη δύο πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Αφού κάνετε τους κατάλληλους υπολογισμούς, να συμπληρώσετε τα κενά.

κάθετη πλευρά	κάθετη πλευρά	Υποτείνουσα
3	4	
6	8	
3	12	
	5	13
10		26

2.14 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i. $\sqrt{12 + \sqrt{8 + 2\sqrt{16}}}$
- ii. $\sqrt{2 \cdot 18 \cdot \sqrt{144} \cdot 12}$

2.15 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{3\sqrt{49} + 5\sqrt{64} + 3}$$

$$B = \sqrt{2\sqrt{25} + 3\sqrt{16} + 7\sqrt{4}}$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{64}{25}}} - \sqrt{\frac{3}{25} \div \sqrt{\frac{16}{9}}}$$

2.16 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(7-3^2) \cdot (7-5^2)} + \sqrt{144}$$

$$B = \sqrt{4} \cdot (\sqrt{49} + 1) + (\sqrt{64} + \sqrt{100}) : \sqrt{9}$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{64} + \sqrt{16}}{3\sqrt{4}}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{49} + \sqrt{121}}{\sqrt{16} + \sqrt{25}}$$

2.17 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{\sqrt{1+\sqrt{9}} + \sqrt{2+\sqrt{4}}}$$

$$B = \sqrt{\sqrt{28+\sqrt{64}} + \sqrt{37+\sqrt{144}} + 12}$$

$$\Gamma = \sqrt{27\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{25}}} - \sqrt{8\sqrt{1+\sqrt{9}}}$$

$$\Delta = \sqrt{\sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{\sqrt{16}} + 20}$$

$$E = \sqrt{10\sqrt{\sqrt{81}} + 3\sqrt{\sqrt{16}}}$$

2.18 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{\sqrt{15^2} + \sqrt{35^2} - \sqrt{20^2}}{\sqrt{10^2} - \sqrt{5^2}}$$

$$B = \frac{\sqrt{(-11)^2} + \sqrt{(-12)^2} - \sqrt{(-13)^2}}{\sqrt{(-9)^2} + \sqrt{(-7)^2}}$$

$$\Gamma = \left(\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{25}{4}} \right) \cdot \sqrt{\frac{49}{25}}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(-\frac{3}{5} \right) : \left(-\frac{5}{27} \right)} + \sqrt{25^{-1}}$$

2.19 Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha) \sqrt{244 + \sqrt{135 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}}$$

$$\beta) \sqrt{133 + \sqrt{112 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}}$$

$$\gamma) \sqrt{244 + \sqrt{135 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}} - \sqrt{133 + \sqrt{112 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}}$$

$$\delta) \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{248 + \sqrt{54 + \sqrt{100}}}}}}$$

$$\varepsilon) \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{16}}}}$$

$$\sigma\tau) \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{16}}}} - \sqrt{140 + 2\sqrt{4}}$$

2.20 Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

1) $71y + 82y - 12y$

2) $16\gamma + 21\gamma - 23\gamma$

3) $22x - 4x - 1x - 2x$

4) $2x - 10x - 9x - 8x$

5) $\sqrt{36x} - \sqrt{52x} - \sqrt{18x} - \sqrt{18x}$

6) $\sqrt{25x} - \sqrt{144x} - \sqrt{225x} - \sqrt{289x}$

2.21 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $5x - 4 \cdot (3x + 11) = 4 \cdot (11 + x)$

γ) $x - (x + 2) = 6 + 2x$

β) $\frac{2\omega}{5} = \frac{2\omega - 9 + 2\omega}{\sqrt{25}}$

δ) $12 = \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{9}} - \frac{4}{\sqrt{9}} + \frac{2x}{\sqrt{9}}$

2.22 Να γράψετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιες είναι λανθασμένες. Με $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha, \beta > 0$.

	Σωστό	Λάθος
$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$		
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$		
$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$		
$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha - \beta}$		
$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha $		

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

2.23 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ιδιότητες των δυνάμεων.

$$\alpha^{\nu}\alpha^{\mu} = (\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}$$

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$$

2.24 Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{25} \quad \beta) \sqrt{16} \quad \gamma) \sqrt{144} \quad \delta) \sqrt{121}$$

$$\epsilon) \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \quad \sigma\tau) \sqrt{100} \quad \zeta) \sqrt{169} \quad \eta) \sqrt{121} \cdot \sqrt{121}$$

2.25 Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \quad \beta) \sqrt{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \quad \gamma) \sqrt{\frac{121}{81}} \cdot \sqrt{\frac{36}{49}} \quad \delta) \sqrt{\frac{36}{49}} \cdot \sqrt{\frac{144}{4}} \cdot \sqrt{\frac{16}{4}}$$

$$\epsilon) \sqrt{\frac{144}{4}} \cdot \sqrt{\frac{16}{4}} \quad \zeta) \sqrt{\frac{64}{100}} \cdot \sqrt{\frac{289}{81}} \quad \eta) \sqrt{\frac{16}{4}} \cdot \sqrt{\frac{36}{225}} \quad \theta) \sqrt{\frac{169}{121}} \cdot \sqrt{\frac{16}{289}}$$

2.26 Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha) \sqrt{244 + \sqrt{135 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}}$$

$$\beta) \sqrt{133 + \sqrt{112 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}}$$

$$\gamma) \sqrt{\sqrt{\sqrt{248 + \sqrt{54 + \sqrt{100}}}}}$$

$$\delta) \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{16}}}}$$

$$\epsilon) \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{16}}}} - \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}}}$$

$$\sigma\tau) \sqrt{14 + \sqrt{110 + \sqrt{110 + \sqrt{121}}}} - \sqrt{134 + \sqrt{95 + \sqrt{16 + \sqrt{81}}}}$$

$$\zeta) \sqrt{244 + \sqrt{135 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}} - \sqrt{133 + \sqrt{112 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}}$$

$$\epsilon) \sqrt{244 + \sqrt{135 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}} - \sqrt{133 + \sqrt{112 + \sqrt{76 + \sqrt{25}}}} + \sqrt{14 + \sqrt{110 + \sqrt{110 + \sqrt{121}}}} - \left(\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{16}}}} - \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}}} \right)$$

2.27 Να βρείτε τους αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις.

$$\alpha) x^2 = 144 \quad \beta) x^2 = \frac{121}{169}$$

$$1024$$

$$\varepsilon) 17x^2 + 8x^2 = 225 \quad \sigma\tau) x^2 = \frac{36}{25}$$

$$3x^2 + 3x^2 + 4 = 40$$

$$\gamma) x^2 = 289$$

$$\zeta) x^2 = 324$$

$$\delta) x^2 + 3x^2 =$$

$$\eta)$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

2.28 Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $9\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

β) $6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

γ) $6\sqrt{7} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 5\sqrt{3}$

δ) $\sqrt{8} + 3\sqrt{8}$

ε) $\sqrt{20} + 2\sqrt{5}$

στ) $\sqrt{32} + 8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$

2.29 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{8}$

β) $\sqrt{60}$

γ) $\sqrt{50}$

δ) $\sqrt{12}$

ε) $\sqrt{20}$

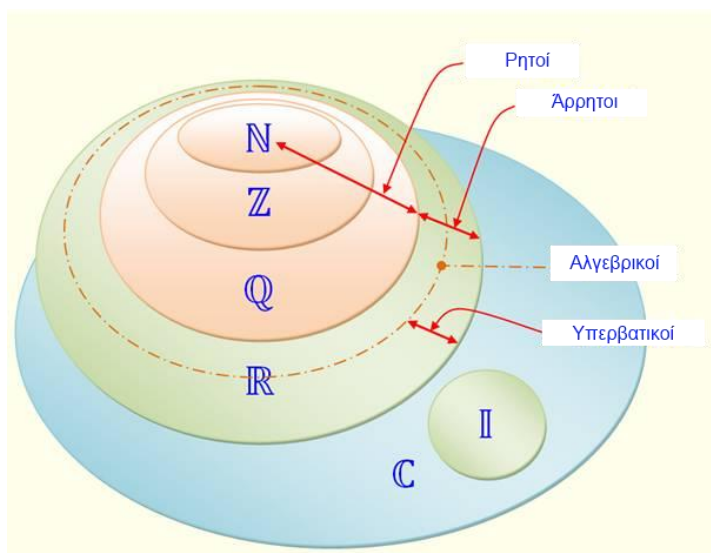
A.2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

Οι αριθμοί που απαρτίζουν τα μαθηματικά φτιάχνουν διάφορα σύνολα. Μέχρι τώρα έχουμε δει τα σύνολα των φυσικών αριθμών, των ακεραίων και των ρητών.

Υπάρχουν αριθμοί, που δεν μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος. Τους αριθμούς αυτούς τους ονομάζουμε άρρητους και δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο συμβολισμό, όπως τα υπόλοιπα γνωστά μας σύνολα.

Γενικά, οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, μη περιοδικά και δεν μπορούμε να τους υπολογίσουμε ακριβώς παρά μόνο προσεγγιστικά με τη βοήθεια των ρητών. Αυτές οι προσεγγίσεις λέγονται ρητές προσεγγίσεις άρρητου αριθμού. Όσα πιο πολλά δεκαδικά ψηφία έχει μία ρητή προσέγγιση τόσο πιο ακριβής είναι γιατί πλησιάζει περισσότερο τον άρρητο αριθμό.

Αν θέλαμε να δούμε τα σύνολα μας σε εικόνα για καλύτερη κατανόηση, τότε θα είχαμε το παρακάτω σχεδιάγραμμα.



Από αυτά τα σύνολα, εμείς γνωρίζουμε τους :

1. Φυσικούς Αριθμούς $\mathbb{N} : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
2. Ακέραιους Αριθμούς $\mathbb{Z} : \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
3. Ρητούς $\mathbb{Q}$, που είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος. Πιο συγκεκριμένα $\mathbb{Q} : \left\{ \frac{\mu}{\nu}, \text{ όπου } \mu, \nu \in \mathbb{Z} \text{ και } \nu \neq 0 \right\}$.
4. Άρρητοι, που είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος, όπως θα δούμε σε λίγο $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, κτλ.
5. Όλοι οι παραπάνω φτιάχνουν το σύνολο των πραγματικών μας αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{R}$.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Για παράδειγμα το $\sqrt{3}$ με:

- Προσέγγιση δεκάτου: 1 , 7
- Προσέγγιση εκατοστού : 1 , 73
- Προσέγγιση χιλιοστού : 1 , 732
- Προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού : 1 , 7320
- Προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού : 1 , 73205

Σημείωση

Κάθε ρητός διακρίνεται σε δύο κατηγορίες:

- Περατούμενος δεκαδικός: δεκαδικός με συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων
Π.χ. 2,5
3,18
- Μη περατούμενος δεκαδικός: δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία
Π.χ. 2,444444.....
0,12121212.....
 $\frac{1}{3} = 0,333333.....$

Οι άρρητοι, λοιπόν, ως δεκαδικοί γράφονται με άπειρα δεκαδικά ψηφία, που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά και τα ψηφία αυτά, προσδιορίζονται βήμα-βήμα με διαδοχικές δοκιμές.

Μία διαδικασία/πράξη, που στην συνέχεια θα την χρησιμοποιούμε αρκετά συχνά είναι η ρητοποίηση. Τι είναι, λοιπόν, η ρητοποίηση και γιατί την κάνουμε; Λόγω του ορισμού του κλάσματος, που απαιτεί οι όροι του (αριθμητής και παρονομαστής να είναι ακέραιοι), δεν αφήνουμε στον παρονομαστή ενός κλάσματος έναν άρρητο αριθμό. Η διαδικασία να «διώξουμε» τη ρίζα από τον παρονομαστή και να κάνουμε τον αριθμό ρητό ονομάζεται ρητοποίηση.

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με τη ρίζα που βρίσκεται στον παρονομαστή, έτσι προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

Για παράδειγμα

$$\text{i. } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{ii. } \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3}}{2} = -1 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{iii. } \frac{-3\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \frac{-3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-3 \cdot 2}{\sqrt{2}} = -\frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = -\frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = -3 \cdot \sqrt{2}$$

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε εδώ μία σημαντική ιδιότητα

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Η οποία μας χρειάζεται για να βγάλουμε ρίζες από τον παρονομαστή, όταν έχουμε περισσότερους όρους από έναν.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 48 (Βιβλίο Οργανισμού)

Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α) $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2$

Το $\sqrt{2}$: είναι άρρητος γιατί δεν μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου $\nu \neq 0$ και μ, ν ακέραιοι αριθμοί.

Το $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$, άρα είναι ρητός

β) Το $-\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$ είναι ρητός, ενώ το $\sqrt{\frac{4}{5}}$ είναι άρρητος

γ) Το $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$ είναι άρρητος

Το $\sqrt{\frac{18}{2}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$ είναι ρητός

Το $\sqrt{18^2} = \sqrt{18 \cdot 18} = \sqrt{324} = 18$ είναι ρητός

Άσκηση 2/σελ. 48 (Βιβλίο Οργανισμού)

Τοποθετήστε σε μια σειρά από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς :

α) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{2}$ επειδή ισχύει η ιδιότητα:

αν $\alpha, \beta \geq 0$ αν $\alpha < \beta$ τότε $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$ τότε

$1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

$\sqrt{5}, \sqrt{7}, 2, \sqrt{2}$

$\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

β) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, 2, \sqrt{2}$

$\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

γ) $1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}$

$\sqrt{3} < 1 + \sqrt{3}$

Άλυτες Ασκήσεις

2.30 Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

2.31 Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

2.32 Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

2.33 Να τοποθετήσετε κατά αύξουσα σειρά τους πραγματικούς αριθμούς:

$$3, 4, -\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, 0, \sqrt{2}$$

2.34 Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των αριθμών: $23-3\sqrt{13}$, $23-13\sqrt{13}$

2.35 Να συμπληρώσετε τα κενά με ακέραιους αριθμούς, έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

$$\alpha) (23-3\sqrt{13}) + (-17+5\sqrt{13}) = \dots + \dots\sqrt{13}$$

$$\beta) (23-3\sqrt{13}) \cdot (5\sqrt{13}) = \dots + \dots\sqrt{13}$$

2.36 Να βρείτε το ακέραιο μέρος των παρακάτω πραγματικών αριθμών:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{3}, 23+\sqrt{23}, -3+\sqrt{23}$$

2.37 Να δείξετε ότι: $5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = -8\sqrt{3}$.

2.38 Να γίνει η διπλή επιμεριστική: $(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3}) =$

2.39 Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt{200} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 4\sqrt{50}$$

2.40 Πότε ορίζονται οι παρακάτω τετραγωνικές ρίζες, αν το x ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

i. $\sqrt{2x-1}$

ii. $\sqrt{-x+3}$

iii. $\frac{2}{\sqrt{x+5}}$

2.41 Να κάνετε ρητοποίηση στους παρακάτω αριθμούς

$$\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{32}}, \frac{-2 \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{27}}.$$

2.42 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2 \cdot (x + \sqrt{2}) - 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (x - 3\sqrt{2})$

ii. $x\sqrt{2} - 2 = x - 2\sqrt{2}$

iii. $x \cdot \sqrt{3} - \sqrt{27} = -2 \cdot \sqrt{3} \cdot x + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$

iv. $4 - \sqrt{2} \cdot x = 3\sqrt{2} + 4$

2.43 Να δείξετε ότι η παρακάτω παράσταση είναι φυσικός αριθμός

$$A = 1 + \frac{(\sqrt{32} - 5\sqrt{18} + 7\sqrt{8})((\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75}))}{\sqrt{16 + \sqrt{11\sqrt{25} + \sqrt{81}}}}$$

2.44 Να δείξετε ότι η παρακάτω παράσταση είναι φυσικός αριθμός

$$B = \frac{\frac{7}{2}\sqrt{28} + \frac{18}{15}\sqrt{175} - \frac{16}{6}\sqrt{635}}{4\sqrt{63} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}}$$

2.45 Να δείξετε ότι η παρακάτω παράσταση είναι φυσικός αριθμός

$$\Gamma = \sqrt{30(\sqrt{20} + \sqrt{45}) \cdot \left(\sqrt{\frac{48}{2}} + \sqrt{\frac{108}{2}}\right) \cdot \sqrt{25 + \sqrt{25}} + 2021}$$

Θέματα Αυξημένης Δυσκολίας

2.46 Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{25}} - \sqrt{64}$

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό α .

β) Να λύσετε την εξίσωση: $(1 - \alpha)x - \alpha(x - 1) = \alpha - 2(\alpha x - 1)$

γ) Για την τιμή του x που βρήκατε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = \sqrt{29 - \sqrt{14 + \sqrt{2x}}}$$

2.47 Να βρείτε τους αριθμούς:

$$\alpha = \sqrt{777 \cdot 555 \cdot 35}$$

$$\beta = \sqrt{44.440.000 - 4.444}$$

2.48 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{\frac{\sqrt{2^{36} \cdot 3^{32}}}{6^{16}}}$

A.2.3 Προβλήματα

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 4/σελ. 51 (Βιβλίο Οργανισμού)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

η διάμεσος σε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ύψος, άρα εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΔ

$$ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = ΑΓ^2$$

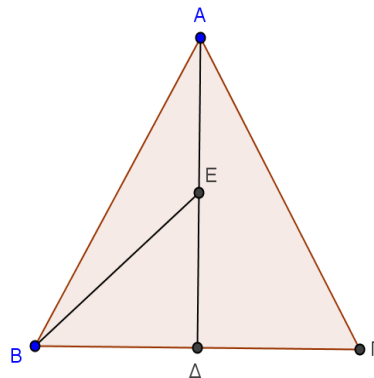
$$ΑΔ^2 + 6^2 = 12^2$$

$$ΑΔ^2 + 36 = 144$$

$$ΑΔ^2 = 144 - 36$$

$$ΑΔ^2 = 108$$

$$ΑΔ = \sqrt{108} \text{ cm}$$



Αφού Ε το μέσο της ΑΔ, $ΕΔ = \frac{\sqrt{108}}{2} \text{ cm}.$

Κάνουμε ξανά πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΔ:

$$ΒΕ^2 = ΕΔ^2 + ΒΔ^2$$

$$ΒΕ^2 = \left(\frac{\sqrt{108}}{2}\right)^2 + 6^2$$

$$ΒΕ^2 = \frac{\sqrt{108}^2}{\sqrt{2}^2} + 36$$

$$ΒΕ^2 = \frac{108}{2} + 36$$

$$ΒΕ^2 = \frac{108 + 36 \cdot 4}{4}$$

$$ΒΕ^2 = \frac{108 + 144}{4}$$

$$ΒΕ^2 = \frac{252}{4}$$

$$ΒΕ^2 = 63$$

$$ΒΕ = \sqrt{63} = 7,94 \text{ cm}$$

Άλυτες Ασκήσεις

2.49 Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 4\text{cm}$ και $A\Gamma = 3\text{cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

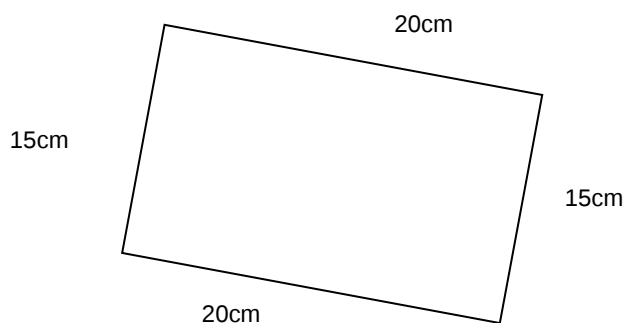
2.50 Να βρείτε το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 34 εκατοστά.

2.51 Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο του οποίου οι διαγώνιες έχουν μήκος 8 cm. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με προσέγγιση δεκάτου.

2.52 Ένα ορθογώνιο έχει πλάτος 3cm και διαγώνιο ίση με 7cm. Να βρείτε το πλάτος του.

2.53 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές ίσες με 5 και 7 εκατοστά. Ποιο είναι το μήκος της διαγωνίου του;

2.54 Να βρείτε το μήκος των διαγωνίων του ορθογωνίου του σχήματος:



Επαναληπτικές ασκήσεις 2^{ου} κεφαλαίου

A. Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a και πως συμβολίζεται;
2. Να εξετάσετε αν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού.
3. Με τι ισούται η τετραγωνική ρίζα του μηδενός;
4. Υπάρχει ρίζα αρνητικού αριθμού;
5. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται άρρητοι;
6. Δώστε μερικά παραδείγματα άρρητων αριθμών.
7. Ποιοι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο:
 - α. των φυσικών αριθμών,
 - β. των ακεραίων αριθμών,
 - γ. των ρητών αριθμών,
 - δ. των πραγματικών αριθμών.

B. Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

1. Ο 11 είναι ακέραιος αριθμός.
2. Ο -2 είναι φυσικός αριθμός.
3. Ο -11 είναι ρητός αριθμός.
4. Η τετραγωνική ρίζα του 7 είναι ρητός αριθμός.
5. Ο $\sqrt{16}$ είναι άρρητος αριθμός.
6. $5 \notin Q$
7. $\sqrt{7} \in Q$
8. $\sqrt{7} \in R$
9. Αν $x^2 = a$, τότε $\sqrt{a} = x$.
10. Η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει λύσεις τις $x = 3$ και $x = -3$.

Γ. Ερωτήσεις συμπλήρωσης και κλειστού τύπου.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς τοποθετώντας στα κενά το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $>$ ή $=$).

α) $4 \dots \sqrt{5}$

β) $4 - \dots - \sqrt{6}$

γ) $\sqrt{5} \dots 5$

δ) $\sqrt{\frac{1}{4}} \dots \frac{1}{4}$

ε) $\sqrt{18} \dots 3\sqrt{2}$

στ) $\sqrt{0,4} \dots 0,2$

Δ. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Από τους παρακάτω αριθμούς, ρητός είναι ο :

A: $\sqrt{2,5}$

B: $\sqrt{0,9}$

Γ: $\sqrt{0,16}$

Δ: $\sqrt{0,036}$

ii) Από τους παρακάτω αριθμούς, άρρητος είναι ο :

A: $\sqrt{49}$

B: $\sqrt{\frac{25}{4}}$

Γ: 13,7777777.....

Δ: $\sqrt{1,6}$

iii) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών «δεξιότερα» του $\sqrt{13}$ βρίσκεται ο αριθμός:

A: $\sqrt{\frac{25}{2}}$

Γ: 4

B: 3

Δ: 0

iv) Ποια από τις παρακάτω ρίζες δεν έχει νόημα;

A: $\sqrt{-5^2}$

Γ: $-\sqrt{5^2}$

B: $\sqrt{(-5)^2}$

Δ: $\sqrt{|-5|^2}$

v) Η παράσταση $\sqrt{\alpha^{16}}$ ισούται με :

A: α

Γ: α^2

B: α^4

Δ: α^8

Κριτήριο αξιολόγησης εξισώσεις - ανισώσεις - ρίζες (60 λεπτά)

Θέμα Α

A.1 Να συγκρίνετε τους αριθμούς τοποθετώντας στα κενά το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $>$ ή $=$).

α) $4 \dots \sqrt{5}$ β) $-3 \dots -\sqrt{6}$ γ) $\sqrt{17} \dots 17$

δ) $\sqrt{\frac{1}{16}} \dots \frac{1}{4}$ ε) $\sqrt{50} \dots 5\sqrt{2}$ στ) $\sqrt{0,04} \dots 0,2$

A.2 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt{a})^2 = \dots$

β) Αν $a \geq 0$, τότε $\sqrt{a^2} = \dots$

γ) Δεν ορίζεται ρίζα αριθμού.

δ) Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός ονομάζεται.....

ε) Όλοι οι ρητοί αριθμοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί ονομάζονται

A.3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $x^2 = a$, τότε $x = \sqrt{a}$

β) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

γ) Ο αριθμός $\sqrt{2} \dots$ είναι ρητός

δ) Αν $a \geq 0$, τότε και $\sqrt{a} \geq 0$

ε) $\sqrt{a^2} = a$, για οποιαδήποτε τιμή του a .

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η ανίσωση $0x \leq 0$ είναι αδύνατη.

β) Η ανίσωση $0x < -2$, αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του x .

γ) Η ανίσωση $0x > 0$ είναι αδύνατη.

Θέμα Β

B.1 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $1 + \frac{3x-5}{2} - \frac{5x-3}{4} = x$

β) $\frac{\frac{3x-5}{2} - 1}{4} = \frac{4(2x-7)}{9} + \frac{3 - \frac{5(x-2)}{3}}{3} - \frac{13}{24}$

Θέμα Γ

Γ.1 α) Να λύσετε την ανίσωση :

$$3[3(\alpha + 2) - (\alpha - 2)] - 2[7 - 2(-\alpha - 1)] > 10$$

β) Για τη μικρότερη ακέραια τιμή του α που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x+a}{15} - \frac{x-\alpha}{10} \geq 1 - \frac{\alpha(x+1)}{5}$$

Θέμα Δ

Δ.1 Δίνονται οι αριθμοί :

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(\sqrt{16} - \sqrt{144})(\sqrt{49} - \sqrt{16} - \sqrt{25})}}} \text{ και}$$
$$\mu = \frac{\sqrt{(-11)^2} + \sqrt{(-12)^2} - \sqrt{(-13)^2}}{\sqrt{(-9)^2} - \sqrt{(-7)^2}} - \sqrt{|-1|}$$

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς λ και μ .

β) Να λύσετε την εξίσωση :

$$2\lambda^{\sqrt{\mu}} \cdot x^2 + 44 = 13x^2 + 2\lambda^{\mu}$$

Κεφάλαιο 3^ο Συναρτήσεις

Α.3.1 Η έννοια της συνάρτησης

Συνάρτηση ονομάζεται η σχέση με την οποία κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y .

Γενικά μία συνάρτηση είναι μία «σχέση» ανάμεσα σε δύο μεταβλητές. Οι τιμές, που παίρνουν οι μεταβλητές αυτές, εξαρτάται κάθε φορά από το πρόβλημα το οποίο έχουμε να αντιμετωπίσουμε.

Για την καλύτερη αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών αυτών, φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών.

Για παράδειγμα

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=x^2+2$

x	-5	1		3	
y			+1		102

Ουσιαστικά, στο παρακάτω παράδειγμα, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να βάζουμε μέσα στη δοθείσα συνάρτηση τις τιμές του x και να βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή του y .

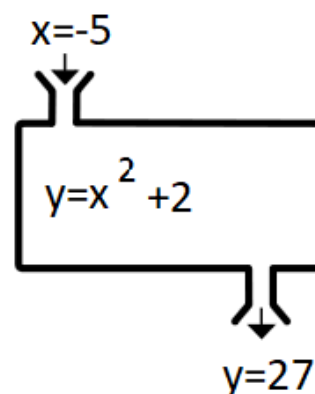
Οπότε όσον αφορά την 1^η στήλη, για να την συμπληρώσουμε λειτουργούμε ως εξής λύνοντας την αριθμητική παράσταση, που προκύπτει μετά την αντικατάσταση :

$$y = x^2 + 2 \quad \overset{x=-5}{\Leftrightarrow}$$

$$y = (-5)^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$y = 25 + 2 \Leftrightarrow$$

$$y = 27$$



Άρα η τιμή, που θα συμπληρώσουμε θα είναι 27.

x	-5	1	± 1	3	± 10
y	27	3	+1	11	102

Αναλόγως, συμπληρώνουμε και τα υπόλοιπα κουτάκια.

$y = x^2 + 2 \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow}$	$y = x^2 + 2 \stackrel{y=1}{\Leftrightarrow}$	$y = x^2 + 2 \stackrel{x=3}{\Leftrightarrow}$	$y = x^2 + 2 \stackrel{y=102}{\Leftrightarrow}$
$y = (1)^2 + 2 \Leftrightarrow$	$1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow$	$y = (3)^2 + 2 \Leftrightarrow$	$102 = x^2 + 2 \Leftrightarrow$
$y = 1 + 2 \Leftrightarrow$	$1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow$	$y = 9 + 2 \Leftrightarrow$	$102 = x^2 + 2 \Leftrightarrow$
$y = 3$	$1 - 2 = x^2 \Leftrightarrow$	$y = 11$	$102 - 2 = x^2 \Leftrightarrow$
	$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$		$x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$

Το μόνο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι στην περίπτωση, που κάνουμε αντικατάσταση το y στον τύπο της συνάρτησης μας, τότε προκύπτει μία εξίσωση, την οποία και λύνουμε ως προς το x .

Σημείωση

Ένα από τα πράγματα, που πρέπει να προσέξουμε όταν πάμε να αντικαταστήσουμε με μία τιμή, στον τύπο της συνάρτησής μας, το x είναι να ελέγξουμε αν έχουμε το δικαίωμα να κάνουμε όντως αυτήν την αντικατάσταση. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να βάλουμε στη θέση του x αρνητικές τιμές αν το x στον τύπο παριστάνει τα λίτρα βενζίνης που θα βάλουμε στο αυτοκίνητό μας.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 57 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3x - 2$

x	-3	-2	-1	0	2
y	-11	-8	-5	-2	4

β) $y = \frac{x-1}{2}$

x	-1	0	2	4	5
y	-1	-1/2	1/2	3/2	2

Άσκηση 3/σελ. 57 (Βιβλίο Οργανισμού)

Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Αν η τιμή χωρίς φόρο είναι η x τότε ο φόρος είναι $\frac{8}{100} \cdot x = 0,08x$.

Άρα η τιμή με φόρο είναι: $y = x + 0,08x = (1 + 0,08)x = 1,08x$

Άλυτες Ασκήσεις

3.1 Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας αυξάνονται κατά 50 ευρώ ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x , είναι:

- i) $y=50 \cdot x$ ii) $y=x + 50$ iii) $y=\frac{x}{50}$ iv) $y=0,5 \cdot x$ **2.2**

3.2 Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας αυξάνονται κατά 35%. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό y ως συνάρτηση του παλιού μισθού x , είναι:

- i) $y=x + \frac{35}{100}$ ii) $y=x + 35$ iii) $y=x + \frac{35}{100} \cdot x$ iv) $y=0,35 \cdot x$

3.3 Δίνεται τρίγωνο πλευράς x . Η σχέση που εκφράζει την περίμετρο Π του τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του x , είναι:

- i) $y=3 \cdot x$ ii) $y=x + 3$ iii) $y=\frac{x}{3}$ iv) $y=x^3$

3.4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=4 \cdot x+2$

x	-2	-3	0	2	5
y					

3.5 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=\frac{1}{4} + x$

x	-3	-6		1	2
y			0		

3.6 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=2 \cdot x$

X	-4	-6		1	2
Y			0		

3.7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=5 \cdot x - 5$

X	-7	-3		0	1
Y			2		

3.8 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=4 \cdot x - 2$

x	-1	-2		3	0
y			8		

3.9 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=x + x$

x	-2	4		0	5
y			2		

3.10 Από τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=3-2(x+\alpha)$.

i) Να βρείτε τον αριθμό α .

ii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	4		0		2	
y	1	15		0		21

3.11 Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

α) Η σχέση που εκφράζει την περίμετρο ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β είναι $\Pi=2\alpha+2\beta$

β) Στην συνάρτηση $y = -\frac{3}{x+3}$, μπορούμε να δώσουμε στο x την τιμή -3

γ) Στην συνάρτηση $y = \sqrt{x^4}$, μπορούμε να δώσουμε την τιμή -2

δ) Η σχέση που εκφράζει την περίμετρο ενός ισοπλεύρου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του α είναι η $\Pi = 3 + \alpha$

3.12 Να απαντήσετε στην εξής ερώτηση δικαιολογώντας την απάντησή σας:

Στην συνάρτηση $y = x^2 + 1$, μπορεί το y να πάρει την τιμή 0;

3.13 Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α) Ο πίνακας τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

μπορεί να είναι πίνακας τιμών της συνάρτησης:

A. $y = 2x + 1$ B. $y = x^2 + 1$ Γ. $y = x$ Δ. $y = 2$

β) Στην συνάρτηση $y = -\frac{1}{x+5}$, το y παίρνει την τιμή 0 όταν:

A. $x = -5$ B. $x = 0$ Γ. $x = +5$ Δ. ποτέ

γ) Η τιμή της πατάτας είναι διπλάσια της τιμής της πιπεριάς. Αν συμβολίσουμε με y την τιμή της πατάτας και με x την τιμή της πιπεριάς, η συνάρτηση που εκφράζει την σχέση τους είναι:

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

A. $y = 2 + x$ B. $y = 2 \cdot x$ Γ. $y = 2 \cdot (x + 1)$ Δ. $y = 2x + 1$

3.14 Να εκφράσετε την περίμετρο ενός τετραγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του a .

3.15 Σε ένα τρίγωνο το ύψος του είναι το διπλάσιο από την βάση στην οποία αντιστοιχεί. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση της βάσης του που αντιστοιχεί το συγκεκριμένο ύψος.

3.16 Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + x$ με το x να παίρνει τις τιμές $-2, -1, 0, 1, 2$. Να κάνετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης y . Για ποιές τιμές του x είναι $y = 0$;

3.17 Δίνεται η συνάρτηση: $y = \frac{-2x+3}{x-3}$

Να κάνετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης y , δίνοντας στο x πέντε τιμές από το σύνολο των φυσικών μικρότερες του $+6$. Μπορούμε να δώσουμε στο x την τιμή $+3$;

3.18 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = \frac{4-x}{4}$

x	-2	-1	0	4	8
y					

3.19 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 2x^2 + 4x$

x	-3	-1	1	3	5
y					

3.20 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -2$

x	-2	0	1
y			

3.21 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -3x + 4$

x	-2		0		6
y		$\frac{11}{2}$		$\frac{13}{4}$	

3.22 Ένας πωλητής αυτοκινήτων παίρνει μισθό 700 ευρώ το μήνα και 10% επί του ποσού των πωλήσεων που κάνει. Να εκφράσετε τις μηνιαίες αποδοχές y

του πωλητή ως συνάρτηση των πωλήσεων x που κάνει. Στην συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x		1000	20000		
y	700				2500

3.23 Ένα τρίγωνο έχει βάση 4cm και ύψος 10cm. Αν η βάση του αυξηθεί κατά x και το ύψος παραμείνει σταθερό να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου ως συνάρτηση του x .

3.24 Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 20% στις αναγραφόμενες τιμές των πουκαμίσων του και 10% έκπτωση στις αναγραφόμενες τιμές των παπουτσιών του.

α) να εκφράσετε το ποσό που πληρώνουμε τελικά για ένα πουκάμισο ως συνάρτηση της αναγραφόμενης τιμής του.

β) να εκφράσετε το ποσό που πληρώνουμε τελικά για ένα ζευγάρι παπούτσια ως συνάρτηση της αναγραφόμενης τιμής του.

γ) τι ποσό θα πληρώσουμε για ένα πουκάμισο με αναγραφόμενη τιμή 80 ευρώ;

δ) αν για ένα ζευγάρι παπούτσια πληρώσαμε 115 ευρώ, ποιά ήταν η αναγραφόμενη τιμή του;

3.25 Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης. Να βρεθεί το a .

x	-4	-2	0	0,5	3/2
y	-16	-8	0	2	6

3.26 Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = ax - 2\beta$. Να βρείτε τα a και β .

x	0	+2
y	-2	+4

3.27 Έστω η συνάρτηση $y = -x^4 + 1$.

α) Να σχηματίσετε έναν πίνακα τιμών, αν x είναι μη μηδενικός ακέραιος και $-2 \leq x \leq 2$

β) αν το x είναι πραγματικός να βρείτε για ποιές τιμές του x , το y παίρνει την τιμή:

- i) 2
- ii) -3
- iii) -1
- iv) 4

3.28 Έστω ένας αριθμός x . Πολλαπλασιάστε τον με το 20. Από αυτό το γινόμενο να προσθέσετε το 25 και να διαιρέσετε το άθροισμα με το 2. Τέλος, από το πηλίκο αυτό να αφαιρέσετε το x . Αν y είναι το τελικό αποτέλεσμα:

α) να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x ,

β) να εξετάσετε αν για κάποια τιμή του x , το y ισούται με 12,5

γ) να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών.

x	-6	-4	-2	+4
y				

3.29 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος x cm και η άλλη κάθετη είναι κατά 4 cm μεγαλύτερη από την πρώτη.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x .

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης, που βρήκατε στο α.

x	2	5	7
y			

Κριτήριο αξιολόγησης συναρτήσεις (15 λεπτά)

Θέμα Α

A1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -3x + 5$

x	-5	1		3	
y			1		10

A2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = \frac{1}{3}x$

x

x	-3	-2		1	2
y			0		

Θέμα Β

Ο μισθός ενός εργαζόμενου μειώθηκε κατά 10%.

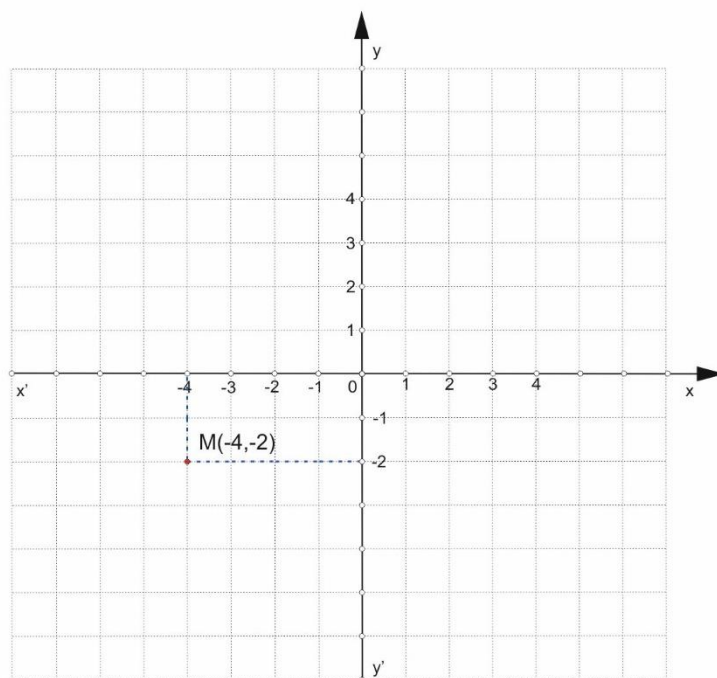
α. Να εκφράσετε τις νέες μηνιαίες αποδοχές του υπαλλήλου ως συνάρτηση των προηγούμενων αποδοχών του.

β. Αν οι νέες μηνιαίες αποδοχές του είναι 1000 ευρώ, να βρείτε τις προηγούμενες αποδοχές του.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

A.3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

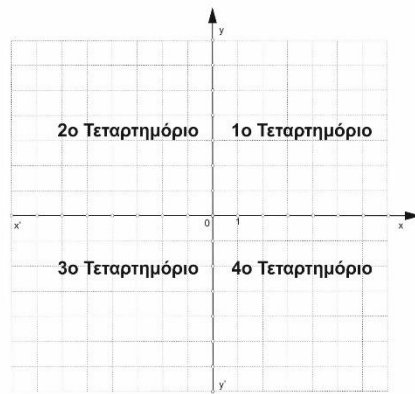
Κάθε σημείο στο επίπεδο αναπαρίσταται από ένα ζεύγος τιμών (x, y) που ονομάζεται ζεύγος συντεταγμένων.



Αν πάρουμε δύο τεμνόμενους κάθετα άξονες, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, οι οποίοι έχουν και την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε φτιάχνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Το σύστημα αυτό έχει για αρχή το σημείο τομής των ευθειών $x'x$ και $y'y$, το οποίο παριστάνεται στο σχήμα με το $O(0,0)$.

Ένα τυχαίο σημείο στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων συμβολίζεται ως εξής : $M(a,b)$. Ο πρώτος αριθμός a ονομάζεται τετμημένη και ο δεύτερος αριθμός b ονομάζεται τεταγμένη. Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M λέγονται συντεταγμένες του σημείου M .

- Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα ίσα μέρη που λέγονται τεταρτημόρια.



Παρατηρήσεις

1. Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τετμημένη 0.
2. Κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τεταγμένη 0.
3. Η αρχή των αξόνων O έχει συντεταγμένες $O(0,0)$

Ο άξονας των x ονομάζεται άξονας τετμημένων

Ο άξονας των y ονομάζεται άξονας τεταγμένων

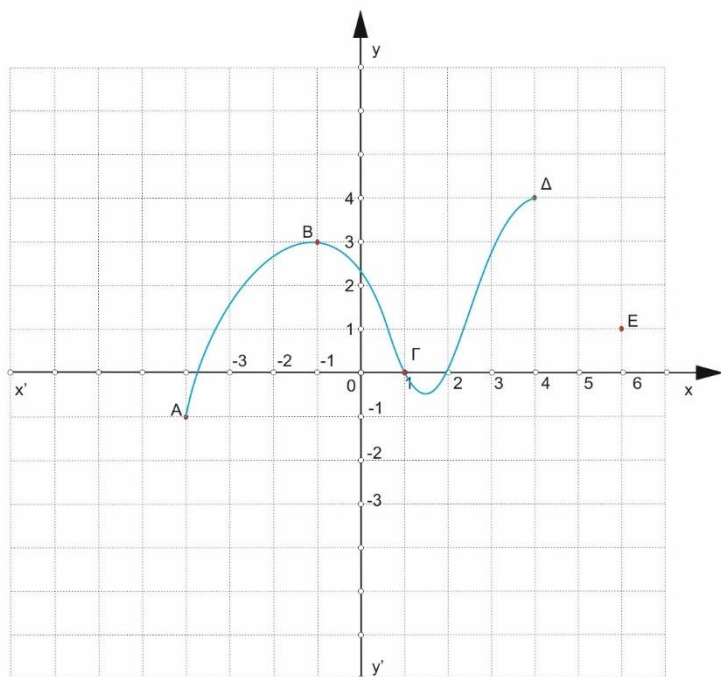
Το ζεύγος (x, y) ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος** συντεταγμένων , γιατί η σειρά έχει σημασία , δηλαδή το x είναι πάντα πρώτο και το y είναι πάντα δεύτερο.

Π. χ. το $(2, 3)$ είναι διαφορετικό από το $(3, 2)$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Γραφική παράσταση

Τα ζεύγη των αριθμών (x, y) μπορούμε να τα παραστήσουμε με σημεία του επιπέδου και έτσι σχηματίζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο είναι σημαντικό να μπορούμε να βρούμε την απόσταση που έχουν δύο τυχαία σημεία από τους άξονες $x'x$ και $y'y$, αλλά και μεταξύ τους.

Όσον αφορά τους άξονες ένα σημείο τυχαίο $M(-3,2)$ απέχει από τον :

- άξονα $x'x$ απόσταση ίση με $|2|=2$ και
- άξονα $y'y$ απόσταση ίση με $|-3|=3$ και

Ενώ αν θέλουμε να βρούμε την απόσταση δύο σημείων θα πρέπει να σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, όπως φαίνεται στην παρακάτω εφαρμογή.

Εφαρμογή

Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(6,5)$. Να υπολογίσετε την απόσταση τους AB .

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (6,3).

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο αυτό και έχουμε ότι :

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 \Rightarrow$$

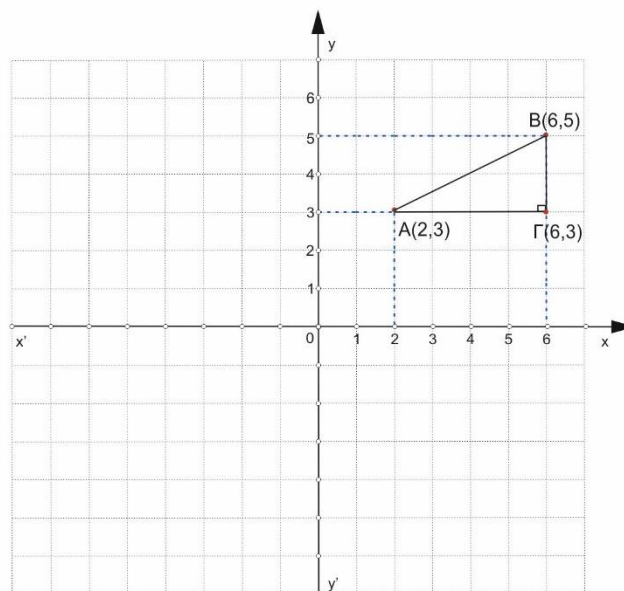
$$AB^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$AB^2 = 16 + 4 \Rightarrow$$

$$AB^2 = 20 \Rightarrow$$

$$AB = \sqrt{20} \Rightarrow$$

$$AB = 2\sqrt{5}$$



Γενικότερα, για να μην εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο

Θεώρημα κάθε φορά που μας ζητείται η απόσταση δύο σημείων, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία για δύο τυχαία σημεία, έτσι ώστε να μπορέσουμε να φτιάξουμε έναν κανόνα :

Αν δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

Μία συνάρτηση, ανάλογα με τον τύπο της έχει και διαφορετική γραφική παράσταση. Θα πρέπει να ξέρουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι γραμμική δηλαδή η μεταβλητή της είναι υψωμένη στη δύναμη 1, τότε η γραφική της παράσταση είναι μία ευθεία. Ενώ αν μεταβλητή της είναι υψωμένη σε δύναμη διαφορετική της μονάδας, όπως $\sqrt{x}$ ή x^2 ή x^3 , τότε η μορφή που παίρνει η γραφική παράσταση, δεν είναι ευθεία αλλά δημιουργεί καμπύλες.

Ας δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές για καλύτερη κατανόηση:

Εφαρμογή

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2 \cdot x + 3$

Μεθοδολογία

Για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας γραμμικής εξίσωσης, δηλαδή χωρίς η μεταβλητή μας x να είναι υψωμένη σε κάποια δύναμη διαφορετική του 1, κάνουμε τα εξής δύο βήματα.

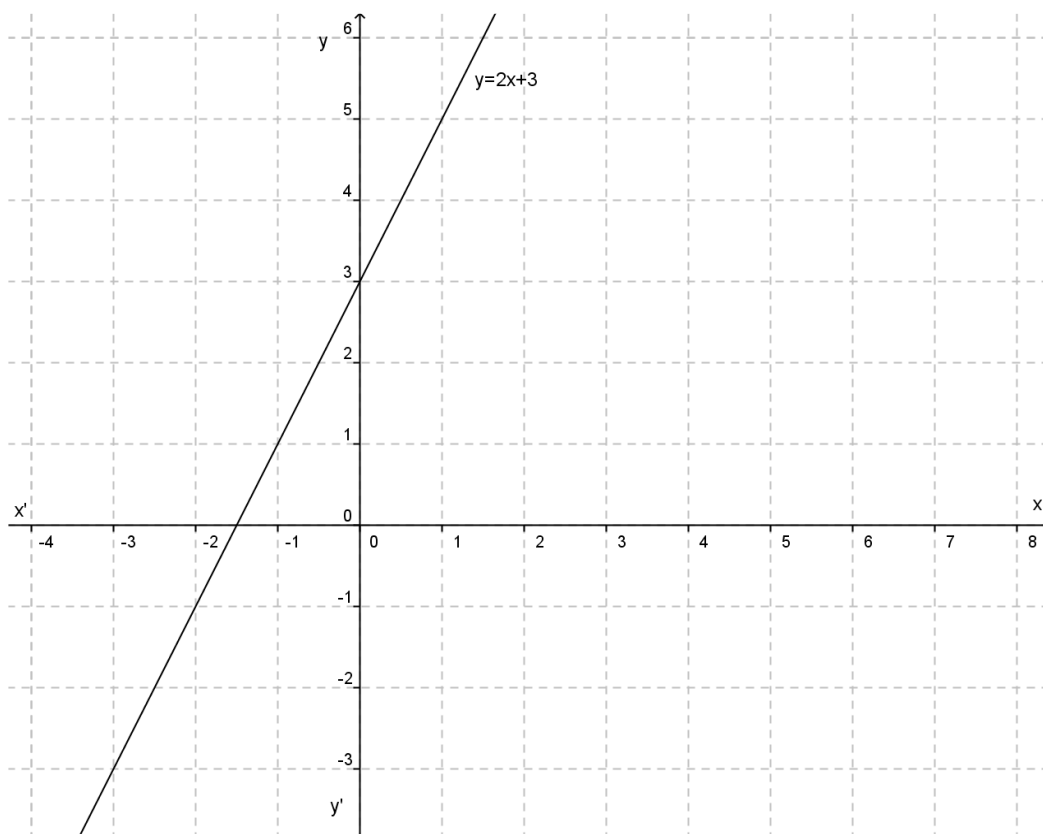
Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

- Φτιάχνουμε πίνακα τιμών
- Σχεδιάζουμε ένα καρτεσιανό επίπεδο
- Τοποθετούμε τα σημεία από τον πίνακα τιμών στο επίπεδο, που φτιάξαμε.
- Με τη σειρά που έχουμε πάρει τα σημεία τα ενώνουμε και η γραμμή που προκύπτει αποτελεί και τη γραφική παράσταση της συνάρτησής μας.

Στην προκύπτει περίπτωση η γραφική μας παράσταση είναι μία ευθεία, αφού το x βρίσκεται στη δύναμη 1. Άρα φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

Θα μπορούσαμε να έχουμε σταματήσει στα δύο πρώτα σημεία, αφού η γραφική μας παράσταση είναι μία ευθεία, και όπως γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία της Α' Γυμνασίου, από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία. Άρα και για αυτόν τον λόγο θα μπορούσαμε να είχαμε σταματήσει στο παραπάνω πινακάκι στις δύο πρώτες στήλες.



Εφαρμογή

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.

Μεθοδολογία

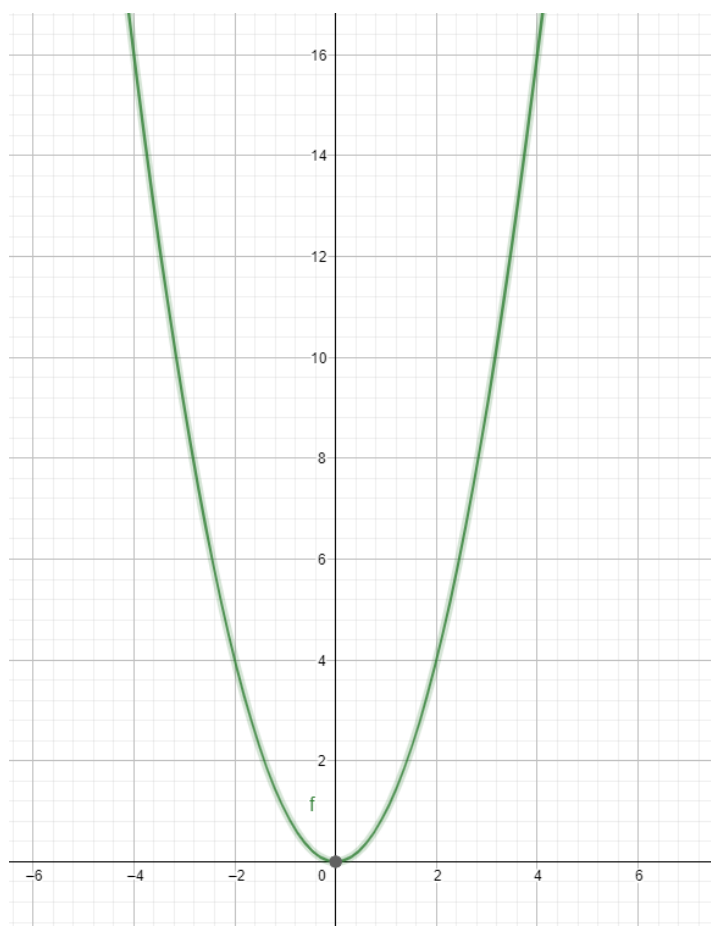
Για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας μη γραμμικής εξίσωσης, δηλαδή η μεταβλητή μας x να είναι υψωμένη σε κάποια δύναμη διαφορετική του 1, κάνουμε τα εξής δύο βήματα.

- Φτιάχνουμε πίνακα τιμών
- Σχεδιάζουμε ένα καρτεσιανό επίπεδο
- Τοποθετούμε τα σημεία από τον πίνακα τιμών στο επίπεδο, που φτιάξαμε.
- Με τη σειρά που έχουμε πάρει τα σημεία τα ενώνουμε και η καμπύλη που προκύπτει αποτελεί και τη γραφική παράσταση της συνάρτησής μας.

Άρα, λοιπον φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Και ενώνουμε το ένα σημείο με το επόμενο του.



Συμμετρικά σημεία

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα συμμετρικά σημεία ενός τυχαίου σημείου $M(x,y)$.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Μεθοδολογία

- Το συμμετρικό του σημείου $M(x,y)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $M(x,-y)$.
- Το συμμετρικό του σημείου $M(x,y)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $M(-x,y)$.
- Το συμμετρικό του σημείου $M(x,y)$ ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι το $M(-x,-y)$.

Σημεία τομής συνάρτησης με τους άξονες

Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας γραφικής παράστασης με τους άξονες, τότε λειτουργούμε ως εξής :

Μεθοδολογία

- Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ βάζουμε στον τύπο της συνάρτησης όπου $y=0$.
- Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ βάζουμε στον τύπο της συνάρτησης όπου $x=0$.

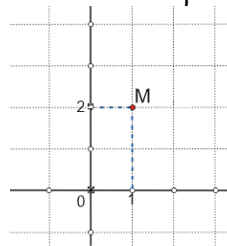
Πότε ένα σημείο είναι σημείο και της συνάρτησης μας

Για να βρούμε πότε ένα σημείο είναι και σημείο της συνάρτησης μας, τότε το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε το x και το y της συνάρτησης μας με τα αντίστοιχα x και y του σημείου που μας δόθηκε. Αν η σχέση που προκύπτει είναι αληθής, τότε το σημείο αυτό ανήκει στην συνάρτησή μας.

Άλυτες Ασκήσεις

3.30 Να γράψετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) και ποιες είναι Λανθασμένες (Λ).

- Αν $K(\alpha, \beta)$ σημείου του καρτεσιανού επιπέδου, τότε τα (α, β) ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου K .
- Αν $K(\alpha, \beta)$ σημείου του καρτεσιανού επιπέδου, τότε το α ονομάζεται τεταγμένη και το β ονομάζεται τετμημένη.
- Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει $y=0$
- Κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει $x=0$
- Το συμμετρικό σημείο του $K(\alpha, \beta)$ ως προς την αρχή των αξόνων είναι το $K'(-\alpha, -\beta)$
- Το συμμετρικό σημείο του $K(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $K'(-\alpha, \beta)$
- Το συμμετρικό σημείο του $K(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $K'(\alpha, -\beta)$
- Αν M είναι το σημείο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $(2, 1)$



3.31 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες:

- Το σημείο $A(-4, 0)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$
- Το σημείο $B(-1, 3)$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο
- Τα σημεία $K(1, 3)$ και $\Lambda(1, -3)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$
- Τα σημεία $K(-2, 3)$ και $\Lambda(-2, 3)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων
- Το σημείο $M(-1, 6)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = -2 \cdot x + 4$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(3, 2)$

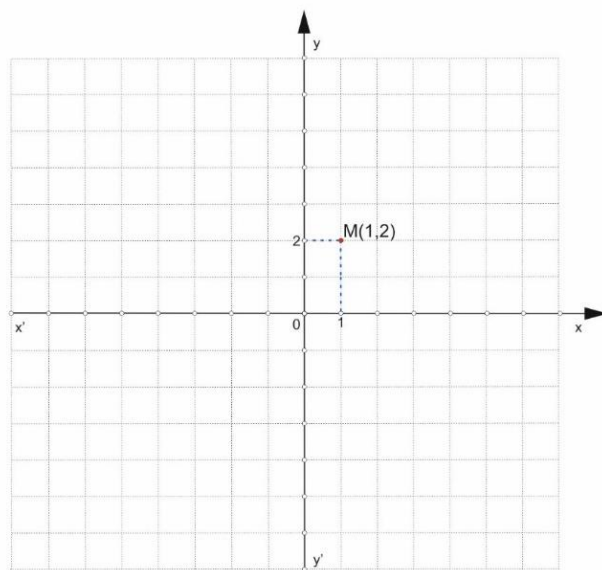
3.32 Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -2x + 1$:

x	-1		1	
y		0		2

Και να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(-1, 3)$ και $B(3, 4)$.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

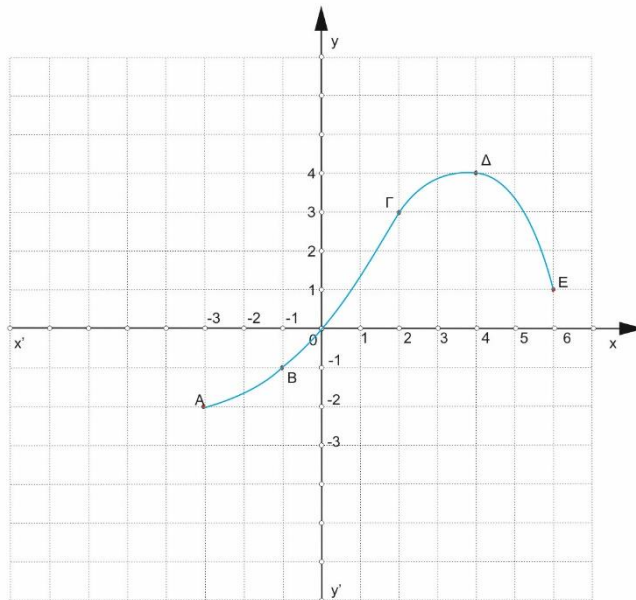
- 3.33** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το σημείο $M(1,2)$ να βρείτε τα συμμετρικά του ως προς
- τον άξονα $x'x$
 - τον άξονα $y'y$
 - την αρχή των αξόνων $O(0,0)$



- δ) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| α) Αν $x=2$ τότε το $y=.....$ | β) Αν $x=-1$ τότε το $y=.....$ |
| γ) Αν $x=-3$ τότε το $y=.....$ | δ) Αν $x=4$ τότε το $y=.....$ |
| ε) Αν $x=6$ τότε το $y=.....$ | |

3.34 Με τη βοήθεια του σχήματος να :



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B,Γ,Δ,E

β) βρείτε την απόσταση των σημείων A και Γ από τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3.35 Δίνεται η ευθεία $y = \left(4 - \frac{2(\mu-1)}{5}\right)x$. Να βρείτε τον αριθμό μ , έτσι ώστε η ευθεία αυτή να είναι ο άξονας $x'x$.

3.36 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $x=2$, $x=-4$, $y=2$ και $y=-6$. Στη συνέχεια :

α) να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνονται ανά δύο οι ευθείες,

β) για το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα παραπάνω σημεία να υπολογίσετε:

- Την περίμετρο,
- Το εμβαδόν
- Τα μήκη των διαγώνιών του.

3.37 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες :

α) $y=2$, όταν $x \geq -1$,

β) $y=-3$, όταν $x \leq 2$,

γ) $x=3$, όταν $y \geq -2$

δ) $x=-2$, όταν $y \leq 3$.

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

3.38 Δίνεται το σημείο $A\left(1 - \frac{2\kappa-6}{8}, 4 - \frac{2(\kappa-1)}{3}\right)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A, αν ξέρετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

3.39 Δίνεται το σημείο $A\left(1 - \frac{2\kappa - 6}{8}, 4 - \frac{2(\kappa - 1)}{3}\right)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A, αν ξέρετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

3.40 Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{a(x-2)}{4} + 2$. Το σημείο $A(-2, -6)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης αυτής. Να βρείτε τον αριθμό a , αλλά και σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3.41 Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{a(2x-3)}{2} + 4$. Το σημείο $A(-1, -4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης αυτής. Να βρείτε τον αριθμό a , αλλά και σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3.42 Δίνεται η συνάρτηση $y = a(x-2) + 3$. Το σημείο $A(3, -4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης αυτής. Να βρείτε τον αριθμό a , αλλά και σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3.43 Δίνεται η συνάρτηση $y = 3x + 3a$. Το σημείο $A(1, 2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης αυτής. Να βρείτε τον αριθμό a , αλλά και σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

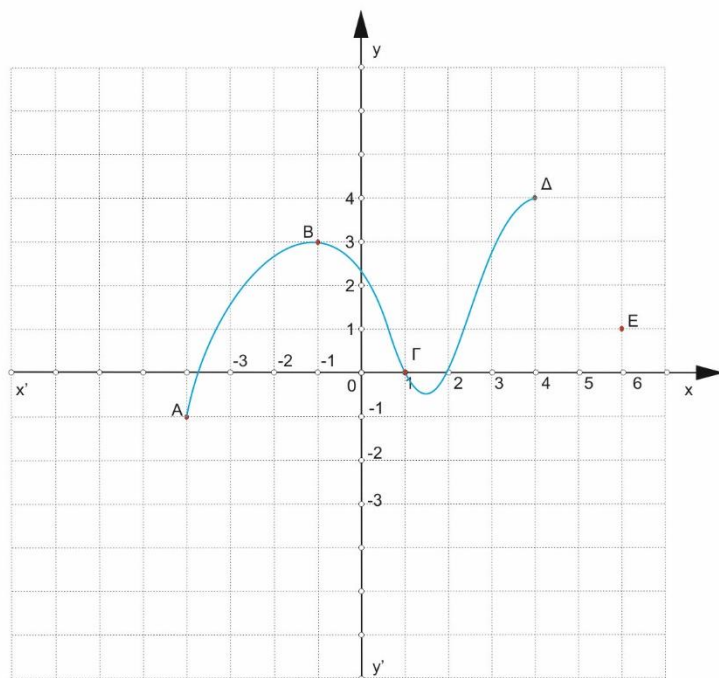
3.44 Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \sqrt{\frac{17}{2}} + \sqrt{\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}} + 1$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = bx - 4b$ διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -1\alpha)$.

- α) Να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι φυσικός αριθμός.
- β) Να βρείτε το b .
- γ) Να βρείτε τον αριθμό v , ώστε το σημείο $N(2v - 5v, 3 - 3v)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

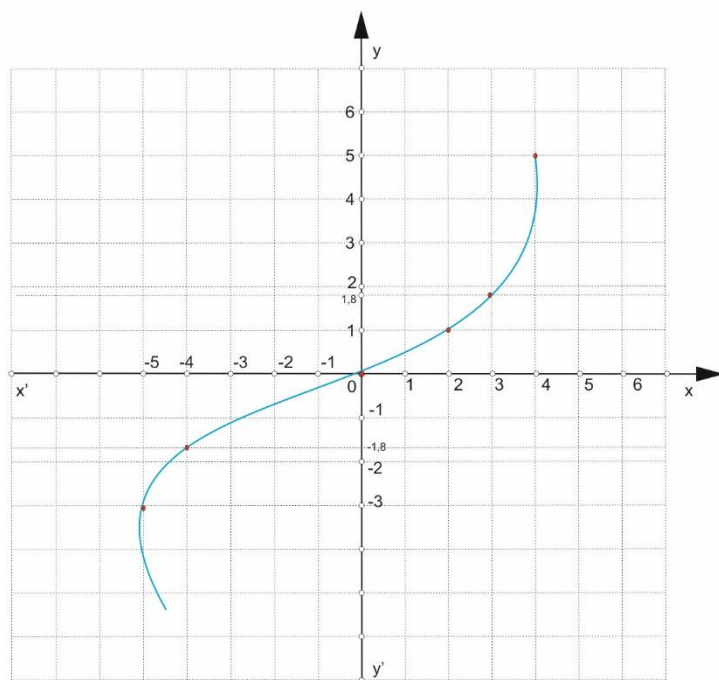
Άσκηση με ιδιαίτερη μαθηματική σκέψη

Σκεφτείτε αν η παρακάτω γραφική παράσταση μπορεί να είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

α)



β)



A.3.3 Η συνάρτηση $y = ax$

Δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο $\frac{y}{x} = a$. Το πηλίκο αυτό το ονομάζουμε κλίση της ευθείας, όπως βλέπουμε παρακάτω.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
- Κλίση της ευθείας $y=ax$, ονομάζεται ο λόγος $\frac{y}{x} = a$, με $x \neq 0$.

Ο άξονας $x'x$ είναι η ευθεία $y=ax$, με $a=0$, δηλαδή η $y=0$.

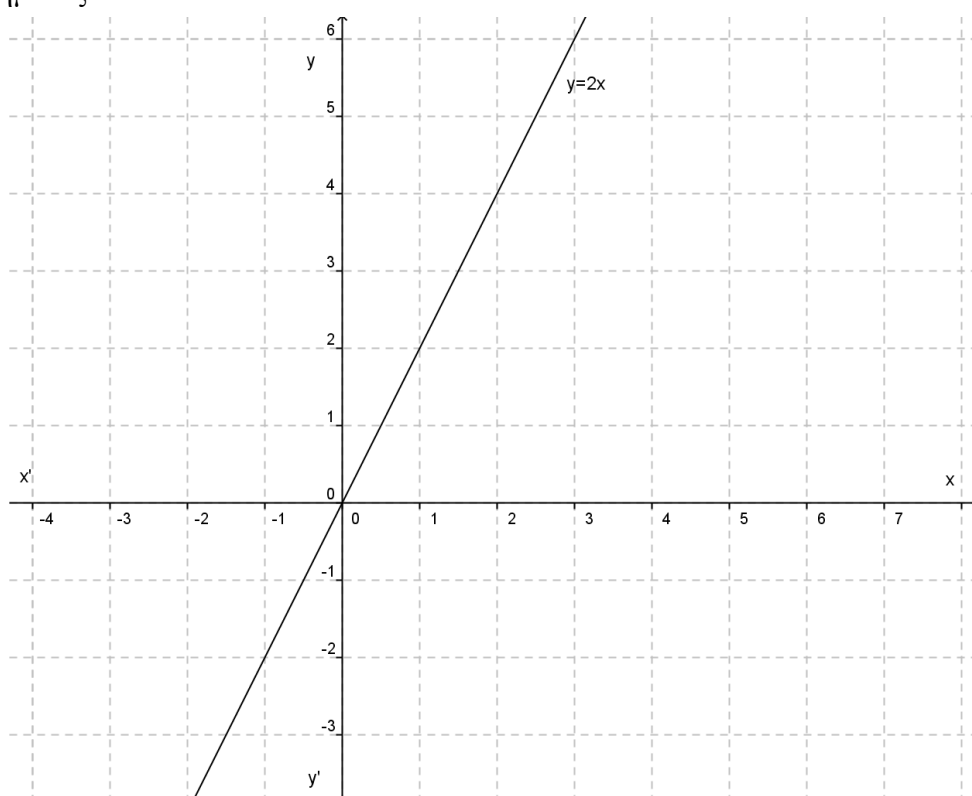
Εφαρμογή

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2x$.

Όσον αφορά τον πίνακα τιμών, μπορούμε να βάλουμε μόνο δύο τιμές, αφού είναι ευθεία.

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

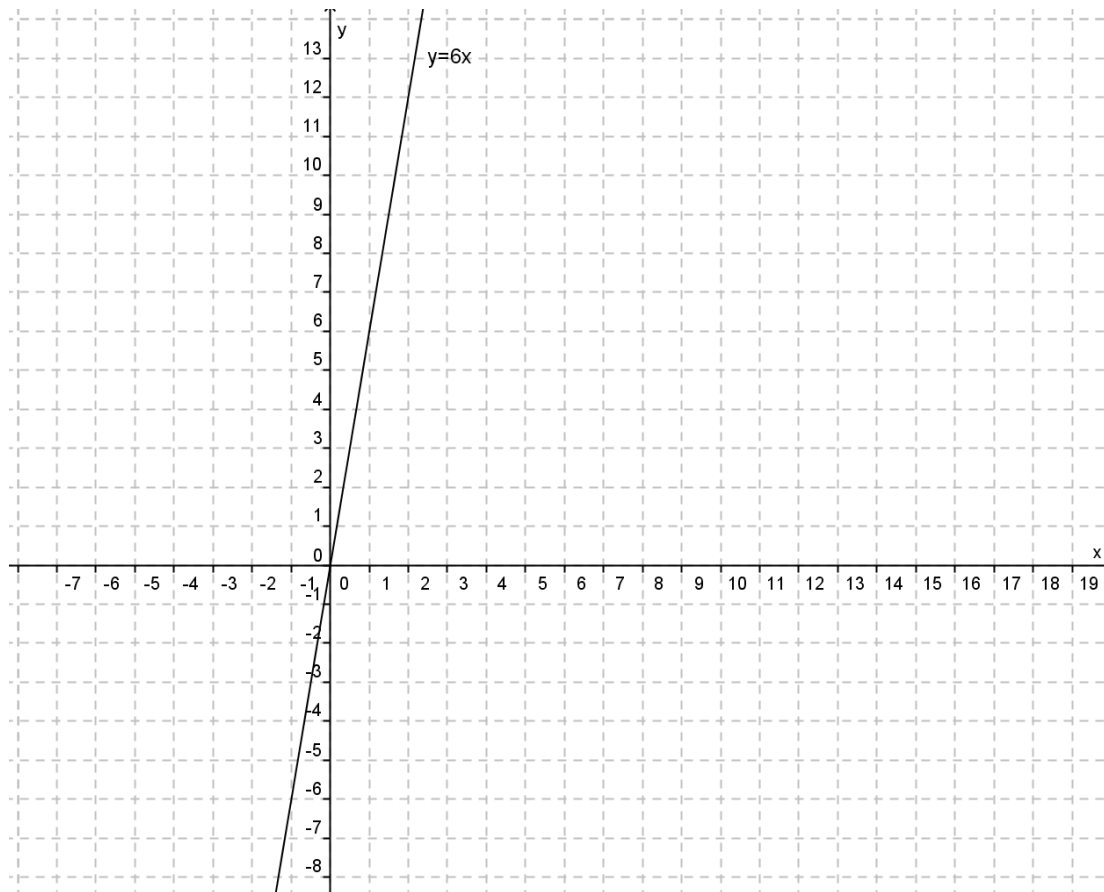
Άρα βάζοντας τα σημεία μας στο καρτεσιανό μας επίπεδο έχουμε το παρακάτω σύστημα αξόνων.



Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $y=ax$. Να βρείτε το a αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησής μας διέρχεται από το $A(1,6)$ και στη διέρχεται να τη σχεδιάσετε.

x	-1	0	1	2
y	-6	0	6	12



Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 71 (Βιβλίο Οργανισμού)

α)

x	1	2	5	7	10
y	3	6	15	21	30

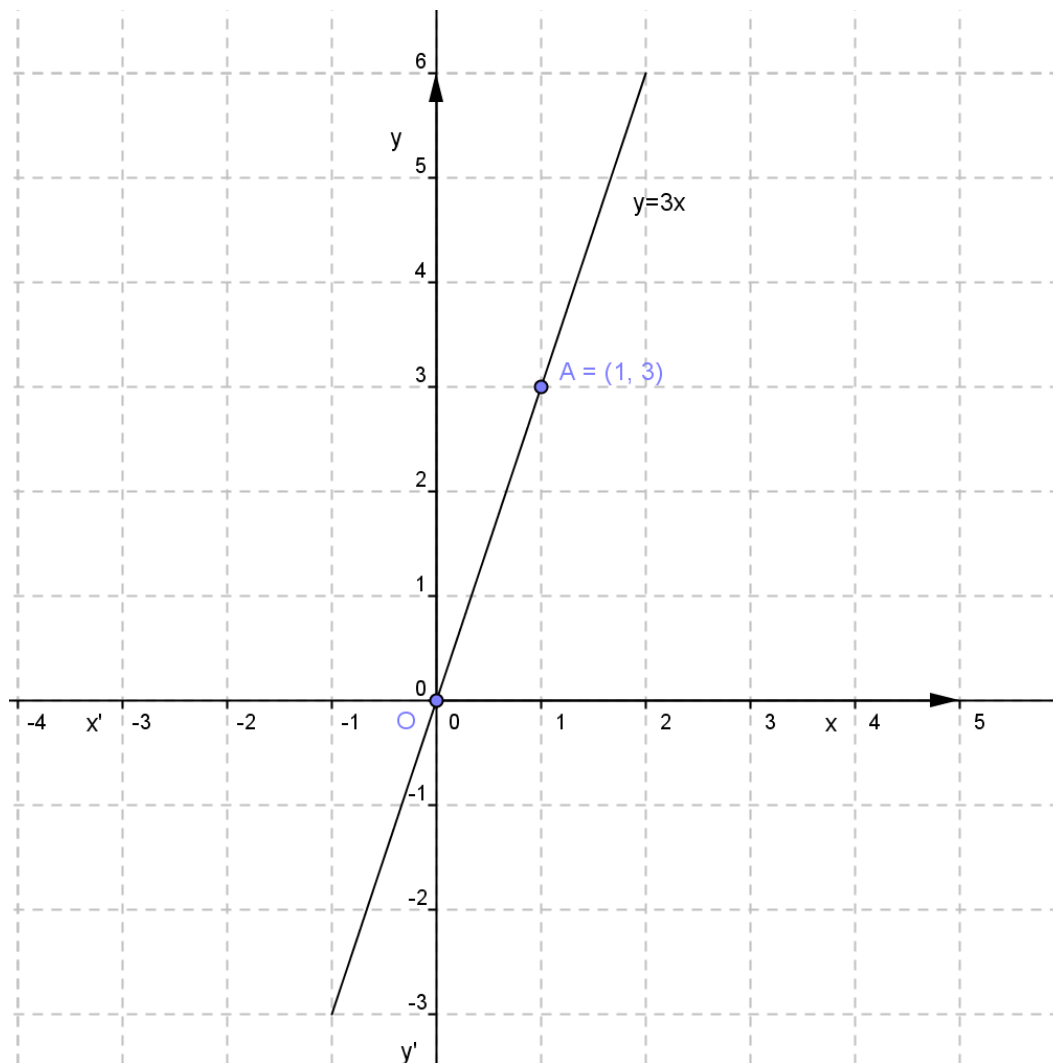
β) Ο λόγος $\frac{y}{x}$ πρέπει να είναι σταθερός και ίσος με $\frac{y}{x} = \frac{6}{2} = 3$

Άρα, συμπληρώνουμε τον πίνακα ώστε το πηλίκο $\frac{y}{x} = 3$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Και η σχέση που συνδέει τα δύο ποσά είναι $y=3x$.

γ)



Άσκηση 5/σελ. 71 (Βιβλίο Οργανισμού)

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A(2,6).

Λύση

Αφού η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε έχει γενική μορφή εξίσωσης $y = ax$

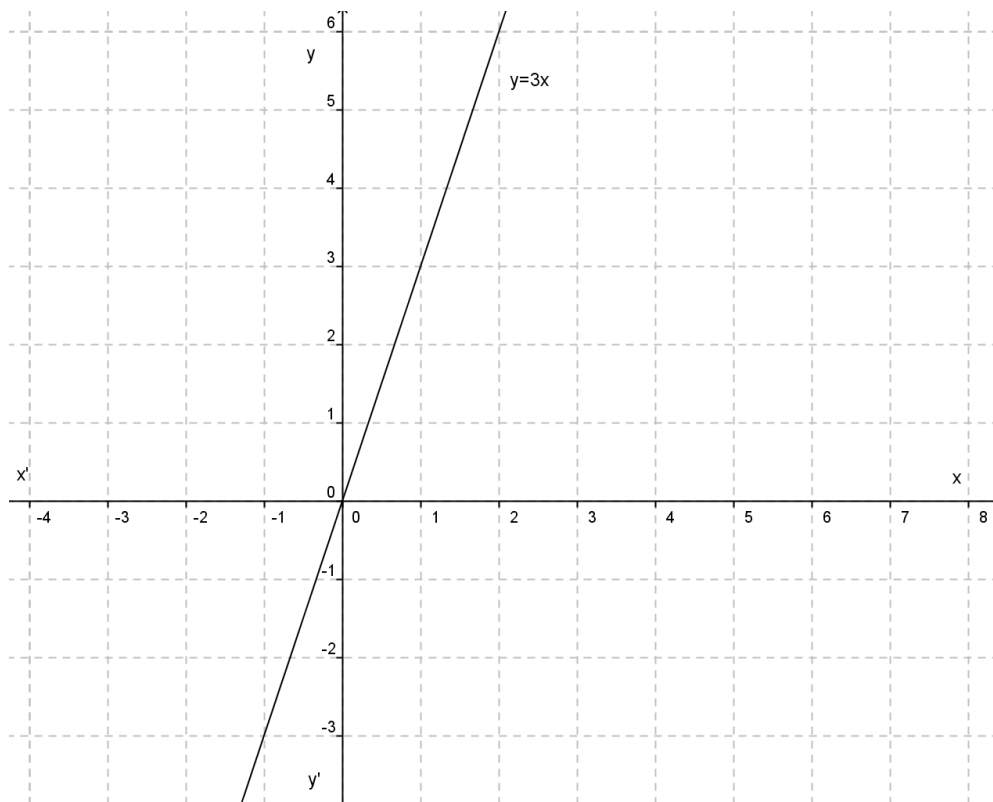
Και αφού διέρχεται από το σημείο A(2,6) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση.

Άρα έχουμε ότι

$$y = ax \Leftrightarrow$$

$$6 = a2 \Leftrightarrow$$

$$a = 3. \text{ Άρα } y=3x$$



Παρατήρηση

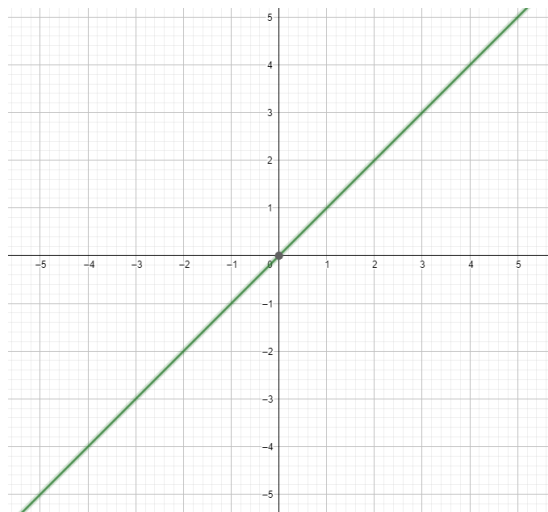
Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η ευθεία $y=ax$ είναι αρκετά αξιοσημείωτη, αφού για κατάλληλο a παίρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου, καθώς και του $2^{\text{ου}}$ και $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου. Αυτό συμβαίνει, καθώς η κλίση, δηλαδή το πηλίκο y/x είναι ίσο με την $\epsilon\phi\omega$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον άξονα $x'x$ και την ευθεία μας. Άρα στην $1^{\text{η}}$ περίπτωση έχουμε ότι η $\epsilon\phi\omega$ είναι ίση με 1. Αν θυμηθούμε λίγο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα δούμε ότι η $\epsilon\phi\omega=1$ όταν η $\omega = 45^\circ$. Άρα χωρίζει τη γωνία

$\hat{xOy} = 90^\circ$ «στη μέση».

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Πιο συγκεκριμένα,

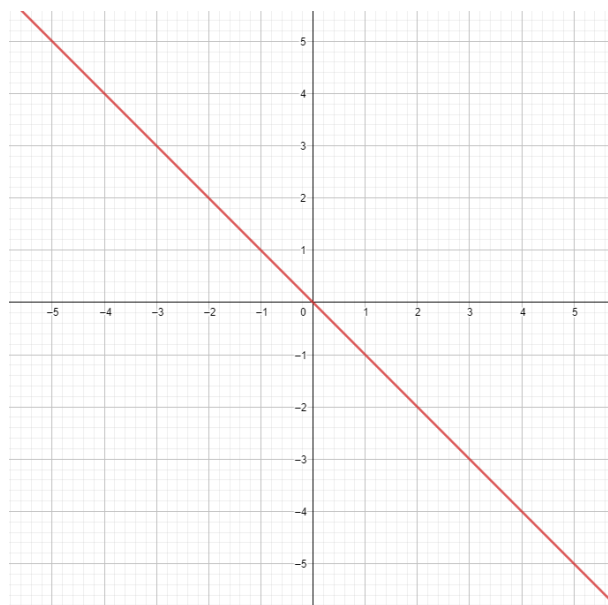
- Αν το $\alpha=1$, τότε παίρνουμε την ευθεία $y=x$, η οποία είναι η διχοτόμος της γωνίας του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου.



Αντίστοιχα στην $2^{\text{η}}$ περίπτωση έχουμε ότι η εφω είναι ίση με -1 . Αν θυμηθούμε λίγο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα δούμε ότι η $\varepsilon\varphi\omega=-1$ όταν η $\omega=135^{\circ}$.

Άρα χωρίζει τη γωνία $\hat{yOx'} = 90^{\circ}$ «στη μέση».

- Αν το $\alpha=-1$, τότε παίρνουμε την ευθεία $y=-x$, η οποία είναι η διχοτόμος της γωνίας του $2^{\text{ου}}$ και $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου.



Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι η ευθεία $y=ax$ διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, ανεξαρτήτως της κλίσης της.

Άλυτες Ασκήσεις

3.45 Αν τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	1	2	
y			4	10

Και να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

3.46 Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση που βρήκατε στην 3.45

3.47 Αν τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	1	2	
y		3		12

Και να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε.

3.48 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Η ευθεία με εξίσωση $y=ax$, με $a>0$ βρίσκεται στο 1ο - 3ο τεταρτημόριο.

β) Η ευθεία με εξίσωση $y=ax$, με $a<0$ βρίσκεται στο 2ο - 4ο τεταρτημόριο.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax$ είναι μία ευθεία που δεν διέρχεται από την

αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

δ) Η ευθεία $y=-9x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

ε) Ο αριθμός a ονομάζεται κλίση της ευθείας $y=ax$, με $x \neq 0$.

3.49 Να βρείτε την κλίση των παρακάτω ευθειών

i) $y=5\sqrt{2}x$ ii) $y=-14x$ iii) $y=\sqrt{2}x$ iv) $y=\frac{\sqrt{32}}{4}$ v) $y=5x$ vi)

$y=0$

3.50 Να βρείτε την ευθεία (ε) που περνάει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $B(4,8)$.

3.51 Να βρείτε την ευθεία (ε) που περνάει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $B(6,18)$.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

3.52 Να βρείτε την ευθεία (ε) που περνάει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και έχει κλίση 3.

3.53 Να βρείτε την ευθεία (ε) που περνάει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $B(4,-8)$.

3.54 Αν τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	2	10	20	
y		5		30

Και να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

3.55 Αν τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	1	2	5	
y		4		14

Και να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

3.56 Να παραστήσετε γραφικά τις παραστάσεις:

α) $y=3x$ β) $y=x$ γ) $y=-x$ δ) $y=\frac{3}{2}x$ ε) $y=\frac{5}{2}x$

3.57 . Να βρείτε την κλίση των παρακάτω ευθειών

α) $y=15x$ β) $y=-4x$ γ) $y=-\frac{3}{2}x$ δ) $y=-\frac{3}{2}x$ ε) $y=0$

Ασκήσεις Αυξημένης Δυσκολίας

3.58 Δίνεται η ευθεία $y = \left(4 - \frac{2(\mu-1)}{5}\right)x$. Να βρείτε τον αριθμό μ , έτσι ώστε η ευθεία αυτή να είναι ο άξονας $x'x$.

3.59 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες $x=2$, $x=-4$, $y=2$ και $y=-6$. Στη συνέχεια, :

α) να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνονται ανά δύο οι ευθείες,

β) για το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα παραπάνω σημεία να υπολογίσετε :

- Την περίμετρο,
- Το εμβαδόν
- Τα μήκη των διαγώνιών του.

3.60 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες :

α) $y=2$, όταν $x \geq -1$,

β) $y=-3$, όταν $x \leq 2$,

γ) $x=3$, όταν $y \geq -2$

δ) $x=-2$, όταν $y \leq 3$.

3.61 Το σημείο $M(6,12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha(x+3)}{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι το $\alpha=4$.

β) Να βρείτε το σημείο τομής A της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $y'y$.

δ) Να υπολογίσετε την απόσταση AB .

3.62 Αν ξέρετε ότι τα ποσά x, y είναι να ανάλογα, τότε :

i) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών :

x	1	3		
y		9	12	30

ii) Να εκφράσετε το x ως συνάρτηση του y .

iii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

3.63 Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{5}{2}x$.

i) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών :

x	-4	-2	0	2	4
y					

ii) Να εκφράσετε το x ως συνάρτηση του y .

iii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

3.64 Αν ξέρετε ότι τα ποσά x, y είναι να ανάλογα, τότε :

i) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών :

x	1	-2	3	4			
y			9		18	-27	33

ii) Να εκφράσετε το x ως συνάρτηση του y .

iii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

3.65 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις $y=0.5x$ και $y=-0.5x$.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

3.66 Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A(-4,-8).

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
- β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

3.67 Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A(2,8).

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
- β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

3.68 Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A(4,2).

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
- β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

3.69 Δίνεται ότι η ευθεία $y = \frac{4-5\cdot\beta}{3} \cdot x$, διέρχεται από το σημείο A(3,-21).

- i. Να αποδείξετε ότι το $\beta = -5$.
- ii. Να βρείτε την κλίση της ευθείας

3.70 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, που έχει περίμετρο 10cm, βάση BΓ= x cm και AB=AG= y cm. Τότε το y ως συνάρτηση του x είναι :

i) $y=10-x$ ii) $y = \frac{10-x}{2}$ iii) $y= 10-2x$ iv) $y=5-x$

Άσκηση με συνδυαστική μαθηματική σκέψη

3.71 Δίνεται η ευθεία : $y=(4-2\lambda)x$

Να βρείτε τον αριθμό λ, αν η ευθεία αυτή :

- α) διέρχεται από το σημείο A(-4,-8)
- β) έχει κλίση -6
- γ) είναι ο άξονας x'x
- δ) είναι η διχοτόμος της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων
- ε) είναι η διχοτόμος της 2^{ης} και 4^{ης} γωνίας των αξόνων.

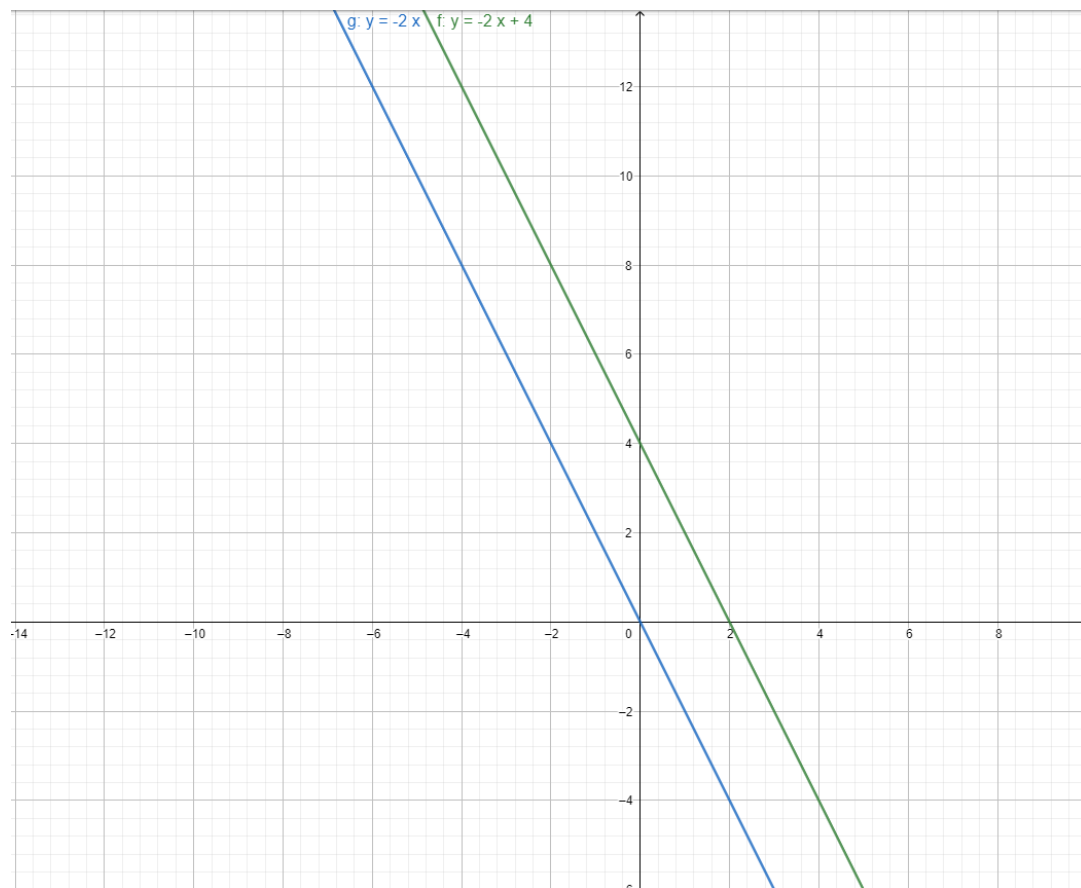
A.3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Είναι ευθεία που **δεν** περνάει από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το $O(0,0)$. Το a και εδώ ονομάζεται κλίση της ευθείας, αλλά δεν το βρίσκουμε με το πηλίκο y/x καθώς τα ποσά μας δεν είναι ανάλογα.

- Η ευθεία $y=ax+\beta$ είναι μία ευθεία που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=ax$.

Γενικά, πρέπει να αναφέρουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν την ίδια κλίση.

Ας δούμε τώρα πως μοιάζει μία τέτοια ευθεία στο καρτεσιανό μας επίπεδο.



Σχέση ευθειών στο επίπεδο

Δύο ευθείες στο ίδιο επίπεδο μπορούν :

- να τέμνονται
- να είναι παράλληλες και
- να ταυτίζονται

Για να είναι παράλληλες θα πρέπει να έχουν την ίδια κλίση, όπως

$$\varepsilon_1 : y = \frac{1}{2}x \text{ και } \varepsilon_2 : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{12}$$

Για να τέμνονται απλά θα πρέπει να έχουν διαφορετικές κλίσεις

$$\varepsilon_1 : y = -3x \text{ και } \varepsilon_2 : y = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Για να ταυτίζονται απλά θα πρέπει να είναι ίδιες.

$$\varepsilon_1 : y = -3x \text{ και } \varepsilon_2 : y = -\frac{6}{2}x + 5$$

Σημείωση, για να βρούμε το σημείο τομής ουσιαστικά πρέπει να «βάλουμε» την μία ευθεία μέσα στην άλλη, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Εφαρμογή

Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1 : y = 2x$ και $\varepsilon_2 : y = 3x - 4$.

Λύση

Έστω το σημείο τομής $A(x, y)$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 : y = 2x \\ \varepsilon_2 : y = 3x - 4 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3x - 4 \Rightarrow 2x - 3x = -4 \Rightarrow x = 4$$

Και επειδή μιλάμε για σημείο τομής, θα πρέπει να βρούμε και το αντίστοιχο y , δηλαδή την τεταγμένη του σημείου.

Άρα παίρνουμε όποια από τις δύο επιθυμούμε και βρίσκουμε την τιμή του y .

$$\varepsilon_1 : y = 2x = 2 \cdot 4 = 8. \text{ Άρα το σημείο τομής είναι } A(4, 8).$$

Ευθεία της μορφής $ax + by = \gamma$

Όταν μας δίνουν της ευθείας σε διαφορετική μορφή από εκείνη που έχουμε συνηθίσει, τότε για να βρούμε την κλίση της και την «μορφή» της, την φέρνουμε στη μορφή που ξέρουμε, λύνοντάς την ως προς y .

Εφαρμογή

Να βρεθεί η κλίση της ευθείας : $2x + 3y = 12$

Λύση

$$2x + 3y = 12 \Rightarrow 3y = -2x + 12 \Rightarrow y = \frac{-2x + 12}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Άρα η κλίση της ευθείας θα είναι $-2/3$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που δεν περνάει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$.

Λύση

Αφού είναι ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει τύπο:

$$y = ax + \beta$$

Αφού έχει κλίση 2 το $a=2$

Άρα η συνάρτηση παίρνει τη μορφή : $y = 2x + \beta$

Αφού διέρχεται από το $(1, 3)$ βάζουμε όπου $x=1$ και όπου $y=3$ στον τύπο

$$3 = 2 \cdot 1 + \beta$$

$$3 = 2 + \beta$$

$$3 - 2 = \beta$$

$$\beta = 3 - 2$$

$$\beta = 1$$

άρα η συνάρτηση έχει τύπο $y = 2x + 1$

Η διαδικασία για τον σχεδιασμό της ευθείας $y = ax + \beta$ είναι ίδια με τη διαδικασία που είδαμε για την ευθεία $y = ax$.

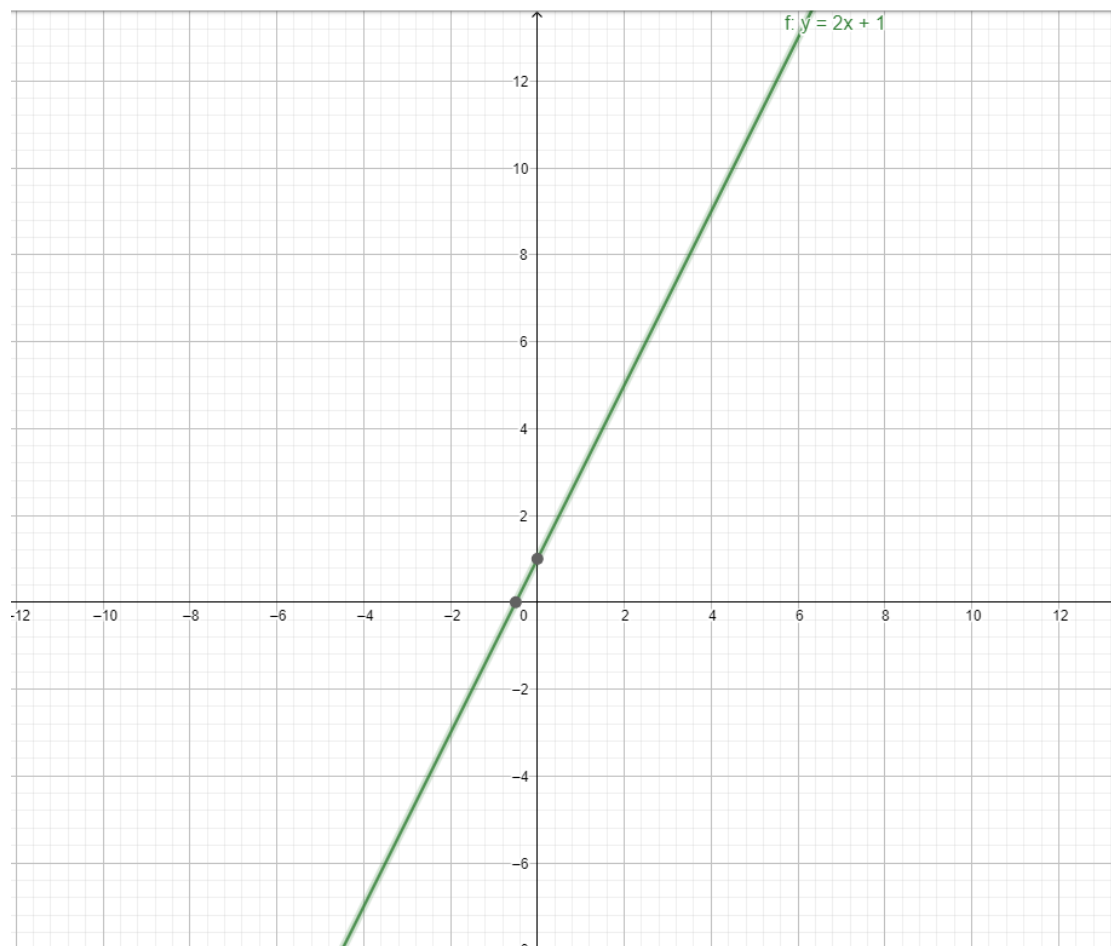
Εφαρμογή

Να σχεδιαστεί η ευθεία $y = 2x + 1$.

Λύση

Επειδή είναι ευθεία μας αρκούν 2 σημεία, αλλά για περισσότερη εξάσκηση στους πίνακες τιμών ας πάρουμε περισσότερα.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5



Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

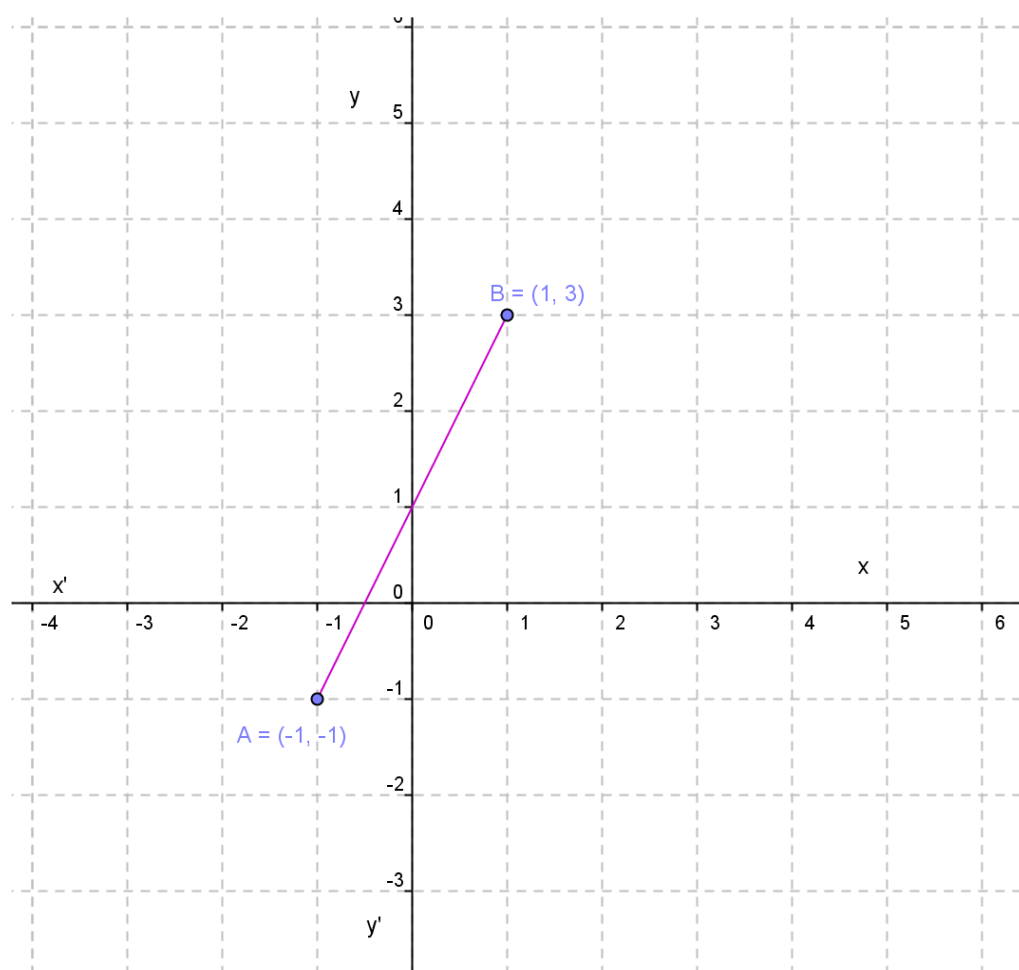
Όταν σχεδιάζουμε μία γραφική παράσταση, το x ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς. Αν περιορίσουμε, όμως τη μεταβλητή μας x , τότε θα αλλάξει η γραφική μας παράσταση.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την παραπάνω συνάρτηση αλλά αντί το x να ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς θα ανήκει σε ένα κομμάτι τους, σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών όπως λέμε σε μεγαλύτερες τάξεις.

Άρα αντί το $x \in \mathbb{R}$, θα πάρουμε $x \in [-1, +1]$

Θυμίζουμε ότι η χρησιμοποίηση της αγκύλης, σημαίνει ότι στο σύνολό μας συμπεριλαμβάνονται τα άκρα του συνόλου, δηλαδή το -1 και το $+1$.

Ας δούμε, λοιπόν τι παθαίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησής μας με τον περιορισμό αυτόν.



Βλέπουμε ότι από ευθεία, γίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB.

Σημεία τομής με τους άξονες

- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας συνάρτησης με τον άξονα x' , θέτουμε όπου $y=0$, γιατί πάνω στον άξονα x' , όλα τα σημεία έχουν τεταγμένη 0.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την παραπάνω συνάρτηση $y = 2x + 1$.

Θέτω $y = 0$ άρα $0 = 2 \cdot x + 3$, άρα λύνοντας την εξίσωση θα πάρουμε ότι το $x = -\frac{3}{2}$.

Άρα το σημείο τομής της συνάρτησης $y = 2x + 1$ με τον άξονα $x'x$, είναι το $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

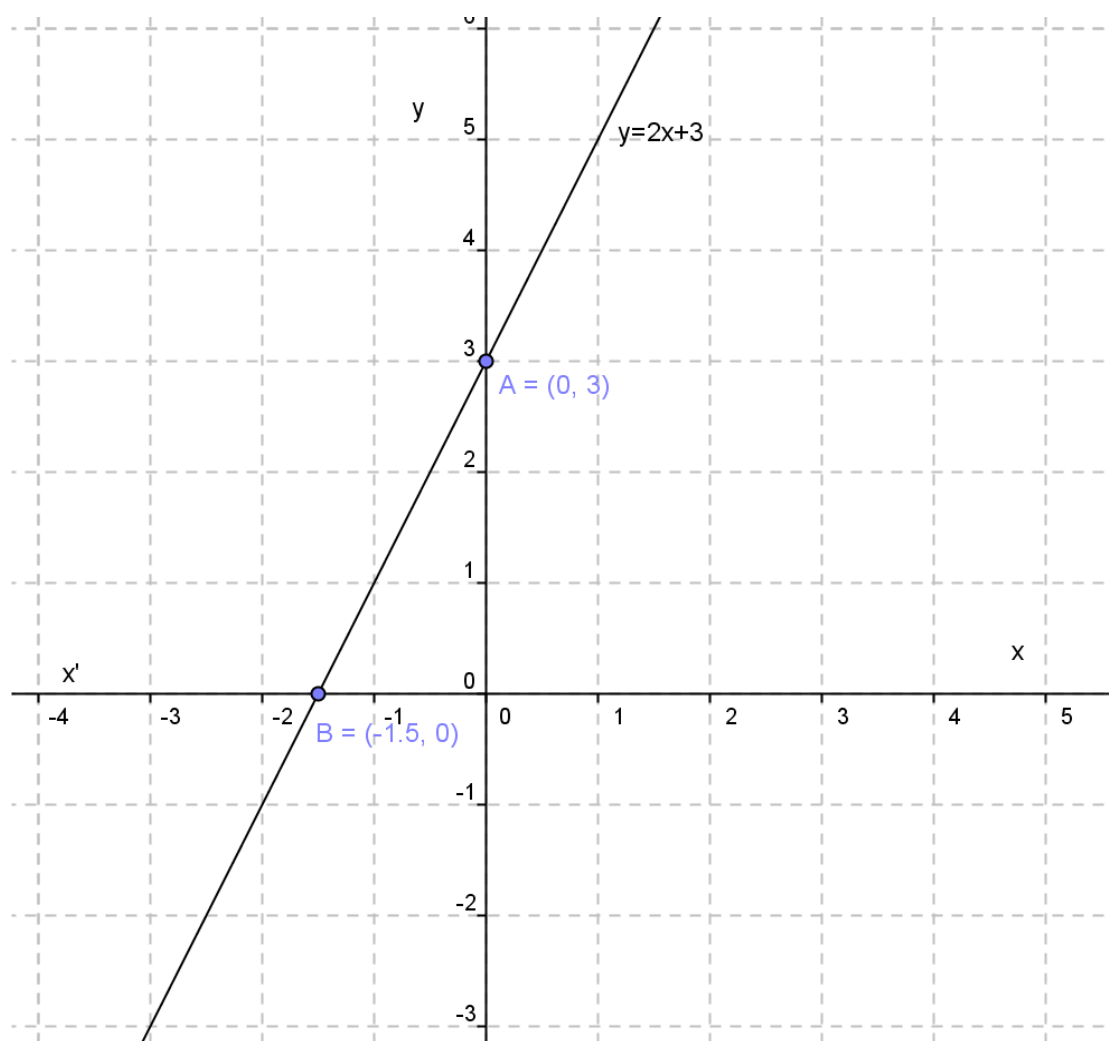
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας συνάρτησης με τον άξονα $y'y$, θέτουμε όπου $x=0$, γιατί πάνω στον άξονα $y'y$, όλα τα σημεία έχουν τετμημένη 0.

Ας ξανά χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $y = 2x + 1$.

Θέτω $x=0$ άρα $y = 2 \cdot 0 + 3$, άρα λύνοντας την εξίσωση θα πάρουμε ότι το $y = +3$.

Άρα το σημείο τομής της συνάρτησης $y = 2x + 1$ με τον άξονα $y'y$, είναι το $(0, 3)$

Στο γράφημά μας, τα παραπάνω σημεία φαίνονται ως εξής:



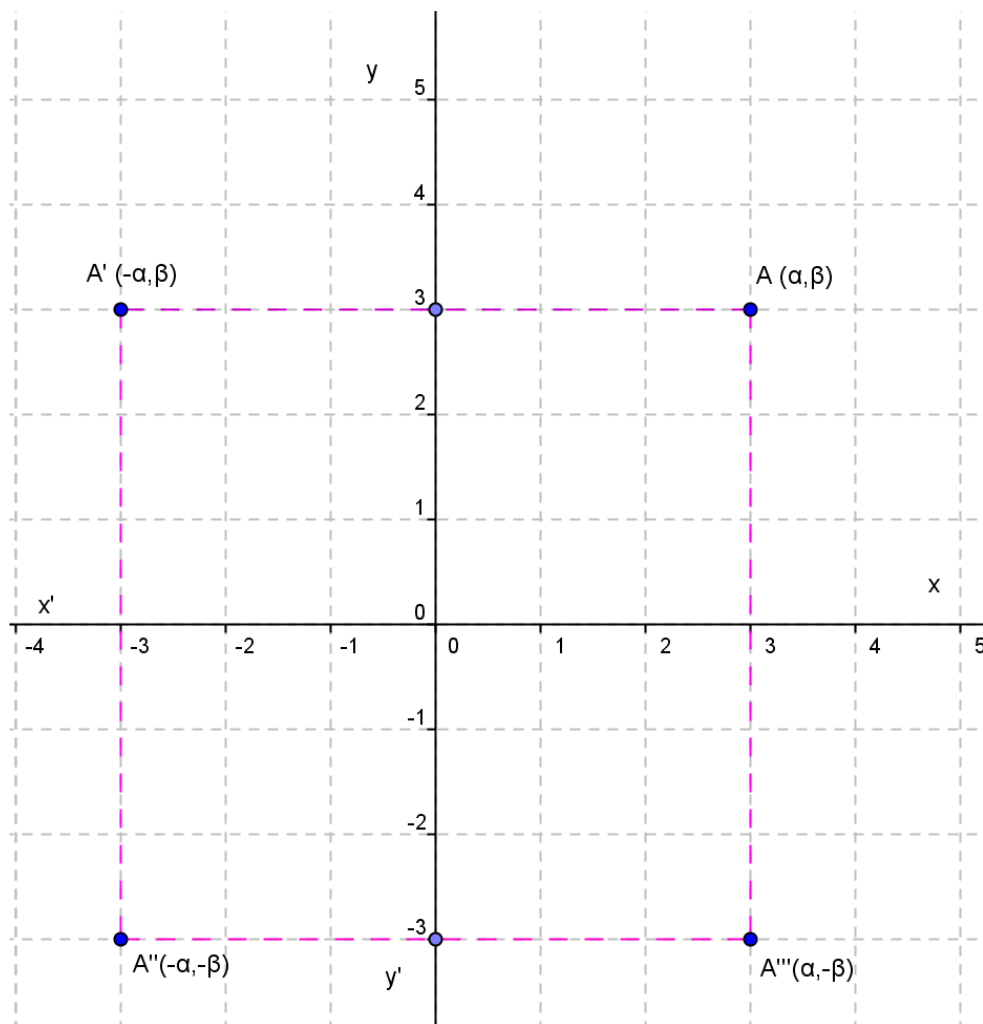
Συμμετρικά σημεία

- Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το :
 $A''(\alpha, -\beta)$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Δηλαδή ίδιο x αντίθετο y

- Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα yy' είναι το :
 $A'(-\alpha, +\beta)$
 Δηλαδή αντίθετο x και ίδιο y
- Το συμμετρικό του A ως προς το $O(0,0)$ – αρχή των αξόνων είναι το :
 $A''(-\alpha, -\beta)$ δηλαδή αντίθετο x αντίθετο y



Άλυτες Ασκήσεις

3.72 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις $y=2x$, $y=2x+2$, $y=2x-1$.

3.73 Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής Α, Γ της ευθείας ε με τους άξονες αντίστοιχα.
- β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε.
- γ) Να χαράξετε την ευθεία ε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ΟΑΓ που σχηματίστηκε.

3.74 Να βρείτε την απόσταση των σημείων που τέμνει η ευθεία $y=2x+3$ τους άξονες.

3.75 Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία η κλίση της ευθείας $y = \frac{1-2\kappa}{12}x + 2$ να είναι ίση με 8.

3.76 Από τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y=3-2(x+\alpha)$.

- i) Να βρείτε τον αριθμό α.
- ii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	4		0		2	
y	1	15		0		21

3.77 Το σημείο $M(6,12)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha(x+3)}{3}$

- α) Να αποδείξετε ότι το $\alpha=4$.
- β) Να βρείτε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $x'x$.
- γ) Να βρείτε το σημείο Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $y'y$.
- δ) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ.

3.78 Μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-4,9)$ και έχει κλίση 3. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

3.79 Μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(2,8)$ και έχει κλίση 2. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

3.80 Μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(3,5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x$.

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
- β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

3.81 Η ευθεία $y=ax+\beta$, είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$ και διέρχεται από το σημείο $A(2,9)$. Να βρείτε :

α) τους αριθμούς a και β ,

β) τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

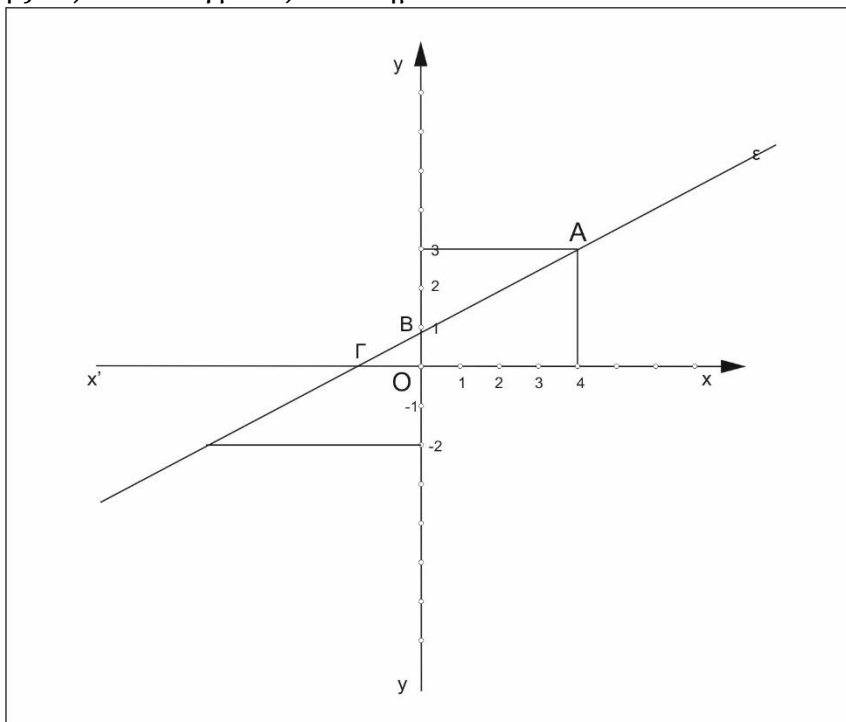
γ) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3.82 Δίνονται οι ευθείες $y=-2x$ και $y=(\lambda+5)x+5$. Να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

3.83 Δίνεται η ευθεία ε στο διπλανό σύστημα ορθογώνιων αξόνων. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της ευθείας ε ,

β) τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ .



3.84 Η ευθεία $y=ax+\beta$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-\frac{x}{3}$ και διέρχεται από το

σημείο $M(-3,3)$. Να βρείτε :

α) τους αριθμούς a και β ,

β) τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$,

γ) το σημείο της παραπάνω ευθείας του οποίου η τετμημένη είναι τριπλάσια της τεταγμένης.

3.85 Δίνεται η ευθεία :

$$y = \left(\frac{2\mu}{10} - \frac{\mu-2}{3} \right) x + \left(\frac{\mu+4}{3} + \frac{4}{2} \right) y = 20$$

Να βρείτε τον αριθμό μ και να σχεδιάσετε την ευθεία όταν :

α) η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

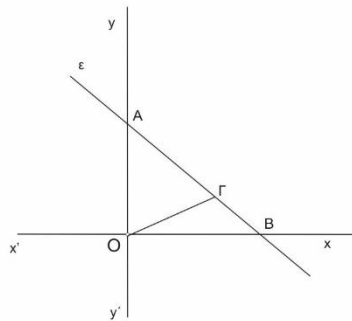
β) η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

Αυξημένης Δυσκολίας Ασκήσεις

3.86 Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x + 9$. Επίσης το

εμβαδόν του τριγώνου $\triangle OAB$ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle OBG$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .



3.87 Αν η ευθεία $\zeta : y = \left(2k - \frac{1}{2} \right) x + m - 2$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε , που

έχει εξίσωση $\varepsilon : y = 2x + 6$ και περνάει από το σημείο $A(2,3)$, να βρείτε τους αριθμούς k, m .

Το σημείο $A(-\lambda+2, 4\lambda-1)$, όπου το λ είναι θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος αξόνων Oxy . Να βρεθούν :

α) ο θετικός ακέραιος λ ,

β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA και

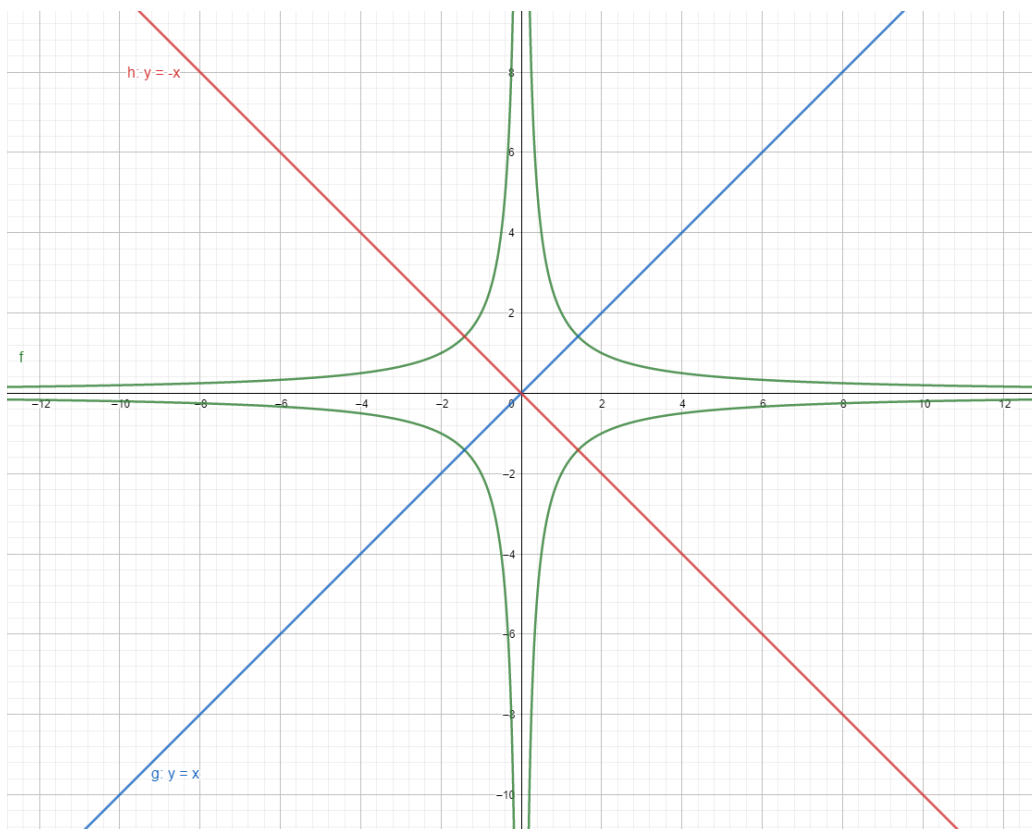
γ) το εμβαδόν του τετράπλευρου $OBA\Gamma$, όπου B, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο A στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα.

Διαγωνισμός ΕΜΕ «Ο Θαλής 2008» Γ Γυμνασίου

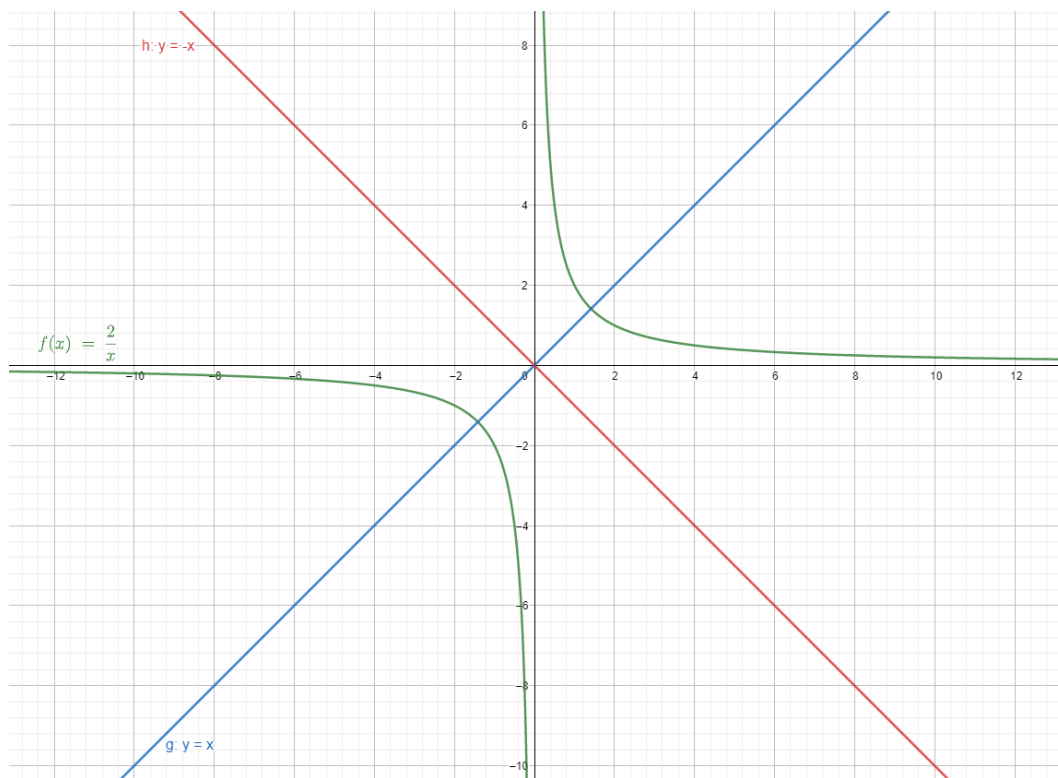
A.3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

Δύο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό. Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο γινόμενο $y \cdot x = \alpha$.

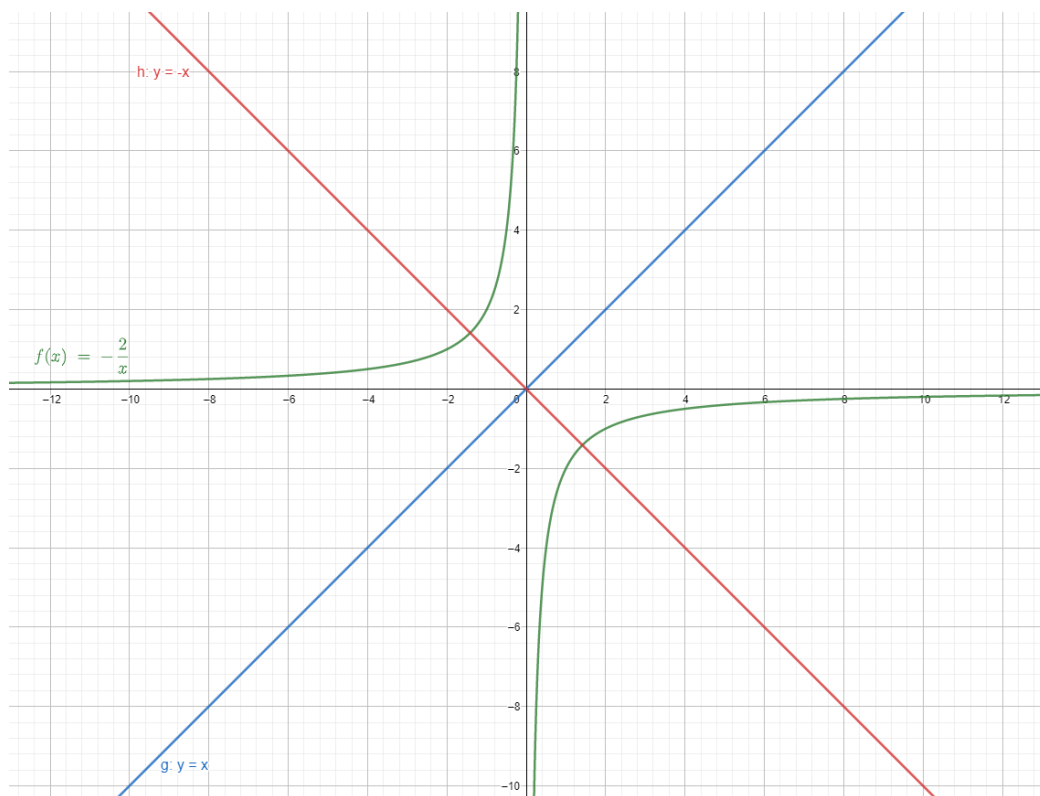
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι καμπύλη που ονομάζεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους ανάλογα αν το α είναι θετικό ή αν το α είναι αρνητικό.
 - ❖ Αν το $\alpha > 0$ τότε η καμπύλη βρίσκεται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο των αξόνων.
 - ❖ Αν το $\alpha < 0$ τότε η καμπύλη βρίσκεται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο των αξόνων.
- Η υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων $y=x$ και $y=-x$.



Για παράδειγμα ας δούμε την γραφική παράσταση της υπερβολής $y = +\frac{2}{x}$, αλλά και τους άξονες συμμετρίας της.



Και την γραφική παράσταση της υπερβολής $y = -\frac{2}{x}$, αλλά και τους άξονες συμμετρίας της.



Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Εφαρμογή

Εξετάστε αν τα ποσά x , y του πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα

x	2	4	10	40
y	10	5	2	$\frac{1}{2}$

Λύση

$$y \cdot x = 2 \cdot 10 = 20$$

$$y \cdot x = 4 \cdot 5 = 20$$

$$y \cdot x = 10 \cdot 2 = 20$$

$$y \cdot x = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Παρατηρούμε ότι έχουν σταθερό γινόμενο $x \cdot y = 20 = a$, άρα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα είναι $y = \frac{20}{x}$.

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{\lambda - 1}{x}$. Να βρεθεί το λ αν η συνάρτηση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$

Λύση

Για να διέρχεται από αυτό το σημείο βάζουμε όπου $y=2$ και το $x=1$

$$2 = \frac{\lambda - 1}{1}$$

$$2 \cdot 1 = \lambda - 1$$

$$2 = \lambda - 1$$

$$2 + 1 = \lambda$$

$$\lambda = +3$$

Άρα η συνάρτηση μας είναι η $y = \frac{2}{x}$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 82 (Βιβλίο Οργανισμού)

Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

Αφού τα ποσά είναι ανάλογα αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο τους είναι σταθερό
δηλαδή $x \cdot y = 3 \cdot 4 = 12$

Άρα συμπληρώνουμε τον πίνακα.

Άσκηση 2/σελ. 82 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $y = \frac{3}{x}$ β) $y = \frac{5}{x}$ γ) $y = \frac{20}{x}$

Λύση

Κάνουμε τους πίνακες τιμών των συναρτήσεων:

α)

x	-3	-1	1	3	6
y	-1	-3	3	1	$\frac{1}{2}$

β)

x	-5	-1	1	5
y	-1	-5	5	1

γ)

x	-5	-4	4	5
y	-4	-5	5	4

Και σχεδιάζουμε τις τρεις υπερβολές



Άλυτες Ασκήσεις

3.88 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{4}{x}$.

3.89 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{3}{x}$.

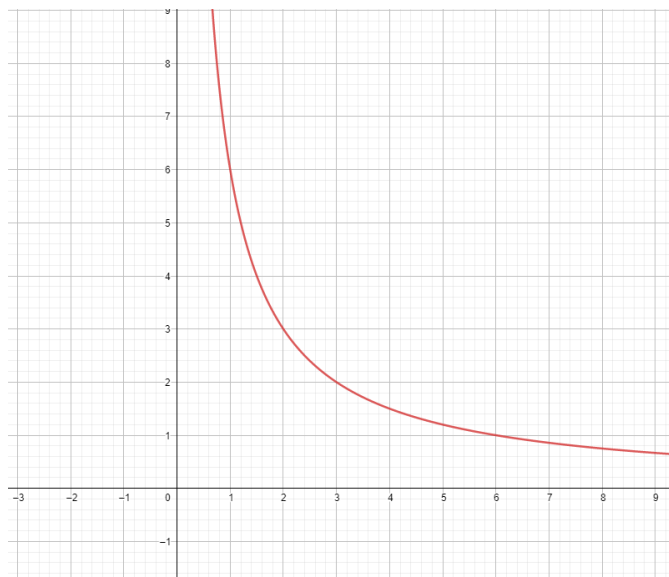
3.90 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{x}$.

3.91 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{1}{3x}$.

3.92 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{1}{3x}$.

3.93 Δίνεται η υπερβολή $y = \frac{\lambda + 1}{x}$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$. Να βρείτε το λ και τον τύπο της συνάρτησης.

3.94 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τον ένα κλάδο από την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$.



Αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο $N(x,y)$ πάνω στη γραφική παράσταση της υπερβολής και τις προβολές του σημείου αυτού, τότε θα σχηματιστεί ένα ορθογώνιο ΝΑΟΒ.

- α) Να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΝΑΟΒ ως προς x .
- β) Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΝΑΟΒ.

3.95 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Η $y = \frac{4}{x}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$
- β) Η $y = -\frac{4}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο
- γ) Η $y = \frac{5}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο
- δ) Η $y = -\frac{5}{x}$ βρίσκεται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο
- ε) Η $y = -\frac{5}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y=x$
- στ) Η $y = -\frac{5}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y=-x$
- ζ) Η $y = \frac{8}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y=x$

Επαναληπτικές ασκήσεις 3^{ου} κεφαλαίου

Α. Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Τα ποσά x και y της συνάρτησης $y = ax$ είναι μεταξύ τους.....

2. Η γραφική παράσταση δυο ανάλογων ποσών είναι.....που διέρχεται από

3. Οι συντεταγμένες του σημείου της αρχής των αξόνων είναι.....

4. Η ευθεία $x=0$ είναι ο άξονας.....

5. Ενώ η ευθεία $y=0$ είναι ο άξονας.....

6. Η συνάρτηση $y=ax+\beta$, $\beta \neq 0$ έχει γραφική παράσταση μία

7. Οι ευθείες $y = 2x + 4$ και $y = 2x$ είναι μεταξύ τους.....

8. Το a στην ευθεία $y=ax$ λέγεται.....

9. Η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο.....

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$ λέγεταικαι είναι μίαπου αποτελείται από δύο.....που βρίσκονται στο.....και στο.....τεταρτημόριο όταν $a > 0$ και στοκαι στο.....τεταρτημόριο όταν $a < 0$

B. Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α) Η κλίση της ευθείας $2x+4y=8$ είναι ο αριθμός:

A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ Γ. -4 Δ. +8

β) Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $y = 3x$ και διέρχεται από το σημείο A(4,0) είναι η:

A. $y = 3x + 4$ B. $y = 3x + 3$ Γ. $y = 3x - 12$ Δ. $y = 3x + 12$

γ) Από τα σημεία που δίνονται ποιο δεν ανήκει στην ευθεία $y = 4x + 1$;

A. (0,1) B. (-1,-3) Γ. (2,-9) Δ. (3,13)

δ) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 4$ και $\varepsilon_2 : x = 4$ αντίστοιχα. Τότε:

A. η ε_1 είναι οριζόντια και η ε_2 κατακόρυφη.

B. η ε_2 είναι οριζόντια και η ε_1 κατακόρυφη.

Γ. είναι παράλληλες

Δ. τέμνονται στο σημείο K(4,-4)

ε) Ο πίνακας τιμών

x	-2	0	2
y	-1	3	7

αντιστοιχεί στην συνάρτηση:

A. $y = -2x$ B. $y = 2x + 3$ Γ. $y = x^2$ Δ. $y = -\frac{10}{x}$

στ) Το συμμετρικό σημείο του σημείου A(-1,-2) ως προς τον άξονα x'x είναι:

A. Το σημείο (1,2)

B. Το σημείο (-1,2)

Γ. Το σημείο (1,-2)

Δ. Το σημείο (-1,-2)

ζ) Το σημείο A($\mu-4, \lambda+4$) βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο όταν:

A. $\mu > 4$ και $\lambda > -4$

B. $\mu < 4$ και $\lambda > -4$

Γ. $\mu > 4$ και $\lambda < -4$

Δ. $\mu < 4$ και $\lambda < -4$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Γ. Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Δίνεται η ευθεία $y = 4x - 2$

α) να τη σχεδιάσετε

β) να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

2. Δίνονται οι ευθείες $y = 2x + 6$ και $y = 3x - 1$

α) να βρεθεί το σημείο Α στο οποίο τέμνονται (χωρίς να τις σχεδιάσετε)

β) να βρεθούν οι αποστάσεις του σημείου Α από:

Τον άξονα $x'x$

Τον άξονα $y'y$

Την αρχή των αξόνων

γ) να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$, αν διέρχεται από το σημείο Α και

στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

3. Αν για 5 κιλά πατάτες πληρώνουμε 6,50 ευρώ, να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε για 8 κιλά πατάτες. Στη συνέχεια να εκφράσετε την αξία y της πατάτας ως συνάρτηση του βάρους x .

4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 4x$ και $y = -\frac{1}{4}x$

5. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$ όταν:

α) ο x είναι πραγματικός αριθμός

β) ο x είναι πραγματικός αριθμός με $0 \leq x \leq 3$

6. Δίνεται η συνάρτηση $y = ax$. Να βρείτε το a , αν η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο Α(-2,6). Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

7. Μία ευθεία ϵ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(4,-8).

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή.

β) Να βρείτε ποιά συνάρτηση έχει την ευθεία αυτή για γραφική παράσταση.

8. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες:

α) $y = x - 1$, $y = x$, $y = x + 1$

β) $y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 1$

Τί παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;

8. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -3$, $y = 0$, $y = +3$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τι παρατηρείτε;

9. Να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:

$\alpha) y = 3$

$\beta) x = -1$

$\gamma) x = 2$

$\delta) y + 3 = 0$

$\varepsilon) x + y = 0$

Ποιές από αυτές είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;

10. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$\alpha) y = 2x - 1$, όταν ο x είναι πραγματικός και ανήκει στο διάστημα $-2 \leq x \leq 1$

$\beta) y = -2$, όταν ο x είναι πραγματικός και ανήκει στο διάστημα $-2 \leq x \leq 2$

11. Να βρείτε την κλίση καθεμιάς από τις παρακάτω ευθείες:

$\alpha) y = 2x - 3$

$\beta) y = -2x - 1$

$\gamma) 4y - 2x = 12$

$\delta) -3x + 2y = -4$

$\varepsilon) -3x + 2y = -5$

$\sigma\tau) 4x - 2y = -6$

Στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία που οι παραπάνω ευθείες τέμνουν τους άξονες.

Κριτήριο αξιολόγησης συναρτήσεων (60 λεπτά)

Θέμα Α

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες:

- α) στη συνάρτηση $y = 3x - 1$, το y παίρνει την τιμή 0 όταν $x = -3$.
- β) το σημείο $(0, -9)$ βρίσκεται στον $y'y$.
- γ) το σημείο $(-2, -2)$ βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο.
- δ) το σημείο $(-1, -1)$ είναι το συμμετρικό σημείο του $(1, 1)$ ως προς το $O(0, 0)$.
- ε) η ευθεία $y = -4x - 4$ έχει κλίση το 4.
- στ) η ευθεία $2x + 2y = -4$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ζ) οι ευθείες $y = 5x$ και $y = 5x + 4$ είναι παράλληλες.
- η) το σημείο $A(-2, 1)$ ανήκει στην ευθεία $y = -x + 2$.
- θ) η ευθεία $y = -2$ είναι παράλληλη στον $y'y$.
- ι) η ευθεία $x = 1$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

Θέμα Β

Β.1 Ποιός είναι ο τύπος της απόστασης δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και

$B(x_2, y_2)$; Βρείτε την απόσταση των σημείων $A(-2, -3)$ και $B(-4, -6)$.

Β.2 Έστω ένα σημείο $B(\alpha, \beta)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του A ως προς:

- i) Τον άξονα $x'x$
- ii) Τον άξονα $y'y$
- iii) Την αρχή των αξόνων

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με κλίση -4 , που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.

- α) Να βρείτε το α .
- β) Να βρείτε το β .
- γ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα $x'x$.
- δ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα $y'y$.
- ε) Να κάνετε την γραφική της παράσταση για $x \geq 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\lambda - 1)x + 1$, διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.

α) Να υπολογίσετε το λ .

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης, όταν:

- i. $-2 \leq x \leq 4$
- ii. x : πραγματικός αριθμός

Περιγραφική Στατιστική



Κεφάλαιο 4^ο Περιγραφική Στατιστική

Στατιστική

Ονομάζεται ο κλάδος των μαθηματικών, που ασχολείται με την έρευνα, συλλογή και επεξεργασία (στατιστικών) δεδομένων.

4.1 Βασικές έννοιες της στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

Πληθυσμός ονομάζεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς ένα χαρακτηριστικό τους.

Αυτό το χαρακτηριστικό ονομάζεται μεταβλητή.

Για παράδειγμα

Εξετάζουμε τους μαθητές της Β' Γυμνασίου όλων των σχολείων της Ελλάδας. Αυτός ο πληθυσμός μπορεί να εξεταστεί ως προς την μεταβλητή

Για παράδειγμα

Ποιο είναι το αγαπημένο τους μάθημα ή τι βαθμό έχουν στα μαθηματικά.

Μία μεταβλητή μπορεί να είναι ποσοτική ή ποιοτική:

- ✓ Ποσοτική: εάν είναι αριθμός, όπως πόσα αδέρφια έχουν οι μαθητές μιας τάξης, ή ποιο είναι το ύψος τους, ή ποιο είναι το βάρος τους.
- ✓ Ποιοτική: εάν δεν είναι αριθμός, όπως χρώμα ματιών, ομάδα ποδοσφαίρου, αγαπημένο είδος ταινίας.

Δείγμα ονομάζεται ένα μέρος του πληθυσμού που μελετάμε γιατί συνήθως είναι δύσκολο και οικονομικά και πρακτικά να εξετάσουμε ολόκληρο τον πληθυσμό.

Για παράδειγμα

Να εξεταστούν μόνο οι μαθητές - αγόρια της Β' Γυμνασίου όλων των σχολείων της Ελλάδας.

- Μέγεθος του δείγματος ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων που αποτελούν το δείγμα.
- Όταν επιλέγουμε ένα δείγμα πρέπει να γίνεται κατάλληλα ώστε να είναι όσο πιο αντιπροσωπευτικό γίνεται. Πρέπει να είναι αντικειμενικό, επαρκές στο πλήθος, έγκυρο, επίκαιρο.

Η συγκέντρωση των στατιστικών δεδομένων γίνεται με:

Απογραφή όπου συγκεντρώνονται στοιχεία από όλα τα άτομα ενός πληθυσμού σε μία καθορισμένη ημερομηνία. π. χ. αν εξετάσουμε τον πληθυσμό μιας χώρας.

Διαρκής εγγραφή γίνεται καθημερινά σε υπηρεσίες όπως τα ληξιαρχεία όπου δηλώνονται οι γάμοι, οι γεννήσεις κτλ.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Δειγματοληψία γίνεται όταν συλλέγουμε στοιχεία μόνο από ένα μέρος του πληθυσμού, δηλαδή ένα δείγμα και βγάζουμε συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.

Για παράδειγμα

Τις Ελληνίδες γυναίκες να τις εξετάσουμε ως προς τις προτιμήσεις τους σε προορισμό διακοπών.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 88 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογίσετε χωρίς μολύβι και χαρτί:

α) το 100% του 72 είναι το 72

β) το 50% του 60 είναι το 30

γ) το 25% του 80 είναι το 20

δ) το 10% του 70 είναι το 7

ε) το 20% του 80 είναι το 16

στ) το 72% του 100 είναι το 72

Άσκηση 5/σελ. 88 (Βιβλίο Οργανισμού)

Σε μία έρευνα που έγινε σε 2000 άτομα οι 300 ήταν νέοι κάτω των 25 ετών. Τι ποσοστό του δείγματος αντιπροσωπεύει ο αριθμός αυτός;

Λύση

Το ποσοστό είναι ο λόγος:

$$\frac{300}{2000} = \frac{3}{20} = 0,15 = \frac{15}{100} = 15\%$$

Άρα το ποσοστό των νέων κάτω από 25 ετών αντιπροσωπεύει το 15% του δείγματος.

Κριτήριο αξιολόγησης (10 λεπτά)

Θέμα Α

α) Με ποιους τρόπους γίνεται η συγκέντρωση των στατιστικών δεδομένων; Περιγράψτε τον κάθε έναν από αυτούς.

β) Σε μία έρευνα που έγινε για το ποιό είναι το αγαπημένο μέρος διακοπών των Ελλήνων, ρωτήθηκαν 1.000 Έλληνες από την Αθήνα και τη Θήβα.

Θέμα Β

Να συμπληρωθούν τα κενά:

Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:.....

Η μεταβλητή της έρευνας είναι:.....

Το δείγμα της έρευνας είναι:.....

Είναι αξιόπιστο το δείγμα; Δικαιολογήστε.

Άλυτες Ασκήσεις

4.1 Να υπολογίσεις με το νου:

- α) το 100% του 80
- β) το 50% του 50
- γ) το 25% του 120
- δ) το 10% του 90
- ε) το 20% του 70
- στ) το 48% του 100

4.2 Να υπολογίσετε:

- α) το 25% του 235
- β) το 30% του 3000
- γ) το 45% του 900
- δ) το 30% του 60
- ε) το 5% του 5025

4.3 Σε μία έρευνα που έγινε σε 15.000 άτομα, τα 2.500 ήταν παιδιά κάτω των 12 ετών. Τι ποσοστό του δείγματος αντιπροσωπεύει ο αριθμός αυτός;

4.4 Σε μία δημοσκόπηση που έγινε αναφορικά με το είδος μουσικής που ακούν οι μαθητές του γυμνασίου μας, 50 μαθητές απάντησαν ότι προτιμούν τη <<ροκ>> μουσική, 35 μαθητές προτιμούν την <<κλασική>> μουσική και 45 μαθητές προτιμούν την <<ποπ>> μουσική. Ποιά είναι τα ποσοστά κάθε είδους μουσικής σε αυτή την δημοσκόπηση;

4.2 Γραφικές Παραστάσεις

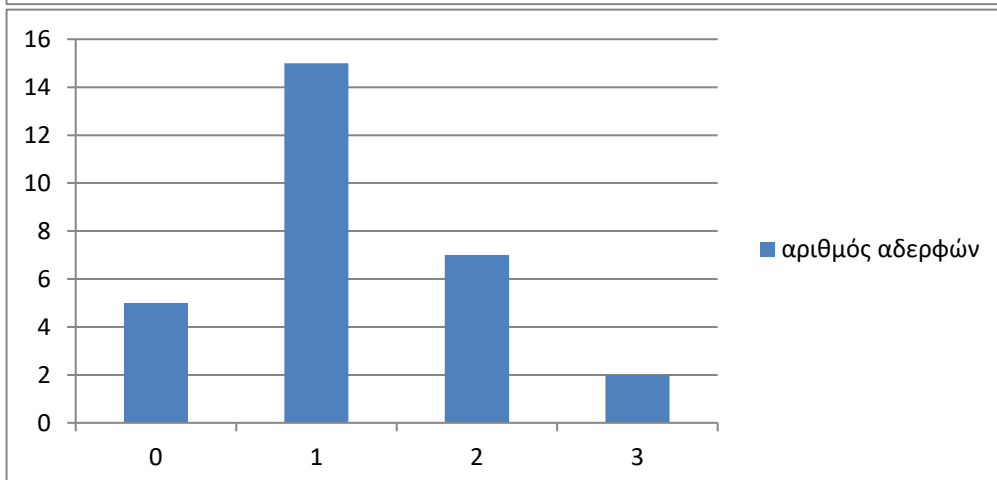
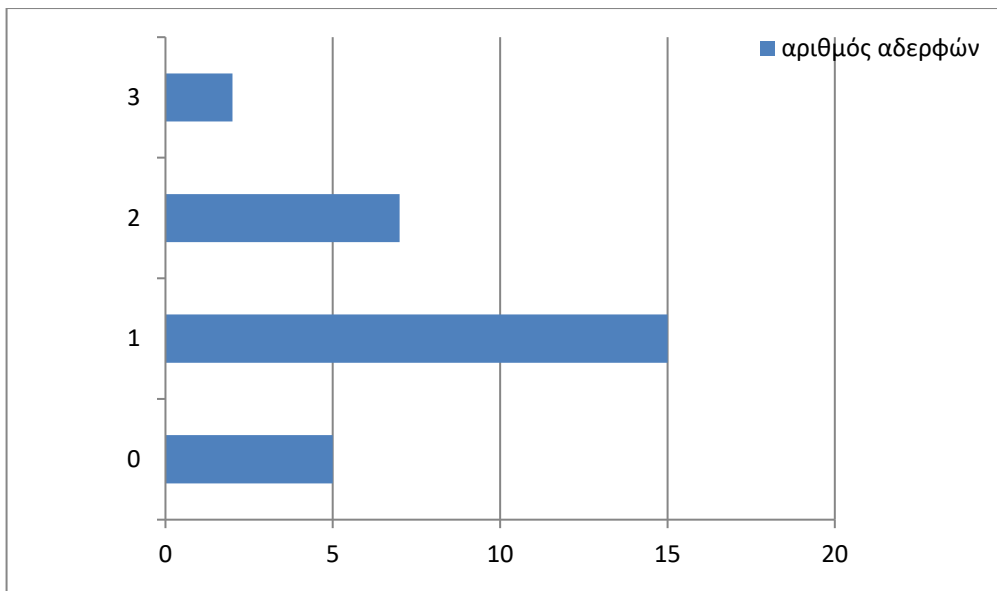
Τα στατιστικά δεδομένα τα παρουσιάζουμε με γραφικές παραστάσεις - διαγράμματα, όπου φαίνονται με σύντομο και ευδιάκριτο τρόπο τα αποτελέσματα της έρευνας. Τα διαγράμματα αυτά είναι:

Τα εικονογράμματα:

Εδώ χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές εμφανίζεται αυτό στην έρευνά μας.

Τα ραβδογράμματα:

Εδώ οι πληροφορίες δίνονται με ορθογώνια ή ράβδους ίσου πλάτους και μπορεί να είναι τοποθετημένες είτε οριζόντια είτε κάθετα.



Τα κυκλικά διαγράμματα: για να κάνουμε το κυκλικό διάγραμμα πρέπει να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες. Το πλήθος των ατόμων του δείγματος αντιστοιχίζεται στη πλήρη γωνία του κύκλου 360^0 .

Άρα για μηδέν αδέρφια :

στα 29 παιδιά τα 5 δεν έχουν αδέρφια

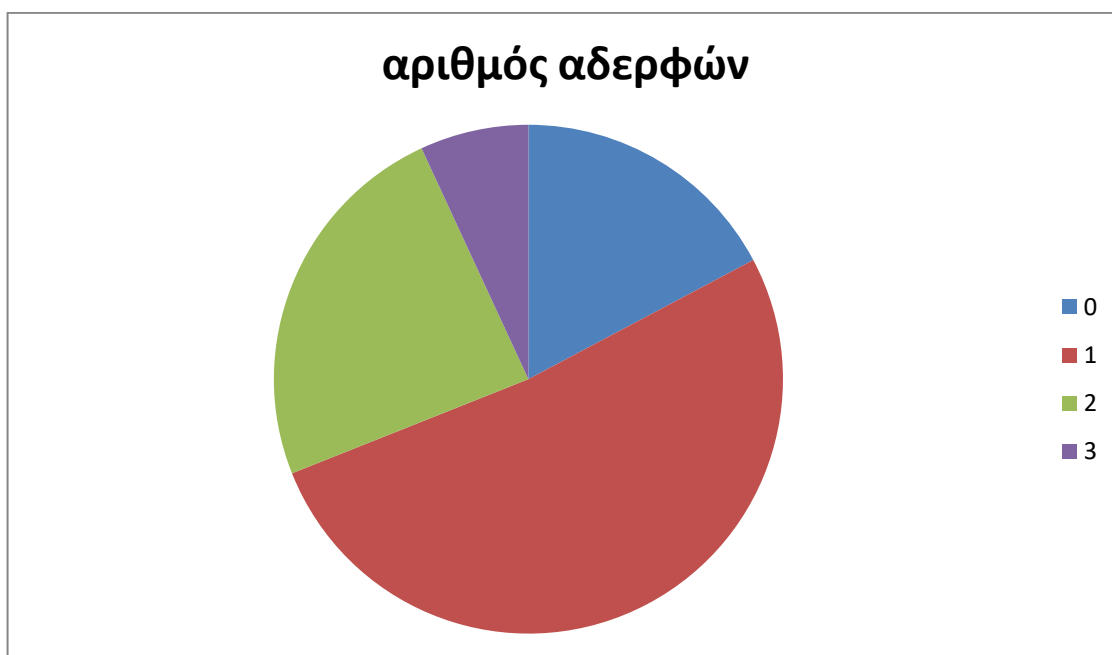
στις 360 μοίρες θ ;

$$\text{Άρα } \theta = 5 \cdot \frac{360^0}{29} \approx 62,1^0$$

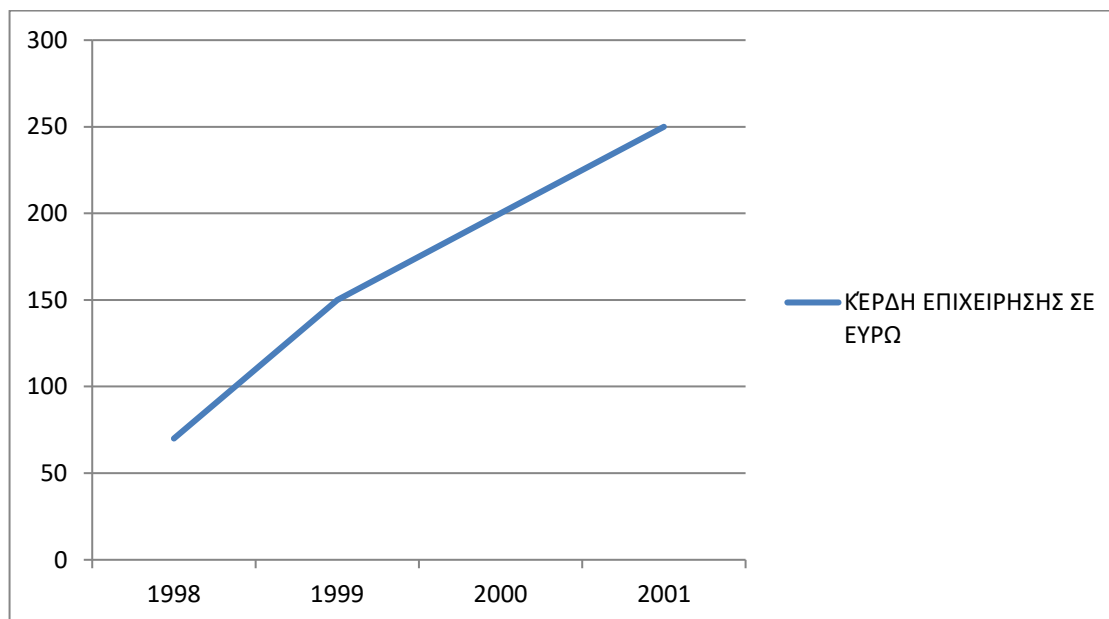
$$\theta = 15 \cdot \frac{360^0}{29} \approx 186,3^0$$

$$\theta = 7 \cdot \frac{360^0}{29} \approx 86,94^0$$

$$\theta = 2 \cdot \frac{360^0}{29} \approx 24,84^0$$



Τα χρονογράμματα: μας δείχνουν την εξέλιξη ενός μεγέθους σε σχέση με τον χρόνο. Π. χ. την εξέλιξη μιας μετοχής σε ένα μήνα ή τα κέρδη μιας επιχείρησης σε σχέση με τον χρόνο.



Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 94 (Βιβλίο Οργανισμού)

Το παρακάτω εικονόγραμμα μας πληροφορεί για τον αριθμό των βιβλίων που πούλησε ένας εκδοτικός οίκος τα έτη 2000, 2001, 2002 και 2003.

α) Να βρείτε πόσα βιβλία πουλήθηκαν κάθε έτος και πόσα συνολικά και τα τέσσερα έτη.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των συνολικών πωλήσεων που αντιπροσωπεύουν οι πωλήσεις που πραγματοποιήθηκαν το έτος 2002.

γ) Να μετατρέψετε το παραπάνω εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.

Λύση

α)

Το 2000 πουλήθηκαν $4 \cdot 20.000 = 80.000$ βιβλία

Το 2001 πουλήθηκαν $5 \cdot 20.000 + 10.000 = 100.000 + 10.000 = 110.000$ βιβλία

Το 2002 πουλήθηκαν $8 \cdot 20.000 = 160.000$ βιβλία

Το 2003 πουλήθηκαν $6 \cdot 20.000 + 10.000 = 120.000 + 10.000 = 130.000$ βιβλία

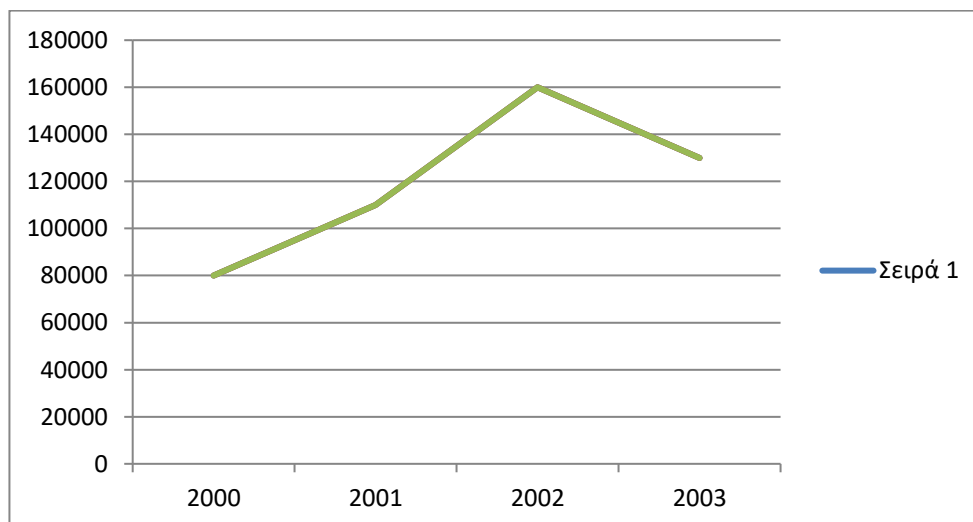
Άρα, συνολικά πουλήθηκαν

$$80.000 + 110.000 + 160.000 + 130.000 = 480.000 \text{ βιβλία}$$

β) το ποσοστό των πωλήσεων του 2002 είναι:

$$\frac{160.000}{480.000} = \frac{16}{48} = 0,333333 = 33,33\%$$

γ)

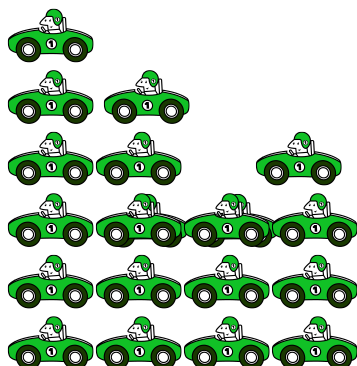


Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Άλυτες Ασκήσεις

4.5 Το παρακάτω εικονόγραμμα μας πληροφορεί για τον αριθμό των αυτοκινήτων που πουλήθηκαν στην Ελλάδα τα έτη 2006, 2007, 2008, 2009.

(Όπου  = 10.000 αυτοκίνητα)



2006 2007 2008 2009

α) Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα πουλήθηκαν κάθε έτος και πόσα συνολικά και τα τέσσερα έτη.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των συνολικών πωλήσεων που αντιπροσωπεύουν οι πωλήσεις που πραγματοποιήθηκαν το έτος 2007.

γ) Να μετατρέψετε το παραπάνω εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.

4.6 Με τη βοήθεια του παρακάτω εικονογράμματος.

Όπου ( = 8 μαθητές)

α) Να βρείτε πόσους συνολικά μαθητές ρωτήσαμε σε αυτή τη δημοσκόπηση.

β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν ως αγαπημένο μάθημα τα μαθηματικά. Ποιό είναι το ποσοστό τους;

γ) Ποιό είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν ως αγαπημένο μάθημα τα αρχαία;

δ) Να παραστήσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα.

Μαθηματικά	         	
Πληροφορική	   	
Γυμναστική	       	

Αρχαία		
Χημεία		

4.7 Ένας τοίχος έχει τέσσερα διαφορετικά χρώματα στην εξής αναλογία Α= άσπρο 55%, Γ= γαλάζιο 20%, Π= πράσινο 10%,Κ=κίτρινο 15%.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

β) Να βρείτε πόσα κιλά χρησιμοποιήσαμε από το κάθε χρώμα αν συνολικά χρησιμοποιήσαμε 15 κιλά χρώμα.

4.8 Ρωτήσαμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου πόσα αδέρφια έχουν και οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Αριθμός αδερφών	Αριθμός μαθητών
0	20
1	55
2	35
3	
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	120

α) Πόσοι μαθητές έχουν τρία αδέρφια; Τί ποσοστό αποτελούν αυτοί οι μαθητές;

β) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ραβδόγραμμα και με κυκλικό διάγραμμα.

4.9 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των λεπτών που ακούν μουσική οι μαθητές της Β' Γυμνασίου ενός σχολείου κατά μέσο όρο ημερησίως.

Αριθμός λεπτών	% Αγόρια	% Κορίτσια
30'	10%	20%
60'	25%	50%
90'	45%	15%
120'	15%	10%
180'	5%	5%

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ένα ραβδόγραμμα.

β) Να βρείτε το ποσοστό (%) των μαθητών που ακούν μουσική τουλάχιστον 90', καθώς και το ποσοστό των μαθητών που ακούν μουσική το πολύ 120'.

4.3 Κατανομή Συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

Αν εξετάσουμε ένα δείγμα ως προς ένα χαρακτηριστικό και ρωτήσουμε 100 άτομα θα προκύψουν 100 απαντήσεις – παρατηρήσεις.

Από αυτές τις παρατηρήσεις κάποιες είναι ίδιες και για να δούμε πόσες φορές εμφανίζεται μία τιμή κάνουμε **διαλογή**. Με το σύμβολο I απεικονίζεται μία τιμή της μεταβλητής, στη συνέχεια φτιάχνουμε πεντάδες IIII, που δηλώνουν ότι μία συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής εμφανίζεται πέντε φορές μέσα στο δείγμα.

Συχνότητα είναι φυσικός αριθμός n που δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η ίδια τιμή της μεταβλητής μέσα στο δείγμα.

Σχετική Συχνότητα ονομάζεται το πηλίκο της τιμής της μεταβλητής προς το μέγεθος του δείγματος $\frac{n}{N}$, όπου N = το μέγεθος του δείγματος.

Παρατηρήσεις

- ✓ Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.
- ✓ Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων % ισούται με το 100.

Μεθοδολογία

Για να κάνουμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

- Η πρώτη στήλη περιέχει τις τιμές της μεταβλητής που εξετάζουμε.
- Η δεύτερη στήλη κάνουμε την διαλογή των τιμών.
- Η Τρίτη στήλη περιέχει τις συχνότητες των τιμών.
- Η τέταρτη στήλη περιέχει τις σχετικές συχνότητες των τιμών.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 98 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες :

Αριθμός παιδιών των οικογενειών ενός χωριού

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα%
0	4	$\frac{4}{40} \% = 10$
1	10	$\frac{10}{40} \% = 25$
2	14	$\frac{14}{40} \% = 35$
3	8	$\frac{8}{40} \% = 20$
4	4	$\frac{4}{40} \% = 10$
Σύνολο	40	100

Άσκηση 4/σελ. 99 (Βιβλίο Οργανισμού)

Τα αποτελέσματα που πέτυχε μία ομάδα ποδοσφαίρου σε 34 αγώνες ήταν:

H,H,I,N,I,I,I,N,H,I,H,H,I,N,I,I,I,N,H,H,I,I,I,I,I,N,I,N,N.

(H= Ήττα , N= Νίκη , I= Ισοπαλία)

α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

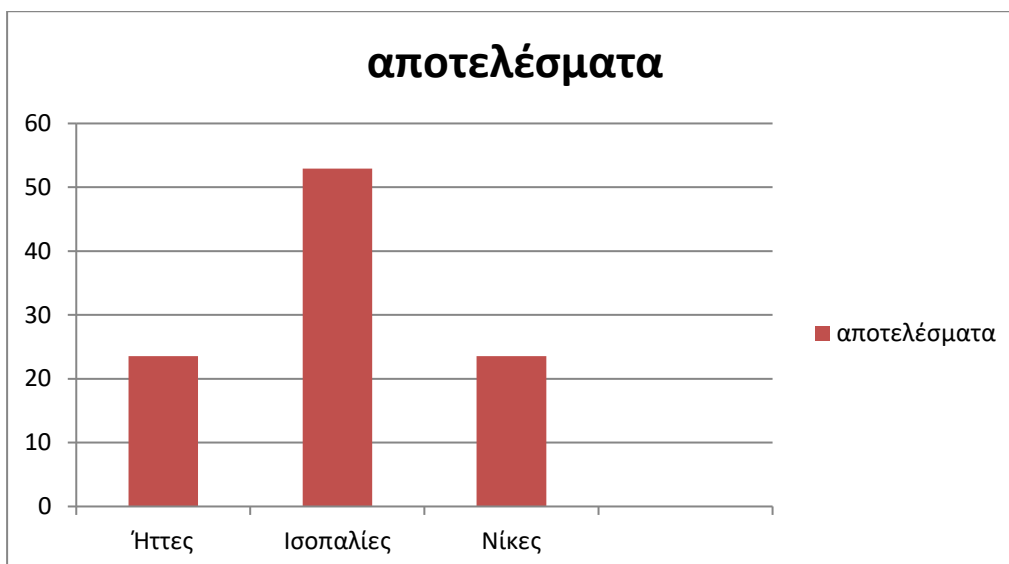
β) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.

Λύση

Αποτελέσματα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
H	8	$\frac{8}{34} \% = 23,53\%$
I	18	$\frac{18}{34} \% = 52,94\%$
N	8	$\frac{8}{34} \% = 23,53\%$
Σύνολο	34	100%

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

β) το ραβδόγραμμα είναι:
αποτελέσματα μιας ομάδας σε 34 αγώνες:

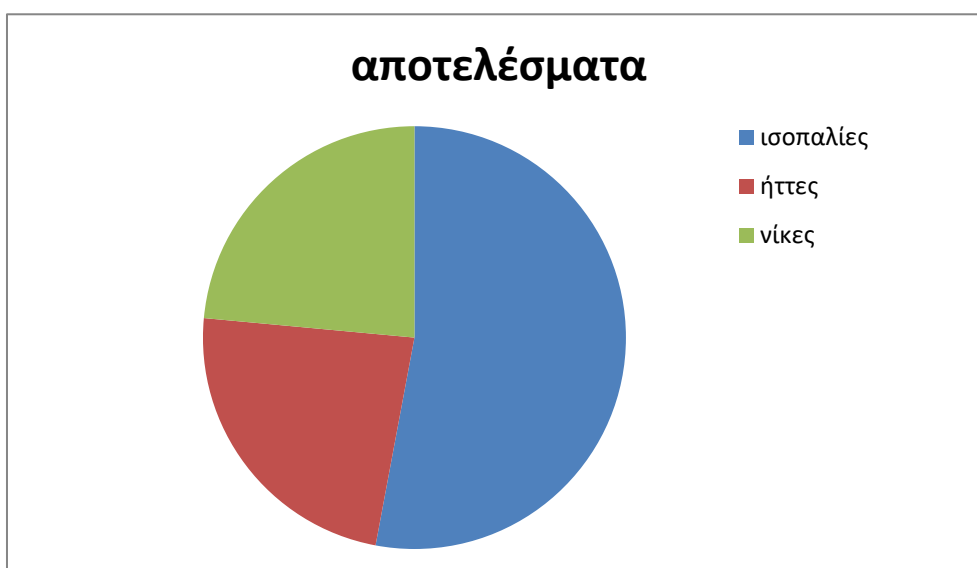


Για να κάνουμε το κυκλικό διάγραμμα πρέπει να υπολογίσουμε τις γωνίες του κυκλικού διαγράμματος

$$\text{Άρα για τις ήττες } H \rightarrow \frac{8}{34} \cdot 360^\circ = 84,7^\circ$$

$$\text{για τις ισοπαλίες έχουμε } I \rightarrow \frac{18}{34} \cdot 360^\circ = 190,6^\circ$$

$$\text{και για τις νίκες : } N \rightarrow \frac{8}{34} \cdot 360^\circ = 84,7^\circ. \text{ Και το κυκλικό διάγραμμα είναι:}$$



Άλυτες Ασκήσεις

4.10 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες

Πλήθος βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές μιας τάξης ενός Γυμνασίου τον περασμένο χρόνο

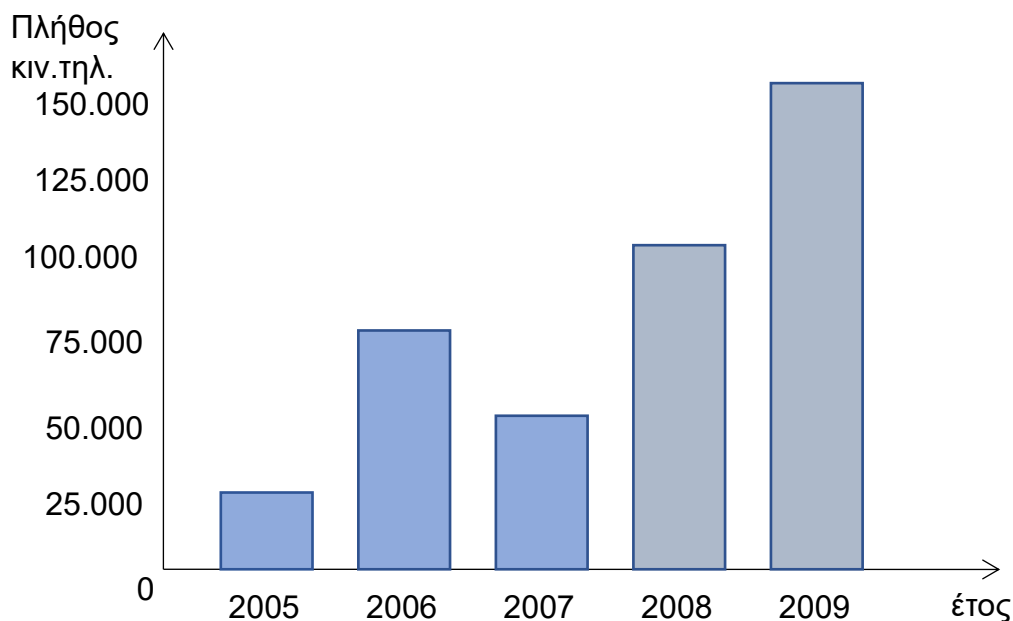
Αριθμός βιβλίων	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
0	9	
1	8	
2	2	
3	3	
4	1	
Σύνολο		

Ώρες μπροστά στον Η/Υ κατά μέσο όρο ημερησίως.

Ώρες μπροστά στον Η/Υ	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
	9	
	8	
	2	
	3	
	1	
Σύνολο		

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

4.11 Ο αριθμός των κινητών τηλεφώνων που πουλήθηκαν τα έτη 2005, 2006, 2007, 2008 και 2009 φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα:



α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να μετατρέψετε το ραβδόγραμμα σε χρονόγραμμα.

γ) Ποιά χρονιά οι πωλήσεις των κινητών τηλεφώνων παρουσίασαν αύξηση και ποιά μείωση;

4.12 Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών μιας τάξης ενός Γυμνασίου την προηγούμενη εβδομάδα ήταν: 0, 2, 3, 0, 4, 7, 7, 7, 4, 4, 5, 1, 1, 0, 1, 0, 3, 1, 0, 1.

α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να παρασταθούν τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

γ) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

4.13 Οι πόντοι που κέρδισε μία ομάδα μπάσκετ στο τελευταίο παιχνίδι προέρχονταν από τρίποντα (Τ), δίποντα (Δ) και ελεύθερες βολές (Β) με την εξής αναλογία: Τ, Τ, Δ, Β, Β, Β, Δ, Τ, Τ, Δ, Δ, Δ, Β, Β, Β, Β, Β, Τ, Δ, Β, Β, Δ, Δ, Δ, Δ, Δ, Τ, Τ, Τ, Τ, Τ, Δ, Δ, Δ, Δ, Β, Β, Δ.

α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

β) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.

4.14 Ο αριθμός των τηλεφώνων που έκανε η Μαρία τον μήνα Νοέμβριο ήταν:

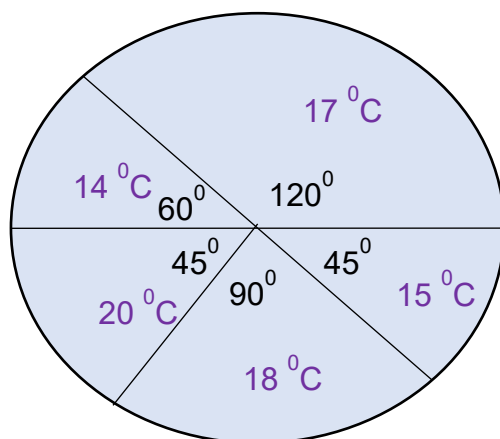
2	4	0	4	5	6	0	2	5	1	6	4	0	5	6
3	2	2	2	1	4	3	0	1	2	1	3	2	4	5

- Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- Να βρείτε πόσες ημέρες τα τηλεφωνήματα ήταν το πολύ 3 και πόσες ημέρες τα τηλεφωνήματα ήταν περισσότερα από 4.
- Να βρείτε το ποσοστό των ημερών στις οποίες τα τηλεφωνήματα ήταν το πολύ 2.
- Να παραστήσετε την κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

4.15 Οι βαθμοί κελσίου της θερμοκρασίας του Νοεμβρίου ήταν 15,14,17,18,20 και υπήρξαν στην συχνότητα που δείχνει το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:

α) Να γίνει ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων.

β) Ποιό είναι το ποσοστό των ημερών με θερμοκρασία κάτω των 18°C ;



4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

Σημαίνει να χωρίσουμε τις παρατηρήσεις σε ομάδες - διαστήματα και στη συνέχεια χωρίζουμε αυτά τα διαστήματα μέσα στα οποία κινούνται οι παρατηρήσεις μας σε μικρότερα διαστήματα που ονομάζονται κλάσεις.

Ομαδοποίηση κάνουμε συνήθως όταν οι παρατηρήσεις που έχουμε είναι πάρα πολλές και διαφορετικές μεταξύ τους και είναι δύσκολο να τις μελετήσουμε μία - μία.

Συνήθως θεωρούμε κλάσεις ίσου πλάτους.

Εφαρμογή

Η βαθμολογία 30 μαθητών σ ' ένα διαγώνισμα στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι:

18 , 10, 19 , 4 , 1 , 12 , 14, 10 , 19 , 12 , 6 , 12 , 6 , 12 , 14, 14, 12, 14 , 4 , 14 , 12 , 14 , 19 , 8 , 16 , 18 , 6 , 16 , 18 , 18

Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

Λύση

Βαθμοί	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
1 -4	1	0 ,0333	3%
4-8	5	0 ,1666	16,6%
8-12	4	0,13333	13,3%
12-16	11	0,3666	36,6%
16-20	9	0,3	30%
ΣΥΝΟΛΟ	30	1	100

Για το ιστόγραμμα συχνοτήτων αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια τα οποία έχουν ύψος ίσο με τη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

Άλυτες Ασκήσεις

4.16 Σε μία έρευνα ρωτήθηκαν 50 άτομα για τον αριθμό των ωρών που γυμνάστηκαν τον τελευταίο μήνα και προέκυψαν οι εξής παρατηρήσεις

2	1	1	4	8	1	9	8	3	5	4	1	0	0	2	2	0	1	7	3	3	5	2	6	1
3	2	3	4	4	4	4	8	8	8	1	1	1	3	0	2	7	5	6	0	1	1	4	8	0

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

4.17 Η βαθμολογία 30 μαθητών στα μαθηματικά στο Α' Τρίμηνο σε ένα Γυμνάσιο ήταν:

10	14	15	16	18	19	19	15	16	17	18	20	16	15	15
12	19	20	16	15	16	15	17	20	20	10	12	13	15	17

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

4.18 Ο αριθμός των γεννήσεων τον μήνα Νοέμβριο στην Αθήνα ανά ημέρα ήταν

150	120	40	80	65	165	84	85	178	179	98	101
45	90	100	110	155	200	75	156	175	181	59	81

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

4.19 Από μία έρευνα σε 60 μαθητές ενός σχολείου για το πόσες ώρες είδαν τηλεόραση την προηγούμενη εβδομάδα, τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν τα εξής

Ωρες τηλεθέασης	0-2	2-4	4-6	6-8
Ποσοστό	10%	25%	15%	60%

Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

4.5 Μέση Τιμή - Διάμεσος

Μέση τιμή

Τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων τη βρίσκουμε αν προσθέσουμε όλες τις παρατηρήσεις και τις διαιρέσουμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

$$\text{Μέση Τιμή} = \frac{\text{Άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{Πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Για παράδειγμα

Οι βαθμοί ενός μαθητή της Ε' Δημοτικού σε 10 μαθήματα είναι: 8, 9, 9, 9, 10, 7, 10, 9, 9, 8. Να βρεθεί ο μέσος όρος των βαθμών του μαθητή.

Λύση

Ο μέσος όρος ταυτίζεται με την έννοια της μέσης τιμής

Άρα:

$$\text{Μ.Ο.} = \frac{8+9+9+9+10+7+10+9+9+8}{10} = \frac{88}{10} = 8,8$$

Διάμεσος

Για να βρούμε την διάμεσο των παρατηρήσεων ενός δείγματος διατάσσουμε τις τιμές από την μικρότερη στην μεγαλύτερη και τότε:

Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό τότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση.

Για παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε τις τιμές

3, 5, 6, 9, 10, 11, 13

Είναι εφτά το πλήθος τους δηλαδή περιττός αριθμός και οι τιμές είναι με αυξανόμενη σειρά άρα η διάμεσος είναι το $\delta = 9$.

Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο τότε η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δυο μεσαίων παρατηρήσεων.

Για παράδειγμα

Έστω οι τιμές 2, 4, 6, 8, 10, 12

Είναι έξι το πλήθος δηλαδή άρτιος αριθμός και με αυξανόμενη σειρά άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δυο μεσαίων παρατηρήσεων:

$$\delta = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Μέση Τιμή Ομαδοποιημένης Κατανομής

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής

- Βρίσκουμε τα μέσα των κλάσεων που έχουμε
- Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα μέσα των κλάσεων με τις αντίστοιχες συχνότητες των κλάσεων αυτών.
- Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα
- Και διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.

Για παράδειγμα

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα	(Συχνότητα)·(Κέντρο κλάσης)
0-4	2	4	$2 \cdot 4 = 8$
4-8	6	2	$6 \cdot 2 = 12$
8-12	8	6	$8 \cdot 6 = 48$
Σύνολο		12	68

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{68}{12} = 5,6666$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1/σελ. 108 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων κάθε γραμμής.

α) 7 7 7 7 7 7

β) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

γ) -3 -2 -2 0 1 1 1

δ) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$

Λύση

α) Μέση Τιμή = $\frac{7+7+7+7+7+7}{6} = \frac{42}{6} = 7$

β) Μέση Τιμή = $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5,5$

γ) Μέση Τιμή = $\frac{-3-2-2+0+1+1+1}{7} = \frac{-4}{7}$

δ) Μέση Τιμή = $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}{6} = \frac{\frac{60}{60}+\frac{40}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}}{6} = \frac{127}{360}$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Άσκηση 2/σελ. 108 (Βιβλίο Οργανισμού)

Να βρείτε την διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε γραμμής:

α) 4 3 2 1 -1 -2

β) 2 2 4 2 3 3 1

γ) 100 101 99 98 101 102 103

δ) -5 -2 -0 1 3 -4

Λύση

α) τις τοποθετώ σε αύξουσα σειρά:

-2 -1 1 2 3 4

$$\text{Διάμεσος} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

β) 1 2 2 2 3 3 4

Διάμεσος = 2

γ) 98 99 100 101 101 102 103

Διάμεσος = 101

δ) -5 -4 -2 0 1 3

$$\text{Διάμεσος} = \frac{-2+0}{2} = -1$$

Άσκηση 3/σελ. 109 (Βιβλίο Οργανισμού)

Η βαθμολογία σε 14 μαθήματα του πρώτου τετραμήνου δυο μαθητών της Β' Γυμνασίου είναι:

A μαθητής

18 17 16 19 20 16 17 19 18 18 19 18 19 17

B μαθητής

19 19 18 18 19 20 18 17 19 19 18 19 18 20

α) Να βρείτε τον μέσο όρο της βαθμολογίας κάθε μαθητή.

β) Να εκτιμήσετε ποιος μαθητής έχει καλύτερη επίδοση.

γ) Να βρείτε τη διάμεσο της βαθμολογίας κάθε μαθητή.

Λύση

α) Μέσος Όρος του A =

$$= \frac{18+17+16+19+20+16+17+19+18+18+19+18+19+17}{14} = \frac{251}{14} = 17,9$$

Μέσος Όρος του B =

$$\frac{19+19+18+18+19+20+18+17+19+19+18+19+18+20}{14} = \frac{261}{14} = 18,6$$

β) καλύτερη επίδοση έχει ο μαθητής B, γιατί έχει μεγαλύτερο μέσο όρο.

γ) Τοποθετούμε τους βαθμούς του μαθητή A σε αύξουσα σειρά:

16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20

$$\text{Διάμεσος} = \frac{18+18}{2} = 18$$

Τοποθετούμε τους βαθμούς του μαθητή B σε αύξουσα σειρά:

17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 20, 20

$$\text{Διάμεσος} = \frac{19+19}{2} = 19$$

Άλυτες Ασκήσεις

4.20 Η βαθμολογία 15 μαθητών του τμήματος A στο διαγώνισμα της Στατιστικής ήταν:

10	14	15	16	18	20	18	19	20	11	14	16	18	16	14
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Ενώ οι 15 μαθητές του τμήματος B στο ίδιο διαγώνισμα είχαν τους εξής βαθμούς:

12	20	18	19	11	09	13	16	17	18	19	20	14	16	17
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

α) Να βρείτε τον μέσο όρο της βαθμολογίας κάθε τμήματος.

β) Να εκτιμήσετε ποιο τμήμα έχει καλύτερη επίδοση στο διαγώνισμα.

γ) Να βρείτε τη διάμεσο της βαθμολογίας κάθε τμήματος.

4.21 Οι συνολικοί πόντοι μιας ομάδας μπάσκετ στους τελευταίους 10 αγώνες είναι:

80	89	95	87	90
81	99	100	105	97

α) Να βρείτε το μέσο σκορ της ομάδας.

β) Να βρείτε τη διάμεσο των πόντων της ομάδας.

γ) Αν στον επόμενο αγώνα η ομάδα συγκεντρώσει 78 πόντους, ποιο θα είναι το νέο μέσο σκορ της ομάδας;

4.22 Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων κάθε γραμμής:

α) 8 8 8 8 8 8 8

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

β) 1 3 5 7 9

γ) -2 -5 -4 0 2 1 3

δ) 11 13 14 15 11 16 15 18 19

4.23 Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε γραμμής:

α) 3 4 6 7 8 9

β) 2 3 3 3 5 5 5 1 1 1

γ) 68 66 72 68 66 69

δ) -3 -4 -2 0 -1 5 3 4

4.24 Η θερμοκρασία στις 9 το πρωί στο Αιγάλεω τον μήνα Απρίλιο ήταν:

11	15	16	14	16	17	18	17	16	15	15	12	16	17	19
15	17	16	17	18	11	13	13	15	17	20	15	17	16	20

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία και τη διάμεσο των θερμοκρασιών.

4.25 Σε μία πόλη αρρώστησαν από γρίπη 250 άτομα σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

Ηλικία ατόμων	Συχνότητα
0-6	20
6-12	40
12-18	80
18-24	35
24-30	40
30-36	25
36-42	10

α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της κατανομής.

β) Να βρείτε τη μέση ηλικία των ατόμων με γρίπη.

4.26 Ρωτήσαμε 20 άτομα πόσα ευρώ ξόδεψαν για αγορές στο σούπερ μάρκετ την προηγούμενη εβδομάδα:

55	60	65	80	45	54	62	75	70	72
61	69	78	82	78	84	81	83	76	58

α)

- i) Να τοποθετήσετε τα δεδομένα αυτά σε πίνακα συχνοτήτων.
- ii) Να βρείτε τη μέση τιμή M στα έξοδα του σούπερ μάρκετ με τα παραπάνω δεδομένα.

β)

- i) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις σύμφωνα με τον πίνακα:

Κλάσεις	συχνότητες
45-50	
50-55	
55-60	
...	
...	
...	
...	
...	

- ii) Να βρείτε τη μέση τιμή M' για τα έξοδα του σούπερ μάρκετ των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων του πίνακα.
- iii) Ποιά είναι η πραγματική μέση τιμή;

Κριτήριο αξιολόγησης στατιστικής (60 λεπτά)

Θέμα Α

A.1 Τί ονομάζεται δείγμα;

A.2 Με ποιά γραφική παράσταση απεικονίζουμε τα ομαδοποιημένα δεδομένα;

A.3 Πως παρουσιάζουμε τα μη ομαδοποιημένα στατιστικά δεδομένα;

A.4 Δίνεται το δείγμα: 15,8,12,14,6,4.

Ποιά είναι η μέση τιμή και ποιά η διάμεσος στο παραπάνω δείγμα;

Θέμα Β

Τα μηνιαία έξοδα 10 φοιτητών του τμήματος Μαθηματικών της Αθήνας (σε ευρώ) είναι:

550, 950,450,650,850,1120,825, 455,425,920

Να βρείτε:

α) τη μέση τιμή των μηνιαίων εξόδων

β) τη διάμεσο των μηνιαίων εξόδων

Θέμα Γ

Ρωτήσαμε 20 μαθητές του Γυμνασίου της <Πολύτροπης Αρμονίας> πόσα cd αγόρασαν τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός cd	Αριθμός μαθητών	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα%
1	4		
2	5		
3	9		
4	2		
Σύνολο			

α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων%

β) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ραβδόγραμμα και με κυκλικό διάγραμμα.

γ) Πόσοι μαθητές αγόρασαν τουλάχιστον 2 cd;

Θέμα Δ

Η βαθμολογία 30 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν:

10	8	9	4	5	5	6	6	0	1	10	7	8	4	5
2	1	0	9	9	10	7	8	4	3	5	3	2	10	7

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους
- β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων (κλάση, κεντρική τιμή, διαλογή, συχνότητα)
- γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Συνδιαστικά προβλήματα στην στατιστική

Πρόβλημα 1

Θέλουμε να εκτιμήσουμε ποιος από τους τραγουδιστές Α, Β και Γ είναι δημοφιλέστερος στους Έλληνες.

Γι' αυτόν τον λόγο ρωτήσαμε 2500 νοικοκυρές απ' όλη την Ελλάδα.

- α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο το δείγμα της έρευνας;
- β) Είναι αντιπροσωπευτικό το δείγμα και γιατί;
- γ) Από τις νοικοκυρές που ρωτήσαμε το 41% προτίμησε τον τραγουδιστή Α, οι 800 νοικοκυρές προτίμησαν τον τραγουδιστή Β και οι υπόλοιπες προτίμησαν τον τραγουδιστή Γ.
 - i) Πόσες νοικοκυρές προτίμησαν τον τραγουδιστή Α;
 - ii) Ποιο είναι το ποσοστό % των νοικοκυρών που προτίμησαν τον τραγουδιστή Β;
 - iii) Ποιο είναι το ποσοστό % των νοικοκυρών που προτίμησαν τον τραγουδιστή Γ;

Πρόβλημα 2

Από μία έρευνα, που έγινε, για τις μέρες απουσίας από την εργασία των υπαλλήλων μιας εταιρείας τον περασμένο μήνα, προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ημέρες Απουσίας	Αριθμός υπαλλήλων
0	4
1	
2	18
3	6
4	2
Σύνολο	

Επίσης, γνωρίζουμε ότι το 45% των υπαλλήλων έλειψαν από την εργασία 2 ημέρες τον περασμένο μήνα.

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- β) Να βρείτε :
 - i) Πόσοι υπάλληλοι της εταιρείας απουσίασαν από 1 έως 3 ημέρες.
 - ii) Το ποσοστό % των υπαλλήλων που απουσίασαν τουλάχιστον 2 ημέρες.
- γ) Για τα προηγούμενα δεδομένα να σχεδιάσετε :
 - iii) Το ραβδόγραμμα
 - iv) Το κυκλικό διάγραμμα.

Πρόβλημα 3

Ρωτήσαμε ορισμένα άτομα πόσες ταινίες είδαν στον κινηματογράφο τον περασμένο μήνα.

Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο λείπουν ορεσμένες τιμές. Γνωρίζουμε ότι το 30% των ατόμων που ρωτήθηκαν είδαν 1 ταινία τον περασμένο μήνα και το 25% των ατόμων είδαν 2 ταινίες.

Αριθμός Ταινιών	Αριθμός Ατόμων
0	30
1	60
2	
3	
4	20
5	10
Σύνολο	

- α) Να βρείτε τις τιμές που λείπουν και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- β) Να παρουσιάσετε τα δεδομένα του πίνακα με ένα ραβδόγραμμα.
- γ) Να βρείτε πόσα άτομα είδαν το πολύ 2 ταινίες.
- δ) Να βρείτε ποιο ποσοστό % των ατόμων που ρωτήθηκαν είδαν τουλάχιστον 3 ταινίες.

Πρόβλημα 4

Τα αποτελέσματα των εκλογών σ' ένα εκλογικό κέντρο τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα.

Κόμμα	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες
A		15
B	150	30
Γ		35
Δ		
Σύνολο		

- α) Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν σε αυτό το εκλογικό τμήμα.
- β) Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.
- γ) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %.

Επαναληπτικές ασκήσεις ανά κεφάλαιο

Κεφάλαιο 1^ο – Αλγεβρικές παραστάσεις – Εξισώσεις - Ανισώσεις

1. Να εκφράσετε συμβολικά:
 - i. Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3
 - ii. Το μισό ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 12
 - iii. Το ένα τρίτο ενός αριθμού αυξημένο κατά το διπλάσιο του ίδιου αριθμού.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
 - i. $2x - 4y + 4x - 3y$
 - ii. $12\alpha + 3\beta - 11\alpha - \alpha + 2\beta$
 - iii. $-\omega + 2\omega + 4 - 4\omega + 3$
 - iv. $-2(x - y) + 2x - 4y - 5(2x - y)$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 - i. $2x - 7 = 4x - 2 + x$
 - ii. $12\alpha = 11\alpha - \alpha + 2$
 - iii. $-\omega + 2(\omega + 4) = -4\omega + 3$
 - iv. $-2(x - 1) + 2x - 4 = 5(2x - 2)$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 - i. $2x - \{2 + [x - (2x + 1)]\} 7 = -2 + x$
 - ii. $12\alpha - [- (\alpha - 1) + 2] = 11\alpha - \alpha + 2$
 - iii. $-\omega + \{2(\omega - 1) + [12 - (\omega + 2)]\} + 2(\omega + 4) = -4\omega + 3$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 - i. $\frac{2x + 1}{3} = \frac{4x - 1}{4}$
 - ii. $\frac{-2(x - 1)}{5} = \frac{2x - 1}{2}$
 - iii. $\frac{2(x - 1) - 1}{5} = \frac{2 - x}{4}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 - i. $2x - \frac{2x - 3}{3} = -\frac{x - 1}{4}$
 - ii. $\frac{3x - 1}{2} - \frac{2x - 3}{3} = \frac{x - 1}{4} - \frac{x}{6}$
 - iii. $\frac{8x - 1}{4} - \frac{3x + 7}{8} = \frac{3x - 2}{2} - 1$
 - iv. $\frac{2x}{7} - \frac{3x - 1}{14} = \frac{2x - 1}{2} - \frac{1}{7}$

$$\text{v. } \frac{2x-1}{3} - \frac{2-x}{9} = -\frac{3x+4}{6} - \frac{1}{9}$$

$$\text{vi. } -\frac{2x-1}{5} - \frac{3x+1}{4} = \frac{2x-1}{10}$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i. } x - \frac{(2x-1)}{2} = -\frac{x-1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$\text{ii. } \frac{3x-1}{2} - (x-2) = \frac{x-1}{6}$$

$$\text{iii. } \frac{2(x-1)}{4} - \frac{x+3}{6} = \frac{x-2}{2} - 1$$

$$\text{iv. } \frac{1-\omega}{9} - \frac{3\omega-1}{18} = \frac{\omega-1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\text{v. } \frac{y}{3} - \frac{2-y}{9} = -\frac{2y+2}{6} - \frac{1}{3}$$

$$\text{vi. } -\frac{x-1}{15} - \frac{x+3}{3} = \frac{2x-5}{5}$$

$$\text{vii. } \frac{x-1}{3} - \frac{2x+4}{6} = -\frac{2x-1}{12} + \frac{1}{6}$$

$$\text{viii. } \frac{-x+1}{2} - \frac{2x+3}{4} = \frac{x-2}{16} - \frac{x}{8}$$

8. Να βρείτε την τιμή του αριθμού λ , ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι αδύνατες.

$$\text{i. } (\lambda - 1)x = 6$$

$$\text{ii. } 2x + 1 = 2 - \lambda x$$

$$\text{iii. } 2\lambda x + 6 = 3x - 4$$

9. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε οι εξισώσεις:

$$\text{i. } (\alpha - 2)x - 2\beta + 10 = 3\beta - 12$$

$$\text{ii. } (\alpha - 2)x + \beta + 1 = 2\beta + 2$$

(α) αδύνατη (β) αόριστη (γ) έχει μία λύση

10. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ):

$$\text{i. } \text{Η εξίσωση } 2x + 18 = 0 \text{ έχει λύση τον αριθμό } 9.$$

$$\text{ii. } \text{Η εξίσωση } 2(x - 2) = 2x - 4 \text{ είναι ταυτότητα.}$$

$$\text{iii. } \text{Η εξίσωση } 3(x - 2) = 2x - 3 \text{ είναι αόριστη.}$$

$$\text{iv. } \text{Η εξίσωση } -2(x + 3) = -2x + 3 \text{ είναι αδύνατη.}$$

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

11. Να λύσετε τον τύπο $E = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2}$

- i. Ως προς v
- ii. Ως προς B
- iii. Ως προς β

12. Να λύσετε τον τύπο $x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

- i. Ως προς t^2
- ii. Ως προς a

13. Σε ένα διαγώνισμα με 100 ερωτήσεις, κάθε σωστή βαθμολογείται με 5 μονάδες και για κάθε ερώτηση που δεν απαντιέται ή δίνεται λάθος απάντηση, αφαιρούνται 2 μονάδες. Η Έλενα πήρε στο διαγώνισμα 255 μονάδες. Να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

14. Τρία αδέρφια έχουν συνολικά 300 ευρώ. Ο μεγάλος αδερφός έχει τα τριπλάσια χρήματα από τον μεσαίο και ο μεσαίος έχει τα μισά χρήματα από τον μικρότερο. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

15. Μία βρύση αδειάζει μία γεμάτη δεξαμενή σε 10 ώρες ενώ μία άλλη γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 8 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουμε ταυτόχρονα τις δύο βρύσες;

16. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ):

- i. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - 2 < \beta - 2$.
- ii. Αν $\alpha < \beta$ τότε $3\alpha - 1 < 3\beta - 1$
- iii. Αν $\alpha > \beta$ τότε $-2 \cdot \alpha < -2 \cdot \beta$
- iv. Αν $3\alpha > 0$ τότε $4\alpha < \alpha$
- v. Αν $\alpha > 2$ τότε $\frac{\alpha}{-4} < -\frac{1}{2}$
- vi. Η ανίσωση $x - 12 > x + 14$ είναι αδύνατη.
- vii. Η ανίσωση $x + 100 > x - 100$ είναι αδύνατη.
- viii. Η ανίσωση $0 \cdot x < 4$ αληθεύει για κάθε x .

17. Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν οι λύσεις τους στην ευθεία των αριθμών:

- i. $2x - 7 > 4x - 2 + x$
- ii. $x + 12 < -3 - x$
- iii. $5 - (x - 2) - (x - 1) \leq 0$
- iv. $-2x + 2 \leq -x - 3$
- v. $-2 + \left\{ 2 - \left[-4 \cdot (x - 1) + 5 \right] \right\} \leq 2x - 1 + 2(x - 3)$

$$\begin{aligned} \text{vi.} \quad & \frac{x-2}{4} - \frac{x-1}{3} \leq -\frac{2x-1}{12} \\ \text{vii.} \quad & \frac{3y-1}{5} - \frac{y}{20} > -\frac{y-1}{10} - \frac{1}{4} \\ \text{viii.} \quad & -\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{3} \leq -\frac{1}{6} + x \\ \text{ix.} \quad & \frac{x-1}{2} - \frac{\frac{x-1}{2}}{4} \leq -\frac{x-2}{5} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

18. Να βρείτε(αν υπάρχουν) τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & 2x-3 > x-1+x \text{ και } 2x+10 < -3-x \\ \text{ii.} \quad & 3-(2x-1)-(3x-1) \leq 0 \text{ και } -x+2 \leq -2x-1 \\ \text{iii.} \quad & \frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{4} \leq -\frac{2x-3}{12} \text{ και } \frac{3x-1}{5} - \frac{x}{10} > -\frac{x-1}{20} - \frac{1}{4} \\ \text{iv.} \quad & -\frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{6} \leq -\frac{1}{2} - x \text{ και } \frac{x-1}{4} - \frac{\frac{x-1}{2}}{2} \leq -\frac{x-2}{8} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

19. Η μία διέλευση από τα διόδια της Αττικής οδού κοστίζει 2,80 ευρώ, ενώ αν αγοράσεις το μηχανήμα αυτόματης διέλευσης για έναν μήνα θα πληρώσεις 126 ευρώ. Να βρείτε πόσες διελεύσεις το μήνα πρέπει να κάνει κάποιος, ώστε να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά του μηχανήματος αυτόματης διέλευσης.

20. Ένας φυσικός αριθμός είναι μεταξύ του 80 και του 90 και όταν διαιρεθεί με το 14 αφήνει υπόλοιπο 4. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

Κεφάλαιο 2° - Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού – Άρρητοι αριθμοί

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες:

- i. $\sqrt{16} = 8$
- ii. $\sqrt{49} = 7$
- iii. $\sqrt{36} = 6$
- iv. $\sqrt{-16} = -4$
- v. $\sqrt{-4} = 2$
- vi. $\sqrt{(-8)^2} = 8$
- vii. $\sqrt{16+9} = 4+3 = 7$
- viii. $\sqrt{4 \cdot 16} = 16$
- ix. Η $\sqrt{x+1}$ έχει νόημα για $x \geq -1$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις, για x πραγματικό και για $x > 0$.

- i. $x^2 = 16$
- ii. $x^2 = -25$
- iii. $x^2 = \frac{100}{36}$
- iv. $x^2 = 17.424$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i. $\sqrt{64} + \sqrt{196}$
- ii. $\sqrt{(-18)^2} + \sqrt{18^2}$
- iii. $\sqrt{25} + \sqrt{\frac{9}{81}}$
- iv. $\sqrt{16^2} + \sqrt{100}$

4. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}{\sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2} + \sqrt{49}}$$

5. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν μειωθεί κατά 4 είναι ίσο με το μισό του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

6. Να βρεθεί πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών ο άρρητος αριθμός $\sqrt{13}$.

Κεφάλαιο 3^ο – Συναρτήσεις – Ανάλογα ποσά – Αντριστρόφως ανάλογα ποσά – Υπερβολή

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2x-1}{4}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να κάνετε τη γραφική παράσταση.

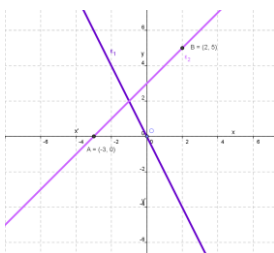
x	-2	-1	0	1	2
y					

2. Το Φ.Π.Α. για τα είδη ένδυσης είναι 25%. Να εκφράσετε τις τιμές y με Φ.Π.Α., ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς Φ.Π.Α.
3. Ο μισθός ενός υπαλλήλου μειώθηκε κατά 30%.
- Να εκφράσετε τον νέο μισθό y του υπαλλήλου, ως συνάρτηση του προηγούμενου μισθού x.
 - Αν η ίδια μείωση έγινε για πέντε υπαλλήλους που έπαιρναν διαφορετικό μισθό, να βρεθεί ο νέος μισθός τους στο παρακάτω πίνακάκι

x	1000	850	1300	1500	2500
y					

4. Δίνεται το σημείο M(-2,4). Να βρείτε το συμμετρικό σημείο του M στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων:
- Ως προς x'x
 - Ως προς y'y
 - Ως προς την αρχή των αξόνων
5. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων A(-2,-3) και B(-4,2) με δύο τρόπους.
6. Δίνονται τα σημεία A(-4,0), B(-1,1) και Γ(0,-2). Να βρεθούν:
- Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABΓ
 - Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ABΓ
7. Δίνεται η συνάρτηση $y = -2x + 2$. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, όταν:
- x ακέραιος, με $-2 \leq x < 2$
 - x πραγματικός αριθμός
8. Δίνεται η συνάρτηση $y = -2x^2 + 2x$. Να βρείτε το λ, ώστε η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο M(-2,-10).
9. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών: $y = 3x$ και $y = -\frac{1}{3}x$. Τι γωνία σχηματίζουν οι δύο ευθείες;

10. Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(-2,4).
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας αυτής.
11. Μία ευθεία ϵ_1 είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon_2 : y = -2x$ και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο Μ(0,-3). Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ϵ_1 και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που τέμνει η ϵ_1 τον άξονα $x'x$. Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος, που σχηματίζεται από την ευθεία ϵ_1 και τους άξονες xx' και yy' .
12. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος. Στη συνέχεια να βρεθούν αλγεβρικά τα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες και τέλος, να βρεθούν αλγεβρικά οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δυο ευθειών



13. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{12}{x} \text{ και } y = -\frac{12}{x}$$

14. Ένα έργο ολοκληρώνεται από 12 εργάτες σε 20 ημέρες. Ύστερα από 5 ημέρες από την έναρξη των εργασιών αποχώρησαν 2 εργάτες. Να βρείτε πόσες ημέρες πρέπει να δουλέψουν οι υπόλοιποι εργάτες για να τελειώσουν το υπόλοιπο του έργου.

15. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών, αν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα

x	-6	-3	-1	3	6
y		-1			

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

Κεφάλαιο 4^ο – Στατιστική

1. Να υπολογίσετε:
 - i. Το 5% του 60
 - ii. Το 20% του 140
 - iii. Το 15% του 4.500
 - iv. Το 100% του 320

2. Σε ένα Γυμνάσιο οι μαθητές της Α' και Β' τάξης είναι 250 και οι μαθητές της Γ' γυμνασίου είναι 150. Αν οι μαθητές της Α' τάξης είναι 140, να βρείτε: Το ποσοστό των μαθητών της Β' και Γ' τάξης σε αυτό το Γυμνάσιο.

3. Μία εταιρεία πούλησε το 2008 3.500 αυτοκίνητα, το 2009 1.500 αυτοκίνητα, το 2010 4.000 αυτοκίνητα, το 2011 2.500 αυτοκίνητα, το 2012 5.000 αυτοκίνητα.
 - i. Διαλέγοντας το κατάλληλο σύμβολο να γίνει ένα εικονόγραμμα με τα παραπάνω δεδομένα.
 - ii. Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα πουλήθηκαν συνολικά.
 - iii. Να υπολογίσετε το ποσοστό των πωλήσεων του 2010 επί του συνόλου των πωλήσεων.
 - iv. Να μετατρέψετε το εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.

4. Μία εταιρεία ξοδεύει τα μηνιαία έσοδα της ως εξής: το 5% για τη καθαριότητα, 30% για το ρεύμα, 50% για τη μισθοδοσία, 5% για το νερό και 10% για διάφορες προμήθειες.
 - i. Να κάνετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.
 - ii. Να βρείτε πόσα χρήματα ξοδεύονται για την καθαριότητα και τα ρεύμα, αν τα έσοδα της εταιρείας είναι 20.000 ευρώ το μήνα.

5. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των παιδιών που έχουν 50 οικογένειες ενός χωριού:

0	8
1	24
2	16
3	2
ΣΥΝΟΛΟ	

- i) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 1 παιδί;
 ii) Πόσες οικογένειες έχουν 2 παιδιά;
 iii) Πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά;
 iv) Τι ποσοστό οικογενειών έχουν 1 παιδί;
 v) Να κάνετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
 vi) Να κάνετε κυκλικό διάγραμμα.

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα
 Αριθμός ένδειξης ενός ζαριού

Αριθμός	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα (%)
1		20
2	5	10
3	4	
4		25
5	8	
6		
Σύνολο		

7. Ένα δείγμα 20 μαθητών της Β' Γυμνασίου εξετάστηκε ως προς τις ώρες που ακούει μουσική την ημέρα. Από την εξέταση αυτή προέκυψαν τα παρακάτω δεδομένα

3	3	1	2	5	3	1	5	4	4
2	3	4	6	0	4	4	2	2	5

- i) Να κάνετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
 ii) Να κάνετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

Άλγεβρα Β' Γυμνασίου

iii) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που ακούν το πολύ 3 ώρες μουσική την ημέρα.

8. Στο παρακάτω πίνακα συχνοτήτων δίνεται η κατανομή του αριθμού των αυτοκινήτων 20 οικογενειών. Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

- i) τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα
- ii) λιγότερα 3 αυτοκίνητα
- iii) ακριβώς 1 αυτοκίνητα

Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	1
1	12
2	5
3	2
Σύνολο	

9. Δίνονται οι βαθμοί που πήραν 40 μαθητές σ' ένα διαγώνισμα:

14	15	12	4	18	13	18	4	10	15
10	6	3	12	8	14	18	6	19	16
18	6	12	14	11	3	12	14	11	8
18	16	13	6	10	12	11	10	8	8

- i) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.
- ii) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- iii) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

10. Σε ένα δείγμα 20 μαθητών της Β' Γυμνασίου ως προς τη μάζα τους τα αποτελέσματα ήταν:

50	51	52	60	56	53	52	55	60	52
51	52	50	57	55	55	54	53	54	58

i) Να κάνετε ομαδοποίηση σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους

ii) Να κάνετε ιστόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

11. Τα ύψη 8 αθλητών μιας ομάδας μπάσκετ είναι (σε cm)

188,175, 205, 195, 190, 193,189, 195

i) Να βρείτε το μέσο ύψος των αθλητών

ii) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών της ομάδας.

iii) Αν φύγει ο αθλητής με ύψος 195cm και έρθει ένας αθλητής με ύψος 198cm να βρείτε ποιο είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας.

12. Ο διπλανός πίνακας δίνει τον αριθμό των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά τη διάρκεια ενός έτους. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Επισκέψεις	Αρ. Μαθητών
0-2	10
2-4	8
4-6	12
6-8	6
8-10	4

13. Σε ένα τμήμα Β' Γυμνασίου με 30 μαθητές η μέση βαθμολογία είναι 18. Αν η μέση βαθμολογία των 14 αγοριών είναι 16 να βρείτε τη μέση βαθμολογία των κοριτσιών.

14. Στον πίνακα δίνονται οι ηλικίες των 50 εργαζομένων μιας επιχείρησης.

42	28	33	43	23	26	40	37	57	45
37	25	43	58	55	27	39	49	28	32
30	21	58	24	34	44	22	36	46	22
31	42	59	37	22	37	53	27	25	25
35	31	27	22	49	33	41	24	34	22

i) Να κάνετε ομαδοποίηση σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους και να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων,

ii) Να βρείτε τη μέση ηλικία των εργαζομένων της επιχείρησης.

Επαναληπτικές ασκήσεις σε όλη την ύλη

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i. } \frac{x}{2} - \frac{\frac{x-x+3}{2}}{4} = 2 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{3-x}{2}\right)}{6}$$

$$\text{ii. } 1 + \left\{ 3 \cdot \left[5 - \frac{x-2}{3} \right] - 4 \right\} \cdot 2 = -\frac{x}{2}$$

2. Τρεις φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 270. Αν από τον καθένα αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, παίρνουμε τους αριθμούς 24, 81, 132. Να βρεθούν οι τρεις αυτοί αριθμοί.

3. Αν $A = \sqrt{\sqrt{81}} + 3\sqrt{8} : \sqrt{2} + 8\sqrt{3} : \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$B = 3 \cdot (-1)^A + 2 \cdot (-1)^{A+1}$$

4. α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_1 που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(-2,-1)$.

β) Στη συνέχεια να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας ε_1 με τους άξονες $x'x$ και $y'y'$.

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία $K(-2,-3)$ και $\Lambda(-1,1)$ ανήκουν στην ευθεία ε_1 και στην συνέχεια να βρείτε την μεταξύ τους απόσταση KL .

δ) Να βρεθεί το σημείο τομής M της ε_1 με την ευθεία $\varepsilon_3: y = 2x + 4$. Να βρεθεί η απόσταση του M από τους άξονες $x'x$ και $y'y'$.

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i) } 8-7+14 \geq 3x+3+14 \geq 15+\frac{10}{14}$$

$$\text{ii) } -9 \leq x-5 \leq -15-6$$

$$\text{iii)} \quad 15-8-13 \geq 3z+3-13 \geq -5+\frac{11}{7}$$

$$\text{iv)} \quad -10+15 < -4x-9 < -14+\frac{11}{4}$$

$$\text{v)} \quad -11-12+10 \geq -5x-5+10 \geq 11+14$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{3-2x}{3} - \frac{5-7x}{2} = x - \frac{1}{6}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{4-\frac{2-3x}{2}}{3} - 2 \cdot \frac{3-4x}{2} = 1 - \frac{2-\frac{1-3x}{2}}{5}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{2-x}{3} - 3 \cdot \frac{x-\frac{3-2x}{2}}{5} = 2 - \frac{1-x}{2+\frac{1}{3}}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{3-2x}{2} - \frac{1-4x}{4} = 2x - \frac{3+10x}{5}$$

$$\text{v)} \quad \frac{5-\frac{3-4x}{2}}{2} - \frac{3x-4}{3} = x - \frac{3+6x}{6}$$

7. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad 4-3 \cdot (2x-1) > 3 \cdot (4x-2) - 3$$

$$\text{ii)} \quad \frac{4-\frac{2-3x}{2}}{3} - 2 \cdot \frac{3-5x}{2} > 1 - \frac{2+\frac{1-3x}{2}}{5}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{4-\frac{2-3x}{2}}{4} - 2 \cdot \frac{3-5x}{2} < 1 - \frac{5+\frac{1-3x}{2}}{5}$$

$$\text{iv)} \quad 2-3 \cdot (4-2x) < 4-x < 2-(4-3x)$$

$$\text{v)} \quad \frac{5-\frac{3-4x}{2}}{2} + \frac{3x-4}{3} < x < 2 - \frac{3+6x}{6}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{3-2x}{3} - 1 \leq 3x - \frac{5-7x}{2} \leq x - \frac{1}{6}$$

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad A = \sqrt{13 + \sqrt{17-8}}$$

$$\text{ii)} \quad B = \sqrt{3 + \sqrt{40 - \sqrt{16}}}$$

$$\text{iii)} \quad \Gamma = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{64}}{10 - \sqrt{36}}}$$

$$\text{iv)} \quad \Delta = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{7 - \sqrt{36}}}{17 - \sqrt{57 + \sqrt{49}}}}$$

9. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i)} \quad A = \sqrt{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)}$$

$$\text{ii)} \quad B = 2 \cdot (3\sqrt{27} - 2\sqrt{49} + 5\sqrt{5}) - 5 \cdot (\sqrt{4} + 3\sqrt{81} + \sqrt{20})$$

$$\text{iii)} \quad \Gamma = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$$

$$\text{iv)} \quad \Delta = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\text{v)} \quad E = (\sqrt{12} - 2\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{20})$$

$$\text{vi)} \quad H = \frac{\sqrt{7 + 2\sqrt{4} + \sqrt{25}}}{\sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{1,44}}}$$

10. Τι είναι το ιστόγραμμα;

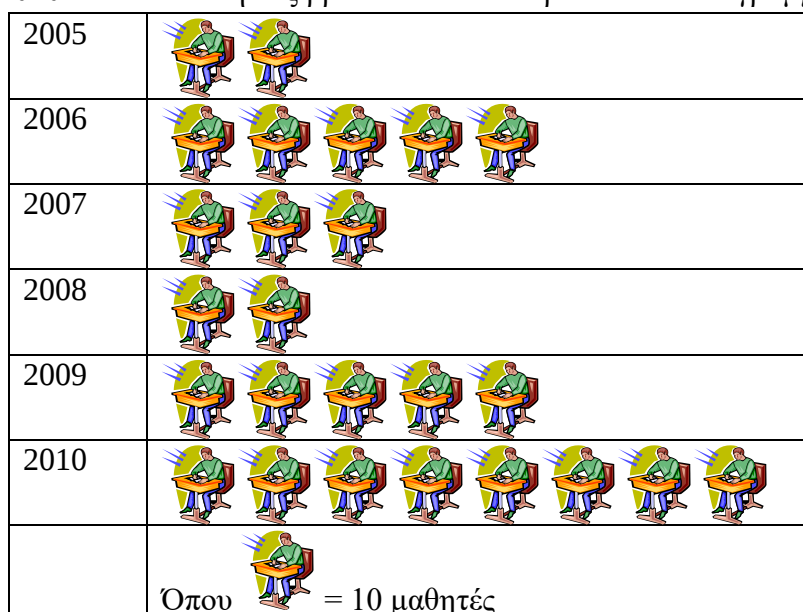
11. Πώς βρίσκουμε τη μέση τιμή μιας κατανομής;

12. Η διάμεσος μιας κατανομής είναι πάντα ίση με τη τιμή κάποιας παρατήρησης της κατανομής;

13. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες αιτιολογώντας την απάντησή σας.

14. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής ισούται με το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.

15. Η μέση τιμή παρατηρήσεων δεν γίνεται να συμπίπτει με τη διάμεσο των παρατηρήσεων αυτών.
16. Υπολογίσαμε πόσοι μαθητές ενός λυκείου πέρασαν σε σχολές ΑΕΙ τα έτη 2005 έως και το 2010 και οι απαντήσεις βρίσκονται στο παρακάτω εικονόγραμμα.



- Πόσοι μαθητές πέρασαν συνολικά και τα έξι έτη σε σχολές ΑΕΙ;
 - Να μετατρέψετε το εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.
 - Να παρασταθούν τα δεδομένα σε κυκλικό διάγραμμα.
 - Τι ποσοστό επί του συνόλου των επιτυχόντων σε σχολές ΑΕΙ αντιπροσωπεύουν οι επιτυχόντες του 2008;
17. Οι θερμοκρασίες τον μήνα Νοέμβριο στην Αθήνα το μεσημέρι ήταν:

10	8	11	12	8	25	28	22	17	28	18	13	24	30	28
27	8	14	16	17	19	20	20	26	30	29	24	27	29	22

- Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.
- Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.
(κλάση, κεντρική τιμή, διαλογή, συχνότητα)
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
- Να βρεθεί η μέση τιμή της θερμοκρασίας εκείνο τον μήνα.

18. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{x+1}{2} - \frac{17+7x}{18} = \frac{x+10}{9} - \frac{7(1+x)}{18}$ (1)

Να λυθεί η ανίσωση : $x - \frac{2(3x-1)}{3} - 1 \leq \frac{x}{2} - \frac{29}{6}$ (2)

Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης (1) είναι λύση της ανίσωσης (2) .

19. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A = 3\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{4} + \sqrt{\frac{27}{3}}} - \sqrt{\frac{49}{7} + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}$$

$$B = (\sqrt{16} - \sqrt{4}) + (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{36} - \sqrt{3}^2)$$

20. Αν $A=0$ και $B=1$ να εξετάσετε αν η τιμή $x = \sqrt{B-A}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\frac{2x+3}{3} - \frac{3x-5}{12} = \frac{x-3}{4} + 2.$$

21. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = 4x - 1$ και $(\varepsilon_2): y = 2x + 1$.

i) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών (ε_1) , (ε_2) σε κοινό διάγραμμα και να βρεθεί το σημείο τομής του K.

ii) Να βρεθεί το σημείο τομής A της (ε_1) με τον άξονα x'x και το σημείο τομής B της (ε_2) με τον άξονα y'y.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

iv) Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο K και ακτίνα KB.

Διάφορα Προβλήματα

22. Σε μία θεατρική παράσταση υπάρχουν τριών ειδών εισιτήρια. Το κανονικό, στα 18ευρώ, το φοιτητικό, με 12ευρώ και των ανέργων, με τιμή 8 ευρώ. Σε μία παράσταση εισπράχθηκαν 1560ευρώ και κόπηκαν συνολικά 105 εισιτήρια.

Αν το πλήθος των εισιτηρίων των ανέργων ήταν το $\frac{1}{4}$ του πλήθους των εισιτηρίων κανονικής τιμής, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία εισιτηρίου.

23. Έχουμε 30 χαρτονομίσματα των 5ευρώ και των 10 ευρώ. Συνολικά έχουμε 190 ευρώ. Πόσα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ έχουμε;

24. Η ηλικία της κόρης είναι σήμερα το ένα τρίτο της ηλικίας του πατέρα. Πριν από πέντε χρόνια, ήταν το ένα τέταρτο της ηλικίας του πατέρα. Ποια είναι η ηλικία πατέρα και κόρης σήμερα;

25. Δίνεται ευθεία $(\varepsilon_1): 3x+2y=6$.

- i) Να βρείτε τα σημεία Α και Β, στα οποία τέμνει η ευθεία τους άξονες xx' και yy' , αντίστοιχα.
- ii) Να χαράξετε την ευθεία σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.
- iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.
- iv) Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε2): $3y - 2x = 9$. Να δείξετε ότι τέμνει κάθετα την ευθεία (ε1)

26. Αν $x = \frac{1}{2018}$ & $y = -2018$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left[(x^2 y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4 \right] : (x^3 : y^{-1})^{-3}$$

27. Να απλοποιήσουμε την παράσταση:

$$A = \left[-(-a)^{-3} \cdot a^5 \right] : \left[-a^2 \cdot (-a)^{-1} \right]^{-4}$$

28. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακεραίους, των οποίων το άθροισμα ισούται με το γινόμενό τους.
29. Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 4, 6, 9, αντίστοιχα. Με τον γ να είναι ο μειωτέος και ο α να είναι ο αφαιρετέος, προκύπτει διαφορά 45. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ .
30. Ένα προϊόν Α κοστίζει κατά 50% περισσότερο απ'ό,τι κοστίζει ένα άλλο προϊόν Γ. Ένα προϊόν Β κοστίζει κατά 25% περισσότερο από την αξία του Γ. Να βρείτε πόσο % περισσότερο κοστίζει το προϊόν Α από την αξία του προϊόντος Β.
31. Έμπορος πούλησε το 20% της αξίας των εμπορευμάτων του με κέρδος 40%, τα $\frac{4}{5}$ του υπολοίπου της αξίας των εμπορευμάτων του με κέρδος 10% και το νέο υπόλοιπο με ζημία 20%. Αν τελικά γνωρίζουμε ότι κέρδισε 1.500ευρώ, να βρείτε:
 - α) Το ποσοστό του κέρδους του εμπόρου από τις παραπάνω πωλήσεις και
 - β) Το ποσό της αξίας των εμπορευμάτων του.

1^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)

Θέμα Α

A.1

- α) Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του (ορισμός, σχήμα, τύπος).
- β) Τι θα συμβεί με το εμβαδόν ενός τριγώνου αν διπλασιάσουμε το μήκος μιας βάσης του και ταυτόχρονα τριπλασιάσουμε το μήκος του αντίστοιχου σε αυτή τη βάση ύψους του;
- γ) Πως ορίζεται το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{K}$ του ορθογωνίου τριγώνου $K \Lambda M$ με ορθή γωνία την $\hat{\Lambda}$;
- δ) Τι εκφράζει η κλίση μιας ευθείας (ϵ);
- ε) Να δώσετε τον ορισμό της εγγεγραμμένης γωνίας και ποια είναι η σχέση κάθε εγγεγραμμένης γωνίας με το τόξο στο οποίο βαίνει.
- στ) Ποιο στερεό ονομάζεται τετραγωνική πυραμίδα; Να γράψετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζουμε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο της. (αναλυτικά)

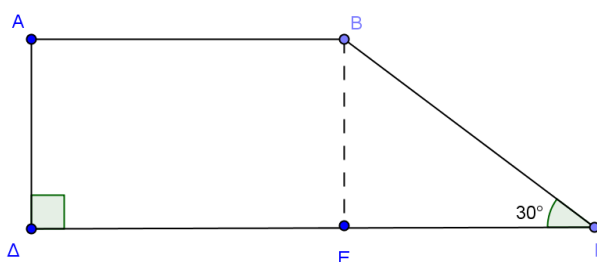
A.2

- α) Τι ονομάζουμε εξίσωση με έναν άγνωστο;
- β) Πότε μία εξίσωση λέγεται αόριστη και πότε λέγεται αδύνατη; Να δώσετε από ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.
- γ) Τι ονομάζεται ανίσωση;
- δ) Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;
- ε) Τι ονομάζεται συνάρτηση;
- στ) Ποια είναι η συνάρτηση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών; Να κάνετε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που εκφράζει τη σχέση δυο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x, y με $x > 0$.
- ζ) Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα Γ

Έστω το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB=B\Gamma=5\text{cm}$ και $\hat{B}\Gamma E = 30^\circ$ και BE το ύψος του τραπέζιου από την κορυφή B . Να βρεθούν:

- η περίμετρος του τραπέζιου
- το εμβαδόν του τραπέζιου
- να φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα AE και στην συνέχεια το ύψος BK του τριγώνου ABE . Να βρεθεί το μήκος του BK με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου, αν γνωρίζετε ότι $\sqrt{31,25} = 5,6$
- να δείξετε ότι στο τρίγωνο $BE\Gamma$ ισχύει η σχέση $\varepsilon\varphi \Gamma \cdot \varepsilon\varphi B = 1$
- στην συνέχεια γράφουμε κύκλο με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓE . Να βρεθεί το εμβαδόν εκείνου του μέρους του τριγώνου $BE\Gamma$ που δεν καλύπτεται από τον κυκλικό δίσκο $(\Gamma, \Gamma E)$



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το παρακάτω σχήμα που αποτελείται από δύο ίσα μεταξύ τους ορθογώνια τρίγωνα με μήκος της μιας κάθετης πλευράς $BZ=\Gamma E=4\text{cm}$ και μία οξεία γωνία

$\hat{A}BZ = \hat{E}\Gamma\Delta = 60^\circ$ και από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $BZ=4\text{cm}$ και $B\Gamma = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

- Να βρεθούν οι πλευρές του κάθε ορθογωνίου τριγώνου

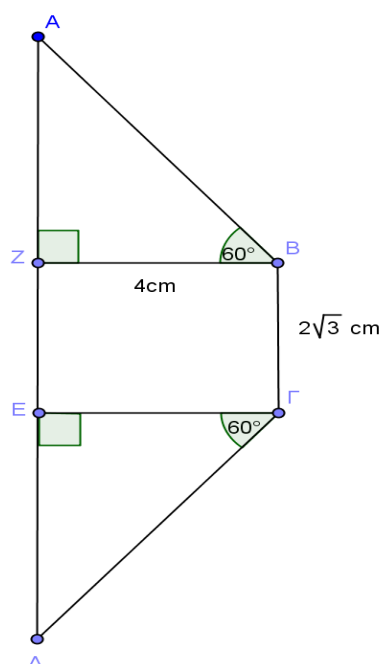
Στη συνέχεια περιστρέφουμε το σχήμα αυτό.

- Από ποια στερεά θα αποτελείται το σχήμα που θα προκύψει;

Να βρεθούν:

- το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του στερεού που προκύπτει.

- Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει.



Στη συνέχεια βάζουμε το παραπάνω στερεό μέσα σε ένα τετραγωνικό πρίσμα με πλευρά βάσης ίση με το διπλάσιο του μήκους της κάθετης πλευράς BZ του ορθογωνίου τριγώνου ABZ και ύψος πρίσματος ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AD ,
ε) Να βρεθεί ο χώρος μεταξύ του αρχικού στερεού και του τετραγωνικού πρίσματος.

2° Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)

Θέμα Α

Α.1

- Τί ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ;
- Ποιοί αριθμοί ονομάζονται άρρητοι;
- Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{49}}}{\sqrt{10 \cdot \sqrt{100}}}$$

Θέμα Β

- Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα.
- Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.
- Να εξετάσετε αν το τρίγωνο με πλευρές $AB=16$ cm, $AG=12$ cm και $BG=20$ cm είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Θέμα Γ

Γ.1 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2 \cdot \alpha}{6} - 2 \cdot \frac{\alpha + \frac{1}{4}}{3} = \frac{\frac{4}{3} + \alpha}{2}$

- Για την τιμή του α που βρήκατε να λύσετε την παρακάτω εξίσωση με άγνωστο το x

$$\frac{\alpha + x}{6} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot x + 2}{4} = \frac{\frac{\alpha}{2} + x}{2}$$

Γ.2 Να λυθεί η ανίσωση και να παρασταθούν οι λύσεις πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών

$$\frac{2 \cdot x - \frac{7}{5}}{4} - \frac{3 \cdot x + \frac{20}{4}}{5} \leq x - \frac{5}{20} < \frac{3 \cdot x + \frac{1}{5}}{12} + \frac{2 \cdot x - \frac{1}{2}}{5}$$

Θέμα Δ

α) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2 \cdot \eta\mu^2 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ + 3 \cdot \epsilon\phi^3 45^\circ \cdot \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ$$

β) Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε:

- Την ακτίνα του κύκλου
- Το μήκος του κύκλου

3^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)

Θέμα Α

A.1

- i) Τι ονομάζεται εξίσωση με έναν άγνωστο; Ποια τιμή ονομάζεται λύση της εξίσωσης; Ποια εξίσωση λέγεται αόριστη και ποια αδύνατη;
- ii) Ποιο στερεό ονομάζεται:
- iii) Ορθό πρίσμα
- iv) Πυραμίδα
- v) Κανονική πυραμίδα
- vi) Κύλινδρος
- vii) Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;
- viii) Ποια πολύγωνα λέγονται κανονικά; Με τι ισούται η κεντρική γωνία ω ; Ποια είναι η σχέση της κεντρικής γωνίας με τη γωνία ενός κανονικού πολυγώνου φ ;
- ix) Πότε δυο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα; Να δώσετε ένα παράδειγμα δυο αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Με ποια σχέση συνδέονται δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά;
- x) Με ποιους τρόπους παρουσιάζονται τα στατιστικά δεδομένα; Να τους περιγράψετε αναλυτικά.

Θέμα Β

B.1

- i) Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του.
- ii) (σχήμα -σχέση)
- iii) Τι ονομάζεται Πληθυσμός, Μεταβλητή, δείγμα μιας έρευνας; Με ποιους τρόπους γίνεται η συγκέντρωση των στατιστικών δεδομένων και να τους περιγράψετε, δίνοντας και παραδείγματα.
- iv) Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης, του ημιτόνου και του συνημίτονου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.
- v) Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα; Να δώσετε ένα παράδειγμα. Με ποια σχέση συνδέονται δυο ανάλογα ποσά;
- vi) Ποιες γωνίες λέγονται επίκεντρες και ποιες γωνίες λέγονται εγγεγραμμένες;
- vii) Τι ονομάζεται συχνότητα και τι σχετική συχνότητα της τιμής μιας μεταβλητής;

B.2 α) Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση: $2x - \frac{x - \frac{3+x}{2}}{2} = 6 - \frac{1 - \frac{6-x}{3}}{5}$

β) Να λυθεί η παρακάτω (διπλή) ανίσωση: $\frac{x+1}{3} - \frac{2 \cdot x - 1}{2} - \frac{1}{2} \leq 2 \cdot x + 3 \leq x + 7$

γ) Να εξετάσετε, αν η λύση της εξίσωσης του (α) ερωτήματος αποτελεί λύση της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

Θέμα Γ

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών παράλληλων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ και μίας υπερβολής (C).

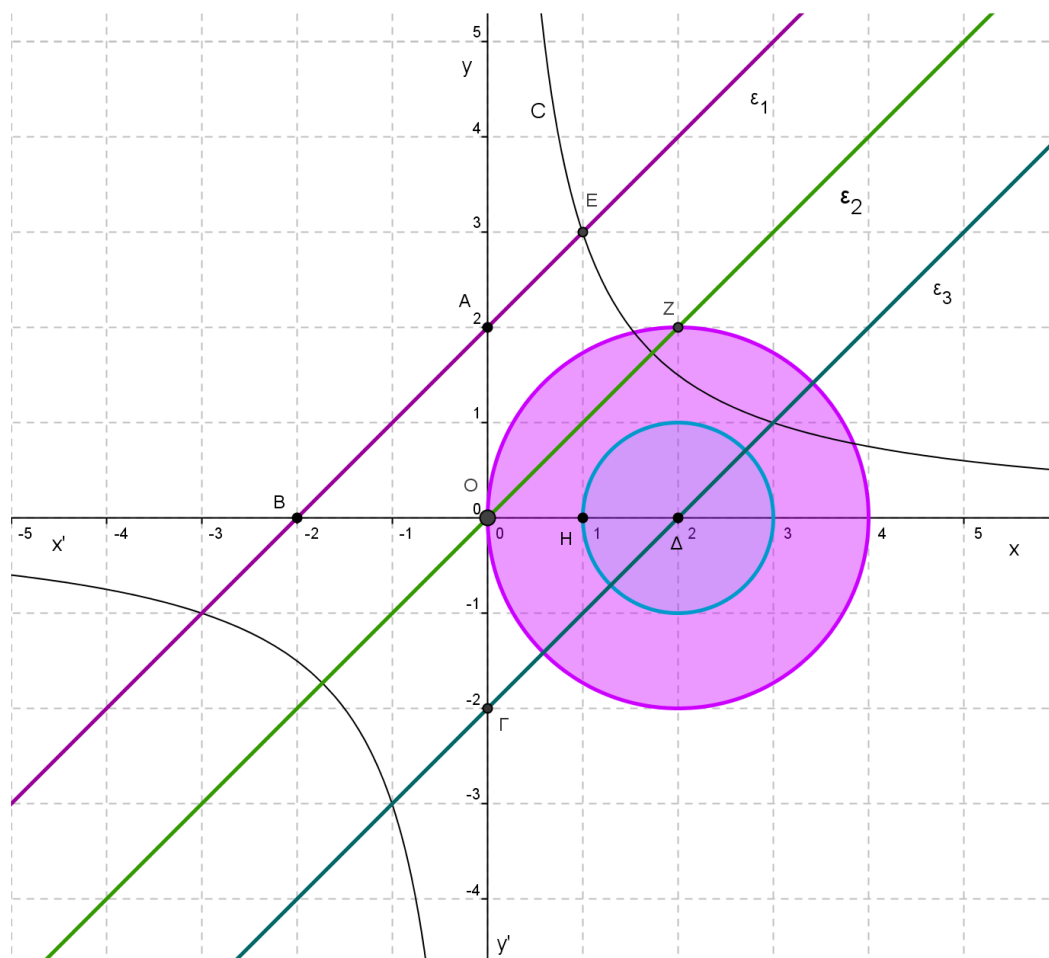
α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των τριών ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ και της υπερβολής (C).

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογώνιου τραπέζιου ΕΒΓΔ.

δ) Με κέντρο το Δ γράφουμε κύκλους (Δ, ΔΟ) και (Δ, ΔΗ). Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των δυο κύκλων.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής του τριγώνου ΟΖΔ, που δεν καλύπτεται από τον κύκλο (Δ, ΔΗ).



Θέμα Δ

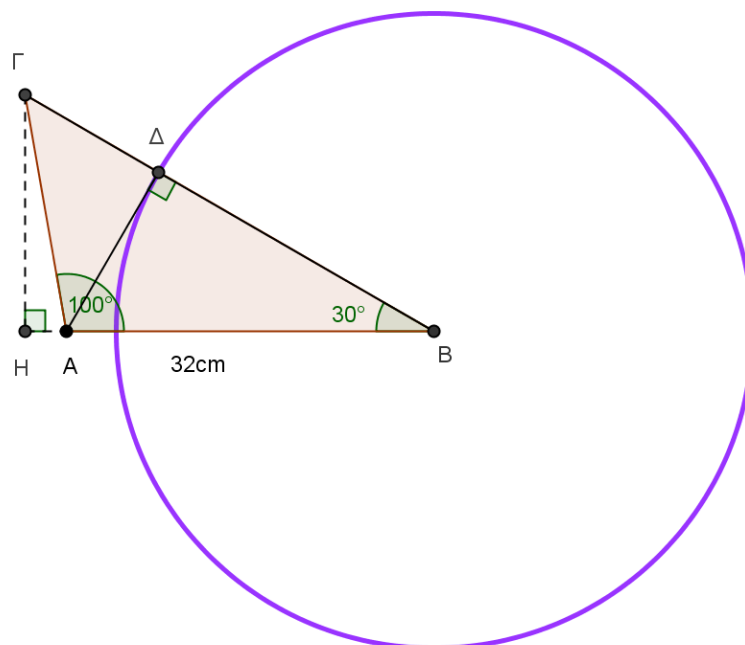
Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 32\text{cm}$, η γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και η γωνία $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} = 100^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $A\Delta$.

β) Αν $\Gamma\Delta = 13,5\text{cm}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου. (δίνεται ότι: $\sqrt{3} \approx 1,7$)

γ) Να βρεθεί το ύψος ΓH του τριγώνου $AB\Gamma$.

δ) Με κέντρο το B και ακτίνα $\Delta B = 16\sqrt{3}\text{ cm}$ γράφουμε κύκλο $(B, \Delta B)$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta B$ που δεν καλύπτεται από τον παραπάνω κύκλο.



4^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη (2 ώρες)

Θέμα Α

A.1

- i) Ποια εξίσωση λέγεται αόριστη και ποια αδύνατη; Να δώσετε από ένα παράδειγμα σε κάθε περίπτωση.
- ii) Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 45° και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii) Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α;
 - i) Αν α και β θετικοί αριθμοί, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες: (να αιτιολογήσετε στην περίπτωση της λανθασμένης πρότασης με ένα παράδειγμα)
 - α) $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
 - β) $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
- iv) Ποιο στερεό ονομάζεται:
 - (α) Κανονική πυραμίδα
 - (β) ορθό πρίσμα
- v) Πότε δυο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα; Τι παριστάνει γεωμετρικά η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha < 0, x \neq 0$; Πώς ονομάζεται;

Θέμα Β

- i) Τι ονομάζεται ανίσωση με έναν άγνωστο; Να δώσετε ένα παράδειγμα αδύνατης ανίσωσης και ένα παράδειγμα ανίσωσης που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό;
Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 60° και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii) Με ποιους τρόπους παρουσιάζονται τα στατιστικά δεδομένα;(ονομαστικά).
Πως υπολογίζεται η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων;
- iii) Ποιες γωνίες λέγονται επίκεντρες; Ποια είναι η σχέση τους με το τόξο στο οποίο βαίνουν. Να γίνει σχήμα.
- iv) Να γράψετε τους τύπους και τη διατύπωση των εμβαδών των παρακάτω επίπεδων σχημάτων:
 - α) παραλληλόγραμμο βάσης β και αντίστοιχου ύψους υ
 - β) τρίγωνο βάσης β και αντίστοιχου ύψους υ
 - γ) τραπεζίου βάσεων β και Β και ύψους υ

Θέμα Γ

Γ.1 Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση $\frac{x}{4} - \frac{x - \frac{2-x}{2}}{5} = \frac{1}{2} - \frac{3-x}{5}$

Γ.2 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο παρακάτω ανισώσεων και να τις παραστήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

$$\frac{x-1}{3} - \frac{x-3}{2} \leq x + \frac{7}{3} \quad \text{και} \quad x-2 \leq \frac{5 \cdot x}{8} - \frac{1}{2}$$

Γ.3 Στη συνέχεια να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων.

Γ.4 Η λύση της εξίσωσης του (α) ερωτήματος αποτελεί λύση των ανισώσεων του (β) ερωτήματος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Γ.5 Εξετάσαμε 20 άτομα ως προς το τι χρώμα μάτια έχουν: Καστανά (Κ), Μπλε (Μ), Πράσινα (Π), Άλλο χρώμα (Α) και τα αποτελέσματα ήταν τα εξής

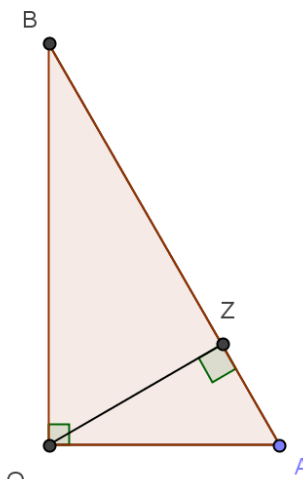
Κ	Μ	Κ	Κ	Π	Μ	Μ	Π	Κ	Κ
Κ	Κ	Π	Κ	Κ	Π	Μ	Μ	Κ	Α

- Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

Θέμα Δ

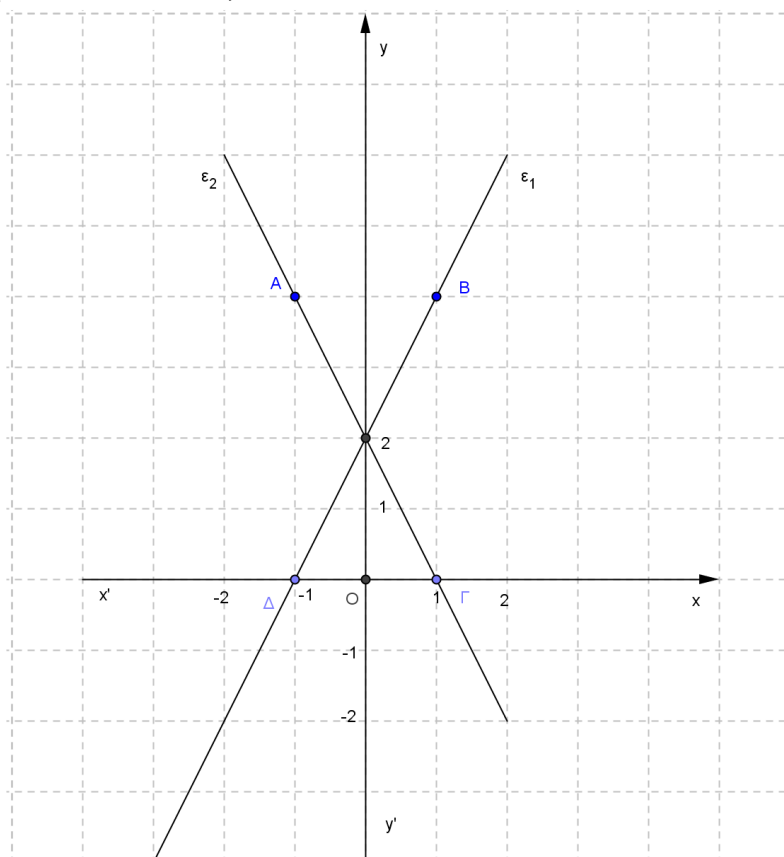
Δ.1 Δίνεται τρίγωνο OAB με $\hat{BOA} = 90^\circ$ και $OA = 12\text{cm}$, $AB = 24\text{cm}$ και ύψος OZ .

- Να υπολογίσετε την πλευρά OB .
- Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{OBA}$.
- Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{OBA}$ και $\hat{OAB}$ του τριγώνου OAB .
- Να υπολογιστεί το μήκος του ύψους OZ του τριγώνου OAB και το μήκος ZA .
- Γράφουμε κύκλους (A, AZ) και (B, BZ) . Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB , που δεν περιέχεται στους παραπάνω κυκλικούς δίσκους.



Δ.2 Δίνεται το παρακάτω σχήμα.

- Με τη βοήθεια του σχήματος να βρεθούν τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τους άξονες $x'x$ και $y'y'$.
- Στη συνέχεια να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 .
- Ποιο επίπεδο σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$;
- Αν το $AB\Gamma\Delta$ αρχίσει να περιστρέφεται πλήρως γύρω από την πλευρά $A\Delta$, να υπολογιστεί το ολικό εμβαδόν και ο όγκος τους στερεού σχήματος που θα σχηματιστεί από την περιστροφή του $AB\Gamma\Delta$.



5^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη(2 ώρες)

Θέμα Α

Α.1

- i) Τι ονομάζεται αριθμητική και τι αλγεβρική παράσταση;
- ii) Τι ονομάζεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης; Να δώσετε ένα παράδειγμα αδύνατης εξίσωσης.
- iii) Τι παριστάνει γεωμετρικά η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $y = a \cdot x$; Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας; (γεωμετρική ερμηνεία)
- iv) Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
- v) Ποια ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα; Ποια είναι η σχέση που τα συνδέει; Ποια είναι η γραφική τους παράσταση;
- vi) Ποιες γωνίες ονομάζονται επίκεντρες και ποιες εγγεγραμμένες;
- vii) Να γράψετε τους τύπους εμβαδών των παρακάτω επίπεδων σχημάτων: (α) τετράγωνο πλευράς a (β) παραλληλογράμμου βάσης β και ύψους $υ$. (να γίνει και σχήμα)
- viii) Τι ονομάζεται Πληθυσμός, Μεταβλητή και Δείγμα μιας έρευνας; Με ποιους τρόπους συλλέγονται τα στατιστικά δεδομένα; (να τους περιγράψετε)
- ix) Με τι ισούται η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού πολυγώνου και ποια είναι η σχέση της με τη γωνία του πολυγώνου ϕ ;
- x) Τι ονομάζεται ανίσωση; Να γράψετε ένα παράδειγμα ανίσωσης που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.
- xi) Ποιο στερεό ονομάζεται πρίσμα; Πως υπολογίζουμε το ολικό εμβαδόν και τον όγκο του;
- xii) Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;
- xiii) Ποια είναι η σχέση μιας εγγεγραμμένης και μιας επίκεντρης γωνίας με το τόξο στο οποίο βαίνουν;
- xiv) Τι ονομάζεται μέση τιμή και τι διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων;

Θέμα Β

α) Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση $\frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3-x}{3}$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα (ορίζεται) η παράσταση A που δίνεται παρακάτω:

$$A = \sqrt{\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} - \frac{x+7}{3} - 4}$$

γ) Να λυθεί η ανίσωση και να παρασταθούν οι λύσεις της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

$$\frac{x-1}{4} - \frac{x-2}{20} \leq x + \frac{7}{5}$$

B.1 Ρωτήσαμε 20 οικογένειες ενός χωριού πόσα παιδιά έχουν και οι απαντήσεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα

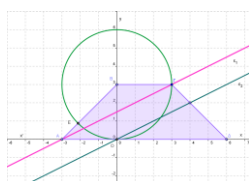
0	3	0	4	2	2	2	3	4	2
1	2	1	0	1	2	3	1	0	1

- Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων(%).
- Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2 παιδιά;
- Ποιο είναι το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 3 παιδιά;
- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.

Θέμα Γ

Δίνεται το παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

- Την περίμετρο του ΑΒΓΔ
- Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ
- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_1 , αν γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 .
- Να βρεθούν να σημεία τομής της ευθείας ε_1 με τους άξονες x'x και y'y.
- Στη συνέχεια γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα ΟΒ. Να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του σχήματος ΑΒΓΔ που δεν καλύπτεται από τον κύκλικό δίσκο (Β, ΟΒ).



Θέμα Δ

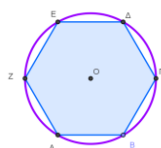
Δίνεται ένα κανονικό εξάγωνο πλευράς 10cm εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O . Να υπολογίσετε:

- i) Τη κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ του κανονικού εξαγώνου.
- ii) Το εμβαδόν μεταξύ του κύκλου και του κανονικού εξαγώνου.

Αν το παρακάτω σχήμα αποτελεί τη κάτοψη δύο στερεών, ενός κυλίνδρου μέσα στον οποίο έχουμε τοποθετήσει μία κανονική εξαγωνική πυραμίδα, με ίδιο ύψος 12cm, να υπολογίσετε:

- iii) Το ολικό εμβαδόν του κυλίνδρου και το ολικό εμβαδόν της κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας.
- iv) Τον όγκο μεταξύ των δύο στερεών.

(δίνεται ότι $\sqrt{219} \approx 15$ και να μην αντικατασταθεί το π)



6^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη(2 ώρες)

Θέμα Α

A.1

- i) Τι ονομάζεται συνάρτηση; Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας $y=ax$;
- ii) Να διατυπώσετε το ευθύ Πυθαγόρειο Θεώρημα. (λόγια, σχήμα, τύπος)
- iii) Τι ονομάζεται εξίσωση με έναν άγνωστο; Τι ονομάζεται λύση μιας εξίσωσης;
- iv) Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 45° και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- v) Ποιο στερεό ονομάζεται ορθό πρίσμα; Πως σχηματίζεται ένας κύλινδρος εκ περιστροφής;

Θέμα Β

- i) Ποια πολύγωνα ονομάζονται κανονικά; Τι γνωρίζετε για τη γωνία του κανονικού πολυγώνου και την κεντρική του γωνία;
- ii) Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. (λόγια, σχήμα, τύπος)
- iii) Τι ονομάζεται Πληθυσμός, μεταβλητή και τι δείγμα σε μία στατιστική έρευνα;
- iv) Με ποιους τρόπους παρουσιάζουμε τα ομαδοποιημένα και μη ομαδοποιημένα στατιστικά δεδομένα; Να περιγράψετε τα βασικά χαρακτηριστικά τους.
- v) Να γράψετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζονται σε ένα τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο, με κάθετες πλευρές μήκους α και ύψος του πρίσματος β :
 - α) το ολικό εμβαδόν του
 - β) ο όγκος του

Θέμα Γ

Γ.1 α) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i.
$$\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$$

ii.
$$\frac{2}{5} \left[x - \frac{5}{3}(x+4) \right] = \frac{x-3}{3} - \frac{2}{3}(x+2)$$

β) Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{13} + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{5}}$$

γ) Να λυθεί η ανίσωση και να παρασταθούν οι λύσεις της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{x - 2}{4} \leq x + 2$$

Γ.2 Δίνονται οι βαθμολογίες 20 μαθητών της Β' Γυμνασίου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών:

14	16	16	18	18	17	18	16	15	17
14	14	17	17	18	15	17	18	17	18

- Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων(%).
- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

Θέμα Δ

Δ.1 Κανονικό τετράεδρο με ακμή $a=6\text{cm}$. Η μία βάση του είναι το τρίγωνο ΑΒΓ και η κορυφή του το σημείο Δ. Το ύψος του κανονικού τετράεδρου είναι το ΔΟ, όπου Ο το ορθόκентρο του τριγώνου ΑΒΓ.

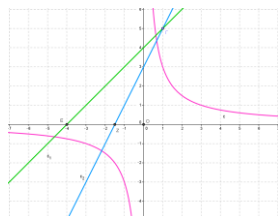
- Να γίνει το σχήμα.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κανονικού τετράεδρου.
- Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ της βάσης του τετράεδρου.
- Να υπολογίσετε το μήκος του ΟΕ.
- Να υπολογίσετε το ύψος ΔΟ του τετράεδρου .
- Να υπολογίσετε τον όγκο του τετράεδρου .

Στη συνέχεια, γράφουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ. Να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου, που δεν καλύπτεται από το τρίγωνο ΑΒΓ.

(να γίνουν οι μέγιστες απλοποιήσεις στις ρίζες, να μην αντικατασταθεί το π)

Δ.2 Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο ευθειών e_1 και e_2 και μιας υπερβολής c .

- Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών και της υπερβολής.
- Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας e_3 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στην e_2 .
- Να βρεθεί αλγεβρικά το σημείο τομής της e_2 με τον άξονα $x'x$.
- Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΕΖΓ.
- Να βρεθούν αλγεβρικά τα σημεία τομής της ευθείας e_3 με την υπερβολή c .



7^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα σε όλη την ύλη(2 ώρες)

Θέμα Α

A.1

- Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a ;
- Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας $y=ax$; Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης της ευθείας $y=ax$;
- Να διατυπώσετε το ευθύ Πυθαγόρειο Θεώρημα. (λόγια, σχήμα, τύπος)
- Τι ονομάζεται ανίσωση με έναν άγνωστο; Να γράψετε μία ανίσωση που επαληθεύεται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς και μία ανίσωση που δεν έχει καμία λύση.
- Ποιο στερεό ονομάζεται σφαίρα; Πως σχηματίζεται ένας κύλινδρος εκ περιστροφής;
- Να αποδείξετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 60° .

A.2

- Πως προκύπτει η γραφική παράσταση της $y=ax+b$, με $b \neq 0$ από την γραφική παράσταση της $y=ax$;
- Ποια πολύγωνα ονομάζονται κανονικά; Ποια γωνία ονομάζεται επίκεντρη και ποια εγγεγραμμένη; Ποια είναι η σχέση που τις συνδέει;
- Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. (λόγια, σχήμα, τύπος)
- Τι ονομάζεται συχνότητα και τι σχετική συχνότητα της τιμής μιας μεταβλητής; Με ποια διαγράμματα παρουσιάζουμε τα στατιστικά δεδομένα; (ονομαστικά)
- Να γράψετε τους τύπους των εμβαδών παράπλευρης επιφάνειας και όγκου για τη σφαίρα και τον κύλινδρο.
- Να γράψετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζονται σε ένα τριγωνικό πρίσμα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους a και ύψος του πρίσματος u :
α) το ολικό εμβαδόν του
β) ο όγκος του

Θέμα Β

B.1 Να λυθεί η εξίσωση
$$\frac{x+2}{4} - \frac{2x-1}{20} = \frac{x-\frac{1}{2}}{5} - \frac{1}{2}$$

B.2 Να γίνουν οι πράξεις:
$$A = \frac{\sqrt{41 - \sqrt{21 + \sqrt{14 + \sqrt{4}}}}}{\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}}$$

B.3 Να βρεθούν οι ακέραιες κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων

$$\frac{1-x}{5} + \frac{2x-1}{3} \geq \frac{3x-7}{15} - 1 \text{ και } 3(x-3) - 1 < -2 - 2(x-1)$$

Ρωτήσαμε 20 μαθητές πόσες φορές πήγαν σινεμά τους τελευταίους δύο μήνες και οι απαντήσεις φαίνονται στον πίνακα

Πόσες φορές πήγα σινεμά	Αριθμός μαθητών
0	4
1	8
	6
3	2

- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.
- Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που πήγαν τουλάχιστον δύο φορές σινεμά.

Θέμα Γ

Γ.1 Να σχεδιάσετε έναν κύκλο και με ΒΓ διάμετρος του κύκλου. Να πάρετε ένα σημείο Α πάνω στον κύκλο, ώστε $AB=15\text{cm}$ και $AG=20\text{cm}$.

- Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου ΒΓ.
- Να βρεθεί το μήκος του κύκλου.
- Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

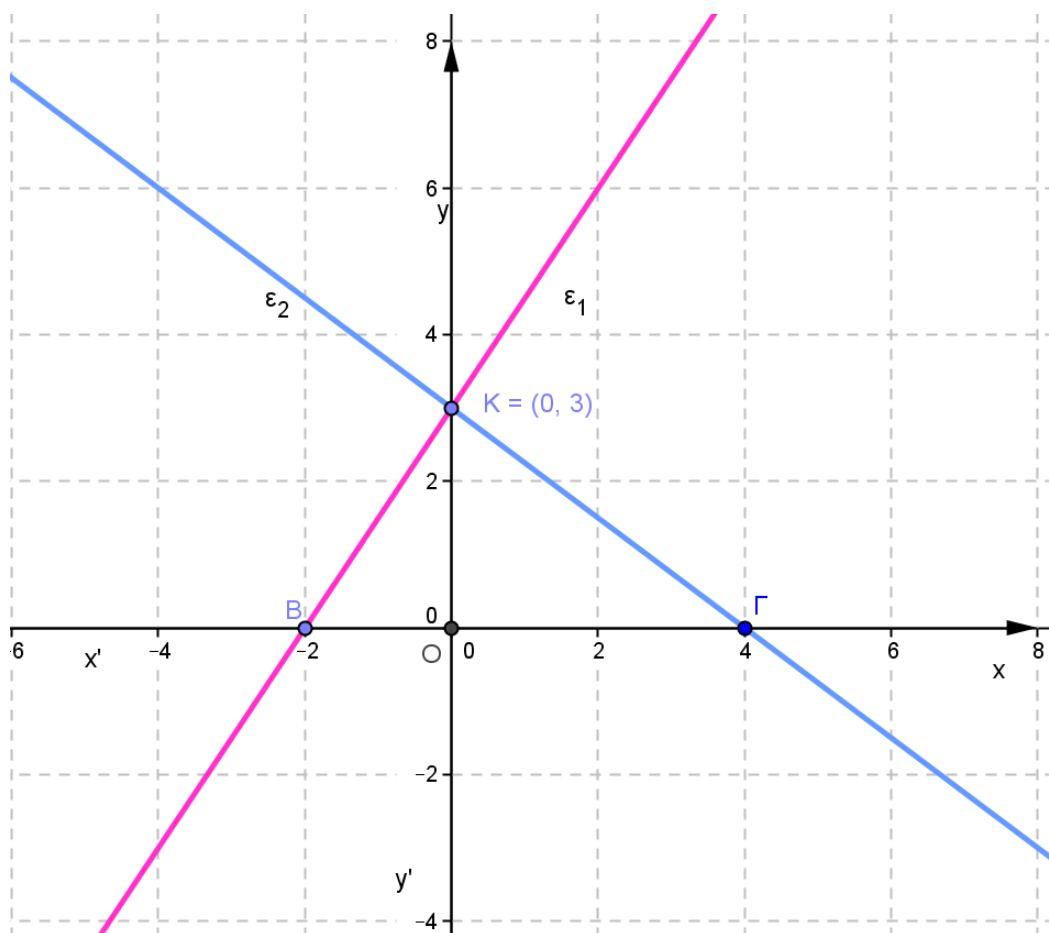
Γ.2 Αν το σχήμα που φτιάξατε αποτελεί την κάτοψη ενός τριγωνικού πρίσματος μέσα σε έναν κύλινδρο με ίδιο ύψος 20cm, να βρεθούν:

- Η ολική επιφάνεια του πρίσματος,
- Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου και
- ο χώρος ανάμεσα στα δύο στερεά. (Να γίνει και το σχήμα.)

Θέμα Δ

Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 .

- Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών. (μονάδες 2)
- Να βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας ε_3 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στην ε_2 . Να τη σχεδιάσετε την ευθεία ε_3 . (μονάδα 1)
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 . (μονάδα 1)
- Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου KBF . (μονάδα 1)
- Στο τρίγωνο KOF να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{OKF} = \omega$. (μονάδες 1,5)



Θέματα σε όλη την ύλη για τη Β' Γυμνασίου στα Μαθηματικά

1^ο Θέμα θεωρίας

- Τι ονομάζεται αριθμητική και τι αλγεβρική παράσταση;
- Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα; Με ποια αλγεβρική σχέση συνδέονται αυτά; Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο αναλόγων ποσών. Ποια είναι η γραφική παράσταση των αντίστοιχων τιμών τους (x,y) ;
- Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. (Ευθύ, λόγια, σχήμα, τύπος)
- Ποια πολύγωνα ονομάζονται κανονικά; Με τι ισούται η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού πολυγώνου και ποια είναι η σχέση της με τη γωνία φ του πολυγώνου;
- Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο; Να σχεδιάσετε έναν κύβο, να ονομάσετε τις κορυφές του και αξιοποιώντας το σχήμα να δώσετε ένα παράδειγμα για κάθε μία από τις κατηγορίες των ευθειών που γράψατε παραπάνω.

2^ο Θέμα θεωρίας

- Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος. (λόγια, σχήμα, τύπος)
- Πότε δύο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα; Με ποια αλγεβρική σχέση συνδέονται αυτά; Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών. Ποια είναι η γραφική παράσταση των αντίστοιχων τιμών τους (x,y) ;
- Με ποια διαγράμματα παρουσιάζουμε τα στατιστικά δεδομένα; (ονομαστικά) Με ποιους τρόπους συλλέγουμε τα στατιστικά δεδομένα; (πείτε λίγα στοιχεία γι' αυτούς τους τρόπους)
- Να γράψετε τους τύπους των εμβαδών παράπλευρης επιφάνειας και όγκου ενός κυλίνδρου. Να σχεδιάσετε το ανάπτυγμα ενός τριγωνικού πρίσματος με βάση ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο.
- Ποια γωνία ονομάζεται επίκεντρη και ποια γωνία ονομάζεται εγγεγραμμένη; Ποια είναι η σχέση της κάθε μιας με το τόξο στο οποίο βαίνει; Ποια είναι η σχέση μεταξύ τους όταν βρίσκονται στον ίδιο κύκλο και βαίνουν στο ίδιο τόξο;

1^ο Θέμα Ασκήσεων

α) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x - \frac{(x+1)}{2}}{5} - 2 \cdot \left[x - \frac{(x-1)}{4} \right] = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

(μονάδες 3)

β) Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές

$$AB = 3 \cdot \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}, \quad AG = 6 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} \quad \text{και} \quad BG = \frac{\sqrt{2.025}}{3}.$$

(μονάδες 2)

γ) Ρωτήσαμε 36 μαθητές πόσες ημέρες της εβδομάδας γυμνάζονται και οι απαντήσεις φαίνονται στον πίνακα

1	0	2	4	0	0	2	0	2	0	1	1	2	3	0	4	4	1
0	2	3	3	3	1	1	4	1	1	2	2	3	2	1	1	0	3

- iii) Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων. (μονάδα 0,5)
- iv) Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με ένα κυκλικό διάγραμμα. (μονάδα 1)

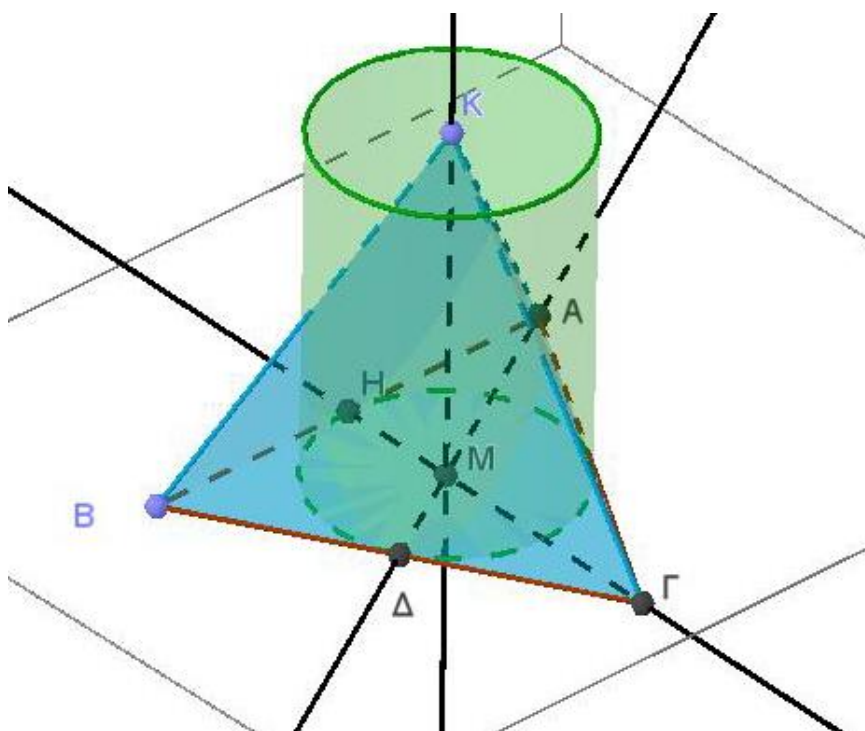
2^ο Θέμα Ασκήσεων

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά 12cm . Φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$ και σημειώνουμε με M το σημείο από όπου διέρχονται όλα τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$.

- Να βρεθεί το μήκος του ύψους $A\Delta$ και το εμβαδόν του $AB\Gamma$.
(μονάδες 2)
- Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $BM\Gamma$ και το μήκος της πλευράς του GM .
(μονάδες 1,5)
- Να γραφεί ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
(μονάδα 0,5)

Το σχήμα που φτιάξατε αποτελεί την κάτοψη ενός τετραέδρου (κανονική τριγωνική πυραμίδα) με όλες τις ακμές του ίσες με 12cm , το οποίο συνυπάρχει με έναν κύλινδρο που έχει βάση τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ (όπως φαίνεται στο σχήμα) και έχει ύψος ίσο με το ύψος της τριγωνικής πυραμίδας που προαναφέραμε.

- Να δείξετε ότι το ύψος του τετραέδρου (KM) έχει μήκος $u = 4 \cdot \sqrt{6}\text{ cm}$.
(μονάδα 1)
- Να βρεθεί ο όγκος του τετραέδρου και ο όγκος του κυλίνδρου.
(μονάδες 1,5)



3^ο Θέμα Ασκήσεων

- i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $K(2,3)$
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 , που έχει κλίση τον αριθμό $-\frac{2}{3}$ και διέρχεται από το σημείο $A(5, 1)$
- iii) Να εξετάσετε αλγεβρικά αν η ευθεία (ϵ_2) διέρχεται από το σημείο $K(2, 3)$.
- iv) Με τη βοήθεια των παραπάνω σημείων (που γνωρίζετε τις συντεταγμένες τους), να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με σημείο $O(0, 0)$, η αρχή των αξόνων.
- v) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N που η (ϵ_2) τέμνει τον άξονα yy' και τις συντεταγμένες του σημείου M που η (ϵ_2) τέμνει τον άξονα x' .
- vi) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου KOM .
- vii) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο KOM είναι ορθογώνιο.

Απαντήσεις Θεμάτων

$$\frac{x - \frac{(x+1)}{2}}{5} - 2 \cdot \left[x - \frac{(x-1)}{4} \right] = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x - (x+1)}{5} - 2 \cdot \left[\frac{4x - (x-1)}{4} \right] = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x - x - 1}{5} - 2 \cdot \left(\frac{4x - x + 1}{4} \right) = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{5} - 2 \cdot \left(\frac{3x+1}{4} \right) = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{10} - \frac{2(3x+1)}{4} = \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}$$

$$2(x-1) - 5 \cdot 2(3x+1) = 4(x+2) - 10$$

$$2x - 2 - 10(3x+1) = 4x + 8 - 10$$

$$2x - 2 - 30x - 10 = 4x - 2$$

$$-28x - 12 = 4x - 2$$

$$-28x - 4x = +12 - 2$$

$$-32x = +10$$

$$x = -\frac{10}{32}$$

$$x = -\frac{5}{16}$$

β) Να εξετάσετε αν είναι ορθογώνιο ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές

$$AB = 3 \cdot \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 9 \quad AG = 6 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 12 \quad \text{και} \quad BG = \frac{\sqrt{2 \cdot 025}}{3} = 15.$$

Εφαρμόζουμε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$BG^2 = AG^2 + AB^2$$

$$15^2 = 12^2 + 9^2$$

$$225 = 144 + 81$$

$$225 = 225$$

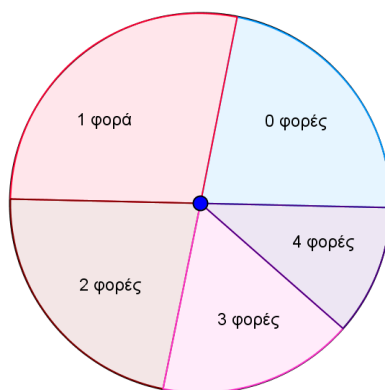
Που ισχύει, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (μονάδες 2)

δ) Ρωτήσαμε 36 μαθητές πόσες ημέρες της εβδομάδας γυμνάζονται και οι απαντήσεις φαίνονται στον πίνακα:

1	0	2	4	0	0	2	0	2	0	1	1	2	3	0	4	4	1
0	2	3	3	3	1	1	4	1	1	2	2	3	2	1	1	0	3

- Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων. (μονάδα 0,5)
- Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα με ένα κυκλικό διάγραμμα. (μονάδα 1)

Τιμές	Διαλογή	Συχνότητα	Επίκεντρη γωνία
0	III-III	8	80°
1	III-III	10	100°
2	III-III	8	80°
3	III-I	6	60°
4	III	4	40°
Σύνολο		36	360°



2^ο ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά 12cm. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και σημειώνουμε το σημείο τομής Μ των υψών του τριγώνου ΑΒΓ.

- Να βρεθεί το μήκος του ύψους ΑΔ και το εμβαδόν του ΑΒΓ. (μονάδες 2)

$$ΑΔ = \frac{α\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

$$(ΑΒΓ) = \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\text{cm}^2$$

- Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΓ και το μήκος της πλευράς του ΓΜ. (μονάδες 1,5)

ΑΒΓ ισόπλευρο, άρα ΑΔ διάμεσος και ύψος. Επίσης, ΓΗ ύψος, διάμεσος και διχοτόμος, άρα η γωνία $\hat{M\Gamma\Delta} = 30^\circ$, στο ΓΜΔ ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\begin{aligned}\epsilon\phi 30^\circ &= \frac{M\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{M\Delta}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{M\Delta}{6} \\ M\Delta &= 2\sqrt{3}\text{cm} \\ (B\Gamma) &= \frac{B\Gamma \cdot M\Delta}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2 = 12\sqrt{3}\text{cm}^2 \\ \eta\mu 30^\circ &= \frac{M\Delta}{\Gamma M} \\ \frac{1}{2} &= \frac{2\sqrt{3}}{M\Gamma} \\ M\Gamma &= 4\sqrt{3}\text{cm}\end{aligned}$$

- iii. Με κέντρο το Μ και ακτίνα το μήκος ΜΔ να γραφεί ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΒΓ.

(συνέχεια θέματος 2^{ου})

- iv. Να δείξετε ότι το ύψος του τετραέδρου (ΚΜ) έχει μήκος $υ = 4 \cdot \sqrt{6}$ cm.
(μονάδα 1)

ΚΜΓ ορθογώνιο τρίγωνο (ύψος πυραμίδας, τα 2/3 του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ και η παράπλευρη ακμή της πυραμίδας ως υποτείνουσά του)

$$\begin{aligned}ΚΓ^2 &= ΜΓ^2 + ΚΜ^2 \\ 12^2 &= (4\sqrt{3})^2 + ΚΜ^2 \\ 144 - 48 &= ΚΜ^2 \\ ΚΜ^2 &= 96\text{cm}^2 \\ ΚΜ &= \sqrt{96}\text{cm} \\ ΚΜ &= 4\sqrt{6}\text{cm}\end{aligned}$$

- v. Να βρεθεί ο όγκος του τετραέδρου και ο όγκος του κυλίνδρου. (μονάδες 1,5)

$$\begin{aligned}V_{\text{τετραέδρου}} &= \frac{1}{3} \cdot (ΑΒΓ) \cdot ΚΜ = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{6}\text{cm}^3 = 48\sqrt{18}\text{cm}^3 \\ V_{\text{κυλίνδρου}} &= \pi \cdot \rho^2 \cdot υ = \pi \cdot ΜΔ^2 \cdot ΚΜ\text{cm}^3 = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6}\text{cm}^3 = 48\pi\sqrt{6}\text{cm}^3\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_2): y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{13}{3}$$

$$3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{9}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{9}{3} = \frac{9}{3}$$

Άρα, το σημείο $K(2, 3)$ ανήκει στην ευθεία (ε_2)

- iv. Με τη βοήθεια των παραπάνω σημείων που γνωρίζετε τις συντεταγμένες του, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με σημείο $O(0, 0)$, η αρχή των αξόνων. (μονάδα 0,5)

Σχήμα!

- v. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τους άξονες yy' (να ονομαστεί N) και xx' (να ονομαστεί M). (μονάδα 1)

$$N(0, \frac{13}{3}) \text{ και } M(6,5,0)$$

$$0 = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x = \frac{13}{3} \Leftrightarrow x = 6,5$$

- vi. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου KOM . (μονάδα 1)

$$(KOM) = \frac{OM \cdot KH}{2} = \frac{6,5 \cdot 3}{2} \text{ τ.μ.} = 9,75 \text{ τ.μ.}, \text{ όπου } H(2,0) \text{ και } KH \text{ ύψος του τριγώνου } KOM \text{ προς την } OM.$$

- vii. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο KOM είναι ορθογώνιο. (μονάδες 1,5)

Αρκεί να εξετάσουμε αν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OKH :

$$KO^2 = KH^2 + OH^2$$

$$KO^2 = 3^2 + 2^2$$

$$KO^2 = 13 \text{ τ.μ.}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο KHM :

$$KM^2 = KH^2 + HM^2$$

$$KM^2 = 3^2 + (4,5)^2$$

$$KM^2 = 9 + \frac{81}{4}$$

$$KM^2 = \frac{117}{4} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Και } OM^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4} \text{ τ.μ.}$$

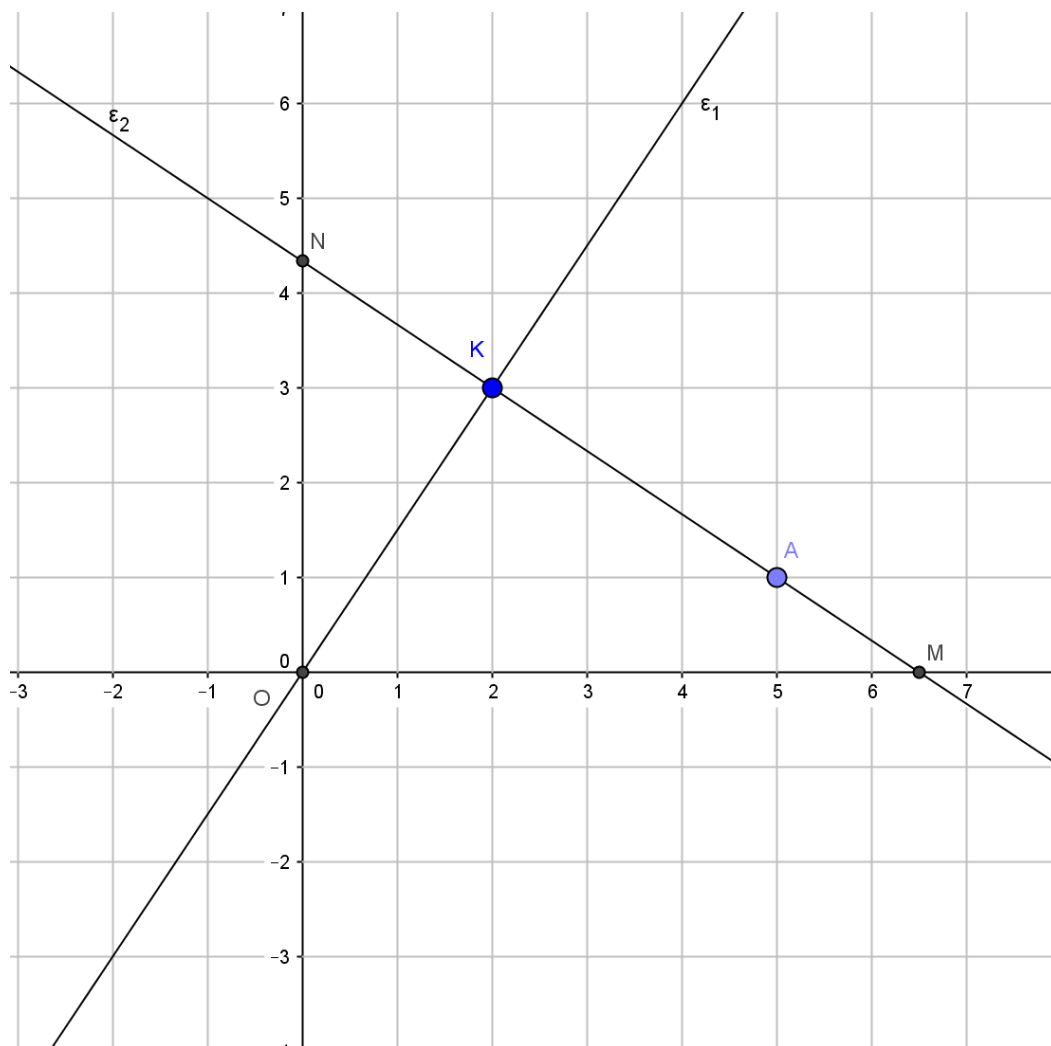
Άρα:

$$OM^2 = KM^2 + KO^2$$

$$\frac{169}{4} = \frac{117}{4} + 13$$

$$\frac{169}{4} = \frac{117}{4} + \frac{52}{4}$$

Που ισχύει! Άρα, KOM ορθογώνιο τρίγωνο.



Επανάληψη θεωρίας άλγεβρας σε 29 ερωτήσεις - απαντήσεις

Άλγεβρα 1^ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 1 : Τι ονομάζεται αριθμητική και τι αλγεβρική παράσταση;

Απάντηση

Μία παράσταση, που περιέχει πράξεις με αριθμούς ονομάζεται αριθμητική παράσταση.

Μία παράσταση, που περιέχει πράξεις με αριθμούς και με μεταβλητές ονομάζεται αλγεβρική παράσταση.

Ερώτηση 2 : Τι ονομάζουμε όρους μιας αλγεβρικής παράστασης και τι αναγωγή ομοίων όρων της;

Απάντηση

Έστω η αλγεβρική παράσταση : $2 \cdot x - 4 \cdot x + 5$. Οι προσθετέοι λέγονται όροι αυτής της αλγεβρικής παράστασης.

Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζουμε τη διαδικασία, με την οποία γράφουμε σε απλούστερη μορφή τις αλγεβρικές παραστάσεις.

Για παράδειγμα:

$$7 \cdot \alpha + 8 \cdot \alpha = (7 + 8) \cdot \alpha = 15 \cdot \alpha$$

$$x + 4 \cdot x - 2 \cdot x = (1 + 4 - 2) \cdot x = 3 \cdot x$$

Ερώτηση 3 : Ποιες είναι οι τρεις πιθανές σχέσεις που συνδέουν δύο αριθμούς α,β;

Απάντηση

Δύο αριθμοί α,β μπορεί να είναι ίσοι : $\alpha = \beta$ ή
ο α να είναι μικρότερος του β : $\alpha \leq \beta$ ή
ο α να είναι μεγαλύτερος του β : $\alpha \geq \beta$.

Ερώτηση 4 : Ποιοι κανόνες ισχύουν για την ισότητα δύο αριθμών;

Απάντηση

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μία ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μία ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μία ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μία ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \alpha : \gamma = \beta : \gamma, \text{ αρκεί το } \gamma \neq 0$$

Ερώτηση 4 : Τι ονομάζουμε :

- i) Εξίσωση;
- ii) Γνωστούς και άγνωστους όρους μιας εξίσωσης;
- iii) Λύση (ή ρίζα) μιας εξίσωσης;
- iv) Επίλυση μιας εξίσωσης;

Απάντηση

- i) Μία ισότητα, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x , ονομάζεται εξίσωση.
- ii) Γνωστοί είναι οι όροι που γνωρίζουμε σε μία εξίσωση, ενώ άγνωστοι είναι οι όροι που περιέχουν την μεταβλητή μας.
- iii) Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.
- iv) Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

Ερώτηση 6 : Πότε μία εξίσωση λέγεται αδύνατη; Και πότε λέγεται ταυτότητα (αόριστη);

Απάντηση

Μία εξίσωση είναι αδύνατη, όταν είναι μορφής $0x = \alpha$, γιατί για κάθε τιμή της μεταβλητής x το πρώτο μέλος ισούται πάντα με 0, οπότε δεν μπορεί να είναι ποτέ ίση με α . Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση.

Μία εξίσωση είναι ταυτότητα (αόριστη), όταν είναι της μορφής $0x = 0$, δηλαδή κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.

Άλγεβρα 2^ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 7 : Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού και ποιες οι ιδιότητες της;

Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α . Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με

Οι ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας είναι οι εξής:

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$.

Και αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Ερώτηση 8 : Ποιοι αριθμοί ονομάζονται ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί;

Απάντηση

Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται άρρητος αριθμός.

Ρητοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος αριθμός και ν φυσικός αριθμός.

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς, αλλά και όλους τους άρρητους.

Ερώτηση 9 : Πότε μία ευθεία ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών;

Απάντηση

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για τον λόγο αυτόν, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών.

Άλγεβρα 3^ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 10 : Τι ονομάζεται συνάρτηση και τι πίνακας τιμών της;

Απάντηση

Συνάρτηση λέγεται μία σχέση μεταξύ των τιμών x, y δύο μεγεθών, όπου κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y .

Πίνακας τιμών μιας συνάρτησης λέγεται ένας πίνακας, που περιέχει τις τιμές της μεταβλητής x και τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής y .

Ερώτηση 11 : Τι ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και τι συντεταγμένες;

Απάντηση

Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$, $y'y$ με κοινή αρχή το O , των οποίων οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος. Το σύστημα αυτό το ονομάζουμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Ένα τυχαίο σημείο στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων συμβολίζεται ως εξής : $M(\alpha, \beta)$. Ο πρώτος αριθμός α ονομάζεται τετμημένη και ο δεύτερος αριθμός β ονομάζεται τεταγμένη. Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M λέγονται συντεταγμένες του σημείου M .

Ερώτηση 12 : Τι ονομάζουμε τεταρτημόρια;

Απάντηση

Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα ίσα μέρη που λέγονται τεταρτημόρια.

Ερώτηση 13 : Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Απάντηση

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x .

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ονομάζουμε το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y)

Ερώτηση 14 : Τι γνωρίζεται για τις συντεταγμένες των σημείων των αξόνων $x'x$ και $y'y$ σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα;

Απάντηση

4. Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τετμημένη 0.
5. Κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τεταγμένη 0.
6. Η αρχή των αξόνων O έχει συντεταγμένες $O(0,0)$.

Ερώτηση 15 : Πότε δύο ποσά λέγονται ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά λέγονται ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο $\frac{y}{x} = \alpha$.

Ερώτηση 16 : Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax$ και από που διέρχεται;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Ερώτηση 17 : Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας $y=ax$;

Απάντηση

Κλίση της ευθείας $y=ax$, ονομάζεται ο λόγος $\frac{y}{x} = \alpha$, με $x \neq 0$.

Ερώτηση 18 : Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+\beta$ και από που διέρχεται;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της $y=ax+\beta$, $\beta \neq 0$ είναι μία ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y=ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0,\beta)$ του άξονα $y'y$.

Ερώτηση 19 : Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+\beta$ και από που διέρχεται;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της $y=ax+\beta$, $\beta \neq 0$ είναι μία ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y=ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0,\beta)$ του άξονα $y'y$.

Ερώτηση 20 : Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας $y=ax+\beta$;

Απάντηση

Κλίση της ευθείας $y=ax+\beta$, ονομάζεται ο αριθμός a .

Ερώτηση 21 : Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα, όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό, και η τιμή του άλλου διαιρεθεί με τον αριθμό αυτόν.

Ερώτηση 22 : Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα και τι προκύπτει από αυτό;

Απάντηση

Όταν δύο ποσά x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν $a \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y , τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{a}{x}$

Ερώτηση 23 : Πως λέγεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$, όπου $a \neq 0$, λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους βρίσκονται :

- Στο 1^ο και στο 3^ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν το $a > 0$.
- Στο 2^ο και στο 4^ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν το $a < 0$.

Ερώτηση 24 : Ποιες οι ιδιότητες της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$;

Απάντηση

Η υπερβολή έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$.

Άλγεβρα 4^ο Κεφάλαιο

Ερώτηση 25 : Τι ονομάζεται πληθυσμός και τι μεταβλητή;

Απάντηση

Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγονται πληθυσμός. Το χαρακτηριστικό (π.χ. η ομάδα προτίμησης στο ποδόσφαιρο) ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται μεταβλητή.

Ερώτηση 26 : Τι ονομάζεται δείγμα και τι μέγεθος δείγματος;

Απάντηση

Λέγεται ένα μέρος του πληθυσμού τι οποίο επιλέγουμε κατά τέτοιο τρόπο, ώστε τα συμπεράσματα να είναι αξιόπιστα.

Μέγεθος δείγματος λέγεται το πλήθος των στοιχείων του δείγματος.

Ερώτηση 27 : Πως γίνεται η συλλογή των στατιστικών δεδομένων;

Απάντηση

Η συλλογή των στατιστικών δεδομένων γίνεται με απογραφή, με διαρκή εγγραφή και κυρίως με δειγματοληψία.

Με την απογραφή συγκεντρώνονται στοιχεία από όλα τα άτομα του πληθυσμού σε μία καθορισμένη ημερομηνία.

Η διαρκής εγγραφή γίνεται καθημερινά στα ληξιαρχεία, στα οποία καταχωρούνται γεννήσεις, γάμοι κ.τ.λ.

Σε μία δειγματοληψία συγκεντρώνουμε στοιχεία μόνο από ένα μέρος του πληθυσμού, που λέγεται δείγμα και προσπαθούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για όλο το πληθυσμό.

Ερώτηση 28 : Τι ονομάζεται μέση τιμή μιας μεταβλητής και πως συμβολίζεται;

Απάντηση

Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Ερώτηση 29 : Τι ονομάζεται διάμεσος;

Απάντηση

Για να βρούμε τη διάμεσο μιας κατανομής γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά.

Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι :

- Άρτιος αριθμός, παίρνουμε ως διάμεσο το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.
- Περιττός αριθμός παίρνουμε ως διάμεσο τη μεσαία παρατήρηση.

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γωνία	ημω	συνω	εφω	Γωνία	ημω	συνω	εφω
0°	0,000	1,000	0,000	45°	0,707	0,707	1,000
1°	0,017	0,999	0,017	46°	0,720	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,470	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,748
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,333
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,203	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	0,999	0,018	57,290
				90°	1,000	0,000	