Συνδυαστική Χ

Βαγγέλης Ψύχας

Αρχή της Περιστεροφωλιάς

(Αρχή του Dirichlet)

♦ Αν έχουμε περισσότερα περιστέρια από περιστεροφωλιές και προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τα περιστέρια στις περιστεροφωλιές, τότε μία τουλάχιστον περιστεροφωλιά θα περιέχει δύο τουλάχιστον περιστέρια.

- Δίνονται τέσσερεις θετικοί ακέραιοι k, l, m, n. Αποδείξτε ότι η διαφορά δύο τουλάχιστον από αυτούς είναι πολλαπλάσιο του 3.

- Έστω $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ τα υπόλοιπα της διαίρεσης των αριθμών k, l, m, n με το 3 αντίστοιχα. Γνωρίζουμε τώρα ότι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης οποιουδήποτε ακέραιου με το 3 είναι 0 ή 1 ή 2.

- Άρα τα υπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ είναι στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 2\}$, οπότε (σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς) δύο τουλάχιστον από αυτά θα είναι ίσα.

. . . έστω $\upsilon_1 = \upsilon_3$ τότε $\upsilon_1 - \upsilon_3 = 0$, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του ακέραιου $k - m$ με το 3 είναι 0.
Δηλαδή ο ακέραιος $k - m$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

● Δίνονται $n+1$ θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι η διαφορά δύο τουλάχιστον από αυτούς είναι πολλαπλάσιο του n.

● Έστω $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \cdots, \upsilon_{n+1}$ τα υπόλοιπα της διαίρεσης των $n+1$ θετικών ακεραίων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n+1}$ με το n αντίστοιχα. Γνωρίζουμε τώρα ότι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης οποιουδήποτε ακέραιου με το n είναι 0 ή 1 ή 2 ή . . . ή $(n-1)$.

● Άρα δύο τουλάχιστον από τα υπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \cdots, \upsilon_{n+1}$ θα ταυτίζονται (έστω $\upsilon_i = \upsilon_j$).

● Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $\alpha_i - \alpha_j$ είναι πολλαπλάσιο του n.

● Δίνονται n θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι ή κάποιος από αυτούς θα διαιρείται με το n ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς να διαιρείται με το $\mathbf{n}$.

● Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, n$ θετικοί ακέραιοι.

● Θεωρούμε τώρα τους n θετικούς ακέραιους:

$$p_1 = \alpha_1$$
$$p_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$\ldots$$
$$p_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$$

και τα υπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \cdots, \upsilon_n \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, (n-1)\}$ της διαίρεσής τους με τον n.

● Αν $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 \cdot \upsilon_3 \cdot \cdots \cdot \upsilon_n = 0$ (δηλαδή κάποιο από τα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \cdots, \upsilon_n$ είναι μηδέν) τότε η πρόταση αποδείχθηκε.

● Έστω τώρα ότι: $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 \cdot \upsilon_3 \cdot \cdots \cdot \upsilon_n \neq 0$.

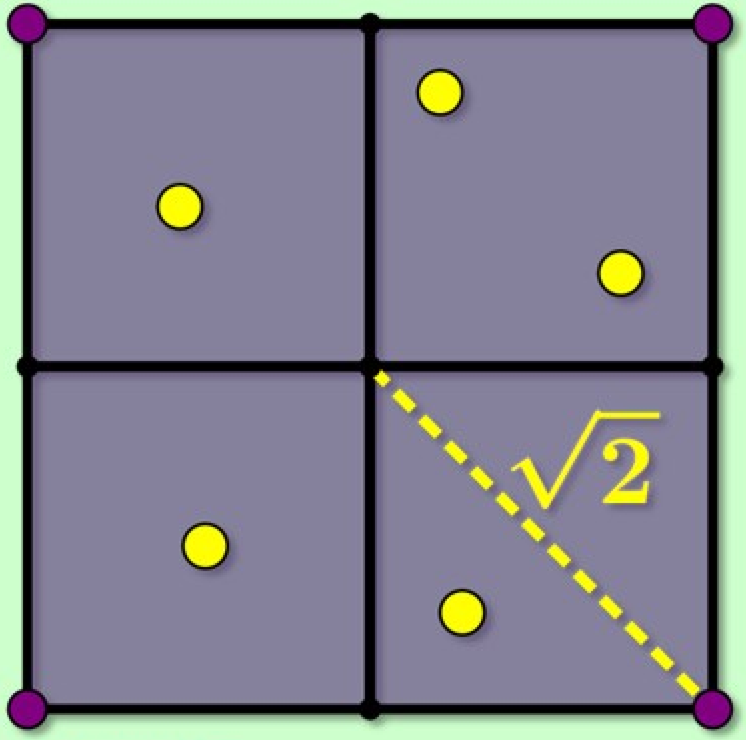
● Τότε οι θετικοί ακέραιοι $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ θα αφήνουν υπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \cdots, \upsilon_n \in \{1, 2, 3, \cdots, (n-1)\}$.

● Άρα δύο τουλάχιστον από τα υπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \cdots, \upsilon_n$ θα ταυτίζονται (έστω $\upsilon_i = \upsilon_j$).

● Δηλαδή η διαφορά $p_i - p_j$ θα διαιρείται με το n.

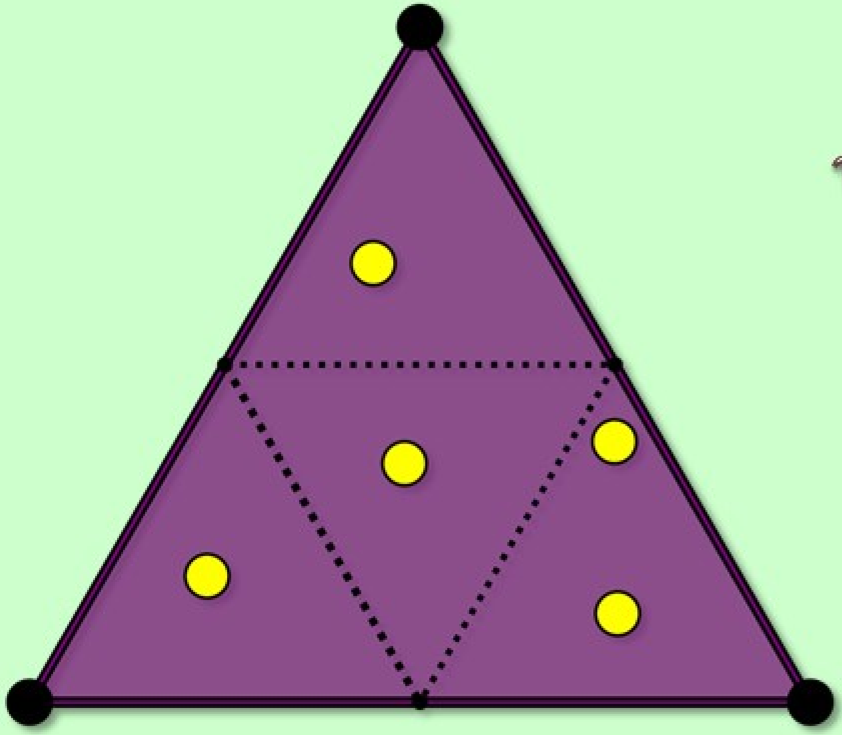
Για $i < j$ έχουμε: $p_i - p_j = p_{i+1} + p_{i+2} + p_{i+3} + \cdots + p_j$.

Δίνεται τετράγωνο πλευράς **2** και πέντε διαφορετικά σημεία στο εσωτερικό ή τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον από αυτά απέχουν απόσταση μικρότερη ή ίση με $\sqrt{2}$.



- Χωρίζουμε το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς **1**.
- Τότε ένα τουλάχιστον μικρό τετράγωνο, θα περιέχει **2** τουλάχιστον σημεία.
- Η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του μικρού τετραγώνου είναι $\sqrt{2}$.

● Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 και πέντε διαφορετικά σημεία στο εσωτερικό ή τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον από αυτά απέχουν απόσταση μικρότερη ή ίση με 1.

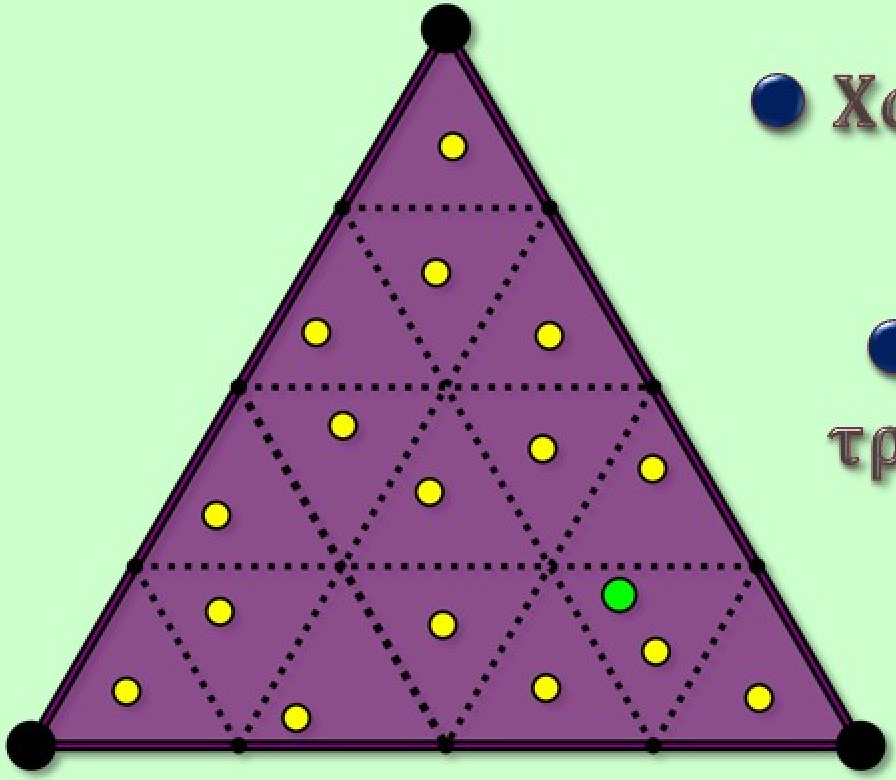


● Χωρίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο σε τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 1.

● Τότε ένα τουλάχιστον μικρό ισόπλευρο τρίγωνο θα περιέχει 2 τουλάχιστον σημεία.

● Η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του μικρού τριγώνου είναι 1.

● Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς **4** και **17** διαφορετικά σημεία στο εσωτερικό ή τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον από αυτά απέχουν απόσταση μικρότερη ή ίση με **1**.



● Χωρίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο σε **16** ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς **1**.

● Τότε ένα τουλάχιστον μικρό ισόπλευρο τρίγωνο θα περιέχει **2** τουλάχιστον σημεία.

● Η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του μικρού τριγώνου είναι **1**.

● Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς n και $k^2 + 1$ διαφορετικά σημεία στο εσωτερικό ή τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον από αυτά απέχουν απόσταση μικρότερη ή ίση με n/k (όπου n, k είναι θετικοί ακέραιοι).