Συνδυαστική IX

Συνδυαστική

♦ Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την καταμέτρηση (απαρίθμηση) των στοιχείων διαφόρων συνόλων.

♦ Τα τελευταία χρόνια, η συνδυαστική, αποτελεί τμήμα ενός ευρύτερου κλάδου των μαθηματικών που ονομάζονται "Διακριτά Μαθηματικά".

♦ Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε βασικές γνώσεις από την άλγεβρα και την Θεωρία Συνόλων.

Πολλαπλασιαστική Αρχή

♦ Αν ένα αντικείμενο α_1 μπορεί να εκλεγεί με k_1 τρόπους και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα αντικείμενο α_2 μπορεί να εκλεγεί με k_2 τρόπους . . . και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα αντικείμενο α_ν μπορεί να εκλεγεί με k_ν τρόπους, τότε όλα τα αντικείμενα α_1 και α_2 και α_3 και … και α_ν μπορούν να εκλεγούν με $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_\nu$ τρόπους.

♦ Η Πολλαπλασιαστική Αρχή χρησιμοποιείται για την καταμέτρηση αποτελεσμάτων σε πειράματα που η εκλογή ενός αντικειμένου γίνεται με την ταυτόχρονη εκλογή ενός άλλου αντικειμένου.

Επαναληπτικές Διατάξεις

- Το πλήθος των διατάξεων ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη (χωρίς περιορισμό) το συμβολίζουμε με $E(\nu, \kappa)$ και δίνεται από τη σχέση: $E(\nu, \kappa) = \nu^{\kappa}$.

Επαναληπτικές Διατάξεις
(Παράδειγμα 1)

♦ Στο ασανσέρ ενός **επταώροφου** κτιρίου βρίσκονται **δέκα** άτομα. Με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν τα δέκα άτομα στους επτά ορόφους (αν υποθέσουμε ότι το ασανσέρ ξεκινά από το ισόγειο του κτιρίου);

- Το $1^{ο}$ άτομο, μπορεί να αποβιβαστεί με 7 τρόπους.
- Το $2^{ο}$ άτομο, μπορεί να αποβιβαστεί με 7 τρόπους.

. . . .

- Το $10^{ο}$ άτομο, μπορεί να αποβιβαστεί με 7 τρόπους.

Άρα οι δυνατοί τρόποι αποβίβασης είναι: 7^{10}

- . . . με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η αποβίβαση, αν υποθέσουμε ότι στον $1^{ο}$ όροφο θα κατεβούν 2 ακριβώς άτομα;

● Τα δύο άτομα (που θα κατεβούν στο 1^{o} όροφο), μπορούν να επιλεγούν (άρα και να αποβιβαστούν) με $\binom{10}{2}$ τρόπους . . . τα υπόλοιπα 8 άτομα μπορούν να αποβιβαστούν με οποιοδήποτε τρόπο στους 6 (υπόλοιπους) ορόφους. Έτσι έχουμε:

● Το 3^{o} άτομο, μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

● Το 4^{o} άτομο, μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

. . . .

● Το 10^{o} άτομο, μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

Άρα οι δυνατοί τρόποι αποβίβασης είναι: $\binom{10}{2} \cdot 6^{8}$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

♦ Το πλήθος των μεταθέσεων ν ειδών αντικειμένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\nu$ με $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu$ στοιχεία αντίστοιχα το συμβολίζουμε με $M(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$M(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu) = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu)!}{\kappa_1!\,\kappa_2!\cdots\kappa_\nu!}.$$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

(Παράδειγμα 1)

♦ Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί δημιουργούνται από όλες τις δυνατές αναδιατάξεις των ψηφίων του αριθμού 556456.

1ος Τρόπος

● Στον αριθμό 556456, υπάρχουν 3 "πεντάρια", 2 "εξάρια" και 1 "τεσσάρι". Άρα το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών είναι:

$$\frac{(3+2+1)!}{3!\,2!\,1!} = 60.$$

2ος Τρόπος

- Τα 3 "πεντάρια" μπορούμε να τα τοποθετήσουμε με $\binom{6}{3}$ τρόπους στις 6 θέσεις του εξαψήφιου αριθμού.

- Τα 2 "εξάρια" μπορούμε να τα τοποθετήσουμε με $\binom{3}{2}$ τρόπους στις 3 (υπόλοιπες) θέσεις του εξαψήφιου αριθμού.

- Το 1 "τεσσάρι" μπορούμε να το τοποθετήσουμε με $\binom{1}{1}$ τρόπους στην 1 θέση (που απομένει).

- Άρα το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών είναι:

$$\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}=\frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{3!}{2!\,1!}\cdot\frac{1!}{0!\,1!}=60.$$

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

(Παράδειγμα 2)

♦ Να βρεθεί το άθροισμα όλων των πενταψήφιων αριθμών που προκύπτουν από τις αναδιατάξεις των ψηφίων του αριθμού 1255.

● Οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που προκύπτουν από τις αναδιατάξεις των ψηφίων του αριθμού 1255 είναι:

1ος Τρόπος

1	2	5	5		1	5	5	2
2	1	5	5		2	5	5	1
1	5	2	5		5	1	5	2
2	5	1	5		5	2	5	1
5	1	2	5		5	5	1	2
5	2	1	5		5	5	2	1

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των ψηφίων κάθε στήλης είναι:

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 39.$$

Άρα το άθροισμα θα δημιουργηθεί από 39 μονάδες, 39 δεκάδες, 39 εκατοντάδες και 39 χιλιάδες: $39(1 + 10 + 100 + 1000) = $

$$= 43329.$$

2ος Τρόπος

1	2	5	5
$1^η$ Θέση	$2^η$ Θέση	$3^η$ Θέση	$4^η$ Θέση
$\cdot 10^3$	$\cdot 10^2$	$\cdot 10^1$	$\cdot 10^0$

Το πλήθος των αριθμών που έχουν το $4^ο$ ψηφίο τους 1 είναι:

$$\binom{3}{2}\binom{1}{1}=3$$

Το πλήθος των αριθμών που έχουν το $4^ο$ ψηφίο τους 2 είναι:

$$\binom{3}{2}\binom{1}{1}=3$$

Το πλήθος των αριθμών που έχουν το $4^ο$ ψηφίο τους 5 είναι:

$$3!=6$$

2ος Τρόπος

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{array}$$

1η Θέση 2η Θέση 3η Θέση 4η Θέση

$\cdot 10^3$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^1$ $\cdot 10^0$

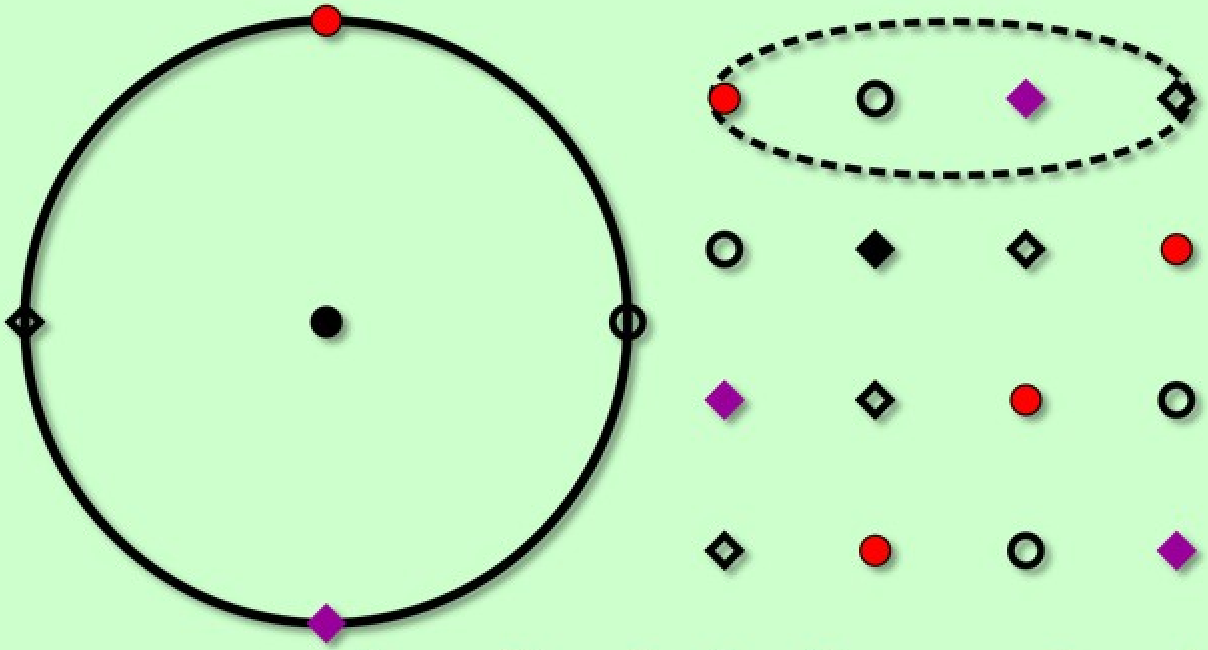
Αν λοιπόν προσθέσουμε τους αριθμούς, θα έχουμε:
$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 39$ μονάδες

Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι θα έχουμε:
39 δεκάδες, 39 εκατοντάδες και 39 χιλιάδες.

Άρα το άθροισμα όλων των αριθμών θα είναι:
$39(1 + 10 + 100 + 1000) = 43329$

Κυκλικές Διατάξεις 9 ανά 4.

- Από 9 διακεκριμένα αντικείμενα επιλέγουμε 4 και τα τοποθετούμε σε κυκλικό τραπέζι.



- Στις τέσσερεις παραπάνω “ευθείες” τοποθετήσεις, αντιστοιχεί μία “κυκλική” τοποθέτηση των τεσσάρων αντικειμένων.

Κυκλικές Διατάξεις 9 ανά 4.

- Οι δυνατοί τρόποι επιλογής των τεσσάρων αντικειμένων από τα εννέα είναι: $\dfrac{9!}{(9-4)!}$.

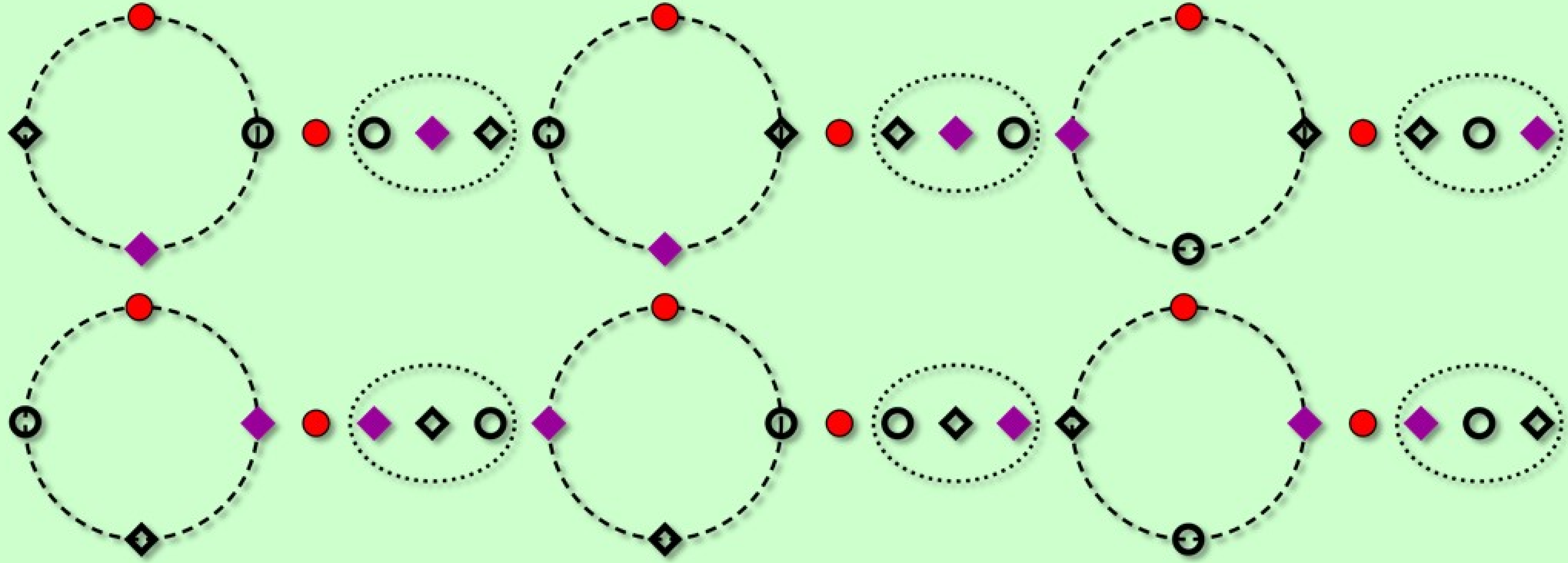
- Επειδή όμως σε τέσσερεις "ευθείες" τοποθετήσεις, αντιστοιχεί μία "κυκλική" τοποθέτηση των τεσσάρων αντικειμένων, συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των κυκλικών διατάξεων είναι: $\dfrac{9!}{4(9-4)!}$.

Κυκλικές Διατάξεις ν ανά κ.

● Οι δυνατοί τρόποι επιλογής των κ αντικειμένων από τα ν είναι: $\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$.

♦ Επειδή όμως σε κ "ευθείες" τοποθετήσεις, αντιστοιχεί μία "κυκλική" τοποθέτηση των κ αντικειμένων, συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των κυκλικών διατάξεων ν ανά κ είναι: $\dfrac{\nu!}{\kappa(\nu-\kappa)!}$.

- Οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης τεσσάρων αντικειμένων σε κυκλικό τραπέζι είναι $(4-1)! = 3!$.



Κυκλικές Μεταθέσεις

Κυκλικές Διατάξεις ν ανά ν.

♦ Αν στις κυκλικές διατάξεις των ν αντικειμένων ανά κ, αντικαταστήσουμε το κ με ν (δηλαδή αν επιλέξουμε όλα τα αντικείμενα) και τα τοποθετήσουμε γύρω από κυκλικό τραπέζι, τότε δημιουργούνται οι **κυκλικές μεταθέσεις των ν αντικειμένων**, που είναι:

$$\frac{\nu!}{\nu \cdot (\nu - \nu)!} = (\nu - 1)!.$$

- Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι ν αγόρια και ν κορίτσια, στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
β) Αγόρια και κορίτσια να καθίσουν εναλλάξ.
γ) Δίπλα σε κάθε αγόρι να καθίσει το κορίτσι με το οποίο έχουν προπονηθεί (ως ζευγάρι), για το διαγωνισμό χορού.

- α) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, τότε γύρω από το τραπέζι θα καθίσουν 2ν άτομα, οπότε οι δυνατοί τρόποι θα είναι $(2\nu-1)!$.

- β) Τα ν αγόρια μπορούν να καθίσουν με $(\nu-1)!$ τρόπους (γύρο από το τραπέζι). Για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους, τα (ν το πλήθος) κορίτσια μπορούν να καθίσουν (στις ν ενδιάμεσες θέσεις) με $\nu!$ τρόπους.
Άρα οι δυνατοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν (αγόρια και κορίτσια εναλλάξ) είναι $(\nu-1)!\,\nu!$.

- γ) Τα ν αγόρια μπορούν να καθίσουν με $(\nu-1)!$ τρόπους (γύρο από το τραπέζι). Για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους κάθε ένα από τα (ν το πλήθος) κορίτσια μπορεί να καθίσει με 2 διαφορετικούς τρόπους (δεξιά ή αριστερά του χορευτικού ζευγαριού της). Δηλαδή τα κορίτσια μπορούν να καθίσουν με 2^{ν} τρόπους (στις ενδιάμεσες θέσεις).
Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν (αγόρια και κορίτσια) είναι $(\nu-1)!\cdot 2^{\nu}$.

Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

♦ Συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο ν αντικειμένων με επανάληψη.

$$\begin{bmatrix}\nu\\ \kappa\end{bmatrix} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{(\nu-1)!\cdot\kappa!}.$$

Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

(Παράδειγμα 1)

- Ρίχνουμε ταυτόχρονα τρία ίδια νομίσματα. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

$1^{ος}$ Τρόπος

- Κατά τη ρίψη οποιουδήποτε νομίσματος, τα δυνατά αποτελέσματα είναι ***Κ*** (Κεφάλι) ή ***Γ*** (Γράμματα).
- Προφανώς κατά τη ρίψη των τριών νομισμάτων, τα δυνατά αποτελέσματα είναι τέσσερα: ***ΚΚΚ***, ***ΚΚΓ***, ***ΚΓΓ***, ***ΓΓΓ***.

(Δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των ***Κ*** και ***Γ*** διότι τα νομίσματα ρίχνονται ταυτόχρονα, δηλαδή είναι ίδια τα αποτελέσματα ***ΚΚΓ***, ***ΚΓΚ***, ***ΓΚΚ***)

2ος Τρόπος

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τους **επαναληπτικούς συνδυασμούς** για να λύσουμε το πρόβλημα.

- Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι όσοι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των $\boldsymbol{\nu = 2}$ "αντικειμένων" ($\boldsymbol{K}$ "Κεφάλι" ή $\boldsymbol{\Gamma}$ "Γράμματα") ανά $\boldsymbol{\kappa = 3}$ (οι επαναλήψεις που μπορούμε να έχουμε είναι τρεις).

- Δηλαδή το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

(Παράδειγμα 2)

- Μία εταιρεία προτίθεται να αγοράσει τέσσερα αυτοκίνητα, τα οποία διατίθενται σε τρία χρώματα (Κόκκινο, Μπλε, Πράσινο). Με πόσους τρόπους μπορεί η εταιρεία να πραγματοποιήσει την αγορά;

Η αγορά των αυτοκινήτων μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

1ος Τρόπος

- i) Όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω (τρεις) τρόποι αγοράς:

ΚΚΚΚ, ***ΜΜΜΜ***, ***ΠΠΠΠ*** .

● ii) Τρία (από τα τέσσερα) αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω (έξι) τρόποι αγοράς:
$KKKM$, $KKK\Pi$, $MMMK$, $MMM\Pi$, $\Pi\Pi\Pi K$, $\Pi\Pi\Pi M$.

● iii) Δύο (από τα τέσσερα) αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο χρώμα (διαφορετικό των δύο άλλων).
Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω τρόποι αγοράς:
$KKMM$, $KK\Pi\Pi$, $MM\Pi\Pi$.

● iv) Δύο (από τα τέσσερα) αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα άλλα δύο έχουν διαφορετικό χρώμα (μεταξύ τους) και διαφορετικό των δύο άλλων.
Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω (τρεις) τρόποι αγοράς:
$KKM\Pi$, $\Pi\Pi KM$, $MMK\Pi$.

Άρα υπάρχουν **15 τρόποι** πραγματοποίησης της αγοράς.

2ος Τρόπος

Αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 4 αντικείμενα $x_1, x_2. x_3. x_4$ που ανήκουν στο σύνολο $X = \{K, M, \Pi\}$.

● Η επιλογή (προφανώς) γίνεται με επανάληψη .
Δηλαδή κάποια από τα 4 αντικείμενα x_1, x_2, x_3, x_4 μπορεί να είναι ίδια μεταξύ τους.

● Άρα το πλήθος των τρόπων επιλογής, ταυτίζεται με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των τριών αντικειμένων (στοιχείων) του συνόλου $X = \{K, M, \Pi\}$ ανά 4.

$$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2!} = 15.$$

3ος Τρόπος

- Οι επιλογές $KKKM$, $KKMK$, $KMKK$, $MKKK$, είναι προφανώς ίδιες. Αυτό που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει είναι το πλήθος των Κόκκινων (κ), Μπλε (μ) και Πράσινων (π) αυτοκινήτων που περιέχονται σε μία επιλογή

- Δηλαδή, μία επιλογή θα είναι διαφορετική από μία άλλη, όταν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς κ, μ, π (της μιας επιλογής) είναι διαφορετικός από τους αντίστοιχους αριθμούς κ, μ, π της άλλης.

. . . έτσι δημιουργείται ο παρακάτω πίνακας του πλήθους αυτοκινήτων ανά χρώμα.

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται και οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό 4 σαν άθροισμα τριών μη αρνητικών ακεραίων.
Δηλαδή φαίνονται όλες οι μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης $a_1 + a_2 + a_3 = 4$.

ΚΟΚΚΙΝΑ	ΜΠΛΕ	ΠΡΑΣΙΝΑ
4	0	0
0	4	0
0	0	4
3	1	0
3	0	1
1	3	0
1	0	3
0	3	1
0	1	3
2	2	0
2	0	2
0	2	2
2	1	1
1	2	1
1	1	2