Συνδυαστική V

♦ Να βρεθεί το πλήθος των θετικών διαιρετών του αριθμού 12.

Διαιρέτες του αριθμού $12 = 2^2 \cdot 3$ είναι οι αριθμοί $1, 2, 3, 4, 6, 12$ οι οποίοι γράφονται στη μορφή:

$$1 = 2^0 \cdot 3^0,\ 2 = 2^1 \cdot 3^0,\ 3 = 2^0 \cdot 3^1,$$
$$4 = 2^2 \cdot 3^0,\ 6 = 2^1 \cdot 3^1,\ 12 = 2^2 \cdot 3^1.$$

... δηλαδή κάθε διαιρέτης δ είναι της μορφής: $\delta = 2^k \cdot 3^m$ όπου $0 \le k \le 2$ και $0 \le m \le 1$

Άρα το πλήθος των διαιρετών του αριθμού

$12 = 2^2 \cdot 3^1$ είναι $(2+1)\cdot(1+1) = 6$.

Το άθροισμα των διαιρετών του αριθμού $12 = 2^2 \cdot 3^1$

(που είναι οι αριθμοί $1, 2, 3, 4, 6, 12$) είναι:

$$1+2+3+4+6+12 = 1+2+4+3+6+12 =$$

$$= 1+2+2^2+3\left(1+2+2^2\right)=$$

$$= \left(1+2+2^2\right)\left(1+3^1\right) = \frac{2^{2+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{1+1}-1}{3-1}.$$

Το πλήθος των διαιρετών του αριθμού $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ είναι:

$$(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 24.$$

Το άθροισμα των διαιρετών του αριθμού $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ είναι:

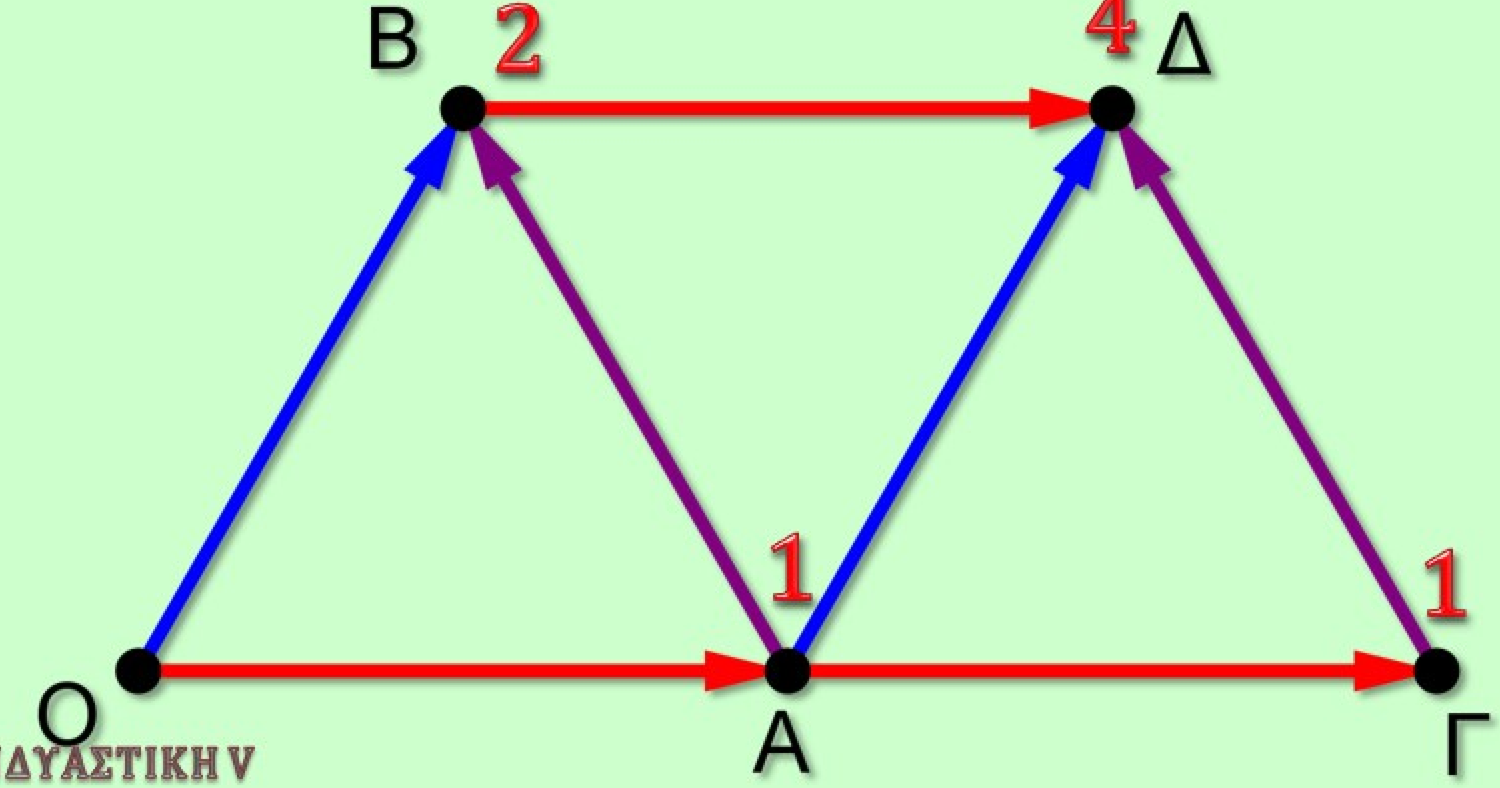
$$\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}.$$

… γενικότερα …

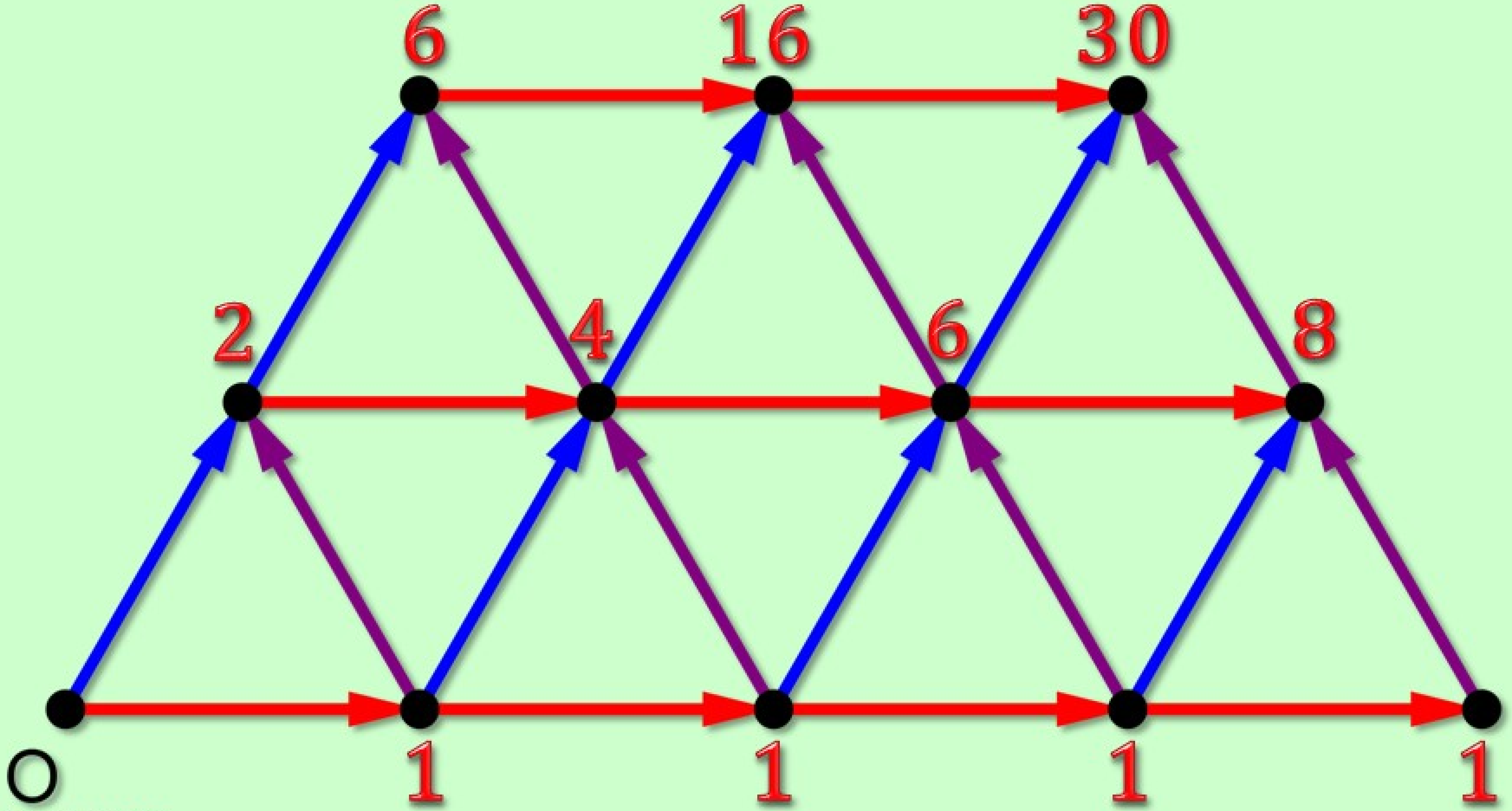
♦ Το πλήθος των διαιρετών του αριθμού
$\alpha = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ είναι:
$(m_1 + 1) \cdot (m_2 + 1) \cdot \dots \cdot (m_k + 1)$.

♦ το άθροισμα των διαιρετών του αριθμού
$\alpha = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ είναι:
$$\frac{p_1^{m_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{m_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{m_k+1}-1}{p_k-1}.$$

♦ Μια μέλισσα ξεκινά από το σημείο Ο και κινείται προς τα δεξιά και προς τα άνω. Με πόσους τρόπους μπορεί να φτάσει στα λουλούδια που βρίσκονται στα σημεία Α,Β,Γ και Δ.

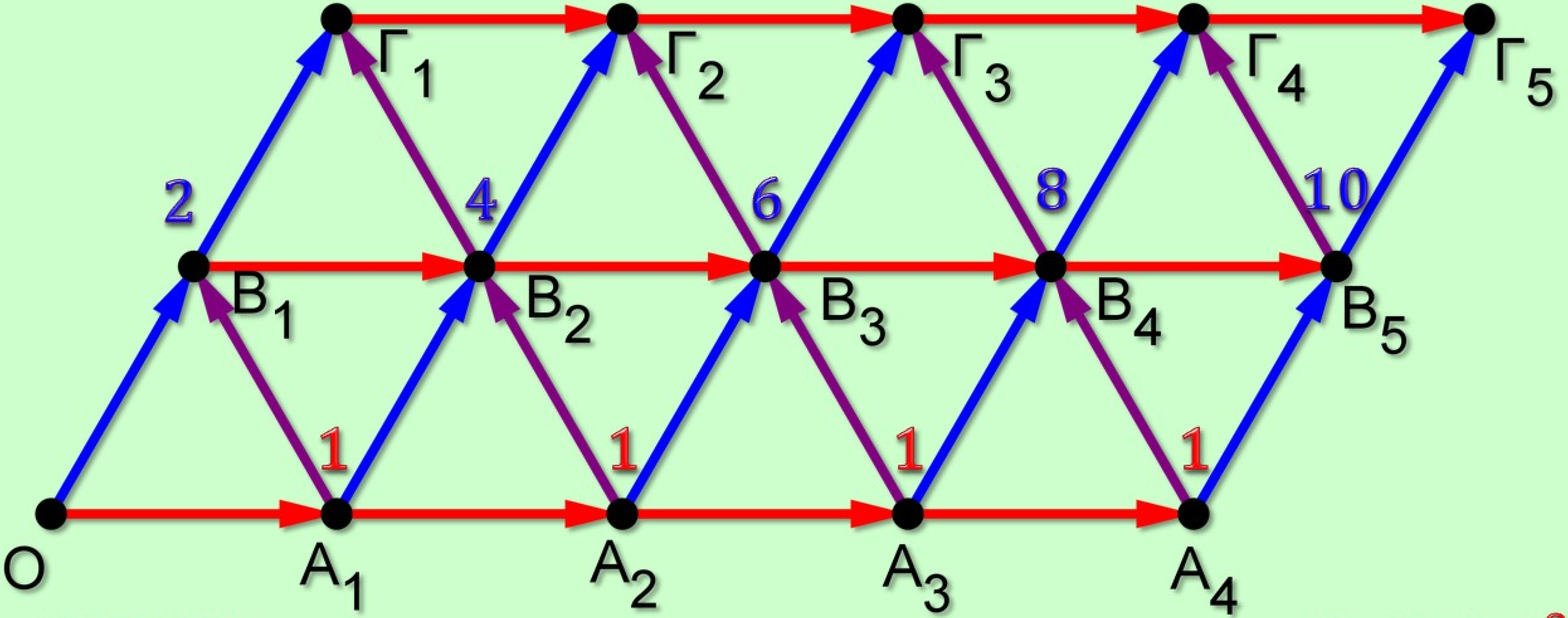


◆ Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να προσεγγίσει κινητό τους κόμβους του πλέγματος, αν ξεκινήσει από το O και κινείται, δεξιά και επάνω.

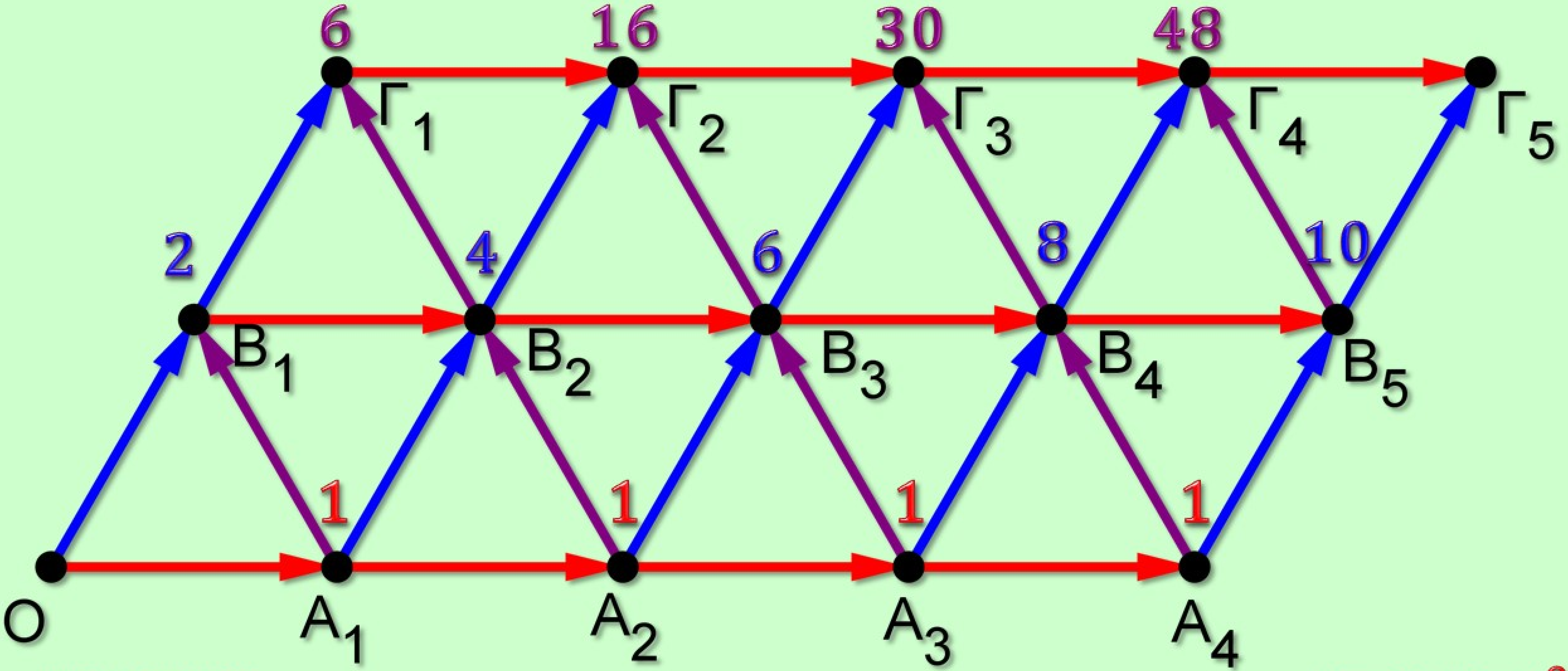


$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$$

$$b_1 = 2, b_2 = 4, \cdots, b_n = 2n$$



$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1 \qquad b_1 = 2, b_2 = 4, \cdots, b_n = 2n$



$c_1 = b_1 + b_2$

$c_2 = c_1 + b_2 + b_3$

$c_3 = c_2 + b_3 + b_4$

$\dots \dots \dots$

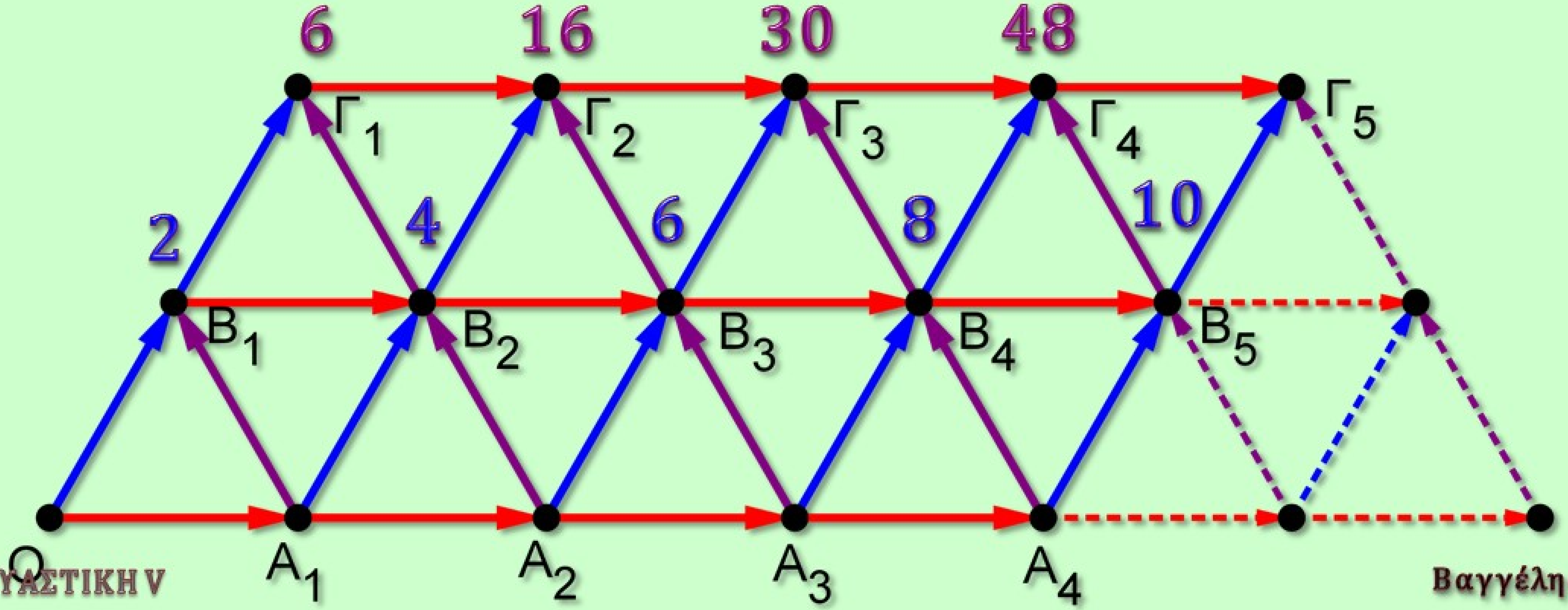
$c_{n-1} = c_{n-2} + b_{n-1} + b_n$

$c_n = c_{n-1} + b_n + b_{n+1}$

$$c_n = b_1 + 2 \cdot (b_2 + \cdots + b_n) + b_{n+1} =$$

$$= 2 + 2 \cdot (4 + \cdots + 2 \cdot n) + 2(n+1) =$$

$$= 2n(n+2)$$



♦ Βάφουμε το επίπεδο με δύο χρώματα (κόκκινο και πράσινο). Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία του επιπέδου που απέχουν απόσταση k (k θετικός πραγματικός αριθμός) και έχουν το ίδιο χρώμα.

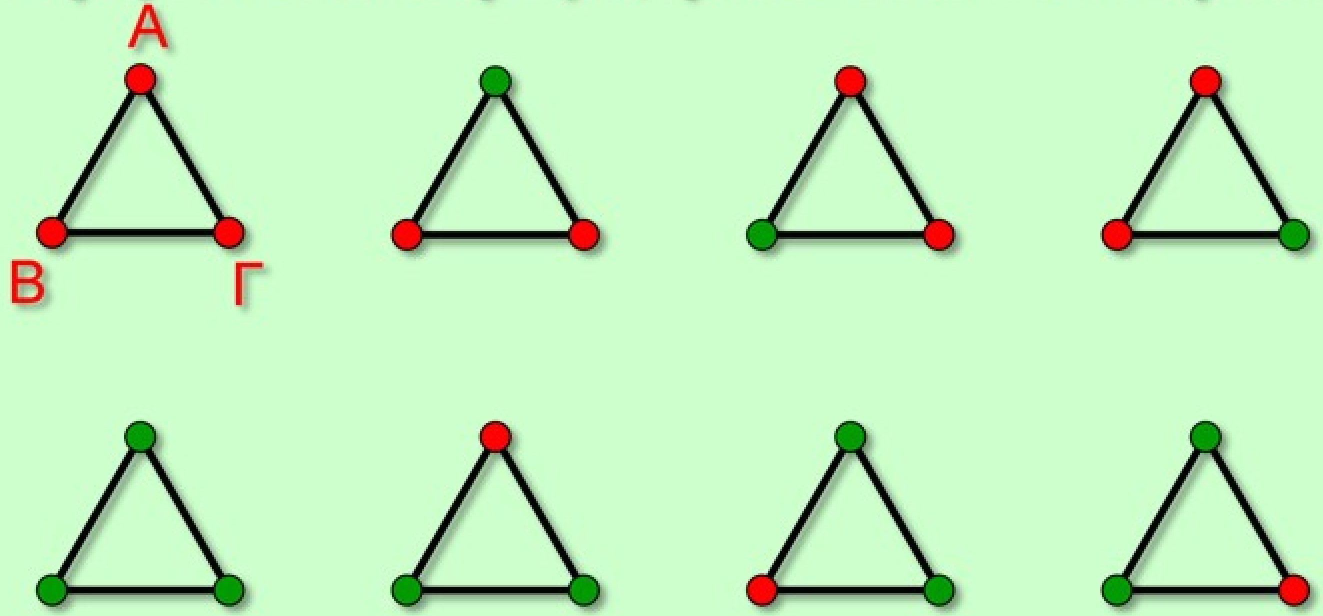
1ος Τρόπος

● Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς k.
Τότε οι κορυφές του μπορεί να είναι:
1) και οι τρείς κόκκινες (ΚΚΚ) ή και οι τρεις πράσινες (ΠΠΠ)
2) Δύο κορυφές κόκκινες και μία πράσινη (ΚΚΠ)
ή δύο κορυφές πράσινες και μία κόκκινη (ΠΠΚ).
Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχουν δύο κορυφές που έχουν το ίδιο χρώμα.

♦ Βάφουμε το επίπεδο με δύο χρώματα (κόκκινο και πράσινο). Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία του επιπέδου που απέχουν απόσταση k (k θετικός πραγματικός αριθμός) και έχουν το ίδιο χρώμα.

2ος Τρόπος

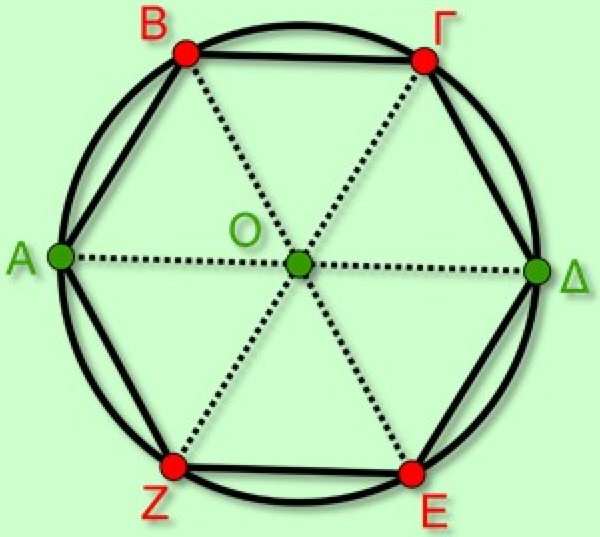
● Όλοι οι δυνατοί τρόποι χρωματισμού των κορυφών του ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς k, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



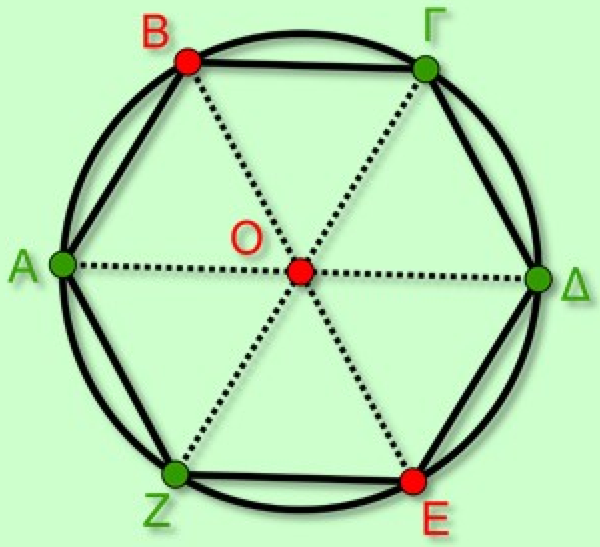
● Διαπιστώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχουν δύο κορυφές που έχουν το ίδιο χρώμα.

♦ Βάφουμε το επίπεδο με δύο χρώματα (κόκκινο και πράσινο). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα.

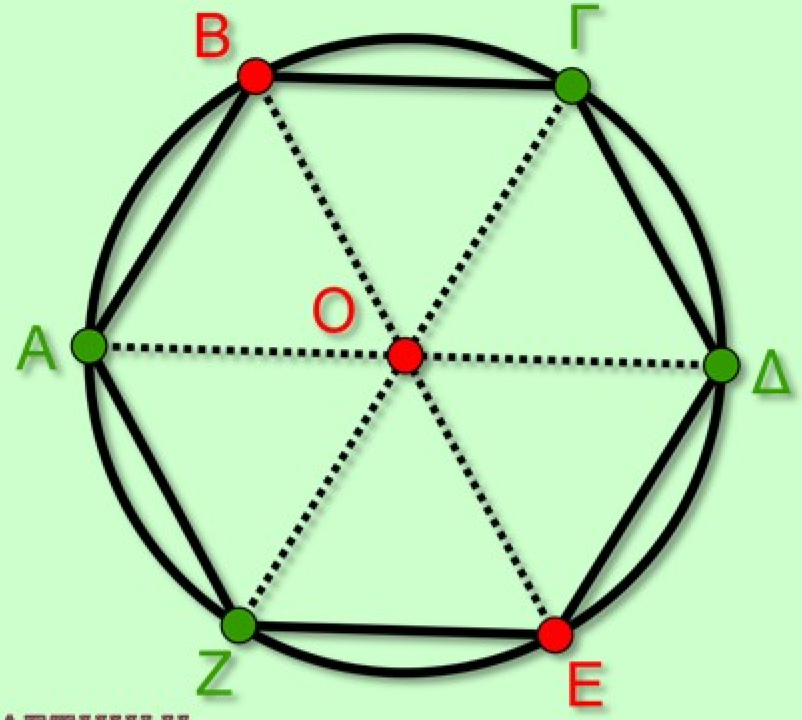
● Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο), ότι δεν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου οι κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα. Τότε θα προκύψουν οι παρακάτω τρόποι χρωματισμού των κορυφών και του περικέντρου ενός κανονικού εξαγώνου.



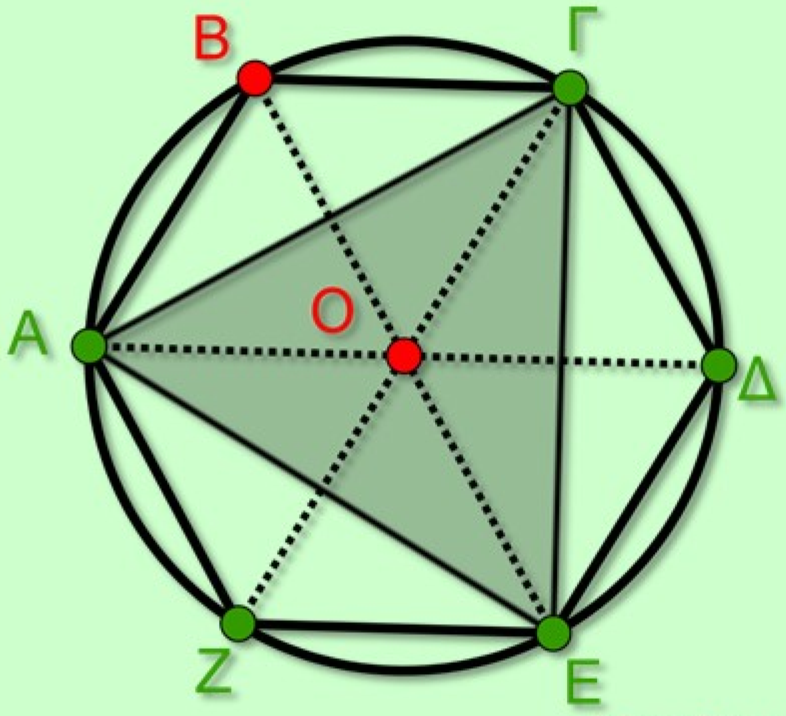
● Χρωματίζουμε (με ένα από τα δύο χρώματα) τα σημεία που βρίσκονται επάνω σε μία διάμετρο και με το άλλο χρώμα χρωματίζουμε τα υπόλοιπα σημεία.



Επιτρεπτός τρόπος χρωματισμού (σύμφωνα με την υπόθεση: “δεν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου οι κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα”).

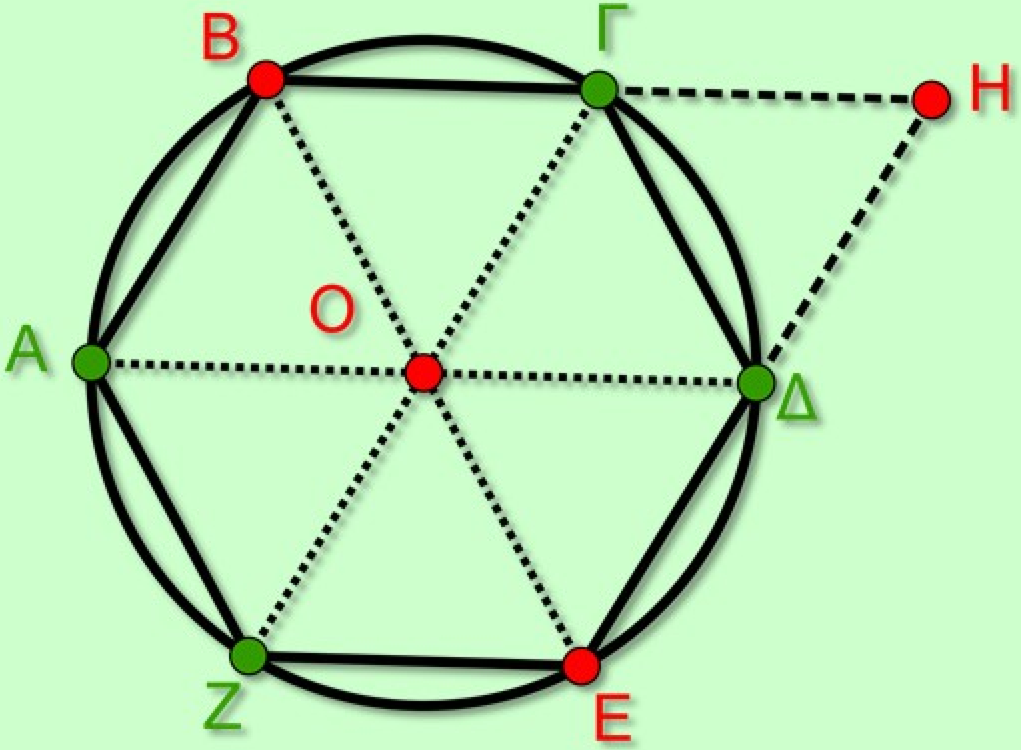


Μη επιτρεπτός τρόπος χρωματισμού (σύμφωνα με την υπόθεση: “δεν υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου οι κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα”).

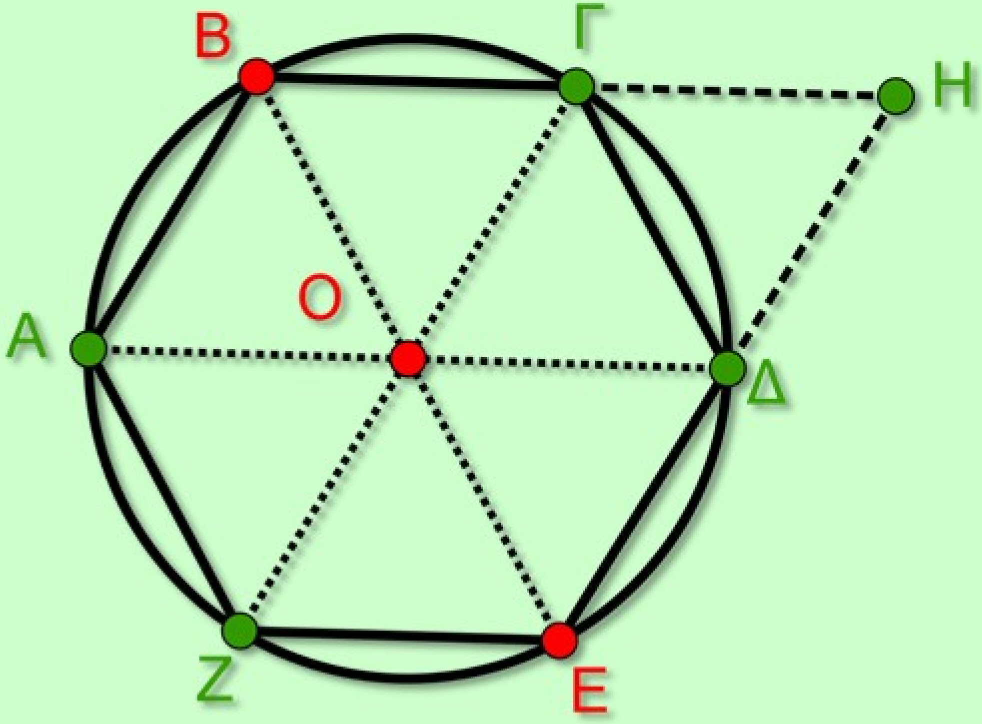


Έστω H η τομή των προεκτάσεων των $ΒΓ$ και $ΕΔ$.

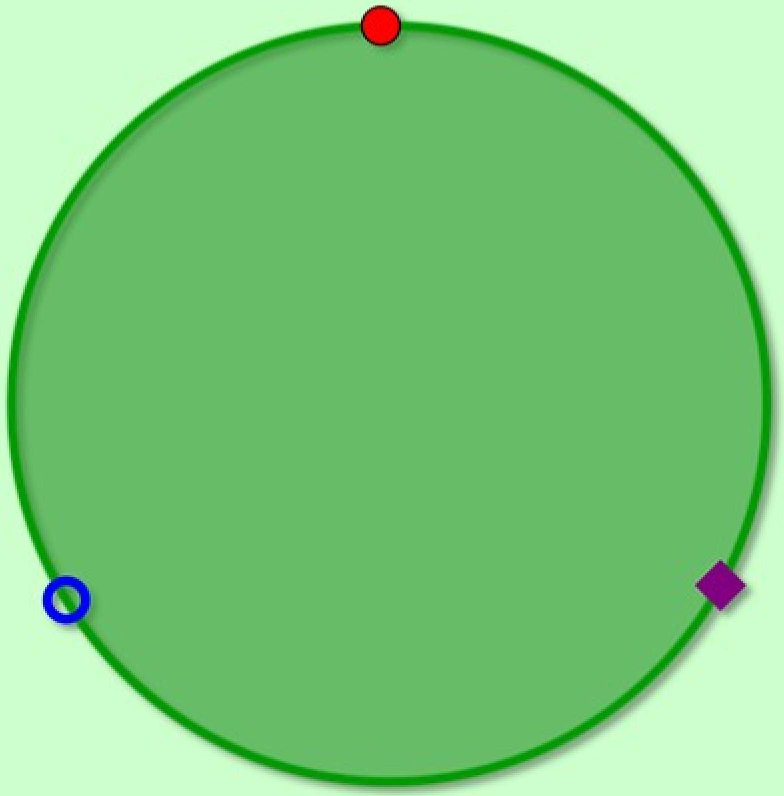
Αν το H είναι κόκκινο τότε οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου $ΒΕΗ$, έχουν το ίδιο χρώμα (άτοπο).

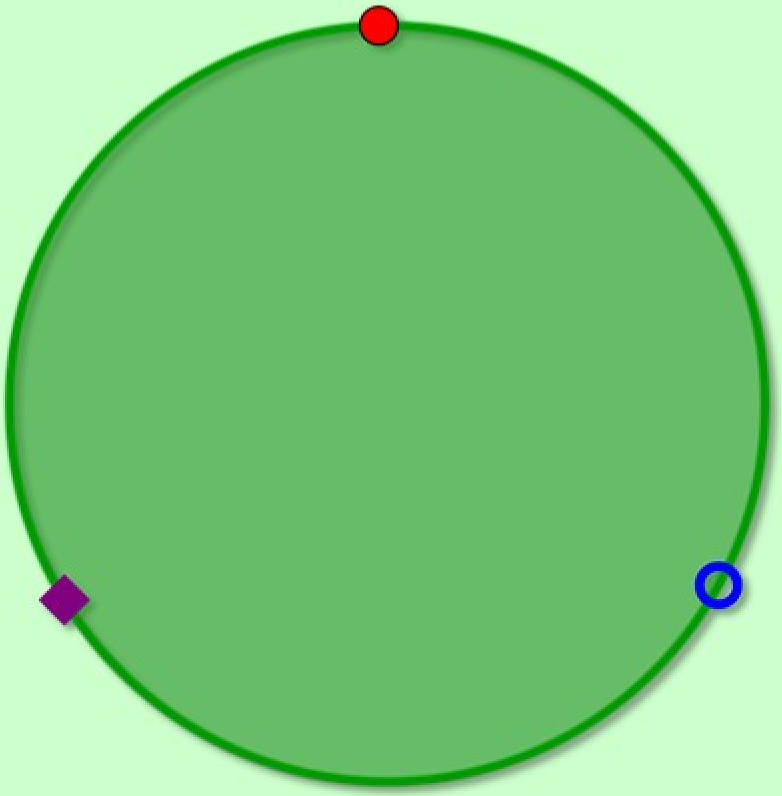


Αν το H είναι πράσινο τότε οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου $ΓΔΗ$, έχουν το ίδιο χρώμα (άτοπο).



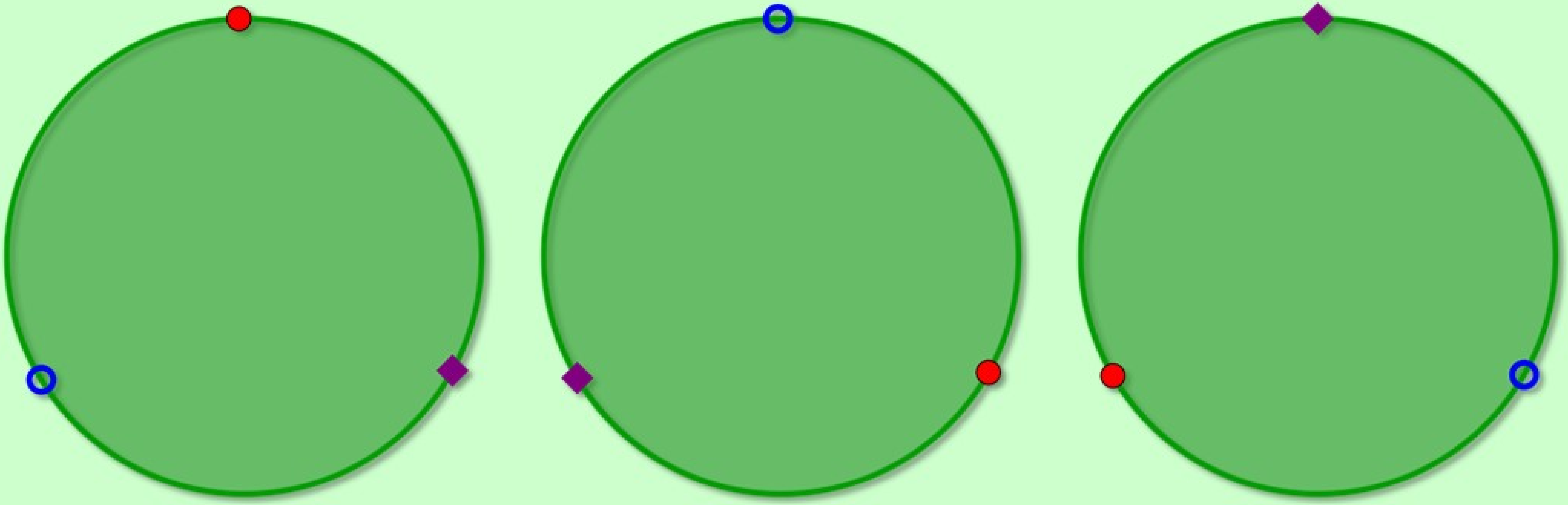
♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν **τρία** άτομα, γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι;





● Οι δυνατοί τρόποι είναι **δύο**
(όπως φαίνεται στα προηγούμενα σχήματα).

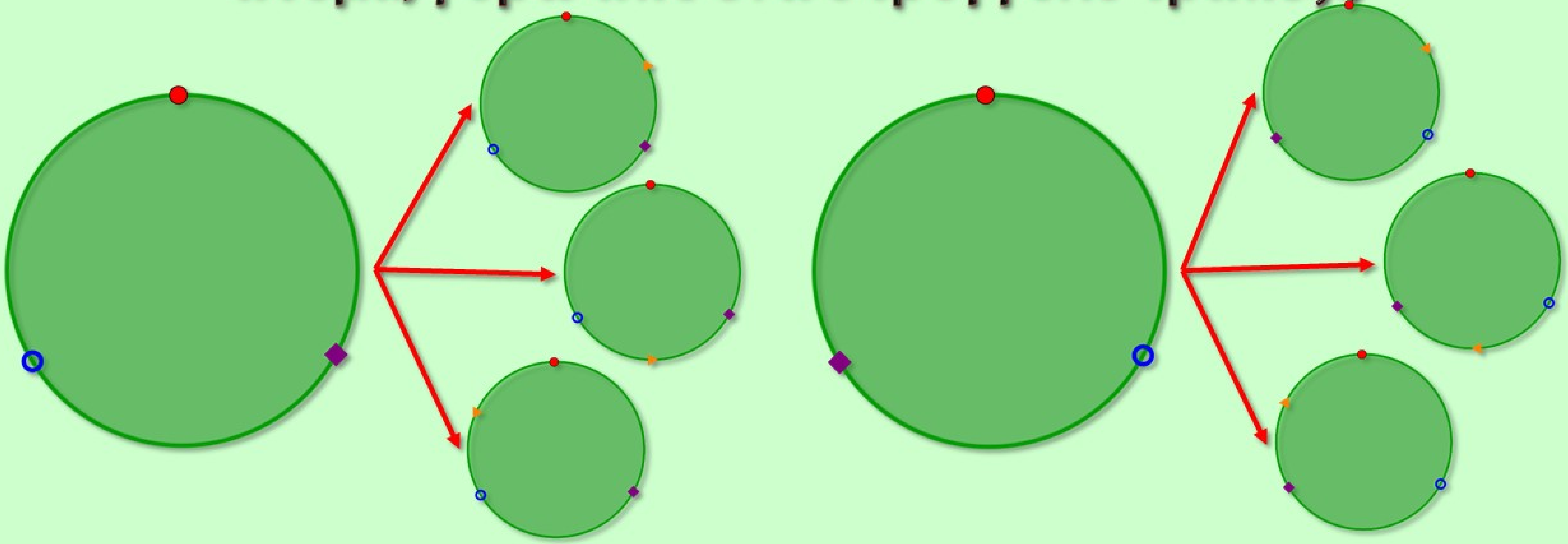
♦ Προσοχή . . . οι παρακάτω περιπτώσεις είναι ίδιες.



● Οι παραπάνω περιπτώσεις, προκύπτουν από την ταυτόχρονη δεξιόστροφη μετατόπιση και των τριών ατόμων.

● Μία περίπτωση θεωρείται **διαφορετική** από μία άλλη, όταν σε ένα τουλάχιστον άτομο αλλάζει το άτομο που κάθεται δεξιά ή αριστερά του.

♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τέσσερα άτομα, γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι;



⚫ Για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις (που ισχύουν για την τοποθέτηση των τριών ατόμων) υπάρχουν τρείς περιπτώσεις για την τοποθέτηση του τέταρτου ατόμου.

… γενικότερα …

♦ Το πλήθος των δυνατών τρόπων τοποθέτησης n διακεκριμένων αντικειμένων στην περιφέρεια ενός κύκλου, είναι: $(n-1)!$ και λέγονται **κυκλικές μεταθέσεις**.

♦ Πέντε μητέρες και τα πέντε μικρά παιδιά τους (κάθε μητέρα έχει ένα παιδί) θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός και με πόσους τρόπους αν κάθε παιδί πρέπει να κάτσει δίπλα στη μητέρα του;

● Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, τότε οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν οι **5** μητέρες με τα **5** παιδιά τους, είναι όσες οι κυκλικές μεταθέσεις των **10** ατόμων. Δηλαδή $(10-1)! = 9!$.

Στη περίπτωση τώρα που τα παιδιά θα καθίσουν δίπλα στις μητέρες τους, σκεπτόμαστε ως εξής.

Οι πέντε μητέρες μπορούν να καθίσουν με $(5-1)! = 4!$. τρόπους γύρω από το τραπέζι.

Για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους, κάθε παιδί μπορεί να καθίσει με **δύο** τρόπους δίπλα στη μητέρα του (αριστερά ή δεξιά). Άρα (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) υπάρχουν $4! \cdot 2^5$ τρόποι.