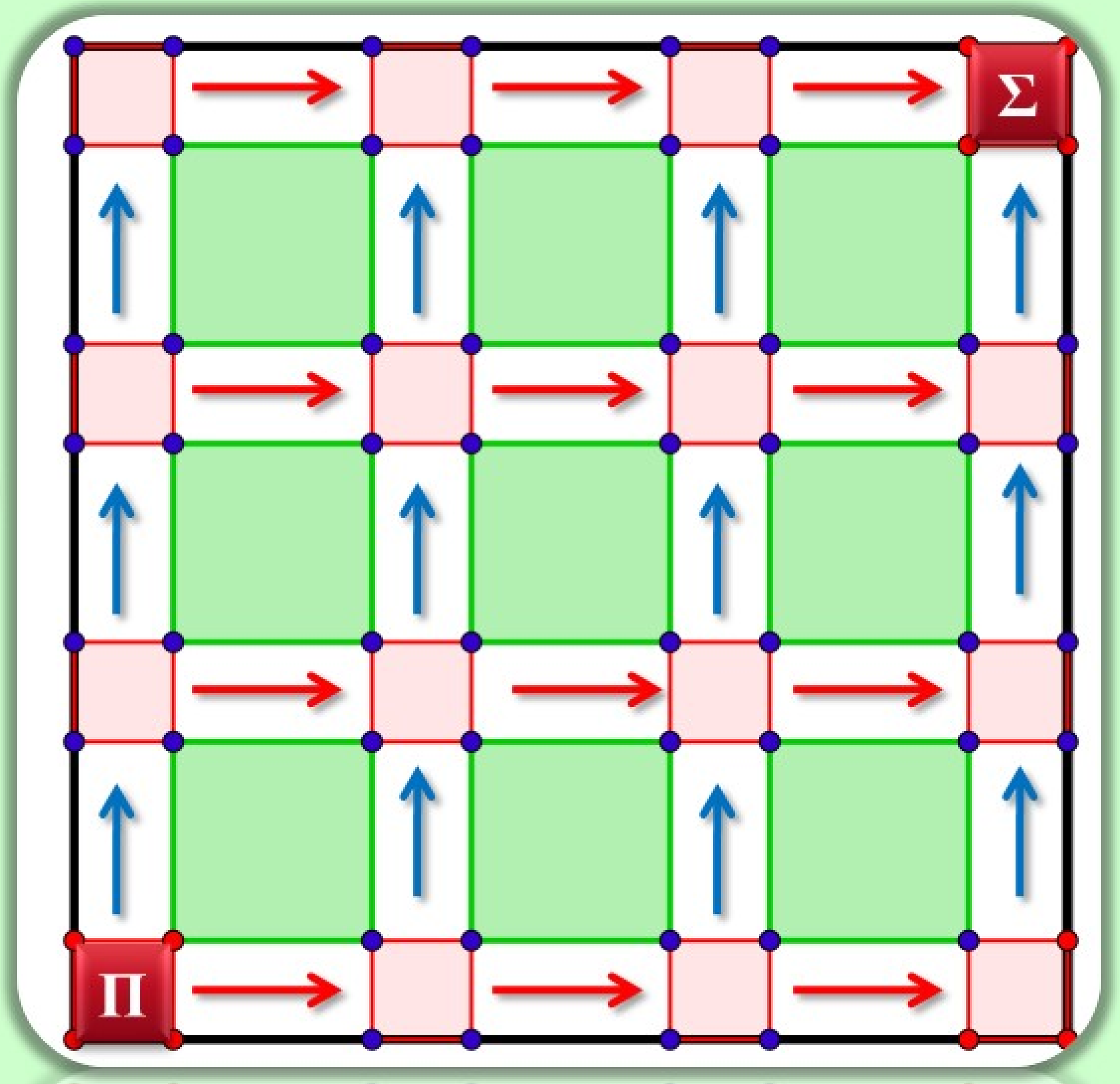
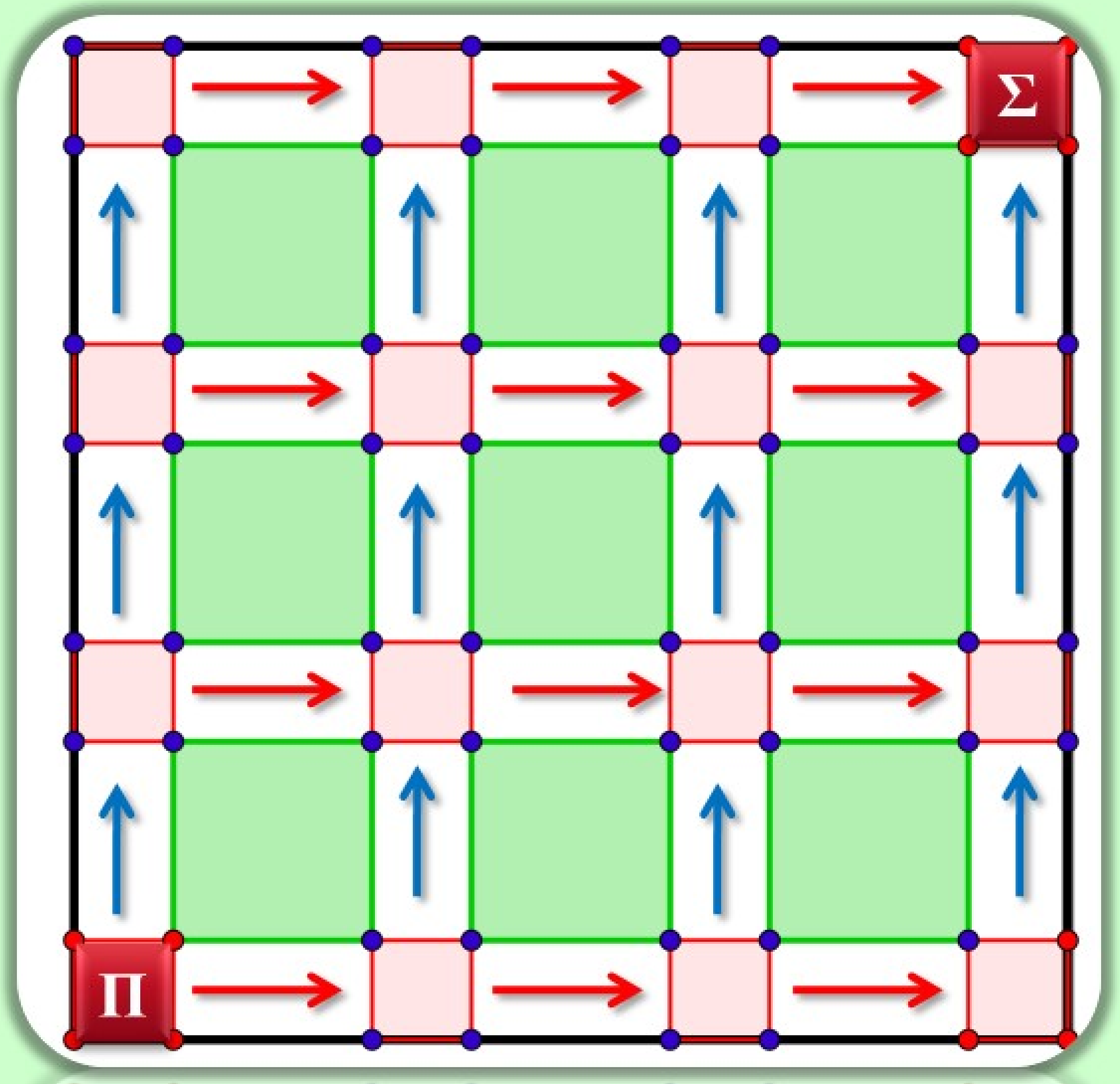
Συνδυαστική IV

♦ Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος από το σημείο **Π** προς το σημείο **Σ** (κινούμενος προς τα δεξιά και άνω);



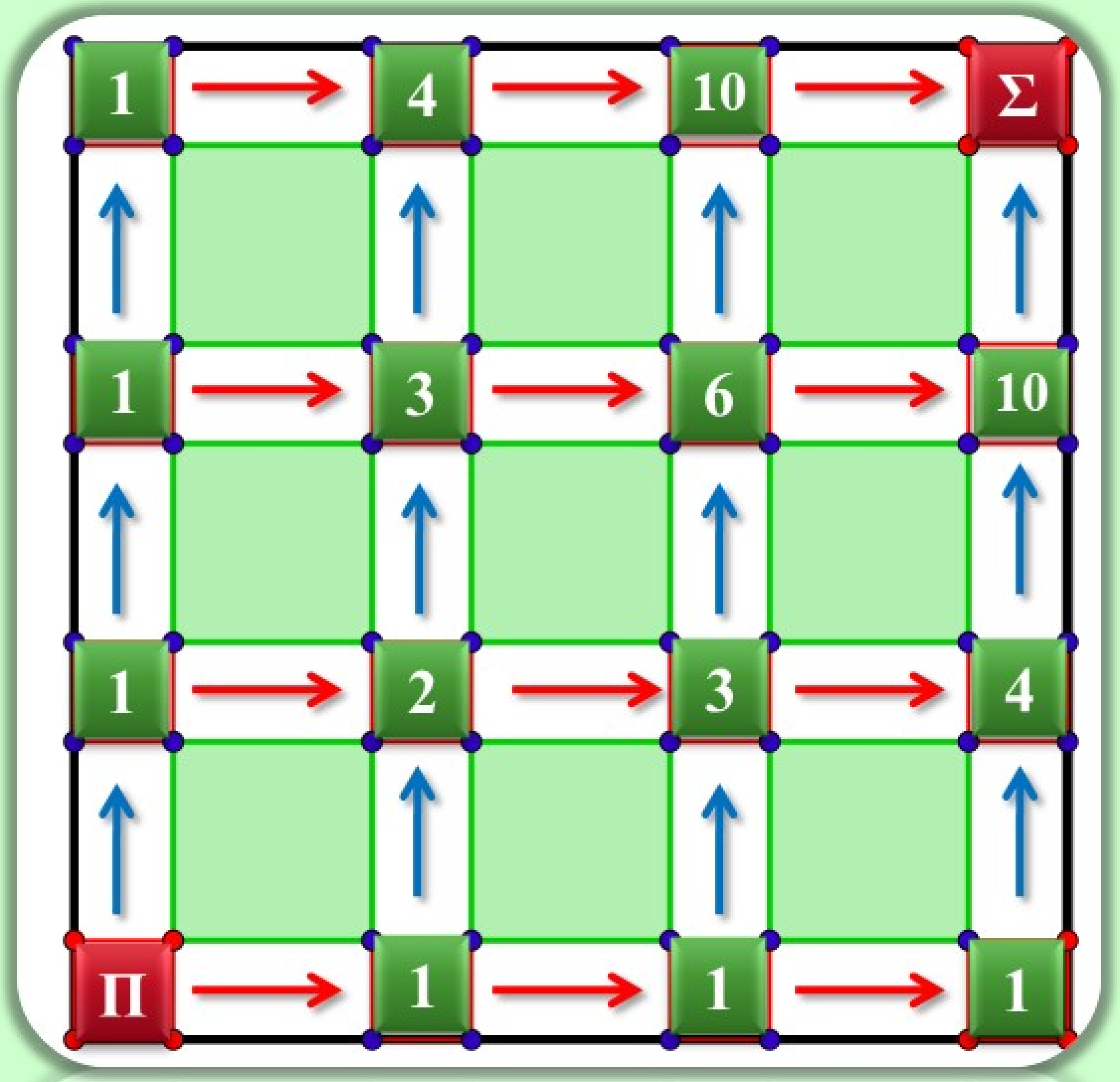
● Κάθε "διασταύρωση", μπορεί να προσεγγιστεί μόνο από τις "γειτονικές" της διασταυρώσεις. Δηλαδή από διασταυρώσεις που βρίσκονται αριστερά και κάτω από αυτήν.

● Προφανώς οι "διασταυρώσεις" που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου, μπορούν να προσεγγιστούν ή μόνο από αριστερά ή μόνο από κάτω.



- Οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε κάθε “διασταύρωση”, φαίνονται στον διπλανό “χάρτη”.

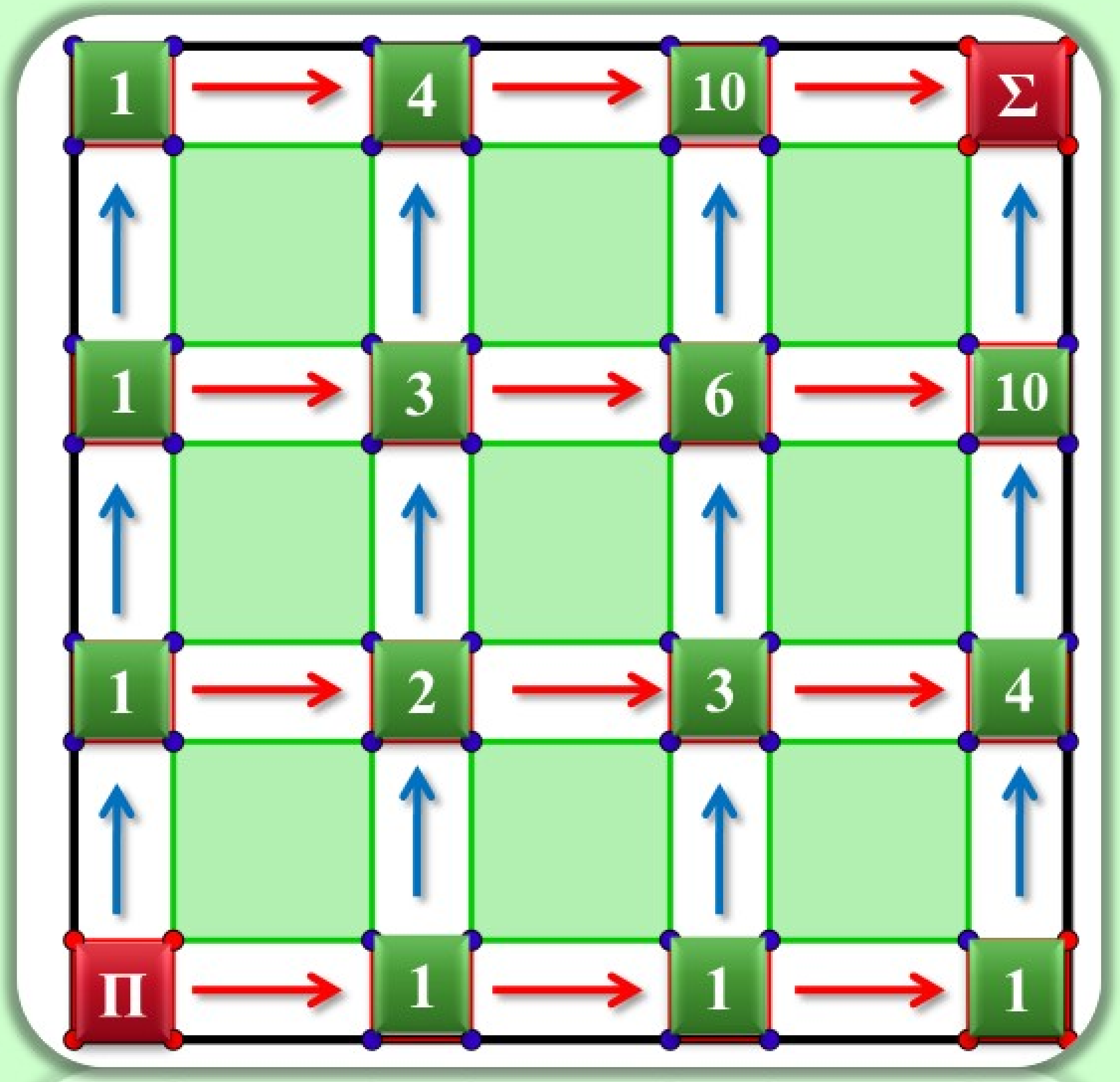
- **20** είναι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο **Σ**.



● Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το σχεδιάγραμμα ενός χωριού.

● Οι μαθητές του σχολείου συγκεντρώνονται στην **Π**λατεία και στη συνέχεια (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω) φτάνουν στο **Σ**χολείο.

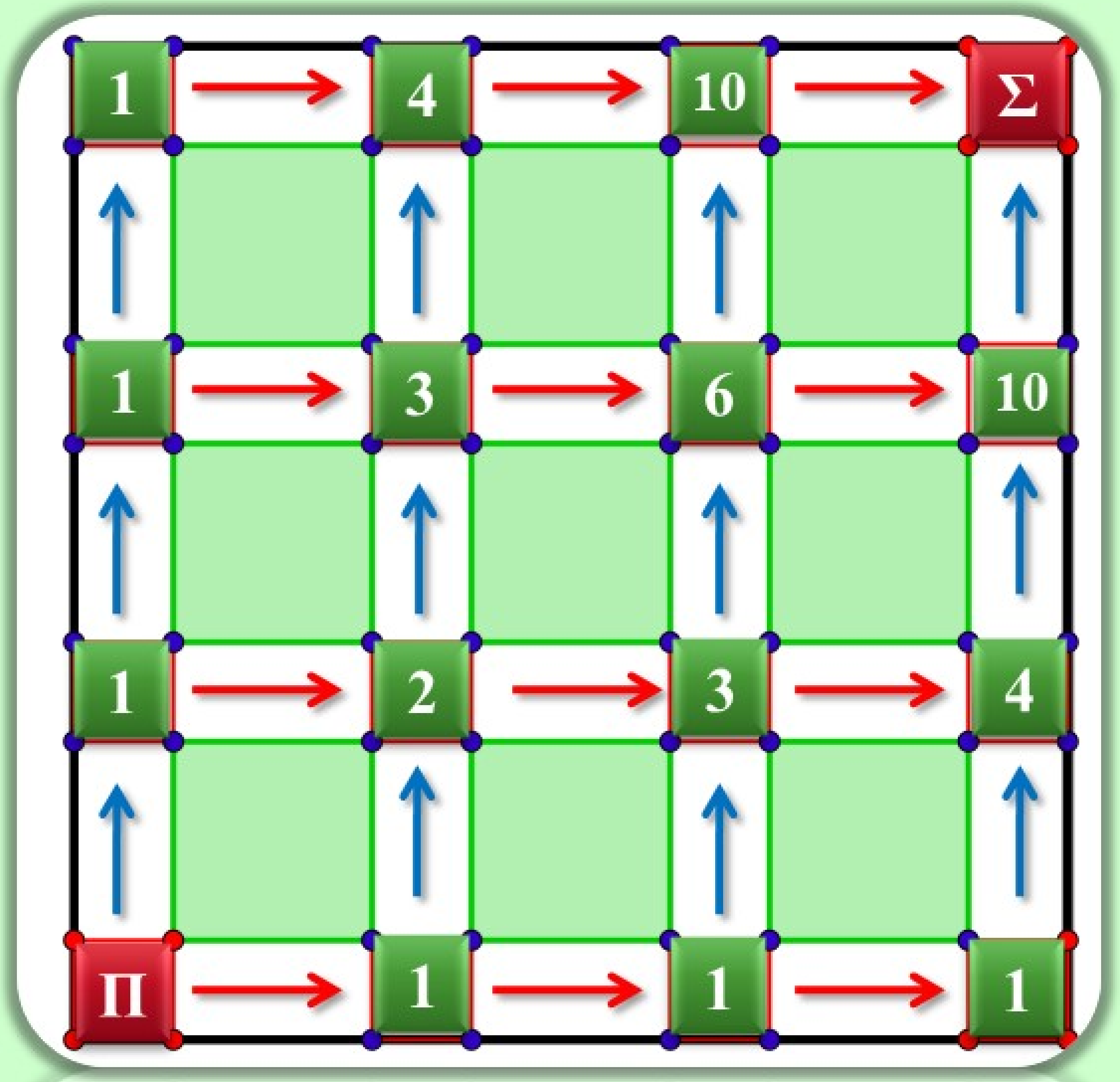
● Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που πρέπει να συγκεντρωθούν στη πλατεία ώστε δύο τουλάχιστον να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



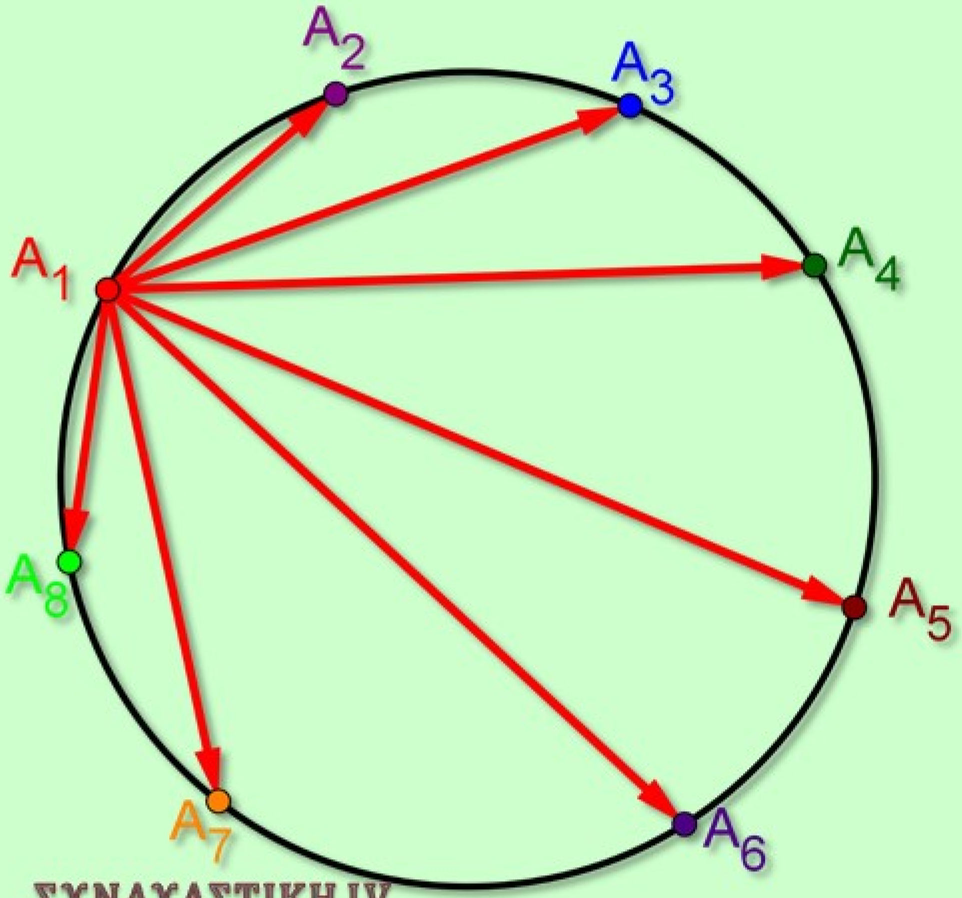
● Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το σχεδιάγραμμα ενός χωριού.

● Οι μαθητές του σχολείου συγκεντρώνονται στην **Π**λατεία και στη συνέχεια (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω) φτάνουν στο **Σ**χολείο.

● Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που πρέπει να συγκεντρωθούν στη πλατεία ώστε δύο τουλάχιστον να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.

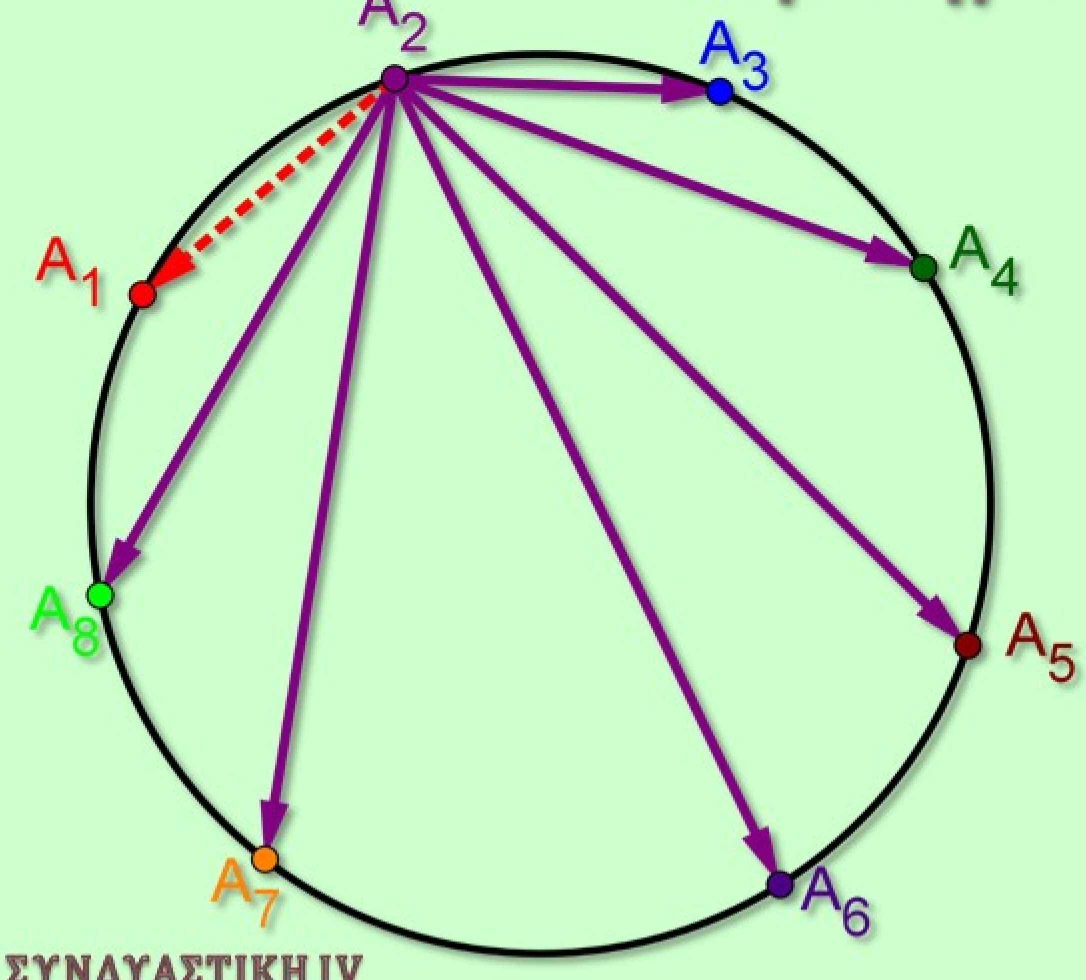


♦ Να βρεθεί το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από οκτώ διαφορετικά σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου.



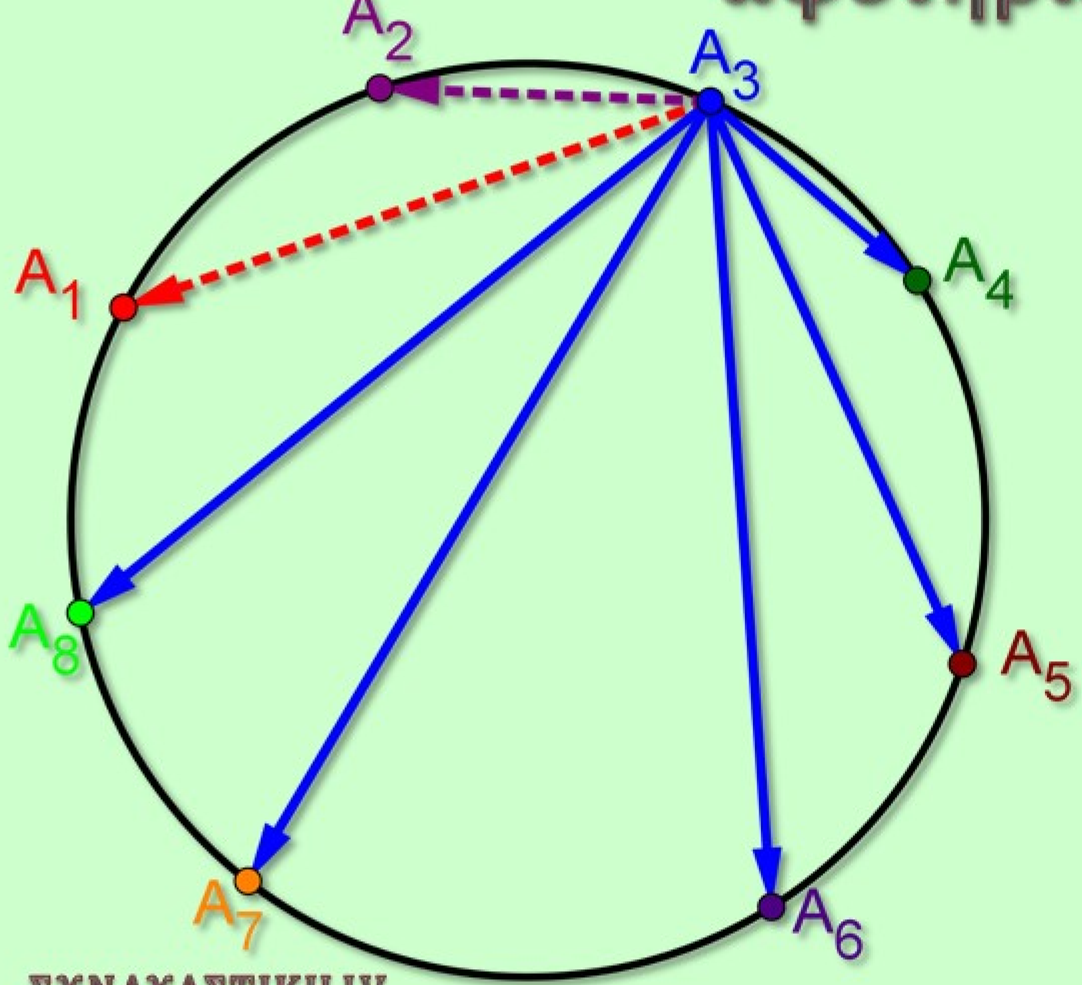
Συνδέουμε το σημείο A_1 με τα υπόλοιπα **επτά** σημεία, οπότε δημιουργούνται **επτά ευθύγραμμα τμήματα** με "αφετηρία" το σημείο A_1.

Συνδέουμε το σημείο $\mathbf{A_2}$ με τα υπόλοιπα έξι σημεία, οπότε δημιουργούνται έξι ευθύγραμμα τμήματα με "αφετηρία" το σημείο $\mathbf{A_2}$.



Αγνοούμε το τμήμα $\mathbf{A_1A_2}$, διότι το συμπεριλάβαμε στην προηγούμενη καταμέτρηση.

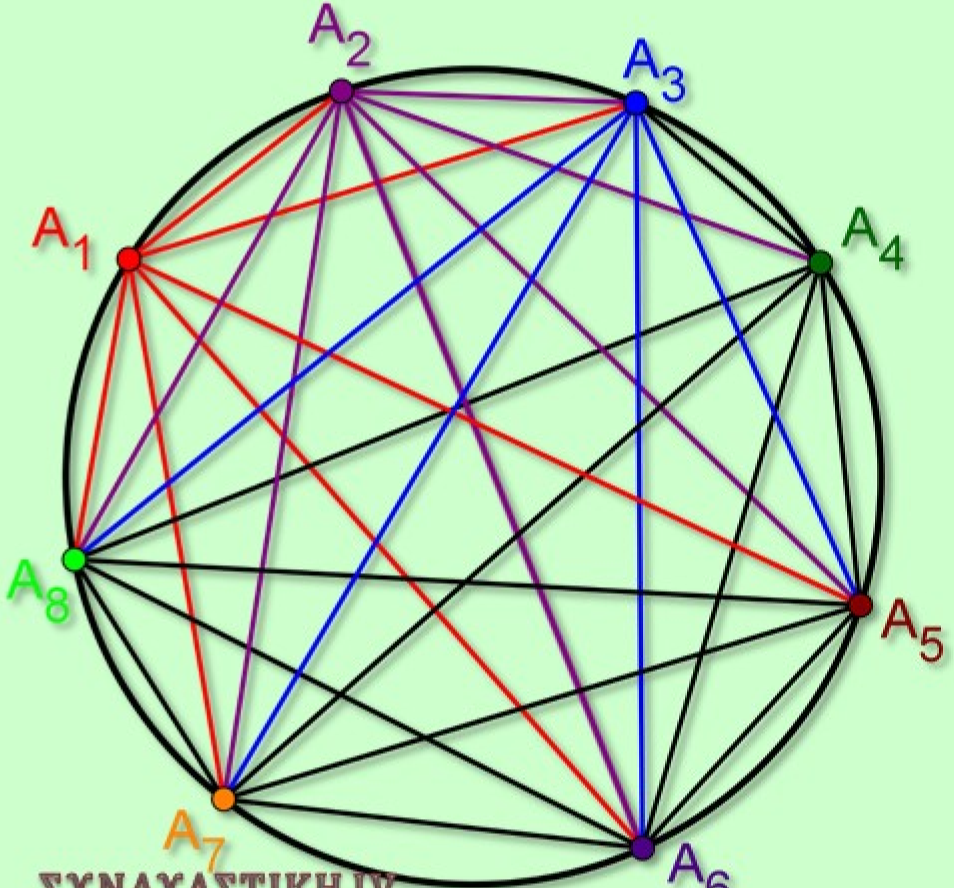
Συνδέουμε το σημείο $\mathbf{A_3}$ με τα υπόλοιπα **πέντε** σημεία, οπότε δημιουργούνται **πέντε ευθύγραμμα τμήματα** με "αφετηρία" το σημείο $\mathbf{A_2}$.



Αγνοούμε το τμήματα $\mathbf{A_3A_1}$, $\mathbf{A_3A_2}$, διότι το συμπεριλάβαμε στις προηγούμενες καταμετρήσεις.

… με ανάλογες σκέψεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι το πλήθος των τμημάτων είναι:

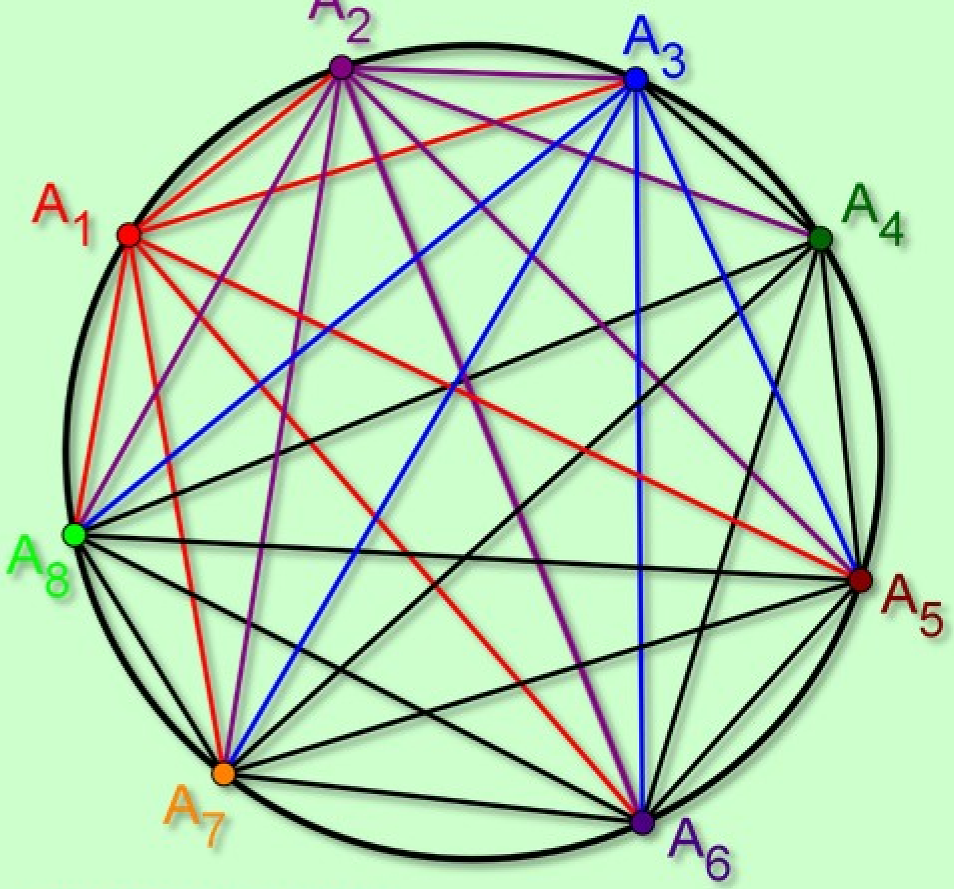
$$1+2+3+4+5+6+7=\frac{7\cdot 8}{2}=28.$$



2ος Τρόπος: Το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων είναι, όσοι οι συνδυασμοί των 8 αντικειμένων ανά 2

$$\binom{8}{2}=\frac{8!}{6!\,2!}=\frac{7\cdot 8}{2}=28.$$

3ος Τρόπος: Με αφετηρία κάθε σημείο ($A_1, A_2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$) ορίζονται **7** τμήματα. Άρα (συνολικά) θα ορίζονται **7·8=56** τμήματα.



Με αυτή όμως τη διαδικασία καταμέτρησης, κάθε τμήμα, έχει μετρηθεί **δύο φορές**.
Άρα το πλήθος των τμημάτων είναι:

$$\frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Παρατήρηση 1

Το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων (του προηγούμενου παραδείγματος), ταυτίζεται με το μέγιστο πλήθος των δυνατών χειραψιών που μπορούν να ανταλλάξουν **10** άτομα σε μία κοινωνική συγκέντρωση.

Παρατήρηση 2

Αν (από το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων) αφαιρέσουμε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου, προκύπτει το πλήθος των **διαγωνίων του πολυγώνου**.

♦ Με πόσους τρόπους 10 τουρίστες, μπορούν να διανυκτερεύσουν στα 7 ξενοδοχεία μιας πόλης;

- Ο $1^{ος}$ τουρίστας μπορεί να διανυκτερεύσει με 7 τρόπους.
- Ο $2^{ος}$ τουρίστας μπορεί να διανυκτερεύσει με 7 τρόπους.

. . . .

- Ο $10^{ος}$ τουρίστας μπορεί να διανυκτερεύσει με 7 τρόπους.

Άρα οι δυνατοί τρόποι διανυκτέρευσης, είναι:

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7}_{10\ \Pi A P A \Gamma O N T E \Sigma} = 7^{10}.$$

♦ Πόσους τετραψήφιους άρτιους φυσικούς $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ μπορούμε να δημιουργήσουμε αν τα ψηφία τους είναι στοιχεία του συνόλου: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

- Το 1ο ψηφίο μπορούμε να το επιλέξουμε με 5 τρόπους.
- Το 2ο ψηφίο μπορούμε να το επιλέξουμε με 5 τρόπους.
- Το 3ο ψηφίο μπορούμε να το επιλέξουμε με 5 τρόπους.
- Το 4ο ψηφίο μπορούμε να το επιλέξουμε με 2 τρόπους.

Το τελευταίο ψηφίο, μπορεί να είναι 2 ή 4.

Άρα το πλήθος των τετραψήφιων άρτιων φυσικών είναι: $2 \cdot 5^3 = 250$.