ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΓΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την καταμέτρηση (απαρίθμηση) των στοιχείων διαφόρων συνόλων. Τα τελευταία χρόνια η συνδυαστική αποτελεί τμήμα ενός ευρύτερου κλάδου των μαθηματικών που ονομάζονται "Διακριτά μαθηματικά".

1.1 Αρχη Του Αθροισματος

✦ **Αν ένα αντικείμενο α_i μπορεί να εκλεγεί με κ_i τρόπους, $i = 1,2,3,\dots,\nu$ και η εκλογή του α_i αποκλείει τη ταυτόχρονη εκλογή του α_j $i, j = 1,2,3,\dots,\nu$ $i \neq j$ τότε οποιοδήποτε από τα α_1 ή α_2 ή α_3 ή ……, ή α_ν μπορεί να επιλεγεί με $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu$ τρόπους.**

1.2 Προβλημα (Αρχη Του Αθροισματος)

✦ **Διαθέτουμε 4 διαφορετικά τετράδια και 5 διαφορετικά στυλό. Με πόσους τρόπους κάποιος μαθητής μπορεί να διαλέξει ένα τετράδιο ή ένα στυλό;**

Απάντηση

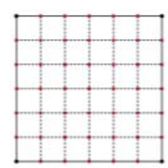
Το τετράδιο (αντικείμενο α_1), ο μαθητής μπορεί να το επιλέξει με $\kappa_1 = 4$ τρόπους και η εκλογή του αποκλείει την εκλογή στυλό (αντικείμενο α_2).

Το στυλό (αντικείμενο α_2), ο μαθητής μπορεί να το επιλέξει με $\kappa_2 = 5$ τρόπους και η εκλογή του αποκλείει την εκλογή τετραδίου (αντικείμενο α_1).

Άρα οποιοδήποτε από τα α_1 ή α_2 μπορεί να το επιλέξει με $\kappa_1 + \kappa_2 = 4 + 5 = 9$ τρόπους.

1.3 Προβλημα (Αρχη Του Αθροισματος)

✦ **Τετράγωνο πλευράς μήκους 6, το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 36 τετράγωνα πλευράς μήκους 1 (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα). Πόσα συνολικά τετράγωνα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου), ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;**

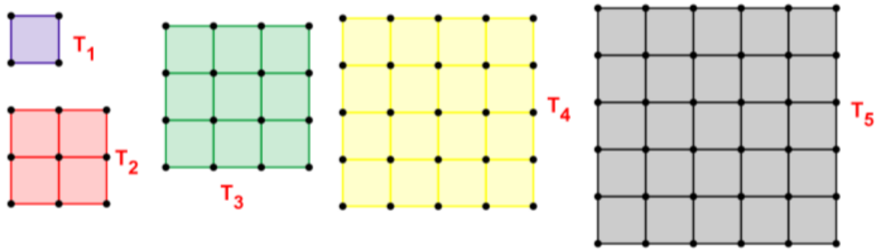


Λύση

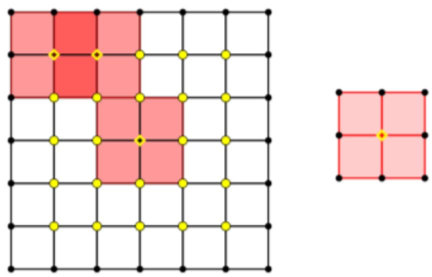
Σε κάθε πλευρά του τετραγώνου θεωρούμε 5 σημεία που (μαζί με τις κορυφές του), τις χωρίζουν σε έξι ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα προς τις πλευρές ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται σε 25 σημεία. Έτσι στο δημιουργούμενο σχηματισμό (που ονομάζεται και "τετραγωνικό πλέγμα") έχουμε 49 σημεία, που θα αποτελέσουν τις κορυφές των τετραγώνων.

Το τετράγωνο χωρίζεται αρχικά σε τετράγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1).

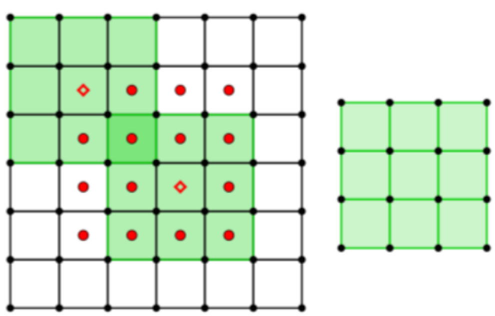
Με κορυφές τα σημεία του "πλέγματος" παρατηρούμε ότι δημιουργούνται τετράγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2), τετράγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3), τετράγωνα τύπου T_4 (που η πλευρά τους έχει μήκος 4), τετράγωνα τύπου T_5 (που η πλευρά τους έχει μήκος 5) και τέλος δημιουργείται το αρχικό τετράγωνο που μπορεί να χαρακτηριστεί ως τετράγωνο τύπου T_6 (δηλαδή η πλευρά του έχει μήκος 6).



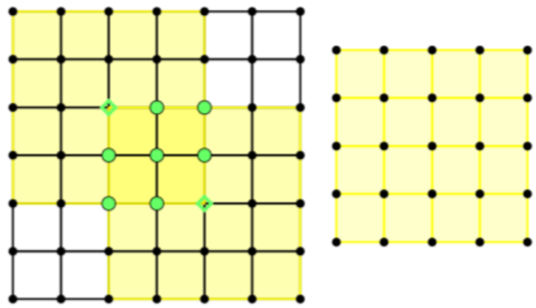
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι προφανώς $6^2 = 36$.
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $(6-1)^2 = 5^2 = 25$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_2, μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_2).



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $(6-2)^2 = 4^2 = 16$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_3, μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_3).



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_4 είναι $(6-3)^2 = 3^2 = 9$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_4, μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_4).



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_5 είναι $(6-4)^2 = 2^2 = 4$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_5, μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_5).

Τέλος δημιουργείται ένα μόνο τετράπλευρο τύπου T_6 (το αρχικό τετράγωνο).

Άρα δημιουργούνται συνολικά $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = \dfrac{6(6+1)(2\cdot 6+1)}{6} = 91$ το πλήθος τετράγωνα.

1.4 Προβλημα (Αρχη Του Αθροισματος)

✦ **Τετράγωνο πλευράς ν, το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε ν^2 τετράγωνα πλευράς 1. Πόσα συνολικά τετράγωνα ορίζονται (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου) μετά από αυτό το χωρισμό;**

Απάντηση

Το τετράγωνο χωρίζεται σε τετράγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1), σε τετράγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2), σε τετράγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3) και …σε τετράγωνα τύπου T_ν (που η πλευρά τους έχει μήκος ν).

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι ν^2.

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $(\nu-1)^2$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_2, μέσα στο μεγάλο τετράγωνο).

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $(\nu-2)^2$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_3, μέσα στο μεγάλο τετράγωνο).

Τέλος δημιουργείται ένα μόνο τετράγωνο τύπου T_ν.

Άρα δημιουργούνται συνολικά $1^2+2^2+\cdots+\nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$ το πλήθος τετράγωνα.

1.5 Πολλαπλασιαστικη Αρχη

✦ **Αν ένα αντικείμενο α_1 μπορεί να εκλεγεί με κ_1 τρόπους και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα αντικείμενο α_2 μπορεί να εκλεγεί με κ_2 τρόπους …..και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα αντικείμενο α_ν μπορεί να εκλεγεί με κ_ν τρόπους, τότε όλα τα**

αντικείμενα α_1 και α_2 και α_3 και ......, και α_ν μπορούν να επιλεγούν με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_\nu$ τρόπους.

1.6 Παραδειγμα (Πολλαπλασιαστικη Αρχη)

✦ **Διαθέτουμε ένα καλάθι που περιέχει ένα πορτοκάλι, ένα μήλο και ένα αχλάδι. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε δύο φρούτα και να τα δώσουμε σε δύο παιδιά;**

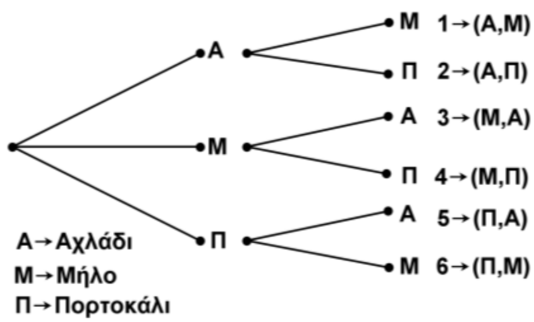
Απάντηση

Το πρώτο φρούτο (αντικείμενο α_1), μπορούμε να το διαλέξουμε με $\kappa_1 = 3$ διαφορετικούς τρόπους (διότι υπάρχουν 3 διαφορετικά φρούτα στο καλάθι) και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε το δεύτερο φρούτο (αντικείμενο α_2), με $\kappa_2 = 2$ τρόπους (διότι υπάρχουν 2 διαφορετικά φρούτα στο καλάθι μετά την εκλογή του πρώτου φρούτου).

Άρα και τα δύο αντικείμενα (φρούτα) α_1 και α_2 μπορούμε να τα επιλέξουμε με $\kappa_1\kappa_2 = 3 \cdot 2$ τρόπους.

Παρατήρηση

Για να γίνει περισότερο κατανοητή η πολλαπλασιαστική αρχή, θα βρούμε με τη βοήθεια των δενδροδιαγραμμάτων όλους τους δυνατούς τρόπους επιλογής των φρούτων.



Συντομογραφικά, όλοι οι δυνατοί τρόποι επιλογής των φρούτων είναι: ΑΜ,ΑΠ,ΜΑ,ΜΠ,ΠΑ,ΠΜ.

1.7 Παραδειγμα (Πολλαπλασιαστικη Αρχη)

✦ **Πόσους περιττούς τριψήφιους αριθμούς (με μη επαναλαμβανόμενα ψηφία) μπορούμε να δημιουργήσουμε, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1,2,5,6,8,9$;**

Απάντηση

Όλοι οι αριθμοί που διαθέτουμε είναι έξι και τρείς από αυτούς είναι περιττοί.

Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού που θα δημιουργήσουμε μπορούμε να το επιλέξουμε με τρείς διαφορετικούς τρόπους από τους $1,5,9$ (εφόσον θέλουμε ο αριθμός να είναι περιττός).

Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού μπορούμε να το διαλέξουμε με πέντε διαφορετικούς τρόπους (διότι θα απομείνουν πέντε αριθμοί προς επιλογή μετά την εκλογή του τελευταίου ψηφίου).

Το πρώτο ψηφίο του αριθμού μπορούμε να το επιλέξουμε με τέσσερεις διαφορετικούς τρόπους.

Άρα μπορούμε να δημιουργήσουμε $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ τριψήφιους περιττούς αριθμούς.

1.8 Διατάξεις

✦ **Διατάξεις των ν αντικειμένων ανά κ είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο ν αντικειμένων και να τα τοποθετήσουμε στη σειρά.**

Το πλήθος των διατάξεων των ν αντικειμένων ανά κ είναι:

$$\nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdots (\nu - \kappa + 1)$$

και το συμβολίζουμε με $P(\nu,\kappa)$ ή $(\nu)_\kappa$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu = \nu!$ έχουμε:

$$P(\nu,\kappa) = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!}.$$

1.9 Παράδειγμα (Διατάξεις)

✦ **Πόσους τριψήφιους αριθμούς (με μη επαναλαμβανόμενα ψηφία) μπορούμε να δημιουργήσουμε, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1,2,3,4,5,6$;**

Απάντηση

Το πλήθος των τριψηφίων αριθμών που μπορούμε να δημιουργήσουμε, ισούται με τις διατάξεις των 6 αριθμών (που μας δίνονται) ανά 3.

Δηλαδή: $P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής.
Το πρώτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.
Το δεύτερο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 5 τρόπους.
Το τρίτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους.
Άρα ο τριψήφιος αριθμός μπορεί να επιλεγεί με $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ τρόπους.

1.10 Επαναληπτικές Διατάξεις

✦ **Το πλήθος των διατάξεων ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη (χωρίς περιορισμό) το συμβολίζουμε με $E(\nu,\kappa)$ και δίνεται από τη σχέση:**

$$E(\nu,\kappa) = \nu^\kappa.$$

1.11 Παράδειγμα (Επαναληπτικές Διατάξεις)

✦ **Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να δημιουργήσουμε, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1,2,3,4,5,6$;**

Απάντηση

Το πλήθος των τριψηφίων αριθμών που μπορούμε να δημιουργήσουμε, ισούται με τις επαναληπτικές διατάξεις των 6 αριθμών (που μας δίνονται) ανά 3.

Δηλαδή: $E(6,3) = 6^3 = 216$.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής.
Το πρώτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.
Το δεύτερο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.
Το τρίτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.

Άρα ο τριψήφιος αριθμός μπορεί να επιλεγεί με $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ τρόπους.
(Το δεύτερο και το τρίτο ψηφίο μπορούν να επιλεγούν με 6 τρόπους διότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για τη δημιουργία του τριψήφιου αριθμού)

1.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ)

✦ **Δέκα άτομα βρίσκονται στον ανελκυστήρα (ασανσέρ) ενός επταόροφου κτιρίου. Ο ανελυστήρας ξεκινά από το ισόγειο και όλοι οι επιβάτες κατεβαίνουν σε κάποιο όροφο. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατεβούν οι επιβάτες στους επτά ορόφους;**

Απάντηση

Το πλήθος των τρόπων ισούται με τις επαναληπτικές διατάξεις των 7 ορόφων ανά 10.

Δηλαδή: $E(7,10) = 7^{10}$.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής.
Το πρώτο άτομο μπορεί να κατεβεί με 7 διαφορετικούς τρόπους.
Το δεύτερο άτομο μπορεί να κατεβεί με 7 διαφορετικούς τρόπους.
……….
Το δέκατο άτομο μπορεί να κατεβεί με 7 διαφορετικούς τρόπους.
Άρα οι επιβάτες μπορούν να κατεβούν $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 7 = 7^{10}$ τρόπους.

1.13 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ)

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούν να καταλύσουν δέκα τουρίστες, στα επτά ξενοδοχεία μιάς πόλης ;**

Απάντηση

Η ίδια ακριβώς λύση με το προηγούμενο πρόβλημα.

1.14 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

✦ **Μεταθέσεις των ν αντικειμένων είναι οι διατάξεις των ν αντικειμένων ανά ν. Δηλαδή είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε ν διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα.**

Το πλήθος των μεταθέσεων ν αντικειμένων συμβολίζεται με $P(\nu)$ και δίνεται από τη σχέση

$$P(\nu) = \nu!.$$

1.15 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

✦ **Το πλήθος των μεταθέσεων ν ειδών αντικειμένων με $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu$ στοιχεία αντίστοιχα το συμβολίζουμε με $M(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu)$ και δίνεται από τη σχέση:**

$$M(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\nu) = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu)!}{\kappa_1! \kappa_2! \cdots \kappa_\nu!}.$$

1.16 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

✦ **Συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά κ είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο ν αντικειμένων.**

(Στη περίπτωση των συνδυασμών δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη επιλογής ή τοποθέτησης των κ επιλεγόμενων αντικειμένων).

Τους συνδυασμούς των ν αντικειμένων ανά κ, τους συμβολίζουμε με $C(\nu,\kappa)$ ή $\binom{\nu}{\kappa}$ και δίνεται από τη σχέση: $C(\nu,\kappa)=\binom{\nu}{\kappa}=\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}$.

1.17 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ)

✦ **Με πόσους τρόπους ένας προπονητής μίας ομάδας μπάσκετ μπορεί να επιλέξει την αρχική πεντάδα, από τους δώδεκα παίχτες που έχει στη διάθεσή του;**

Απάντηση

Οι τρόποι με τους οποίους ο προπονητής μπορεί να επιλέξει την αρχική πεντάδα (επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα επιλεγούν οι παίχτες) είναι όσοι οι συνδυασμοί των 12 αντικειμένων (παίχτες) ανά 5.

Δηλαδή υπάρχουν:

$$C(12,5)=\binom{12}{5}=\frac{12!}{(12-5)!5!}=\frac{12!}{7!5!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=$$

$$=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{3\cdot 5}=\frac{3\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{5}=3\cdot 2\cdot 11.12=72\cdot 11=792$$

τρόποι επιλογής της αρχικής πεντάδας.

1.18 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

✦ **Συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο ν αντικειμένων με επανάληψη.**

(Στη περίπτωση των συνδυασμών δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη επιλογής ή τοποθέτησης των κ επιλεγόμενων αντικειμένων).

Τους συνδυασμούς των ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη, τους συμβολίζουμε με $CE(\nu,\kappa)$ ή $\begin{bmatrix}\nu\\ \kappa\end{bmatrix}$ και δίνεται από τη σχέση: $CE(\nu,\kappa)=\begin{bmatrix}\nu\\ \kappa\end{bmatrix}=\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$.

1.19 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ)

✦ **Ρίχνουμε ταυτόχρονα 3 ίδια νομίσματα. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;**

Απάντηση:

Κατά τη ρίψη νομίσματος, τα δυνατά αποτελέσματα είναι “Κ” (Κεφάλι) ή “Γ” (Γράμματα).

Προφανώς κατά τη ρίψη τριών νομισμάτων, τα δυνατά αποτελέσματα είναι:

ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΓ και ΓΓΓ.

(Δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των “Κ” και “Γ” διότι τα νομίσματα ρίχνονται ταυτόχρονα)

Δηλαδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι 4.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις επαναληπτικές διατάξεις για να λύσουμε το πρόβλημα.

Τα δυνατά αποτελέσματα είναι όσοι οι συνδυασμοί με επανάληψη των $\nu=2$ αντικειμένων ανά $\kappa=3$. Τα “αντικείμενα” που επιλέγουμε είναι “Κ” ή “Γ” και οι επαναλήψεις που μπορούμε να έχουμε είναι τρείς.

Δηλαδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι:

$$CE(2,3)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\binom{2+3-1}{3}=\binom{4}{3}=\frac{4!}{(4-3)!3!}=\frac{4!}{3!}=4\,.$$

1.20 Παραδειγμα (Επαναληπτικες Μεταθεσεις)

Όταν λέμε “**αναγραμματισμό**” μιάς λέξης, εννοούμε μία καινούργια (όχι κατ ανάγκη με νόημα) λέξη που προκύπτει αν αλλάξουμε τη σειρά των γραμμάτων (αναδιατάξουμε τα γράμματα), της αρχικής λέξης.

✦ **Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης “ΘΑΛΑΣΣΑ”.**
Απάντηση

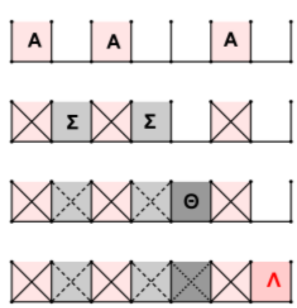
<u>1^{ος} Τρόπος</u> (Με Επαναλληπτικές Μεταθέσεις)

Στη λέξη “ΘΑΛΑΣΣΑ” υπάρχει τρείς φορές το γράμμα “Α”, δύο φορές το γράμμα “Σ”, μία φορά το γράμμα “Θ” και μία φορά το γράμμα “Λ”.
Άρα το πλήθος των αναγραμματισμών ισούται με τις επαναληπτικές διατάξεις των τεσσάρων ειδών αντικειμένων Α,Σ,Θ,Λ (4 γράμματα συμμετέχουν) με 3, 2, 1, 1 πλήθος στοιχείων αντίστοιχα.

$$M(3,2,1,1)=\frac{(3+2+1+1)!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=420$$

<u>2^{ος} Τρόπος</u> (Με Συνδυασμούς και Πολλαπλασιαστική αρχή)

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μία θήκη με επτά θέσεις στις οποίες θα τοποθετήσουμε τα γράμματα Α, Α, Α, Σ, Σ, Θ, Λ ώστε να δημιουργούνται καινούργιες λέξεις (αναγραμματισμοί της αρχικής λέξης).



$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!3!}$$

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}$$

$$\binom{2}{1}=\frac{2!}{1!1!}$$

$$\binom{1}{1}=\frac{1!}{0!1!}$$

Τα τρία Α, Α, Α μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στις επτά θέσεις με $\binom{7}{3}$ τρόπους.

Τα δύο Σ, Σ μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στις τέσερεις υπόλοιπες θέσεις με $\binom{4}{2}$ τρόπους.

Το Θ μπορούμε να το τοποθετήσουμε στις δύο υπόλοιπες θέσεις με $\binom{2}{1}$ τρόπους.

Το Λ τέλος μπορούμε να το τοποθετήσουμε στη μία θέση με $\binom{1}{1}=1$ τρόπους.

Άρα σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν :

$$\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=420 \text{ αναγραμματισμοί.}$$

1.21 Παραδειγμα (Επαναληπτικες Μεταθεσεις)

✦ **Να βρεθεί το άθροισμα όλων των πενταψήφιων θετικών ακέραιων που προκύπτουν από την αναδιάταξη των ψηφίων του αριθμού *12345*".**

Απάντηση

Το πλήθος των αριθμών που έχουν τελευταίο ψηφίο τη μονάδα (1) είναι: $4!=24$.

(όσες είναι δηλαδή οι μεταθέσεις των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις τέσσερεις πρώτες θέσεις)

Υπάρχουν λοιπόν $4!=24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 1, $4!=24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 2, $4!=24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 3, $4!=24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 4 και $4!=24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 5.

Άρα το άθροισμα των μονάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:

$$24(1+2+3+4+5)=24\frac{5\cdot 6}{2}=24\cdot 15=360.$$

Με ανάλογο τρόπο σκεπτόμενοι, συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των δεκάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:

$$24(1+2+3+4+5)\cdot 10=24\frac{5\cdot 6}{2}\cdot 10=24\cdot 15\cdot 10=3600.$$

Με όμοιο τρόπο σκεπτόμενοι (για τις εκατοντάδες, τις χιλιάδες κ.λ.π), διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα όλων αριθμών είναι:

$$360(1+10+100+1000+10000)=360\cdot 11111.$$

1.22 Προβλημα

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά (τη μία δίπλα στην άλλη) τρείς τελείως ίδιες μαύρες και πέντε τελείως ίδιες άσπρες σφαίρες.**

Λύση

Έστω ότι διαθέτουμε μία θήκη με οκτώ θέσεις (τη μία δίπλα στην άλλη) στην οποία θα τοποθετήσουμε τις σφαίρες.

$$\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$$

Οι τρεις μαύρες σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με $\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!3!}=56$ τρόπους στις 8 θέσεις της θήκης. Οι πέντε λευκές σφαίρες στη συνέχεια, μπορούν να τοποθετηθούν με ένα μόνο τρόπο στις πέντε κενές θέσεις της θήκης.

Άρα υπάρχουν συνολικά 56 τρόποι τοποθέτησης των σφαιρών.

Παρατηρήσεις

1. Η "ιδιορυθμία" του προβλήματος βρίσκεται στο γεγονός ότι: η αντιμετάθεση δύο σφαιρών του ιδίου χρώματος, δεν αποτελεί διαφορετική συνολική τοποθέτηση των σφαιρών.

2. Αν τοποθετήσουμε πρώτα τις λευκές σφαίρες τότε οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης είναι $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$. Προφανώς το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

3. Γενικότερα ισχύει η ισότητα $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$.

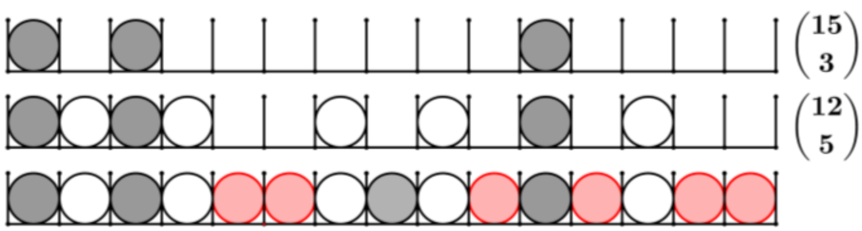
4. Ανάλογους τρόπους σκέψεις εφαρμόζουμε και στους αναγραμματισμούς των λέξεων.

1.23 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά (τη μία δίπλα στην άλλη) τρείς τελείως ίδιες μαύρες, πέντε τελείως ίδιες άσπρες σφαίρες και επτά τελείως ίδιες κόκινες σφαίρες;**

Λύση

Έστω ότι διαθέτουμε μία θήκη με δεκαπέντε θέσεις (τη μία δίπλα στην άλλη) στην οποία θα τοποθετήσουμε τις σφαίρες.



Οι 3 μαύρες σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

τρόπους στις 15 θέσεις της θήκης.

Οι 5 λευκές σφαίρες στη συνέχεια, μπορούν να τοποθετηθούν με

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$$

τρόπους στις 12 κενές θέσεις της θήκης.

Οι 7 (τέλος) κόκινες σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με ένα μόνο τρόπο στις υπόλοιπες επτά κενές θέσεις της θήκης.

Άρα υπάρχουν συνολικά $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{5} = 455 \cdot 792 = 360360$ τρόποι τοποθέτησης των σφαιρών.

Παρατηρήσεις

1. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί “μερική γενίκευση” του προηγούμενου προβλήματος.

2. Για τον υπολογισμό των τρόπων τοποθέτησης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο των επαναληπτικών μεταθέσεων.

$$M(3,5,7) = \frac{(3+5+7)!}{3!5!7!} = \frac{15!}{3!5!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} = 360360$$

1.24 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν έντεκα θεατές στις είκοσι συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου;**

Λύση

Ο $1^{ος}$ θεατής μπορεί να καθίσει με *20* τρόπους
Ο $2^{ος}$ θεατής μπορεί να καθίσει με *19* τρόπους
Ο $3^{ος}$ θεατής μπορεί να καθίσει με *18* τρόπους
. . . .
Ο $11^{ος}$ θεατής μπορεί να καθίσει με *10* τρόπους
Άρα (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) οι δυνατοί τρόποι είναι:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cdots \cdot 11 \cdot 10 = \frac{20!}{(20-11)!}.$$

(Διατάξεις *20* αντικειμένων ανά *11*)

1.25 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν έντεκα θεατές στις είκοσι συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου, αν τρία συγκεκριμένα άτομα καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις (ο ένας δίπλα στον άλλο);**

Λύση

Τα τρία συγκεκριμένα άτομα (επειδή θα καθίσει ο ένας δίπλα στον άλλο) μπορούν να καταλάβουν τις τρεις συνεχόμενες θέσεις $\underline{1},2,3$ ή $\underline{2},3,4$ ή . . . .ή $\underline{18},19,20$.
Δηλαδή υπάρχουν *18* τρόποι κατάληψης των τριών διαδοχικών θέσεων.
Για κάθε ένα από τους παραπάνω τρόπους, υπάρχουν $3!=6$ τρόποι αντιμετάθεσης των τριών συγκεκριμένων ατόμων μεταξύ τους.
Άρα ολοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν τα τρία άτομα είναι:

$$6 \cdot 18 = 108.$$

Οι υπόλοιποι 8 θεατές μπορούν να καθίσουν στις 17 θέσεις με

$$\frac{17!}{(17-8)!} = \frac{17!}{9!} = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \text{ τρόπους.}$$

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 108$.

1.26 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Σε μία τάξη φοιτούν *12* αγόρια και *10* κορίτσια. Πόσες πενταμελείς επιτροπές (από παιδιά της τάξης) μπορούν να δημιουργηθούν, αν:**

1. **Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.**
2. **Στην επιτροπή συμμετέχουν *3* τουλάχιστον κορίτσια.**

Λύση

1. Όλα τα παιδιά της τάξης είναι $12+10=22$.
Η τελική σύνθεση της επιτροπής, δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία επιλέγουμε τα παιδιά. Προφανώς οι επιτροπές “ΜΑΡΙΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ, ΝΙΚΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΑ, ΣΤΕΛΛΑ”, “ΓΙΩΡΓΟΣ, ΜΑΡΙΑ, ΝΙΚΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΑ, ΣΤΕΛΛΑ” και “ ΜΑΡΙΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ, ΣΤΕΛΛΑ, ΝΙΚΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΑ ”, είναι ίδιες.
Άρα οι πενταμελείς επιτροπές που μπορούν να δημιουργηθούν είναι όσοι οι συνδυασμοί των 22 παιδιών ανά 5. Δηλαδή :

$$\binom{22}{5} = \frac{22!}{(22-5)!5!} = \frac{22!}{17!5!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 22 = 26334.$$

2. Το πλήθος των επιτροπών στις οποίες συμμετέχουν τρία κορίτσια ισούται με το άθροισμα του πλήθους των επιτροπών που περιέχουν τρία ή τέσσερα ή πέντε κορίτσια.

Τα τρία κορίτσια που θα συμμετάσχουν στην επιτροπή, μπορούμε να τα επιλέξουμε με $\binom{10}{3}$ τρόπους. Ταυτόχρονα μπορούμε να επιλέξουμε με $\binom{12}{2}$ τρόπους τα δύο αγόρια, ώστε να συμπληρωθούν τα πέντε μέλη της επιτροπής.

Άρα δημιουργούνται

$$\binom{10}{3}\cdot\binom{12}{2}=\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{12!}{10!2!}=\frac{12!}{2!3!7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=8\cdot 9\cdot 10\cdot 11=7920$$

επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν τρία κορίτσια.

Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι δημιουργούνται

$$\binom{10}{4}\cdot\binom{12}{1}=\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{12!}{11!1!}=\frac{12\cdot 10!}{4!6!}=\frac{12\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=10\cdot 9\cdot 7\cdot 4=2520$$

επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν τέσσερα κορίτσια.

Τέλος δημιουργούνται

$$\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=9\cdot 7\cdot 4=252$$

επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν πέντε κορίτσια.

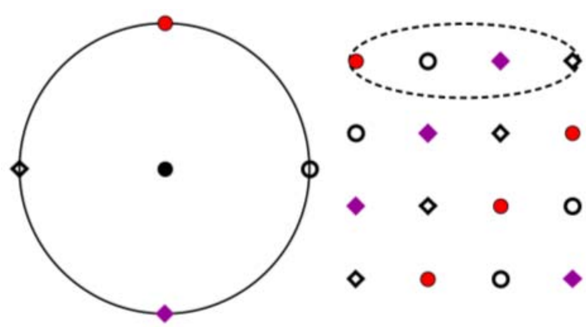
Άρα μπορούν να δημιουργηθούν $7920+2520+252=10692$ επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν τρία τουλάχιστον κορίτσια.

1.27 Προβλημα (Κυκλικες μεταθεσεις)

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τέσσερα άτομα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι;**

Λύση

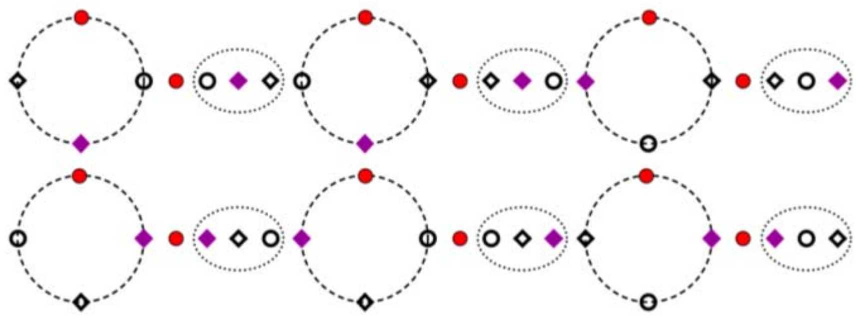
Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ τα άτομα που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι.
Στο σχήμα (για εποπτικούς λόγους) συμβολίζουμε τα άτομα με σημεία.
Αν υποθέσουμε ότι τα τέσσερα άτομα τα τοποθετούμε στη σειρά (το ένα δίπλα στο άλλο), τότε στις τέσσερεις παρακάτω τοποθετήσεις (μεταθέσεις) των ατόμων: ***ABCD***, ***BCDA***, ***CDAB*** και ***DABC*** αντιστοιχεί μία και μόνο τοποθέτησή τους γύρω από το τραπέζι.



Αντίστροφα, σε κάθε τοποθέτηση των ατόμων γύρω από το τραπέζι, αντιστοιχούν τέσσερεις μεταθέσεις των ατόμων (αν τους τοποθετούσαμε στη σειρά) που προκύπτουν ως εξής:
Ξεκινάμε από κάθε άτομο (που κάθεται στο τραπέζι) και κινούμενοι δεξιόστροφα καταγράφουμε (σε σειρά) αυτούς που συναντάμε στο τραπέζι.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πλήθος των μεταθέσεων των τεσσάρων ατόμων, είναι τετραπλάσιο από το πλήθος των τρόπων που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι.

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι είναι: $\frac{4!}{4} = 3! = 6$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται όλοι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης γύρω από το κυκλικό τραπέζι.



1.28 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 πορτοκάλια, 15 μήλα και 20 αχλάδια σε δύο παιδιά, αν:**

1. **Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.**
2. **Κάθε παιδί πρέπει να πάρει 3 τουλάχιστον πορτοκάλια, 2 τουλάχιστον μήλα και 4 τουλάχιστον αχλάδια.**

Λύση
Όλα τα φρούτα θα μοιραστούν στα δύο παιδιά. Αν λοιπόν το πρώτο παιδί πάρει 4 πορτοκάλια, τότε το δεύτερο θα πάρει "αναγκαστικά" 6 πορτοκάλια. Δηλαδή σημαντικό ρόλο παίζει η κατανομή των φρούτων στο ένα από τα δύο παιδιά (διότι το άλλο θα πάρει τα υπόλοιπα).

1. Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 0 ή 1 ή 2 ή . . . ή 10 πορτοκάλια.
Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα πορτοκάλια είναι: $(10+1)=11$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα μήλα μπορούν να μοιραστούν με $(15+1)=16$ και τα αχλάδια με $(20+1)=21$ τρόπους.

Άρα τα φρούτα μπορούν να μοιραστούν με $(10+1)(15+1)(20+1)=11\cdot 16\cdot 21=3696$ τρόπους.

2. Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 3 ή 4 ή 5 ή . . . ή 7 πορτοκάλια.
Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα πορτοκάλια είναι:
$$7-3+1=(10-3)-3+1=10-2\cdot 3+1=5 .$$
Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 2 ή 3 ή 4 ή . . . ή 13 μήλα.
Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα μήλα είναι:
$$13-2+1=(15-2)-2+1=15-2\cdot 2+1=12 .$$
Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 4 ή 5 ή 6 ή . . . ή 16 αχλάδια.
Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα αχλάδια είναι:
$$16-4+1=(20-4)-4+1=20-2\cdot 4+1=13 .$$

Τελικά όλοι οι δυνατοί τρόποι μοιράσματος των φρούτων είναι:

$$(10-2\cdot 3+1)(15-2\cdot 2+1)(20-2\cdot 4+1)=5\cdot 12\cdot 13=780.$$

1.29 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών του αριθμού *600*.**

Λύση

1ος Τρόπος

Ο αριθμός 600 (αναλυόμενος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων) γράφεται:

$$600=2^3\cdot 3\cdot 5^2=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε τρεις διαφορετικές μεταξύ τους κάρτες που έχουν γραμμένο επάνω τους τον αριθμό 2, μία κάρτα που έχει γραμμένο τον αριθμό 3 και δύο διαφορετικές μεταξύ τους κάρτες που έχουν γραμμένο τον αριθμό 5.

Μοιράζουμε όλες τις κάρτες σε δύο παιδιά και τους ζητάμε να γράψουν το γινόμενο των αριθμών που έχουν επάνω τους οι κάρτες με τη βοήθεια δυνάμεων του 2, του 3 του 5 και το τελικό αποτέλεσμα.

Αν (δηλαδή) σε ένα παιδί δοθούν δύο κάρτες με τους αριθμούς 2 και μία κάρτα με τον αριθμό 5 τότε αυτό θα πρέπει να γράψει ότι έχει τον αριθμό: $2^2\cdot 3^0\cdot 5^1=20$.

Το δεύτερο παιδί αναγκαστικά θα έχει τον αριθμό $2^1\cdot 3^1\cdot 5^1=30$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στα χέρια των παιδιών δημιουργούνται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 600, οπότε οι αριθμοί αυτοί θα είναι διαιρέτες του 600.

Από τη τελευταία παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των διαιρετών του 600, ταυτίζεται με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τις έξι κάρτες στα παιδιά.

Σκεφτόμενοι με τον τρόπο του προηγούμενου προβλήματος, καταλήγουμε ότι το πλήθος των διαιρετών του 600 είναι: $(3+1)(1+1)(2+1)=24$.

2ος Τρόπος

Ο αριθμός 600 (αναλυόμενος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων) γράφεται: $600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$.

Κάθε διαιρέτης του 600 είναι της μορφής $2^k\cdot 3^m\cdot 5^n$, όπου k,m,n είναι ακέραιοι με $0\le k\le 3$, $0\le m\le 1$ και $0\le n\le 2$.

Το πλήθος λοιπόν των διαιρετών ταυτίζεται με το πλήθος επιλογής των εκθετών k,m,n στην παράσταση $2^k\cdot 3^m\cdot 5^n$.

Το k μπορούμε να το επιλέξουμε με 4 τρόπους, το m με 2 τρόπους και το n με 3 τρόπους.

Άρα τις τριάδες των εκθετών μπορούμε να τις επιλέξουμε με $4\cdot 2\cdot 3=24$ τρόπους.

Παρατήρηση

1. Γενικότερα το πλήθος των διαιρετών του θετικού ακέραιου $a=p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\cdots p_k^{n_k}$ είναι:

$$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1).$$

2. Αν $a=2^4$ τότε διαιρέτες του είναι οι αριθμοί $2^0,2^1,2^2,2^3,2^4$ και το άθροισμά τους είναι:

$$r(a)=1+2^1+2^2+2^3+2^4=\frac{2^5-1}{2-1}=31.$$

Αν $a=2^4\cdot 3$ τότε, επί πλέον διαιρέτες του αριθμού a (εκτός από τους $1,2,2^2,2^3,2^4$) είναι και οι αριθμοί $3\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 2^2,\ 3\cdot 2^3,\ 3\cdot 2^4$.

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των παρενθέσεων $(1+2+2^2+2^3+2^4)$ και $(1+3)$ έχουμε:

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)=1+2+2^2+2^3+2^4+3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+3\cdot 2^4.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος του αθροίσματος είναι διαιρέτης του αριθμού $a=2^4\cdot 3$.

Το άθροισμα λοιπόν των διαιρετών θα είναι: $\frac{2^5-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}=124$.

3. Γενικότερα το άθροισμα των διαιρετών του θετικού ακέραιου $a=p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\cdots p_k^{n_k}$ είναι:

$$\frac{p_1^{n_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{n_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}.$$

2 ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Δέκα άτομα βρίσκονται στον ανελκυστήρα (ασανσέρ) ενός επταόροφου κτιρίου. Ο ανελυστήρας ξεκινά από το ισόγειο και όλοι οι επιβάτες αποβιβάζονται σε κάποιο όροφο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η αποβίβαση των επιβατών στους επτά ορόφους, αν στο πρώτο όροφο αποβιβαστούν δύο ακριβώς άτομα;**

Απάντηση

Η επιλογή των 2 ατόμων (που θα αποβιβαστούν στο πρώτο όροφο), μπορεί να γίνει με

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} \text{ τρόπους.}$$

Για κάθε ένα από τους παραπάνω τρόπους, οι υπόλοιποι 8 επιβάτες μπορούν να αποβιβαστούν στους 6 ορόφους με 6^8 τρόπους. (♦)

Άρα (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) όλοι οι δυνατοί τρόποι αποβίβασης των επιβατών στους επτά οπόφους είναι: $\binom{10}{2} \cdot 6^8$.

(♦)

Το $1^ο$ άτομο μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

Το $2^ο$ άτομο μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

. . . . . .

Το $8^ο$ άτομο μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

Επαναληπτικές Διατάξεις έξι ανά οκτώ $E(6,8) = 6^8$.

2.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Επάνω στη περιφέρεια ενός κύκλου δίνονται επτά διαφορετικά μεταξύ τους σημεία.**

Βρείτε: (α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται με άκρα τα επτά αυτά σημεία;

(β) Πόσα τρίγωνα ορίζονται με κορυφές τα επτά αυτά σημεία;

(γ) Πόσες διαγώνιες έχει το δημιουργούμενο κυρτό επτάγωνο;

Απάντηση

Με δεδομένο ότι δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα, το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των επτά σημείων (αντικειμένων) ανά δύο.

$$C(7,2) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$$

Με ανάλογες σκέψεις καταλήγουμε ότι το πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται είναι όσοι οι συνδυασμοί των επτά σημείων (αντικειμένων) ανά τρία.

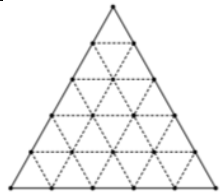
$$C(7,3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Το πλήθος των διαγωνίων προκύπτει από το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων αφαιρώντας τα επτά ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τις πλευρές του πολυγώνου. Δηλαδή το πλήθος των διαγωνίων είναι $21 - 7 = 14$.

2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ)

✦ **Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους 5, το χωρίζουμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 25 ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς μήκους 1 (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα).**

Πόσα συνολικά ισόπλευρα τρίγωνα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τριγώνου) ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;



Λύση

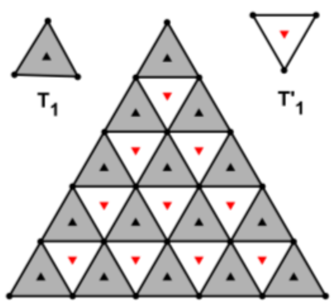
Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε 4 σημεία που (μαζί με τις κορυφές του), τις χωρίζουν σε πέντε ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα προς τις πλευρές ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται σε 6 σημεία (που βρίσκονται στο εσωτερικό του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου). Έτσι στο δημιουργούμενο σχηματισμό (που ονομάζεται και "κανονικό τριγωνικό πλέγμα") έχουμε 21 σημεία, που θα αποτελέσουν τις κορυφές των τριγώνων.

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο, το ορθόκεντρο, το περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το έκκεντρο ταυτίζονται.
Το περίκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου, θα το ονομάζουμε **κέντρο του τριγώνου**.
Τα κέντρα των τριγώνων που έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με το αρχικό τρίγωνο θα τα σημειώνουμε με "▲".
Τα κέντρα των τριγώνων που έχουν αντίθετο προσανατολισμό με το αρχικό τρίγωνο θα τα σημειώνουμε με "▼".

Με κορυφές τα σημεία του "πλέγματος" παρατηρούμε ότι δημιουργούνται:

1. Τρίγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1 είναι $S_1 = 1+2+3+4+5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

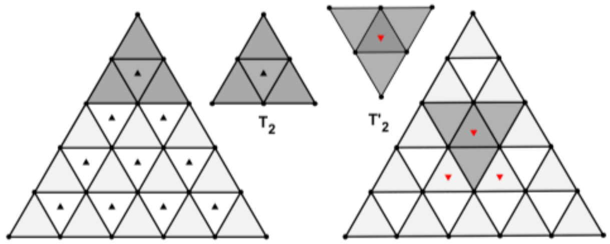


Τρίγωνα τύπου T_1' (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1' είναι $S_1' = 1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

2. Τρίγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

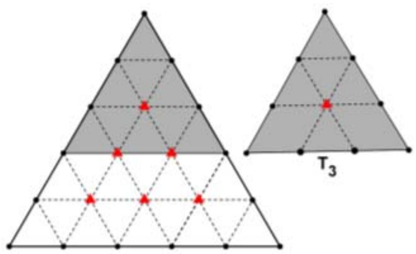
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_2 είναι $S_2 = 1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.



Τρίγωνα τύπου T_2' (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_2' είναι $S_2' = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$.

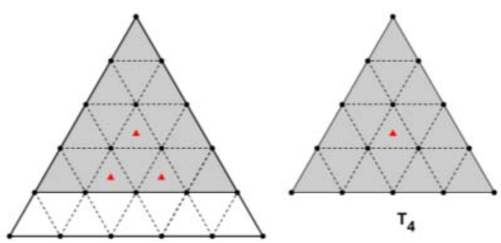
3. Τρίγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.



Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_3 είναι $S_3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

4. Τρίγωνα τύπου T_4 (που η πλευρά τους έχει μήκος 4) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_4 είναι $S_4 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$.

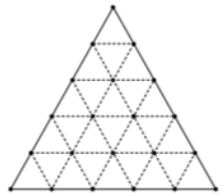


Τέλος “δημιουργείται” το τρίγωνο τύπου T_5 (που η πλευρά του έχει μήκος 5) και είναι ουσιαστικά το μεγάλο αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο.
Τελικά το πλήθος των τριγώνων είναι:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_1' + S_2' + S_3' = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 + 10 + 3 = 48.$$

2.4 Προβλημα (Γενικευση Τριγωνικου Πλεγματος)

✦ **Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους n (όπου n θετικός ακέραιος), το χωρίζουμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε n^2 τρίγωνα πλευράς μήκους 1 (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, για $n=5$). Πόσα συνολικά ισόπλευρα τρίγωνα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τριγώνου) ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;**



Λύση

Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε $n-1$ σημεία που (μαζί με τις κορυφές του), τις χωρίζουν σε n ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα προς τις πλευρές ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται σε $1+2+3+\cdots+(n-2)=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ σημεία. Έτσι στο δημιουργούμενο σχηματισμό (που ονομάζεται και "κανονικό τριγωνικό πλέγμα") έχουμε $1+2+3+\cdots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ σημεία, που θα αποτελέσουν τις κορυφές των τριγώνων.

Με κορυφές τα σημεία του "πλέγματος" παρατηρούμε ότι δημιουργούνται:
Τρίγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1 είναι:

$$S_1=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Τρίγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_2 είναι:

$$S_2=1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Τρίγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_3 είναι:

$$S_3=1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

....

Τρίγωνα τύπου T_{n-2} (που η πλευρά τους έχει μήκος $n-2$) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_{n-2} είναι:

$$S_{n-2}=1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}=6.$$

Τρίγωνα τύπου T_{n-1} (που η πλευρά τους έχει μήκος $n-1$) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_{n-1} είναι:

$$S_{n-1} = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 .$$

Τέλος “δημιουργείται” το τρίγωνο τύπου T_n (που η πλευρά του έχει μήκος n) και ταυτίζεται ουσιαστικά το μεγάλο αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο.

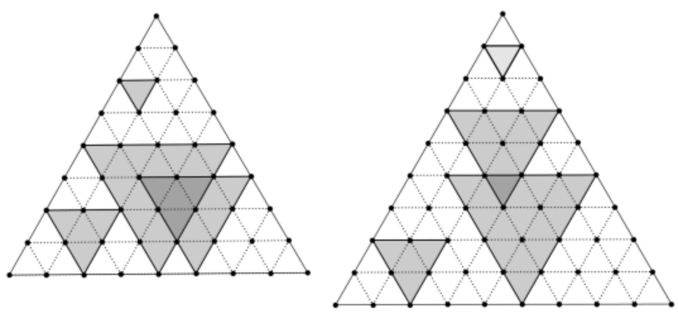
Τελικά το πλήθος των τριγώνων που ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου είναι:

$$S = S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + \cdots + S_3 + S_2 + S_1 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \cdots + \frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2} + \frac{(n-1)\cdot n}{2} + n^2 =$$

$$= \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{6} + n^2 .$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το πλήθος των τριγώνων που ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με τον προσανατολισμο του αρχικού τριγώνου.



Με κορυφές τα σημεία του “πλέγματος” παρατηρούμε ότι δημιουργούνται:

Τρίγωνα τύπου T_1' (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1' είναι:

$$S_1' = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} .$$

Τρίγωνα τύπου T_2' (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_2' είναι:

$$S_2' = 1 + 2 + \cdots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2} .$$

....

Τέλος δημιουργούνται τρίγωνα τύπου T_k' (που η πλευρά τους έχει μήκος k) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

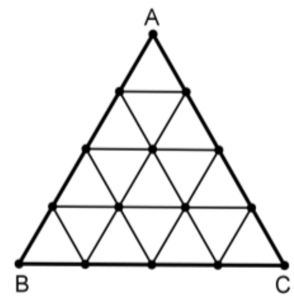
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_k' είναι:

$$S_k' = 1 + 2 + \cdots + (n - 2k + 1) = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2} .$$

Όπου $n = 2k$ ή $n = 2k + 1$.

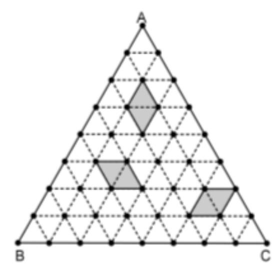
2.5 Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων 2011

✦ **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC του οποίου κάθε πλευρά υποθέτουμε ότι έχει μήκος $k>0$. Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε $n-1$ σημεία που την χωρίζουν σε n ίσα τμήματα. Ενώνουμε τα $n-1$ σημεία της μίας πλευράς με τα $n-1$ σημεία της άλλης πλευράς έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται να είναι παράλληλα με τη τρίτη πλευρά του τριγώνου. Με αυτό τον τρόπο, το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο ABC, χωρίζεται σε n^2 (μικρότερα) ισόπλευρα τρίγωνα των οποίων κάθε πλευρά έχει μήκος $\frac{k}{n}$. Το διπλανό σχήμα είναι ένα παράδειγμα για $n=4$. Θεωρούμε τώρα το σημειοσύνολο S που αποτελείται από τις κορυφές του τριγώνου ABC, από τα $n-1$ σημεία που έχουμε θεωρήσει επάνω σε κάθε πλευρά και από τα σημεία που τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα. Με κορυφές τα σημεία του σημειοσυνόλου S, δημιουργούνται ρόμβοι τύπου M που οι πλευρές τους έχουν μήκος $\frac{k}{n}$ και ρόμβοι τύπου D που οι πλευρές τους έχουν μήκος $\frac{2k}{n}$. Αν m είναι το πλήθος των ρόμβων τύπου M και d το πλήθος των ρόμβων τύπου D, να βρεθεί η σχέση που εκφράζει τη διαφορά $m-d$ συναρτήσει του n (n ακέραιος μεγαλύτερος του 1).**



Λύση

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{k}{n}$ (που δεν ανήκει στις πλευρές του τριγώνου) είναι η διαγώνιος ενός και μόνο ρόμβου τύπου M. Για να υπολογίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων τύπου M, αρκεί να υπολογίζουμε το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται στο εσωτερικό του τριγώνου από την τομή των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα σημεία των πλευρών.



Τα τμήματα που είναι παράλληλα με τη πλευρά BC είναι:

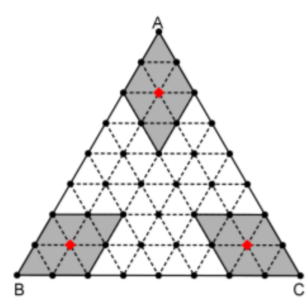
$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Άρα το συνολικό πλήθος των ρόμβων τύπου M είναι:

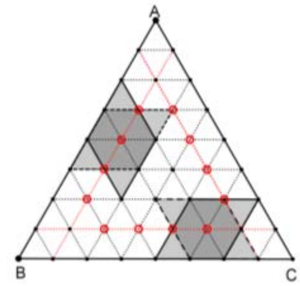
$$m=3\frac{n(n-1)}{2}.$$

Για την μέτρηση των ρόμβων τύπου D θα χωρίσουμε τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου σε τρείς κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από εκείνα τα σημεία που είναι κέντρα ενός και μόνο ρόμβου τύπου D. Αυτά είναι πάντοτε τρία (δηλαδή είναι τρία για κάθε n). Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.



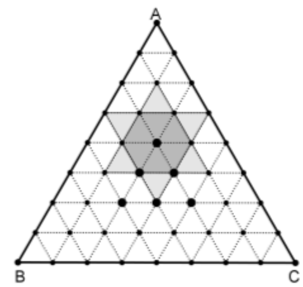
Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από εκείνα τα σημεία που είναι κέντρα δύο και μόνο ρόμβων τύπου D. Τα σημεία αυτά βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα και πλησιέστερα προς τις πλευρές. Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν $n-4$ σημεία. Άρα συνολικά θα έχουμε $3(n-4)$ σημεία αυτής της κατηγορίας. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.



Η Τρίτη κατηγορία τέλος αποτελείται από τα υπόλοιπα σημεία που είναι κέντρα τριών ρόμβων τύπου D. Αυτά τα σημεία είναι $1+2+3+\cdots+(n-5)=\dfrac{(n-5)(n-4)}{2}$.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.

Με τη βοήθεια των προηγούμενων παρατηρήσεων, καταλήγουμε στον υπολογισμό όλων των ρόμβων τύπου D, που είναι:



$$d=3+3(n-4)2+3\frac{(n-5)(n-4)}{2}=\frac{3}{2}\big(2+(n-1)(n-4)\big).$$

(Προφανώς για $n=2$ και $n=3$, ισχύει $d=0$).

Εκτελώντας πράξεις, καταλήγουμε $m-d=3(2n-3)$.

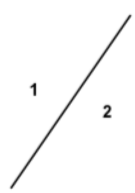
2.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Στο επίπεδο δίνονται *n* διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Να βρεθεί το μέγιστο πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζουν το επίπεδο οι ευθείες αυτές.**

Λύση

Έστω $P(n)$ το μέγιστο πλήθος των χωρίων που δημιουργούν οι n ευθείες.

Τότε προφανώς $P(1)=2$ (διότι μία ευθεία χωρίζει σε δύο χωρία το επίπεδο).



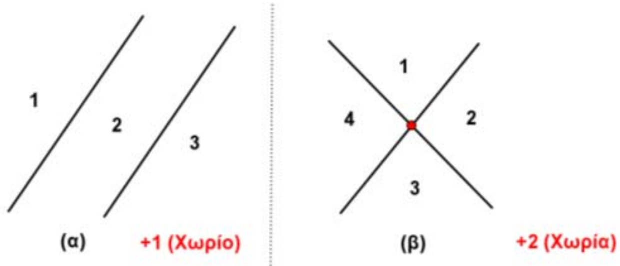
Σχήμα 1

Έστω τώρα και μία δεύτερη ευθεία στο επίπεδο. Τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

<u>1η περίπτωση</u>

Αν η δεύτερη ευθεία είναι παράλληλη προς την πρώτη τότε ορίζονται τρία χωρία. Δηλαδή δημιουργείται ένα επί πλέον χωρίο από το "προηγούμενο βήμα" ($P(1)+1=2+1=3$ χωρία).

(Σχήμα 2 (α))

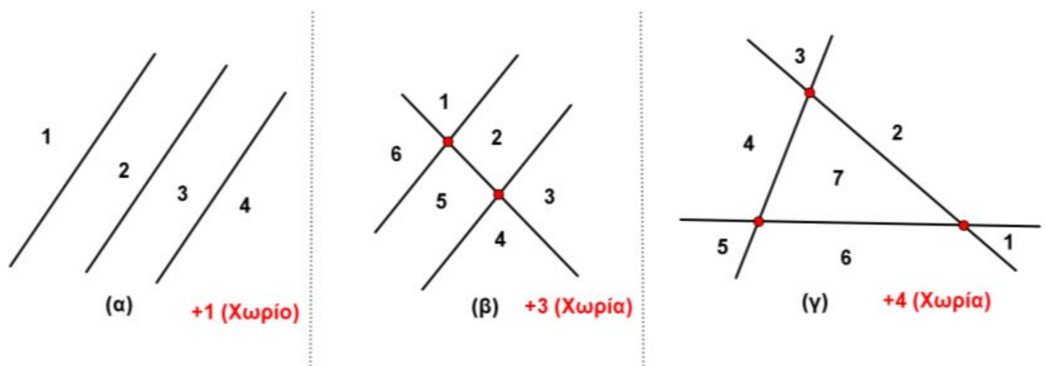


Σχήμα 2

2η περίπτωση
Αν η δεύτερη ευθεία τέμνει την πρώτη τότε ορίζονται τέσσερα χωρία. Δηλαδή δημιουργούνται δύο επί πλέον χωρία από το "προηγούμενο βήμα" ($P(1)+2=2+2=4$). (**Σχήμα 2 (β)**)

Έστω ακόμη μία τρίτη ευθεία στο επίπεδο. Τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:
1η περίπτωση
Αν η τρίτη ευθεία είναι παράλληλη προς τις άλλες δύο (προσέξτε το σχήμα 3(α) σαν συνέχεια του σχήματος 2(α)) τότε ορίζονται τέσσερα χωρία. Δηλαδή δημιουργείται ένα επί πλέον χωρίο από το "προηγούμενο βήμα" ($P(2)+1$). (**Σχήμα 3 (α)**)

2η περίπτωση
Αν η τρίτη ευθεία τέμνει τις άλλες δύο (προσέξτε το σχήμα 3(β) σαν συνέχεια του σχήματος 2(α)) τότε ορίζονται έξι χωρία. Δηλαδή δημιουργούνται τρία επί πλέον χωρία από το "προηγούμενο βήμα" ($P(2)+3$). (**Σχήμα 3 (β)**)



Σχήμα 3

3η περίπτωση
Αν η τρίτη ευθεία τέμνει τις άλλες δύο (προσέξτε το σχήμα 3(γ) σαν συνέχεια του σχήματος 2(β)) τότε ορίζονται επτά χωρία. Δηλαδή δημιουργούνται τέσσερα επί πλέον χωρία από το "προηγούμενο βήμα" ($P(2)+4$). (**Σχήμα 3 (γ)**)

Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε ότι με την "είσοδο" μίας νέας ευθείας, δημιουργούνται $k+1$ καινούργια χωριά, όπου k είναι το πλήθος των σημείων τομής της "νεοεισερχόμενης" ευθείας με τις ήδη υπάρχουσες.

Η προηγούμενη παρατήρηση , μαζί με το δεδομένο ότι "η $(n+1)$-οστή ευθεία μπορεί να τέμνει τις n προϋπάρχουσες ευθείες σε n το πολύ σημεία", μας οδηγεί στη δημιουργία του παρακάτω αναγωγικού τύπου για το μέγιστο πλήθος $P(n)$ των χωρίων που δημιουργούν οι n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες:

$$P(n+1) \le P(n) + n + 1 .$$

Από τη προηγούμενη ανισότητα, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} P(1) = 2 \\ P(2) \le P(1) + 2 \\ P(3) \le P(2) + 3 \\ \vdots \\ P(n-1) \le P(n-2) + n - 1 \\ P(n) \le P(n-1) + n \end{array}\right\}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη, καταλήγουμε:

$$P(n) \le \frac{n^2 + n + 2}{2} .$$

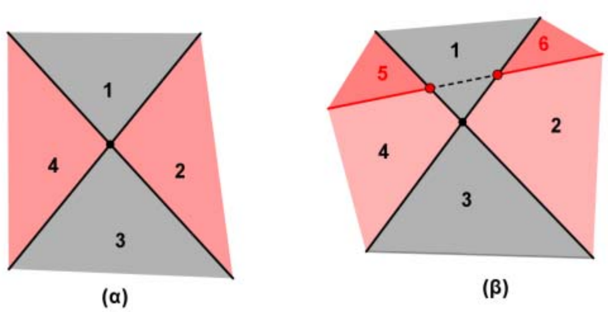
Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν οι ευθείες τέμνονται ανά δύο και ανά τρείς δεν περνάνε από το ίδιο σημείο.

2.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Στο επίπεδο δίνονται n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες που τέμνονται ανά δύο και ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί το πλήθος των φραγμένων και μη φραγμένων χωρίων που δημιουργούνται.**

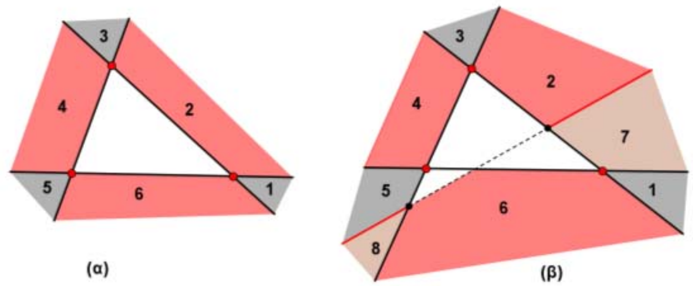
Λύση

Οποιαδήποτε δύο γειτονικά και μη φραγμένα χωρία χωρίζονται από ημιευθείες (Σχήματα 4(α) και 5(α)). Δηλαδή έχουν κοινό σύνορο ημιευθεία.



Σχήμα 4

Αν τώρα θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ευθεία (τέμνουσα), τότε κάθε μία από τις δύο ημιευθείες που αποτελούν μέρη της, χωρίζουν δύο ακριβώς μη φραγμένα χωρία άρα τα μη φραγμένα χωρία είναι $2n$.



Σχήμα 5

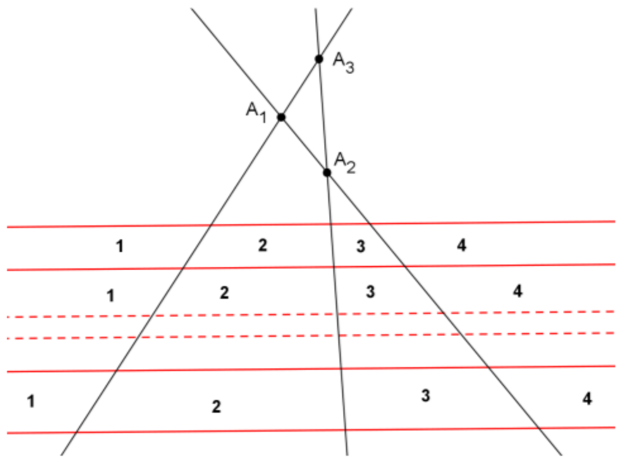
Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $P(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$ που μας δίνει το πλήθος όλων των χωρίων, καταλήγουμε ότι το πλήθος των φραγμένων χωρίων είναι: $\dfrac{n^2-3n+2}{2}$.

2.8 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο επίπεδο θεωρούμε $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο (όπου k ακέραιος με $k>1$ και n θετικός ακέραιος). Από τις ευθείες αυτές , k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους (τέμνονται ανά δύο). Επίσης δεν υπάρχει κάποια ευθεία (από τις n) που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες χωρίζουν το επίπεδο σε χωρία (πχ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα).
Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "καλό" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες.
Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "καλών" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο 221, να βρεθούν τα k, n .

Προφανώς οι k (διαφορετικές μεταξύ τους) παράλληλες ευθείες ορίζουν $k-1$ διαδοχικές παράλληλες "λωρίδες" στο επίπεδο.
Επίσης οι n διαφορετικές, μη παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, τέμνονται ανά δύο σε $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ σημεία.
Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

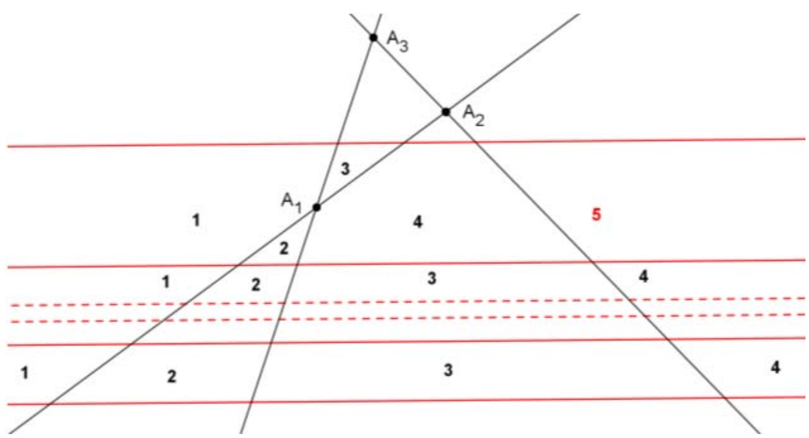
1η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εκτός των παράλληλων "λωρίδων".



Σχήμα 6

Στη περίπτωση αυτή κάθε μία από τις n ευθείες ορίζει σε κάθε "λωρίδα" $n+1$ "καλά" χωρία.
Οπότε ορίζονται συνολικά $(k-1)(n+1)$ συνολικά "καλά" χωρία.
Στο (Σχήμα 1) βλέπουμε τα "καλά" χωρία που δημιουργούνται από $n=3$ ευθείες.

Αν τώρα ένα από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών το θεωρήσουμε μέσα σε μία λωρίδα, τότε στη λωρίδα αυτή θα δημιουργηθεί ένα επί πλέον "καλό" χωρίο (Σχήμα 2).

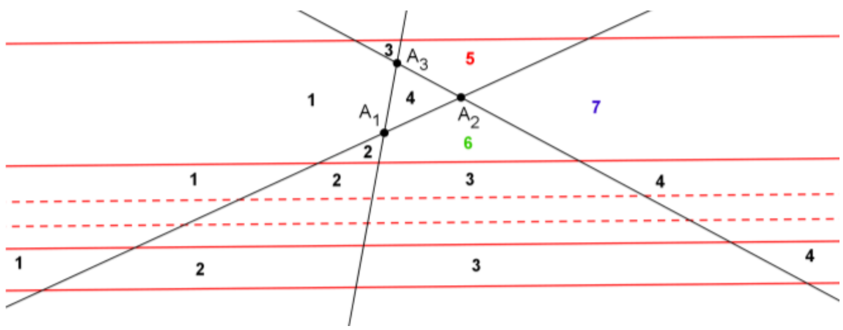


Σχήμα 7

Άρα $(k-1)(n+1)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός "καλών" χωρίων που μπορούν να δημιουργηθούν, διότι με την είσοδο καθενός από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής στις λωρίδες, αυξάνεται ο αριθμός των "καλών" χωρίων.

2η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εντός των παράλληλων λωρίδων.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εισαγωγής των σημείων τομής μέσα στις "λωρίδες", θα προστίθεται κάθε φορά και ένα "καλό" χωρίο. Έτσι στο τέλος θα έχουμε επί πλέον $\binom{n}{2}$ "καλά" χωρία.



Σχήμα 8

Τελικά ο μέγιστος αριθμός των "καλών" χωρίων είναι:

$$(k-1)(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Εφόσον τώρα (σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος), ο ελάχιστος αριθμός των "καλών" χωρίων είναι 176 και ο μέγιστος 221, θα ισχύει:

$$\begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ (k-1)(n+1)+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $k=17, n=10$.

2ος Τρόπος υπολογισμού του μέγιστου αριθμού των καλών χωρίων.

Με τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στον προηγούμενο τρόπο, ο μέγιστος αριθμός των καλών χωρίων επιτυγχάνεται όταν τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρεθούν μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες.

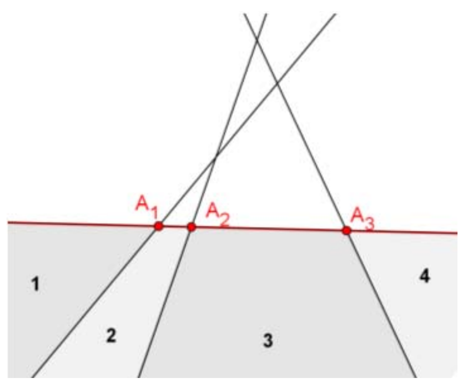
Θα υπολογίσουμε λοιπόν όλα τα χωρία που δημιουργούνται από τις $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα χωρία που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων (έχοντας πάντα υπ΄ όψιν ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρίσκονται μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες).

Έστω $p(m)$ το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από m ευθείες οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο.

Προφανώς $p(1)=2$.

Θεωρούμε τώρα ότι $p(m)$ είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από τις m ευθείες και φέρουμε μία επί πλέον ευθεία με σκοπό να υπολογίσουμε επαγωγικά το $p(m+1)$.

Προφανώς $p(m+1)=p(m)+r$. Όπου r είναι το πλήθος των επί πλέον χωρίων που "δημιουργούνται" με τη χάραξη της $m+1^{ης}$ ευθείας.



Με τη χάραξη λοιπόν της $m+1^{ης}$ ευθείας "δημιουργούνται" τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι τα σημεία τομής της με τις υπόλοιπες ευθείες αυξημένα κατά ένα.

Αν δηλαδή η $m+1$ ευθεία είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι $m-1$ και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m$ επί πλέον χωρία.

Αν όμως η $m+1$ ευθεία δεν είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι m και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m+1$ επί πλέον χωρία.

Αν λοιπόν οι ευθείες δεν είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους και δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, μπορούμε να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση: $p(m)=p(m-1)+m$ και $p(1)=2$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει: $p(m)=\dfrac{m^2+m+2}{2}$.

Θεωρώντας τώρα τα δεδομένα του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι τα χωρία που “δημιουργούνται” , είναι: $\frac{n^2+n+2}{2}+k(n+1)$.

Τα καλά χωρία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τα $2(n+1)$ που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ευθειών.

2.9 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Στο εσωτερικό κάθε μίας από τις πλευρές τετραγώνου θεωρούμε *n* διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Να βρεθεί ο πλήθος όλων των τριγώνων που έχουν κορυφές τα σημεία αυτά.**

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Από τα $4n$ σημεία που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου μπορούμε να δημιουργήσουμε $\binom{4n}{3}$ τριάδες σημείων. Όλες βέβαια αυτές οι τριάδες σημείων, δεν ορίζουν τρίγωνα γιατί κάποιες τριάδες αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $\binom{n}{3}$ το πλήθος τριάδες που αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Άρα δημιουργούνται:

$$\binom{4n}{3}-4\binom{n}{3}=2n^2(5n-3) \text{ τρίγωνα.}$$

Λύση (2^{ος} τρόπος)
Τα τρίγωνα που δημιουργούνται, μπορούμε να τα χωρίσουμε σε δύο τύπους.
Σαν τρίγωνα πρώτου τύπου θεωρούμε αυτά των οποίων και οι τρείς κορυφές ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές του τετραγώνου ενώ σαν τρίγωνα δεύτερου τύπου θεωρούμε αυτά που οι δύο κορυφές ανήκουν στην ίδια πλευρά του τετραγώνου και η τρίτη κορυφή σε διαφορετική πλευρά.
Το πλήθος των τριγώνων πρώτου τύπου είναι $4n^3$ (*) και το πλήθος των τριγώνων δευτέρου τύπου είναι $3\cdot 4n\binom{n}{2}$ (**), άρα το πλήθος των τριγώνων είναι $4n^3+3\cdot 4n\binom{n}{2}=2n^2(5n-3)$.

(*) Τις τρείς από τις τέσσερεις πλευρές του τετραγώνου (επάνω στις οποίες θα βρίσκονται οι κορυφές των τριγώνων) μπορούμε να τις επιλέξουμε με $\binom{4}{3}=4$ τρόπους. Ταυτόχρονα μπορούμε να επιλέξουμε κάθε κορυφή με n διαφορετικούς τρόπους. Άρα η εκλογή τριγώνων πρώτου τύπου μπορεί να γίνει (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) με $4n^3$ διαφορετικούς τρόπους.

(**) Τις δύο από τις τέσσερεις πλευρές του τετραγώνου (επάνω στις οποίες θα βρίσκονται οι κορυφές των τριγώνων) μπορούμε να τις επιλέξουμε με $\binom{4}{2}=3\cdot 4$ τρόπους. Ταυτόχρονα μπορούμε να επιλέξουμε τη μία κορυφή με n διαφορετικούς τρόπους και τις δύο άλλες κορυφές (που θα ανήκουν στην ίδια πλευρά με $\binom{n}{2}$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) η εκλογή τριγώνων δευτέρου τύπου μπορεί να γίνει με $3\cdot 4n\binom{n}{2}$ διαφορετικούς τρόπους.

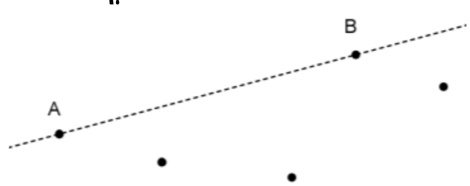
2.10 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Δίνεται στο επίπεδο ένα σύνολο S από n το πλήθος ($n \geq 3$) διαφορετικά μεταξύ τους σημεία που ανά τρία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\frac{n(n-2)}{3}$ τουλάχιστον τρίγωνα με κορυφές σημεία του συνόλου S, που δεν περιέχουν άλλο στοιχείο του συνόλου S.**

Λύση

Ένα τρίγωνο που δεν περιέχει άλλα στοιχείο του σημειοσυνόλου S θα το ονομάζουμε "κενό". Προσπαθούμε λοιπόν να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος των "κενών" τριγώνων που μπορούν να δημιουργηθούν.

Είναι γνωστό ότι η ευθεία που ορίζουν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του επιπέδου, χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Καταχρηστικά θα λέμε ότι **το ζεύγος των σημείων χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.**



Σχήμα 9

Στη περίπτωσή μας υπάρχουν ζευγάρια σημείων που χωρίζουν (Σχήμα 10) το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα με τέτοιο τρόπο ώστε στο ένα ημιεπίπεδο να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του σημειοσυνόλου S και στο άλλο να μην υπάρχουν σημεία του σημειοσυνόλου S. Τα ζευγάρια των σημείων του S που έχουν την προηγούμενη ιδιότητα τα ονομάζουμε "τύπου ένα".

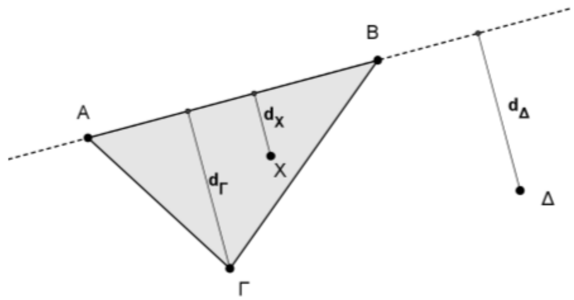
Ενώ τα ζευγάρια των σημείων του S που δεν έχουν την προηγούμενη ιδιότητα (δηλαδή υπάρχουν σημεία του S και στα δύο ημιεπίπεδα), τα ονομάζουμε "τύπου δύο".

Το πλήθος s_1 των ζευγαριών "τύπου ένα" είναι το πολύ n και παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν τα σημεία του S ορίζουν κυρτό πολύγωνο.(Δηλαδή $s_1 \leq n$)

Επειδή όμως το συνολικό πλήθος των ζευγαριών είναι $\binom{n}{2}$, συμπεραίνουμε ότι το πλήθος s_2 των ζευγαριών "τύπου δύο" θα είναι τουλάχιστον $\binom{n}{2}-n$.(Δηλαδή $s_2 \geq \binom{n}{2}-n$)

Θεωρούμε τώρα τυχόν ζευγάρι σημείων A, B "τύπου ένα" και έστω Γ το σημείο του S που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα AB**(*)**. Τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι "κενό".

Δηλαδή δεν υπάρχει άλλο σημείο του S στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ (για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπο απαγωγή).
Έστω ότι υπάρχει σημείο X του S στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχήμα 11). Τότε από την ανισότητα των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και ABX καταλήγουμε $d_X < d_\Gamma$, άτοπο διότι το σημείο Γ απέχει την ελάχιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα AB.



Σχήμα 10

Αποδείξαμε λοιπόν ότι σε κάθε ζευγάρι "τύπου ένα" αντιστοιχεί ένα τουλάχιστον "κενό" τρίγωνο.
Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε κάθε ζευγάρι "τύπου δύο" αντιστοιχούν δύο τουλάχιστον "κενά" τρίγωνα.
Σε κάθε περίπτωση όμως, κάθε "κενό" τρίγωνο έχει προσμετρηθεί **το πολύ τρεις φορές**.
Συγκεντρώνοντας τους συμβολισμούς και τις σχέσεις που αποδείξαμε προηγουμένως, έχουμε:

s_1: πλήθος ζευγαριών "τύπου ένα"

Ισχύει: $s_1 \le n$

s_2: πλήθος ζευγαριών "τύπου δύο"

Ισχύει: $s_1 + s_2 = \binom{n}{2}$ και $s_2 \ge \binom{n}{2} - n$

Άρα για το πλήθος t των κενών τριγώνων θα ισχύει:

$$t \ge \frac{s_1 + 2s_2}{3} = \frac{s_1 + s_2 + s_2}{3} = \frac{\binom{n}{2} + s_2}{3} \ge \frac{2\binom{n}{2} - n}{3} = \frac{n(n-2)}{3}.$$

(*) Στη περίπτωση που υπάρχει και δεύτερο σημείο το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση, διαλέγουμε ένα, χωρις να υπάρχει πρόβλημα.

2.11 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

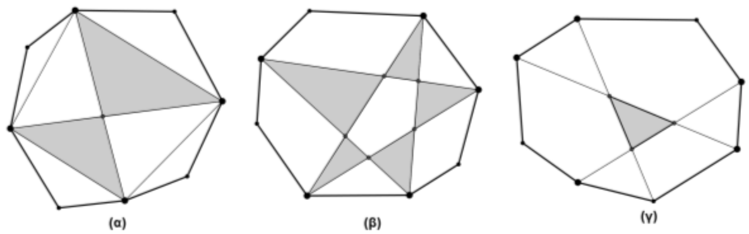
✦ **Σε κυρτό n-γωνο οι διαγώνιές του (ανά τρεις) δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί το πλήθος των τριγώνων που οι πλευρές τους βρίσκονται στις πλευρές ή στις διαγώνιες του πολυγώνου.**

Λύση

Το σύνολο των τριγώνων που δημιουργούνται το χωρίζουμε σε τέσσερεις κλάσεις S_0, S_1, S_2, S_3.
Η κλάση S_3 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων και οι τρεις κορυφές τους είναι κορυφές του πολυγώνου.

Προφανώς $|S_3| = \binom{n}{3}$.

Η κλάση S_2 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων οι δύο κορυφές τους είναι κορυφές του πολυγώνου.
Παρατηρούμε ότι για τέσσερα οποιαδήποτε σημεία του πολυγώνου (Σχήμα 12(α)) δημιουργούνται τέσσερα ακριβώς τρίγωνα της κλάσης S_2. Άρα $|S_2| = 4 \cdot \binom{n}{4}$.



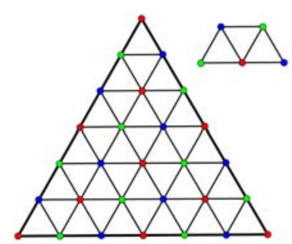
Σχήμα 11

Η κλάση S_1 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων μία μόνο κορυφή τους είναι κορυφή και του πολυγώνου.
Παρατηρούμε ότι για πέντε οποιαδήποτε σημεία του πολυγώνου (Σχήμα 12(β)) δημιουργούνται πέντε ακριβώς τρίγωνα της κλάσης S_1. Άρα $|S_1| = 5 \cdot \binom{n}{5}$.

Η κλάση τέλος S_0 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές τους δεν είναι κορυφές του πολυγώνου.
Παρατηρούμε ότι για έξι οποιαδήποτε σημεία του πολυγώνου (Σχήμα 12(γ)) δημιουργείται ένα ακριβώς τρίγωνο της κλάσης S_0. Άρα $|S_0| = \binom{n}{6}$.

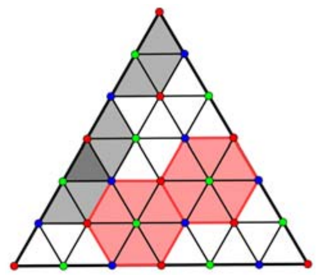
Το συνολικό πλήθος των τριγώνων δίνεται από το άθροισμα $|S_0| + |S_1| + |S_2| + |S_3|$.

2.12 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

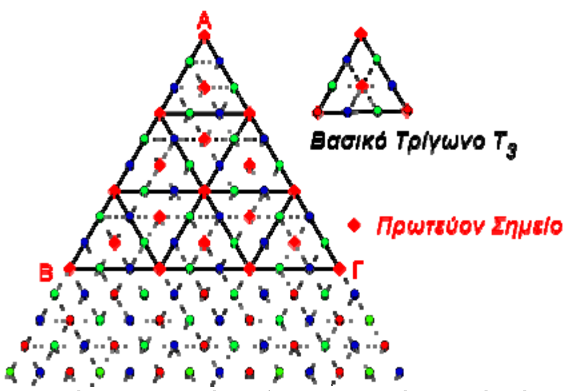


✦ **Έστω n ακέραιος με $n = 3k$ και (k ακέραιος με $k \geq 2$). Ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά ισόπλευρα τρίγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 6$ ($k = 2$) καθώς και ένα "πλακίδιο" (τραπέζιο) που δημιουργείται από τρία μικρά ισόπλευρα τρίγωνα. Χρωματίζουμε τα σημεία του πλέγματος με τρία χρώματα (Κόκκινο, Μπλε και Πράσινο), με τέτοιο τρόπο ώστε δύο γειτονικά σημεία να έχουν διαφορετικό χρώμα. Τέλος, ένα "πλακίδιο" θα το λέμε: "Κόκκινο, Μπλε ή Πράσινο", όταν το μέσο της μεγάλης βάσης του, έχει "Κόκκινο, Μπλε ή Πράσινο" χρώμα αντίστοιχα.**
Να βρεθεί το πλήθος όλων των "πλακιδίων" που δημιουργούνται, καθώς και πόσα από αυτά είναι "Κόκκινα, Μπλε, Πράσινα". Μέρος ενός πλακιδίου μπορεί να καλύπτεται από άλλο δημιουργούμενο πλακίδιο.

<u>Λύση</u>



Το μέσο της μεγάλης βάσης του πλακιδίου θα το ονομάζουμε (για συντομία) "κέντρο" του πλακιδίου.
Κάθε σημείο που βρίσκεται στις πλευρές του τριγώνου (εκτός από τις κορυφές του) είναι το κέντρο ενός και μόνο πλακιδίου. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $n-1$ σημεία που μπορούν να είναι κέντρα πλακιδίων. Έτσι υπάρχουν $3(n-1)$ πλακίδια που τα κέντρα τους βρίσκονται στις πλευρές του τριγώνου (στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη περίπτωση για $n=6$).
Κάθε άλλο σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου είναι το κέντρο έξι πλακιδίων. Στο εσωτερικό του τριγώνου υπάρχουν $1+2+3+\cdots+(n-2)=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ σημεία. Άρα υπάρχουν $6\cdot\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}=3(n-1)(n-2)$ πλακίδια.
Προσθέτοντας βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά $3(n-1)^2$ πλακίδια.
Για να υπολογίσουμε τώρα το πλήθος των κόκκινων-μπλε-πράσινων πλακιδίων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των κόκκινων-μπλε-πράσινων σημείων που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του μεγάλου τριγώνου.
Το χρώμα με το οποίο ξεκινάμε και χρωματίζουμε την κορυφή A του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου, το ονομάζουμε "πρωτεύον χρώμα" και τα άλλα δύο "δευτερεύοντα χρώματα".
Αν υποθέσουμε ότι $n=3\,(k=1)$, τότε δημιουργείτε ένα "βασικό ισόπλευρο τρίγωνο" , το οποίο συμβολίζουμε με T_3.
Αν χρωματίσουμε με το πρωτεύον χρώμα μία κορυφή του τριγώνου T_3, τότε και οι δύο άλλες κορυφές του (καθώς και το περίκεντρό του) θα έχουν το ίδιο χρώμα.
Κάθε μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο αποτελείται από $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$ βασικά ισόπλευρα τρίγωνα T_3 των οποίων οι κορυφές και τα περίκεντρα έχουν το "πρωτεύον χρώμα".



Από τον τρόπο χρωματισμού των σημείων (τα γειτονικά σημεία έχουν διαφορετικό χρώμα) προκύπτει ότι τα σημεία B και Γ έχουν το "πρωτεύον χρώμα".
Σε κάθε πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$, υπάρχουν $k-1$ σημεία που έχουν το "πρωτεύον χρώμα" και $2k$ σημεία που έχουν τα "δευτερεύοντα χρώματα".
Άρα δημιουργούνται $3(k-1)$ κόκκινα πλακίδια (αν βέβαια το "πρωτεύον χρώμα" είναι το κόκκινο).
Το πλήθος των μπλε σημείων ισούται με το πλήθος των πράσινων σημείων, οπότε δημιουργούνται $3k$ μπλε και $3k$ πράσινα πλακίδια.

Στο εσωτερικό του τριγώνου υπάρχουν k^2 σημεία που είναι τα περίκεντρα των βασικών τριγώνων T_3 και κατά συνέπεια έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.

Υπάρχουν επίσης $1+2+\cdots+(k-2)=\dfrac{(k-2)(k-1)}{2}$ που δεν είναι τα περίκεντρα βασικών τριγώνων, αλλά έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.

Άρα έχουμε τελικά: $6k^2+6\dfrac{(k-2)(k-1)}{2}+3(k-1)=3(3k^2-2k+1)$ κόκκινα πλακίδια.

Στο εσωτερικό του τριγώνου, υπάρχουν συνολικά $1+2+\cdots+(3k-2)=\dfrac{(3k-2)(3k-1)}{2}$ σημεία.

Αν από αυτά αφαιρέσουμε τα $k^2+\dfrac{(k-2)(k-1)}{2}=\dfrac{3k^2-3k+2}{2}$ που έχουν το “πρωτεύον χρώμα”, μένουν $3k(k-1)$ σημεία που έχουν τα “δευτερεύοντα χρώματα”.

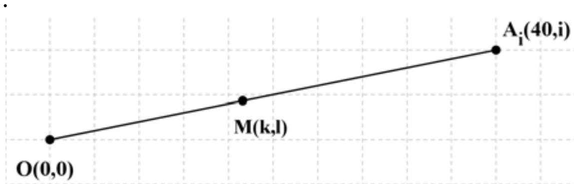
Έτσι θα έχουμε $\dfrac{3k(k-1)}{2}$ μπλε και $\dfrac{3k(k-1)}{2}$ πράσινα σημεία στο εσωτερικό του τριγώνου.

Τελικά έχουμε: $3(3k^2-2k+1)$ κόκκινα πλακίδια, $3k(3k-2)$ μπλε και $3k(3k-2)$ πράσινα πλακίδια.
Μπορούμε να θεωρήσουμε ως “πρωτεύον χρώμα” το μπλε ή το πράσινο, οπότε προκύπτουν ανάλογες απαντήσεις.

2.13 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1), A_2(40,2),\ldots,A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1, OA_2,\ldots,OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε “καλό” όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλ. δεν ταυτίζεται με τα άκρα) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Ένα από τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα, θα το ονομάζουμε επίσης “καλό”, όταν περιέχει ένα τουλάχιστον “καλό” σημείο.**
Να υπολογισθεί το πλήθος των “καλών” σημείων και το πλήθος των “καλών” ευθυγράμμων τμημάτων.

__Λύση__
Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $ΜΚΔ(k,l)$, το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l.



Ένα σημείο $M(k,l)$ θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος OA_i, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OA_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$).

Δηλαδή πρέπει να ισχύει $\dfrac{i}{40}=\dfrac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα OA_i "καλό", θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του "καλού" σημείου $M(k,l)$).

Για να υπάρχει λοιπόν "καλό" σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως "καλό") θα πρέπει $ΜΚΔ(40,i)>1$.

Αν τώρα $ΜΚΔ(40,i)>1$, τότε θα υπάρχουν $ΜΚΔ(40,i)-1$ "καλά" σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i.

Στο σημείο $A_2(40,2)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα OA_2, στο οποίο ανήκει το "καλό" σημείο $(20,1)$.

Στο σημείο $A_4(40,4)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα OA_4, στο οποίο ανήκουν τα "καλά" σημεία $(10,1)$ $(20,2)$ $(30,3)$.

Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

$A_2(40,2)$	**ΜΚΔ(40,2)=2**	**1**	**$A_{40}(40,40)$**	**ΜΚΔ(40,40)=40**	**39**
$A_4(40,4)$	**ΜΚΔ(40,4)=4**	**3**	**$A_{38}(40,38)$**	**ΜΚΔ(40,38)=2**	**1**
$A_5(40,5)$	**ΜΚΔ(40,5)=5**	**4**	**$A_{36}(40,36)$**	**ΜΚΔ(40,36)=4**	**3**
$A_6(40,6)$	**ΜΚΔ(40,6)=2**	**1**	**$A_{35}(40,35)$**	**ΜΚΔ(40,35)=5**	**4**
$A_8(40,8)$	**ΜΚΔ(40,8)=8**	**7**	**$A_{34}(40,34)$**	**ΜΚΔ(40,34)=2**	**1**
$A_{10}(40,10)$	**ΜΚΔ(40,10)=10**	**9**	**$A_{32}(40,32)$**	**ΜΚΔ(40,32)=8**	**7**
$A_{12}(40,12)$	**ΜΚΔ(40,12)=4**	**3**	**$A_{30}(40,30)$**	**ΜΚΔ(40,30)=10**	**9**
$A_{14}(40,14)$	**ΜΚΔ(40,14)=2**	**1**	**$A_{28}(40,28)$**	**ΜΚΔ(40,28)=4**	**3**
$A_{15}(40,15)$	**ΜΚΔ(40,15)=5**	**4**	**$A_{26}(40,26)$**	**ΜΚΔ(40,26)=2**	**1**
$A_{16}(40,16)$	**ΜΚΔ(40,16)=8**	**7**	**$A_{25}(40,25)$**	**ΜΚΔ(40,25)=5**	**4**
$A_{18}(40,18)$	**ΜΚΔ(40,18)=2**	**1**	**$A_{24}(40,24)$**	**ΜΚΔ(40,24)=8**	**7**
$A_{20}(40,20)$	**ΜΚΔ(40,20)=20**	**19**	**$A_{22}(40,22)$**	**ΜΚΔ(40,22)=2**	**1**
		60			**80**

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των "καλών" τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.
2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη: $ΜΚΔ(k,l)=ΜΚΔ(l,k)=ΜΚΔ(l-k,k)=ΜΚΔ(|l-k|,|k|)$.

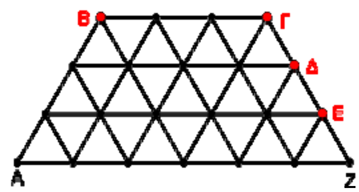
3. Το πλήθος των "καλών" χωρίων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης φ του EULER. Είναι γνωστό ότι $n-\varphi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν.

   Επειδή όμως $40 = 5 \cdot 2^3$, έχουμε: $\varphi(40) = 40\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right) = 40\frac{1}{2}\frac{4}{5} = 16$.

   Άρα το πλήθος των "καλών" τμημάτων είναι $40-\varphi(40) = 24$.

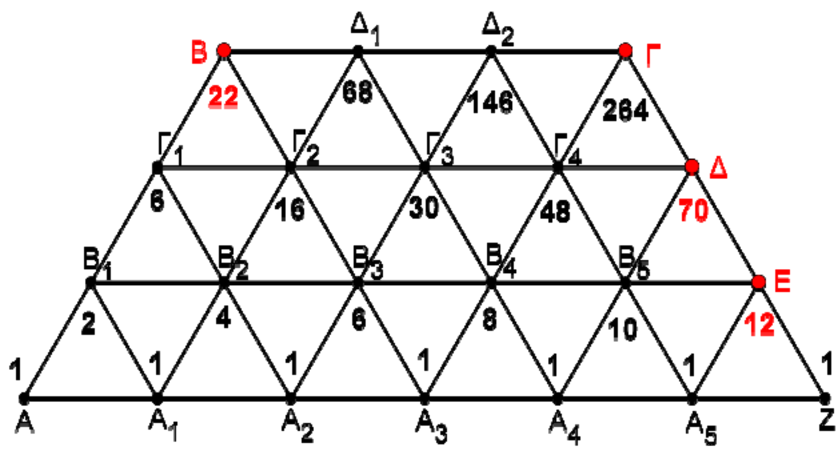
2.14 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Το ισοσκελές τραπέζιο που αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) είναι το σχεδιάγραμμα μιας πόλης. Όλα τα ευθύγραμμα τμήματα είναι δρόμοι. Οι επισκέπτες της πόλης ξεκινούν από το σημείο A και μπορούν να κινούνται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένας επισκέπτης (ξεκινώντας από το σημείο A) για να φτάσει στα σημεία B, Γ, Δ, E που βρίσκονται τα αξιοθέατα της πόλης.**



<u>Λύση</u>

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας επισκέπτης μπορεί να προσεγγίσει τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα).



Πχ: Με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας επισκέπτης μπορεί να προσεγγίσει το σημείο (διασταύρωση) B_1.

Προφανώς $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = z = 1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι ο επισκέπτης μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

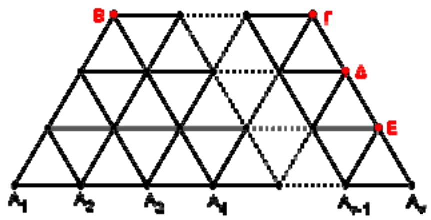
Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά).

Έτσι έχουμε: $\beta_1 = \alpha + \alpha_1 = 2$, $\beta_2 = \beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 4$ …..

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης που φαίνονται παραστατικότερα στο σχήμα.

2.15 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Το ισοσκελές τραπέζιο (που φαίνεται στο διπλανό σχήμα) αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1B έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του A_1A_ν έχει μήκος $\nu-1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά). Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία B,Γ,Δ,E. Όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.**



Λύση

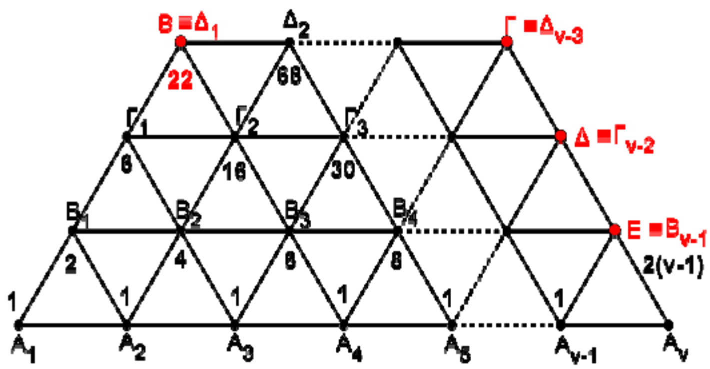
Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $A_1,A_2,A_3,\dots,A_\nu$.

Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $B_1,B_2,B_3,\dots,B_{\nu-1}\equiv E$.

Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\dots,\Gamma_{\nu-2}\equiv\Delta$.

Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $B\equiv\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\dots,\Delta_{\nu-3}\equiv\Gamma$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα).



Πχ: Με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο B_1.

Προφανώς $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\dots=\alpha_\nu=1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων, γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά). Έτσι έχουμε:

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$

$\beta_2=\beta_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+a_2+\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_3)$

$\beta_3=\beta_2+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_1+2a_2+\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_1+2(a_2+\alpha_3)+\alpha_4=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_1+\alpha_4)$

Άρα $\beta_k=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_{k+1})-(\alpha_1+\alpha_{k+1})=2(k+1)-2=2k \qquad k=1,2,3,\dots,(\nu-1)$.

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_{i+1})-(\beta_1+\beta_{i+1}) = \\
&= 2(2+4+\cdots+2(i+1))-(2+2i+2) = \\
&= 4(1+2+\cdots+(i+1))-(4+2i) = \\
&= 2(i+1)(i+2)-2(i+2) = \\
&= 2i(i+2) \qquad i=1,2,3,\ldots,(\nu-2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_m &= 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_{m+1})-(\gamma_1+\gamma_{m+1}) = \\
&= 4\underbrace{(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3))}_{S}-2(1\cdot 3+(m+1)(m+3)) = \\
&= 4\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}-2(1\cdot 3+(m+1)(m+3)) = \\
&\qquad (\ldots\text{και μετά από πράξεις, καταλήγουμε }\ldots) \\
&= \frac{2}{3}m(2m^2+12m+19) \qquad m=1,2,3,\ldots,(\nu-3).
\end{aligned}$$

Τελικά έχουμε: $\beta=22$, $\gamma=\frac{2}{3}(\nu-3)(2\nu^2+1)$, $\delta=2\nu(\nu-2)$ και $\varepsilon=2(\nu-1)$.

<u>**Υπολογισμός του αθροίσματος**</u>: $S=1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2)=x^2+2x$ για $x=1, x=2,\ldots,x=m$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}
1\cdot 3 &= 1^2+2\cdot 1 \\
2\cdot 4 &= 2^2+2\cdot 2 \\
3\cdot 5 &= 3^2+2\cdot 3 \\
&\vdots \\
m(m+2) &= m^2+2m
\end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+2\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S=\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.

3 ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με δύο χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα που απέχουν απόσταση *1*.**

Λύση

Έστω ότι χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου κόκκινα (*Κ*) και πράσινα (*Π*). Στη συνέχεια θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο *ΑΒΓ* με μήκος πλευράς *1*. Οι κορυφές του τριγώνου είναι σημεία που απέχουν ανά δύο απόσταση *1*.

Όλοι οι δυνατοί τρόποι χρωματισμού των κορυφών του τριγώνου είναι: ΚΚΚ, ΚΚΠ, ΚΠΠ, ΠΠΠ.

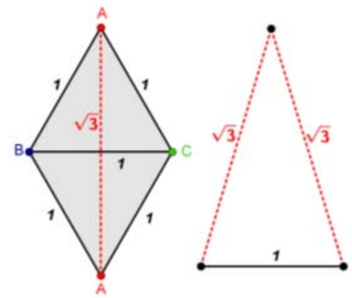
Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα.

1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με τρία χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα που απέχουν απόσταση *1*.**

Λύση

Υποθέτουμε (με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου που απέχουν απόσταση *1* και έχουν το ίδιο χρώμα.



Θεωρούμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς *1* (με κοινή πλευρά) που δημιουργούν ρόμβο πλευράς *1*. Η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι *1* και η άλλη $\sqrt{3}$.

Από τον τρόπο χρωματισμού (που υποθέσαμε ότι ισχύει), προκύπτει ότι όλα τα σημεία που απέχουν απόσταση $\sqrt{3}$, έχουν το ίδιο χρώμα.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι δύο ίσες πλευρές έχουν μήκος $\sqrt{3}$ και η βάση του έχει μήκος 1, τότε όλες του οι κορυφές θα έχουν το ίδιο χρώμα. Δηλαδή υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία (τα άκρα της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου) που απέχουν απόσταση *1* και έχουν το ίδιο χρώμα (άτοπο).

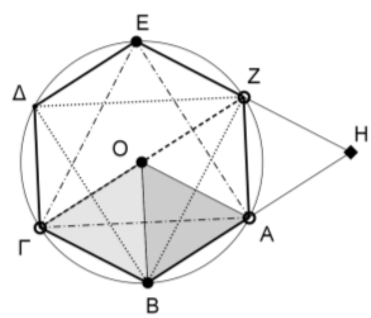
1.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με δύο χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα.**

Λύση

1ος Τρόπος

Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άσπρα ή μαύρα.



Υποθέτουμε (με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι δεν υπάρχουν ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα. Τότε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο του επιπέδου θα έχει δύο κορυφές με διαφορετικό χρώμα.

Θεωρούμε κανονικό εξάγωνο *ΑΒΓΔΕΖ* με κέντρο *Ο* το οποίο θεωρούμε ότι έχει μαύρο χρώμα.

Μία από τις κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου *ΒΔΖ* (έστω η *Β*) πρέπει να είναι μαύρη.

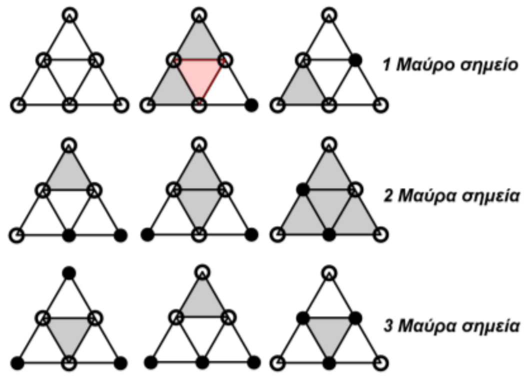
Από τα ισόπλευρα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ συμπεραίνουμε (με βαση την υπόθεση που έχουμε κάνει) ότι τα σημεία *Α,Γ* δεν μπορεί να είναι μαύρα (άρα θα είναι άσπρα).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο *ΑΓΕ* (εφόσον *Α,Γ* άσπρα), συμπεραίνουμε ότι το σημείο *Ε* θα είναι μαύρο. Προεκτείνουμε τώρα τις πλευρές *ΑΒ, ΕΖ* και έστω *Η* το σημείο τομής τους.

Τότε ότι χρώμα και να έχει το σημείο *Η*, ένα από τα ισόπλευρα τρίγωνα *ΗΑΖ* και *ΗΕΒ* θα έχει και τις τρείς κορυφές του με ίδιο χρώμα (άτοπο).

2^{ος} Τρόπος

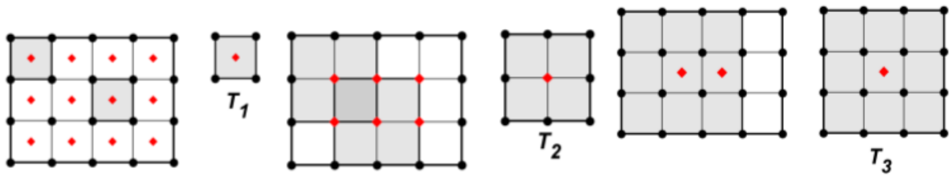
Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άσπρα ή μαύρα.
Οι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, μαζί με τα μέσα των πλευρών του, ορίζουν τέσσερα επί πλέον ισόπλευρα τρίγωνα που το μήκος της πλευράς τους είναι το μισό του μήκους της πλευράς του αρχικού ισόπλευρου τριγώνου.
Οι μισοί τρόποι χρωματισμού των έξι σημείων παρουσιάζονται στο σχήμα. Οι υπόλοιποι τρόποι προκύπτουν από την αντικατάσταση των μαύρων σημείων σε άσπρα και αντίστροφα.



Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι και τα έξι σημεία είναι άσπρα.
Τότε υπάρχουν πέντε ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).
Αν αλλάξουμε το χρώμα σε ένα σημείο, τότε δημιουργούνται (Σχήμα) ένα ή δύο ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).
Αν αλλάξουμε το χρώμα σε δύο σημεία, τότε δημιουργούνται (Σχήμα) ένα ή τρία ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).
Αν αλλάξουμε το χρώμα σε τρία σημεία, τότε δημιουργείται (Σχήμα) ένα ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο) ή ένα ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (μαύρο).
Όλες οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στα προηγούμενα (εναλλάσοντας του ρόλους των μαύρων με τα άσπρα σημεία και αντίστροφα).

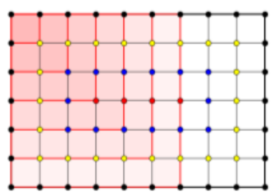
1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $3x4$, το χωρίζουμε με παράλληλες (προς τις πλευρές του) ευθείες σε 12 στοιχειώδη τετράγωνα πλευράς 1. Πόσα συνολικά τετράγωνα δημιουργούνται μετά από αυτό το χωρισμό;**
(θεωρούμε τα τεράγωνα που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού παραλληλογράμμου και οι κορυφές τους είναι σημεία του πλέγματος)
Λύση
Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος, μπορούν να δημιουργηθούν τετράγωνα διαστάσεων $1x1$, $2x2$ και $3x3$, που θα τα συμβολίζουμε με T_1, T_2 και T_3 αντίστοιχα.



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι $3 \cdot 4 = 12$ (μετρήστε τα κέντρα των τεραγώνων).
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $2 \cdot 3 = 6$ (μετρήστε τα κέντρα των τεραγώνων).
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $2 \cdot 1 = 2$ (μετρήστε τα κέντρα των τεραγώνων).
Άρα το συνολικό πλήθος των τετραγώνων είναι $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 20$.

Παρατήρηση
1. Με ανάλογο τρόπο, αποδείξτε ότι το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται στο παρακάτω $6x9$ πλέγμα, είναι: $6 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 154$.



2. Γενικώτερα αν έχουμε ένα $n \times k$ (με $n > k \geq 1$) πλέγμα, τότε το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται είναι:

$$k \cdot n + (k-1) \cdot (n-1) + (k-2) \cdot (n-2) + \cdots + 2 \cdot (n-k+2) + 1 \cdot (n-k+1)$$

ή

$$1 \cdot (n-k+(1)) + 2 \cdot (n-k+(2)) + \cdots + (k-1) \cdot (n-k+(k-1)) + k \cdot (n-k+(k)) =$$
$$= \frac{k(k+1)(3n-k+1)}{6}.$$

3. Για $n = k$, ο προηγούμενος τύπος γίνεται $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και εκφράζει το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται στο $n \times n$ τετράγωνο.

1.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

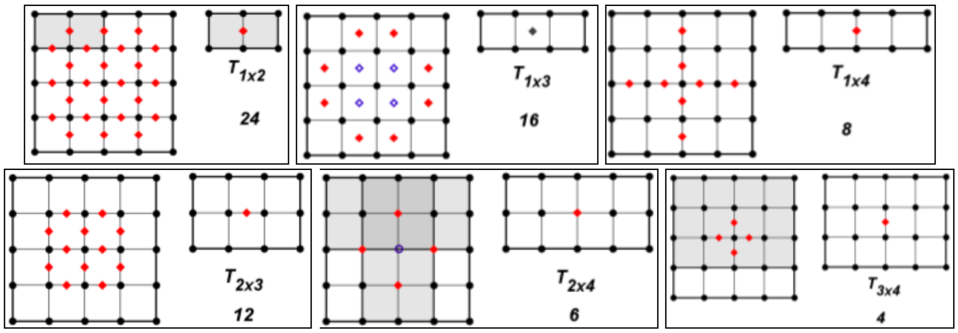
✦ **Τετράγωνο πλευράς μήκους 4, το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 16 τετράγωνα πλευράς μήκους 1 . Πόσα συνολικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου), ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;**

Λύση

Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος, μπορούν να δημιουργηθούν ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων 1×2, 1×3, 1×4, 2×3, 2×4 και 3×4 που θα τα συμβολίζουμε με $T_{1\times 2}$, $T_{1\times 3}$, $T_{1\times 4}$, $T_{2\times 3}$, $T_{2\times 4}$ και $T_{3\times 4}$ αντίστοιχα.

1ος Τρόπος

Ονομάζουμε κέντρο κάθε ορθογωνίου, το σημείο τομής των διαγωνίων του.



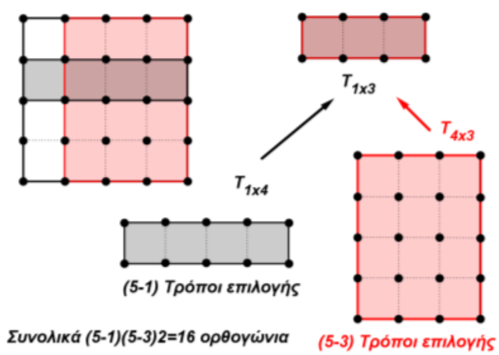
Η καταμέτρηση των ορθογωνίων προκύπτει από τη καταμέτρηση των σημείων που είναι κέντρα των ορθογωνίων.

Για τη καταμέτρηση των ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 3}$ και $T_{2\times 4}$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία που είναι κέντρα δύο ορθογωνίων του αντίστοιχου τύπου.

Προσθέτοντας το πλήθος των ορθογωνίων που δημιουργούνται σε κάθε περίπτωση, βρίσκουμε ότι το πλήθος ορθογωνίων είναι: $24+16+8+12+6+4=70$.

2ος Τρόπος

Έστω k,m ακέραιοι με $1\le k<m\le 4$. Κάθε ορθογώνιο τύπου $T_{k\times m}$ δημιουργείται από τη “τομή” των ορθογωνίων $T_{k\times 4}$ και $T_{4\times m}$.



Για παράδειγμα, το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 3}$ δημιουργείται από τη “τομή” των ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 4}$ και $T_{4\times 3}$. Το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 4}$ μπορεί να επιλεγεί με *(5-1)=4* τρόπους. Ταυτόχρονα το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 4}$ μπορεί να επιλεγεί *(5-3)=2* τρόπους. Άρα το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 3}$ δημιουργείται με $2\cdot 4=8$ τρόπους. Επειδή όμως το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 4}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε και “κατακόρυφα” (ταυτόχρονα το ορθογώνιο τύπου $T_{4\times 3}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε και “οριζόντια”), το τελικό πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 3}$ διπλασιάζεται.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε το πλήθος όλων των τύπων ορθογωνίων.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 2}$: $(5-1)\cdot(5-2)\cdot 2=4\cdot 3\cdot 2=24$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 3}$: $(5-1)\cdot(5-3)\cdot 2 = 4\cdot 2\cdot 2 = 16$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 4}$: $(5-1)\cdot(5-4)\cdot 2 = 4\cdot 1\cdot 2 = 8$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{2\times 3}$: $(5-2)\cdot(5-3)\cdot 2 = 3\cdot 2\cdot 2 = 12$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{2\times 4}$: $(5-2)\cdot(5-4)\cdot 2 = 3\cdot 1\cdot 2 = 6$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{3\times 4}$: $(5-3)\cdot(5-4)\cdot 2 = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$.
Προσθέτοντας το πλήθος των ορθογωνίων που δημιουργούνται, βρίσκουμε ότι το πλήθος ορθογωνίων είναι: $24+16+8+12+6+4=70$.

3ος Τρόπος

Θεωρούμε δύο απέναντι πλευρές του αρχικού τετραγώνου. Σην μία πλευρά υπάρχουν 5 σημεία τα οποία ορίζουν $\binom{5}{2}$ ευθύγραμμα τμήματα. Τα τμήματα αυτά, μαζί με τα ανάλογα τμήματα που βρίσκονται στην απέναντι πλευρά, ορίζουν $\binom{5}{2}$ ορθογώνια. Τα ίδια ακριβώς και ταυτόχρονα συμβαίνουν στο άλλο ζεγάρι απέναντι πλευρών. Έτσι δημιουργούνται $\binom{5}{2}^2 = 100$ "τομές", που είναι τα ζητούμενα ορθογώνια. Οι δημιουργούμενες "τομές" όμως μπορεί να είναι και τετράγωνα. Για να βρούμε λοιπόν το πλήθος των ορθογωνίων, θα πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος των τετραγώνων, που είναι $\dfrac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 9}{6} = 30$.

Παρατηρήσεις

1. Σε τετράγωνο $n\times n$ ορίζονται $(n-k+1)(n-m+1)\cdot 2$ ορθογώνια τύπου $T_{k\times m}$. Όπου k,m,n είναι ακέραιοι με $1\le k<m\le n$.
2. Σε τετράγωνο $n\times n$ ορίζονται $\binom{n+1}{2}^2 - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ορθογώνια.