Θεωρία Αριθμών IV

Διαιρετότητα

Βαγγέλης Ψύχας

Κριτήρια Διαιρετότητας

✧ Όλα τα παρακάτω κριτήρια διαιρετότητας, αναφέρονται στην δεκαδική αναπαράσταση των ακεραίων αριθμών.

✧ Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 2**, όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι **0** ή **2** ή **4** ή **6** ή **8**.

✧ Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 3**, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το τρία.

✧ Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 9**, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το εννέα.

Κριτήρια Διαιρετότητας

- Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 4**, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το τέσσερα.
- Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 5**, όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι μηδέν ή πέντε.
- Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 10**, το όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι μηδέν.
- Ένας ακέραιος, **διαιρείται με το 8**, όταν το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του διαιρείται με το οκτώ.

✧ Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος ακέραιος, τότε η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του τέσσερα.

✧ Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος ακέραιος, τότε ή και οι δύο θα είναι άρτιοι ή και οι δύο θα είναι περιττοί, οπότε και το άθροισμά τους θα είναι άρτιος.

Έστω τώρα ότι η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος.

Τότε $n - k = 2m$ και $n + k = 2l$.

$(n - k) \cdot (n + k) = 4ml \Rightarrow n^2 - k^2 = 4r$.

◊ Αν $m|n$ και $m > 1$, τότε $m \nmid (n+1)$.

◊ Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ο m διαιρεί το $(n+1)$. Τότε (επειδή ο m διαιρεί και το n) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο m θα διαιρεί και τη διαφορά τους. Δηλαδή $m|1$ (άτοπο).

◊ Κάθε ακέραιος αριθμός m της μορφής $m = \overline{xyyx}$, διαιρείται με το 11.

◊ $$m = \overline{xyyx} = x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + x =$$
$$= x \cdot \left(10^3 + 1\right) + 10 \cdot y \cdot (10 + 1) =$$
$$= x \cdot (10 + 1) \cdot \left(10^2 - 10 + 1\right) + 10 \cdot y \cdot (10 + 1) =$$
$$= x \cdot 11 \cdot \left(10^2 - 10 + 1\right) + 10 \cdot y \cdot 11 =$$
$$= 11\left(x \cdot \left(10^2 - 10 + 1\right) + 10 \cdot y\right).$$

◊ Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους αριθμούς $\mathbf{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ ισχύει:
$$\mathbf{2} \mid (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}).$$

◊ Οι ακέραιοι $\mathbf{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ μπορεί (με τη σειρά που δίνονται), να είναι:
ΑΑΑ, ΑΑΠ, ΑΠΑ, ΠΑΑ, ΑΠΠ, ΠΑΠ, ΠΠΑ, ΠΠΠ
(όπου: Α=άρτιος, Π=περιττός).
Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχουν ή δύο περιττοί ή δύο άρτιοι αριθμοί, οπότε η διαφορά τους θα διαιρείται με το 2.

✧ Να αποδείξετε ότι : $3|(n^3 + 2n)$.

1ος Τρόπος

✧ Θα αποδείξουμε ότι το $n^3 + 2n$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε θετικό ακέραιο n. Δηλαδή ότι: $n^3 + 2n = 3m \quad (1)$.

Η (1) ισχύει προφανώς για $n = 1$ (διότι $1^3 + 2 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1$).

Έστω ότι (1) ισχύει για $n = k$ (δηλαδή ότι $k^3 + 2k = 3m \quad (2)$).

Θα αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για $n = k + 1$
(δηλαδή ότι: $(k+1)^3 + 2(k+1) = 3m$).

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 =$$
$$= \Big(\underbrace{k^3 + 2k}_{(2)}\Big) + 3k^2 + 3k + 3 = 3m + 3\left(k^2 + k + 1\right) =$$
$$= 3\left(m + k^2 + k + 1\right) = 3l.$$

✧ Να αποδείξετε ότι : $3|(n^3 + 2n)$.

2ος Τρόπος

✧ Θα αποδείξουμε ότι το $n^3 + 2n$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε θετικό ακέραιο n. Δηλαδή ότι: $n^3 + 2n = 3m$.

✧ Αν $n = 3k$, τότε $n^3 + 2n = (3k)^3 + 2(3k) = 3\underbrace{\left(9k^3 + 2k\right)}_{m} = 3m$

✧ Αν $n = 3k + 1$, τότε $n^3 + 2n = (3k + 1)^3 + 2(3k + 1) =$

$= (3k)^3 + 3(3k)^2 + 3(3k) + 1 + 2(3k) + 2 =$

$= 3\underbrace{\left(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1\right)}_{m} = 3m$

✧ Αν $n = 3k + 2$, τότε $n^3 + 2n = (3k + 2)^3 + 2(3k + 2) =$

$= (3k)^3 + 3(3k)^2 2 + 3(3k)2^2 + 2^3 + 2(3k) + 4 =$

$= 3\underbrace{\left(9k^3 + 18k^2 + 12k + 4\right)}_{m} = 3m$

✧ Να αποδείξετε ότι : $3|(n^3+2n)$.

3ος Τρόπος

✧ Θα αποδείξουμε ότι το n^3+2n είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε θετικό ακέραιο n. Δηλαδή ότι: $n^3+2n=3m$.

$$n^3+2n=n^3-n+3n=n\left(n^2-1\right)+3n=$$
$$=\underbrace{n(n-1)(n+1)}_{3k}+3n=3k+3n=3(k+n)=3m$$

$$n^3+2n=n\left(n^2+2\right)=n\left(n^2-1+3\right)=$$
$$=n\left(n^2-1\right)+3n=n(n-1)(n+1)+3n=$$
$$=\underbrace{(n-1)n(n+1)}_{3m}+3\mathrm{n}=3(\mathrm{m}+\mathrm{n}).$$

✧ Να αποδείξετε ότι : $5|(3\cdot 27^n + 2\cdot 2^n)$.

1ος Τρόπος

✧ Θα αποδείξουμε ότι το $3\cdot 27^n + 2\cdot 2^n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε θετικό ακέραιο n. Δηλαδή ότι:

$$3\cdot 27^n + 2\cdot 2^n = 5m.$$

✧ $3\cdot 27^n + 2\cdot 2^n = 5\cdot 27^n - 2\cdot 27^n + 2\cdot 2^n =$

$$= 5\cdot 27^n + 2(2^n - 27^n) = 5\cdot 27^n + 2(2-27)\left(2^{n-1} + \cdots + 27^{n-1}\right) =$$

$$= 5\left(27^n - 10\left(2^{n-1} + \cdots + 27^{n-1}\right)\right) = 5m.$$

✧ Να αποδείξετε ότι : $5|(3 \cdot 27^n + 2 \cdot 2^n)$.

2ος Τρόπος

✧ Θα αποδείξουμε ότι το $3 \cdot 27^n + 2 \cdot 2^n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε θετικό ακέραιο n. Δηλαδή ότι:

$$3 \cdot 27^n + 2 \cdot 2^n = 5m \quad (1).$$

Η (1) ισχύει προφανώς για $n = 1$

(διότι $3 \cdot 27^1 + 2 \cdot 2^1 = 85 = 5 \cdot 17$).

Έστω ότι (1) ισχύει για $n = k$

(δηλαδή ότι: $3 \cdot 27^k + 2 \cdot 2^k = 5l \quad (2)$).

Θα αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για $n = k + 1$

(δηλαδή ότι: $3 \cdot 27^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+1} = 5m$).

Έστω ότι (1) ισχύει για $n = k$
(δηλαδή ότι: $3 \cdot 27^k + 2 \cdot 2^k = 5l$ (2)).

Θα αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για $n = k + 1$
(δηλαδή ότι: $3 \cdot 27^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+1} = 5m$).

$$3 \cdot 27^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 27^k \cdot 27 + 2 \cdot 2 \cdot 2^k =$$
$$= 3 \cdot 27^k \cdot 25 + 3 \cdot 27^k \cdot 2 + 2 \cdot 2^k \cdot 2 =$$
$$= 3 \cdot 27^k \cdot 25 + 2 \cdot \left(\underbrace{3 \cdot 27^k + 2 \cdot 2^k}_{5l}\right) = 5m$$

✧ Να αποδείξετε ότι : $14|(3^{4n+2}+5^{2n+1})$.

✧ Θα αποδείξουμε ότι το $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 14 για κάθε θετικό ακέραιο n. Δηλαδή ότι:

$$3^{4n+2}+5^{2n+1}=14m.$$

✧ $3^{4n+2}+5^{2n+1}=9^{2n+1}+5^{2n+1}=$

$$=(9+5)\cdot\left(9^{2n}-9^{2n-1}\cdot 5+\cdots-9\cdot 5^{2n-1}+5^{2n}\right)=14m.$$

✧ Έστω $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \neq n$. Αν $(m-n)|(ma+nb)$ να αποδείξετε ότι : $(m-n)|(na+mb)$.

✧ Προφανώς ισχύει: $(m-n)|\big((m-n)(a-b)\big)$.
Άρα $(m-n)|(ma-mb-na+nb)$ και επειδή $(m-n)|(ma+nb)$, συμπεραίνουμε ότι: $(m-n)|\big((ma+nb)-(ma-mb-na+nb)\big)$.
Δηλαδή: $(m-n)|(na+mb)$

◊ Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n το κλάσμα $\frac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο.

◊ Έστω d θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε :

$\mathrm{d}|(21n+4)$ και $\mathrm{d}|(14n+3)$

Τότε :

$\mathrm{d}|[3(14n+3)-2(21n+4)]$

άρα $\mathrm{d}|1$, οπότε $\mathrm{d}=1$, δηλαδή το κλάσμα $\frac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο για κάθε φυσικό αριθμό n .